BİREYSEL ÖĞRENME ETKİNLİKLERİ

MATEMATİK



9

ORTAÖĞRETİM
GENEL MÜDÜRLÜĞÜ

MEBİ

OGM
MATERYAL

MEBİ

BİREYSEL ÖĞRENME ETKİNLİKLERİ

9. SINIF

MATEMATİK

GENEL YAYIN YÖNETMENİ Cengiz METE

YAYIN KOORDİNATÖRÜ Ömer SARICA

EDİTÖR Prof. Dr. Abdülkadir ERDOĞAN, Doç. Dr. Abdullah ÖZKALE

HAZIRLAYANLAR Filiz ÇINARBAY, Zühre ŞAHBAZ, İmdat KURT, Melike ÖĞÜT, Meryem SONKAYA, Özge Duygu BAYKAL GEDİK, Fatma Zehra GÜNGÖR, Cumali SUNAR, Burak ÖZÇELİK, Yunus ÇETİN, Mikail DAĞLI, İsmail Gökhan BEKTAŞ, Damla KÜÇÜKTOKSÖZ, Şükrüye İPEK, Ayşen GÜRLER EŞSİZ, Murat DOĞAN, Ezgi ORAL, Seçil SEVİNÇ, Erkan SERT, Neşe DEMİRTAŞ ANAÇ, Fatih AKÇAKUYU, Dr. Sevilay ALKAN, Gizem AY, Erdinç SALIK, Dr. Ahmet Salih DOĞAN, Faruk BİLİCİ, Fatih ÇINAR, Emre ŞAHİN, Serdar ALTAN, Uğur ATEŞ, Özlem OKDEMİR, Abdullah KALAYCI

DİL UZMANI Şerife YAŞAR

DİZGİ ve GRAFİK TASARIM Çağlayan Volkan YILDIZ, Diğdem TÜKEL ÇOLAK, Behiye GÖK BOZKURT, Adem TOK, Tahir YAMAN, Habib ALPASLANOĞULLARI

ISBN 978-975-11-9739-9

YAYIM YILI Mayıs 2026

Bu yayın Milli Eğitim Bakanlığı Ortaöğretim Genel Müdürlüğü tarafından hazırlanmıştır. Gerçekleştirilen çalışmalara UNICEF Türkiye Temsilciliği katkıda bulunmuştur.

Milli Eğitim Bakanlığı
Atatürk Bulvarı No: 98 Bakanlıklar / ANKARA
Tel: +90 312 413 2680
+90 312 413 2681
+90 312 413 1838
www.meb.gov.tr

Birleşmiş Milletler Çocuklara Yardım Fonu
UNICEF
Turan Güneş Bulvarı No.106 Kat: 7 06550
Çankaya / ANKARA
Tel: +90 312 545 10 00
www.unicef.org.tr

Sevgili Öğrenciler,

Hayat her zaman düz bir çizgide ilerlemeyebilir. Kişisel öncelikleriniz, değişen yaşam koşullarınız veya ilgi alanlarınıza ayırdığınız özel zamanlar nedeniyle zaman zaman dersleri düzenli takip etmek zorlaşabilir; bu da öğrenmelerinizde geçici eksiklikler oluşturabilir. Bu durum doğaldır ve pek çok öğrencinin öğrenme sürecinde karşılaşabildiği bir deneyimdir. Böyle zamanlarda önemli olan, küçük ama düzenli adımlarla yeniden başlamak, eksiklerinizi fark edip planlı biçimde tamamlamak ve öğrenme yolculuğunuza devam etmektir.

Bu kitap; okulunuza düzenli olarak devam edemediğiniz, öğrendiğiniz bilgileri unuttuğunuz ya da sahip olduğunuz becerilerin zamanla zayıfladığı durumlarda öğrenmenizi sürdürebilmeniz için hazırlanmıştır. Kitap içerisinde yer alan bireysel öğrenme etkinlikleri, beklenmedik durumlar nedeniyle ya da bireysel gerekçelerle okula ara verseniz bile öğrenme sürecinizin devamlılığını desteklemek amacıyla tasarlanmıştır. Kartlardaki etkinlikler, 9. sınıfta yer alan öğrenme çıktıları dikkate alınarak oluşturulmuştur. Bu kartlar ile hem sürekli öğrenebilir hem de öğrenme sürecinizi zenginleştirebilirsiniz.

Bu kitapla

- düşünerek,
- deneyerek,
- hatalarınızın üzerine giderek

ilerleyebilirsiniz.

Kitapta yer alan etkinlikler, öğrenmelerinizi adım adım ilerletecek biçimde tasarlanmıştır. Burada önemli olan, doğru bilgiye ulaşmakla birlikte öğrenme sürecinizi fark etmeniz ve bu süreci yönetebilir hâle gelmenizdir.
Bireysel öğrenme etkinlikleri, okul dışında da öğrenme sürecinizi güvenle sürdürebilmeniz için size rehberlik eder.

Kitabınızı

- herhangi bir gerekçeden dolayı okula gidemediğiniz dönemlerde,
- yarıyıl tatili /yaz tatili sonrası konuları hatırlamak istediğinizde,
- okul değişikliği yaptığınızda,
- temel kabullerinizde eksikliğiniz olduğunda,
- bir konuyu yeniden çalışmak istediğinizde,
- bir konuyu pekiştirmek istediğinizde

kullanabilirsiniz.

Öğrenmek, bireysel bir yolculuktur. Bu yolculukta merak etmek, sormak, denemek ve bazen zorlanmak normaldir. Kitapların içindeki bireysel öğrenme etkinliklerinde yer alan etkinlikler; sizi kendi güçlü yönlerinizi keşfetmeye, eksiklerinizi tamamlamaya, öğrendiklerinizi pekiştirmeye ve özgüvenle ilerlemeye teşvik edecektir.

Bireysel öğrenme etkinliklerinde yer alan başlıkların genel açıklamaları şu şekildedir:



Her bölümün sonunda yer alan geri bildirimler, yaptığınız çalışmayı kontrol etmenize ve öğrenmenizi kalıcı hâle getirmenize yardımcı olur.

Bireysel öğrenme etkinlikleri kitabınızdaki her sayfa, öğrenme eksiklerinizi tamamlamanız için bir fırsattır. Öğrendikçe, düşündükçe ve tekrar ettikçe eksiklerinizi giderecek ve kendinizi daha hazır hissedeceksiniz. Bu kitap, öğrenme yolculuğunuzda her zaman ilerleyebileceğinizi gösteren bir çalışma arkadaşıdır.

Eğlence ve keşif dolu bir öğrenme yolculuğu dileklerimizle...

İÇİNDEKİLER

SAYILAR 7

ÜSLÜ VE KÖKLÜ GÖSTERİMLERLE ÖRÜNTÜLER 7

SEMBOLLER VE ARALIKLAR 69

SAYI KÜMELERİ 110

İŞLEM ÖZELLİKLERİ VE CEBİRSEL GÖSTERİM 146

NİCELİKLER VE DEĞİŞİMLER 171

FONKSİYONLAR 101 171

MUTLAK DEĞER FONKSİYONU 224

DENKLEM VE EŞİTSİZLİKLER 243

GEOMETRİK ŞEKİLLER 288

ÜÇGENDE AÇI VE KENAR İLİŞKİLERİ 288

EŞLİK VE BENZERLİK 329

GEOMETRİK DÖNÜŞÜMLER VE MOTİFLER 329

ÜÇGENLERDE EŞLİK VE BENZERLİK 341

EŞLİK VE BENZERLİK UYGULAMALARI 371

TALES, ÖKLİD, PİSAGOR TEOREMLERİ 397

ÜÇGENLERDE TEOREMLERİ KULLANARAK PROBLEM ÇÖZME 429

ALGORİTMA VE BİLİŞİM 448

ALGORİTMİK DİL 448

MANTIK BAĞLAÇLARI VE NİCELEYİCİLERİN ÇÖZÜMLENMESİ 495

MANTIK BAĞLAÇLARI VE NİCELEYİCİLERİN ALGORİTMADA KULLANIMI 519

İSTATİKSEL ARAŞTIRMA SÜRECİ 543

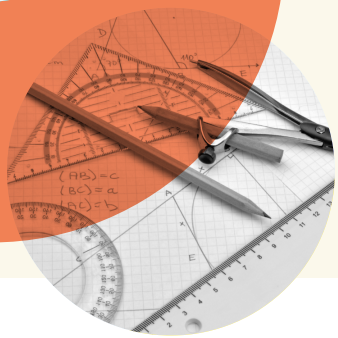
İSTATİKSEL ARAŞTIRMA 543

TEK NİCEL DEĞİŞKENLİ VERİ DAĞILIMLARI 577

VERİDEN OLASILIĞA 593

DENEYSEL OLASILIK 593

TEORİK OLASILIK 613



ÜSLÜ VE KÖKLÜ GÖSTERİMLERLE ÖRÜNTÜLER

BAŞLARKEN

Sevgili öğrencimiz, bu çalışma kartında bireysel öğrenme yolculuğunuza destek sunmak amaçlanmaktadır.

Çalışmalarınızı yürütürken "Hazırlanıyorum", "İlişkilendiriyorum", "Uygulayarak Öğreniyorum", "Değerlendiriyorum" bölümlerini sırası ile yapmanızı; her bölüm ve etkinlik sonundaki geri bildirimleri alarak ilerlemenizi; "Öğrendiklerim" bölümünde öğrenme sürecinizi gözden geçirmenizi bekliyoruz.

Bu çalışma kartında, üslü ve köklü gösterimlerin günlük yaşamla ilişkisini fark ederek, aşağıdaki sorulara kendi düşüncelerinle yanıt bulabileceksin:

Üslü ve köklü gösterimler, sayıları daha kısa ve anlamlı biçimde ifade etmede nasıl bir kolaylık sağlar?

Üslü ve köklü ifadelerle yapılan işlemlerde hangi örüntülerden yola çıkarak genellemelere ulaşabiliriz?

Elde ettiğimiz genellemeleri matematiksel olarak nasıl doğrulayabiliriz?

Üslü ve köklü gösterimlerle ilgili önermelerin hangi durumlarda daha kullanışlı olduğunu nasıl belirleyebiliriz?

HAZIRLANIYORUM

Amaç: Bu bölümde ön bilgilerinizi hatırlamanızı ve temaya hazırlıklı hâle gelmenizi amaçlıyoruz.

- Lütfen her bir ifadeyi dikkatlice okuyunuz.
- Eğer ifadedeki bilgiye hâkim olduğunuzu düşünüyorsanız kutucuğu işaretleyiniz.
- Eğer konuyu henüz tam olarak bilmediğinizi ya da hatırlamadığınızı düşünüyorsanız kutucuğu boş bırakınız.

SORULAR	ÖN ÖĞRENME KONTROL LİSTESİ	
1	Ondalık gösterim ile verilen sayıları toplayabilirim.	☐
2	Ondalık gösterim ile verilen sayıları çıkarabilirim.	☐
3	Ondalık gösterim ile verilen sayıları çarpabilirim.	☐
4	Ondalık gösterim ile verilen sayıları bölebilirim.	☐
5	Ondalık gösterimdeki rakamların basamak değerlerini yazabilirim.	☐
6	Ondalık gösterimlerle ve tabanı rasyonel sayı, kuvveti tam sayı olan üslü ifadelerle işlemler yapabilirim.	☐
7	İrrasyonel sayıları tanımlayabilirim.	☐

"Ön Öğrenme Kontrol Listesi"ni doldurduktan sonra aşağıda verilen "Kontrol Noktası" sorularını çözünüz ve cevaplarınızı kontrol ediniz.

KONTROL NOKTASI

SORU 1. Aşağıda verilen işlemin sonucunun doğruluğunu kontrol ederek gerekçeleriniz ile birlikte açıklayınız.

$$\begin{array}{r} 12{,}6 \\ +\ 3{,}51 \\ \hline 4{,}77 \end{array}$$

SORU 2. Bir koşucu sabah 8,75 km ve akşam 5,2 km koşmuştur. Sabah koştuğu mesafe, akşam koştuğu mesafeden kaç kilometre fazladır?

SORU 3. Aşağıda verilen işlemin doğruluk durumunu kontrol ediniz. Eğer işlem yanlışsa, sizce sebebi nedir? Boş bırakılan alana cevabınızı yazınız.

$$\begin{array}{r} 12{,}6 \\ \times\ 0{,}3 \\ \hline 37{,}8 \end{array}$$

SORU 4. Aşağıdaki öğrenciler 4,8 ÷ 0,06 işlemini yapmıştır. Sizce hangi öğrenci veya öğrenciler hatalıdır? Nedenini açıklayınız.

Aysel'in işlemi:
4,8 ÷ 0,06 = 48 ÷ 6 = 8
(Sadece virgülleri kaldırdım.)

Doğru: ☐ Hatalı: ☐

Emir'in işlemi:
4,80 ÷ 0,06 =80
(Kesir kısmında basamak sayısını eşitleyip virgülleri kaldırdım.)

Doğru: ☐ Hatalı: ☐

Berk'in işlemi:
$\frac{48}{10} \div \frac{6}{10} = \frac{48}{10} \cdot \frac{10}{6} = \frac{48}{6} = 8$
(Ondalık sayıları kesre dönüştürerek işlem yaptım.)

Doğru: ☐ Hatalı: ☐

SORU 5. Aşağıdaki ondalık sayılarda altı çizili rakamların basamak değerlerini bulunuz ve her harfi doğru basamak değeriyle eşleştiriniz.

1) 3,<u>2</u>5 ◯	2) 14,<u>6</u> ◯	3) 7,9<u>1</u> ◯	4) 2,0<u>8</u> ◯	5) <u>1</u>,35 ◯	6) 8,10<u>4</u> ◯	7) <u>2</u>3,4 ◯

A 0,6	B 0,01	C 0	D 0,2	E 0,08	F 0,004	G 1	H 10	K 20

SORU 6. Aşağıdaki tabloda üslü gösterimleri verilen ifadelerin doğru olan karşılıklarının altındaki kutucuklara ✓ işaret koyunuz.

Üslü Gösterim						
-2^4	$(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)$	☐	$-2\cdot2\cdot2\cdot2$	☐	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$	☐
-2^0	1	☐	-1	☐	0	☐
3^{-6}	$\frac{1}{3^6}$	☐	-3^6	☐	$\left(3^{-2}\right)^3$	☐
$\left(-\frac{2}{3}\right)^4$	$\left(-\frac{3}{2}\right)^{-4}$	☐	$-\frac{81}{16}$	☐	$\frac{16}{81}$	☐
-2^{-4}	16	☐	$-\frac{1}{16}$	☐	$\frac{1}{16}$	☐

SORU 7. Aşağıda verilen sayılardan irrasyonel olanları işaretleyiniz.

$\sqrt{64}$ | $\sqrt{\frac{49}{16}}$ | $\sqrt{1,44}$ | $\sqrt{5}$ | $\sqrt{1,3}$ | $-\sqrt{49}$ | $-\sqrt{7}$ | π

GERİ BİLDİRİM

Bu geri bildirim sayesinde kendi cevabınızı kontrol edebilir, hatalarınızı düzelterek öğrenmenizi pekiştirebilirsiniz.

KONTROL NOKTASI
ÇÖZÜM 1.

Ondalık sayılarda toplama işlemi yapılırken virgüller aynı hizaya getirilir, eksik basamaklar '0' ile tamamlanır ve virgül hizasına dikkat edilerek toplama işlemi yapılır.

$$\begin{array}{r} 12,6 \\ +\ 3,51 \\ \hline 4,77 \end{array}$$

İşlem hatalıdır.

Virgüller aynı hizaya getirilmeden toplanmıştır.

Doğru Çözüm:

$$\begin{array}{r} 12,6 \\ +\ 3,51 \\ \hline 16,11 \end{array}$$

ÇÖZÜM 2.

$$\begin{array}{r} 8,75 \\ -\ 5,20 \\ \hline 3,55 \end{array}$$

Ondalık sayılarda çıkarma işlemi yapılırken virgüller aynı hizaya getirilir, eksik basamak varsa '0' yazılarak tamamlanır ve virgülün hizasına dikkat edilerek çıkarma işlemi yapılır.

ÇÖZÜM 3.

Ondalık sayılarda çarpma işlemi yapılırken, virgüller göz ardı edilerek çarpma işlemi yapılır ve virgülün yerine karar verilir. Virgül koyulurken, bulunan sonuçta kesir kısmında, çarpılan sayıların kesir kısımlarında bulunan toplam basamak sayısı kadar basamak bulunmasına dikkat edilmelidir.

$$\begin{array}{r} 12,6 \\ \times\ 0,3 \\ \hline 37,8 \end{array}$$

İşlem hatalıdır. Virgüller göz ardı edilerek yapılan çarpma işleminin sonucu doğru olarak bulunmuş ancak virgülün yeri yanlış belirlenmiştir. Bulunan sonuçta kesir kısmında bulunan basamak sayısı, çarpılan sayıların kesir kısımlarında bulunan toplam basamak sayısına eşit değildir.

Doğru Çözüm: $\begin{array}{r} 126 \\ \times\ 3 \\ \hline 378 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} 12,6 \\ \times\ 0,3 \\ \hline 3,78 \end{array} \Rightarrow$ Cevap: 3,78

ÇÖZÜM 4.

Ondalık gösterim ile verilen sayılarda bölme işlemi yapılırken, iki sayının kesir kısmındaki basamak sayıları eksik kalan basamak sayısı kadar 0 konularak tamamlanır, virgüller göz ardı edilerek bölme işlemi yapılır.

Ondalık sayılarda bölme işlemi sayılar kesre dönüştürülerek de yapılabilir.

Aysel'in işlemi:

$4,8 \div 0,06 = 48 \div 6 = 8$

(Sadece virgülleri kaldırdım.)

Doğru: ☐ Hatalı: ☒

Emir'in işlemi:

$4,80 \div 0,06 = 80$

(Kesir kısmında basamak sayısını eşitleyip virgülleri kaldırdım.)

Doğru: ☑ Hatalı: ☐

Berk'in işlemi:

$\frac{48}{10} \div \frac{6}{10} = \frac{48}{10} \cdot \frac{10}{6} = \frac{48}{6} = 8$

(Ondalık sayıları kesre dönüştürerek işlem yaptım.)

Doğru: ☐ Hatalı: ☒

Aysel hatalıdır. Çünkü bölünen sayıların kesir kısmındaki basamak sayılarını eşitlemeyi unutmuştur.

Bir diğer hatalı çözüm Berk'e aittir. Çünkü ikinci sayıyı kesre dönüştürürken hata yapmıştır.

Aysel'in işlemi:

$4,8 \div 0,06 = 4,80 \div 0,06$

$= 480 \div 6$

$= 80$

şeklinde olmalıydı.

Berk'in işlemi:

$\frac{48}{10} \div \frac{6}{100} = \frac{48}{10} \cdot \frac{100}{6}$

$= \frac{4800}{60}$

$= 80$

şeklinde olmalıydı.

ÇÖZÜM 5.

1) 3,2̲5	D	0,2
2) 14,6̲	A	0,6
3) 7,91̲	B	0,01
4) 2,08̲	E	0,08
5) 1̲,35	G	1
6) 8,104̲	F	0,004
7) 2̲3,4	K	20

HATIRLATMA

Bir ondalık gösterimin basamak değerlerinin toplamı şeklinde yazılmasına ondalık gösterimin çözümlenmesi denir.

Aşağıda 1,618 sayısının çözümlenmiş hali verilmiştir.

$$1{,}618 = 1 \cdot 1 + 6 \cdot \frac{1}{10} + 1 \cdot \frac{1}{100} + 8 \cdot \frac{1}{1000}$$

Birler Basamağı, Onda Birler Basamağı, Yüzde Birler Basamağı, Binde Birler Basamağı

ÇÖZÜM 6.

	Doğru	Yanlış
Bir sayının doğal sayı kuvveti bulunurken, taban sayısı kuvveti kadar yan yana yazılır ve çarpılır.	✓	
$-2^3 = 2^{-3}$		✓

$-2^3 = -2 \cdot 2 \cdot 2 = -8$ ve $2^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$ olduğundan $-8 \neq \frac{1}{8}$ olmaktadır.

UYARI

Üslü gösterimlerde kuvvet negatif ise sayının çarpma işlemine göre tersi alınır ve kuvvet pozitife çevrilir.

	Doğru	Yanlış
Bir sayının sıfırıncı kuvveti her zaman 1'dir.		✓

0^0 belirsizdir.

Sıfır hariç her sayının sıfırıncı kuvveti 1'dir.

	Doğru	Yanlış
$3^{-6} = -\frac{1}{729}$		✓

$3^{-6} = \left(\frac{1}{3}\right)^6 = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{729}$ olmaktadır.

Üslü gösterimlerde kuvvetin negatif olması sayının işaretini etkilemez.

	Doğru	Yanlış
$-\left(\frac{2}{3}\right)^4 = -\frac{16}{81}$		✓

$-\left(\frac{2}{3}\right)^4 = -\left(\frac{2}{3}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{16}{81}$ olmaktadır.

UYARI

Kuvvetin tek ya da çift olması parantezin içerisinde olmayan işarete etki etmez.

	Doğru	Yanlış
$-2^4 = 16$		✓

$-2^4 = -1\cdot 2^4 = -1\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2 = -16$ olmaktadır.

Kuvvetin tek ya da çift olması parantezin içerisinde olmayan işarete etki etmez.

ÇÖZÜM 7.

$\sqrt{64}$	$\sqrt{\frac{49}{16}}$	$\sqrt{1,44}$	✓ $\sqrt{5}$	✓ $\sqrt{1,3}$	$-\sqrt{49}$	✓ $-\sqrt{7}$	✓ π

UYARI

Eğer karekök içinde bulunan sayı tam kare değilse, o sayı irrasyonel bir sayı olarak kabul edilir.

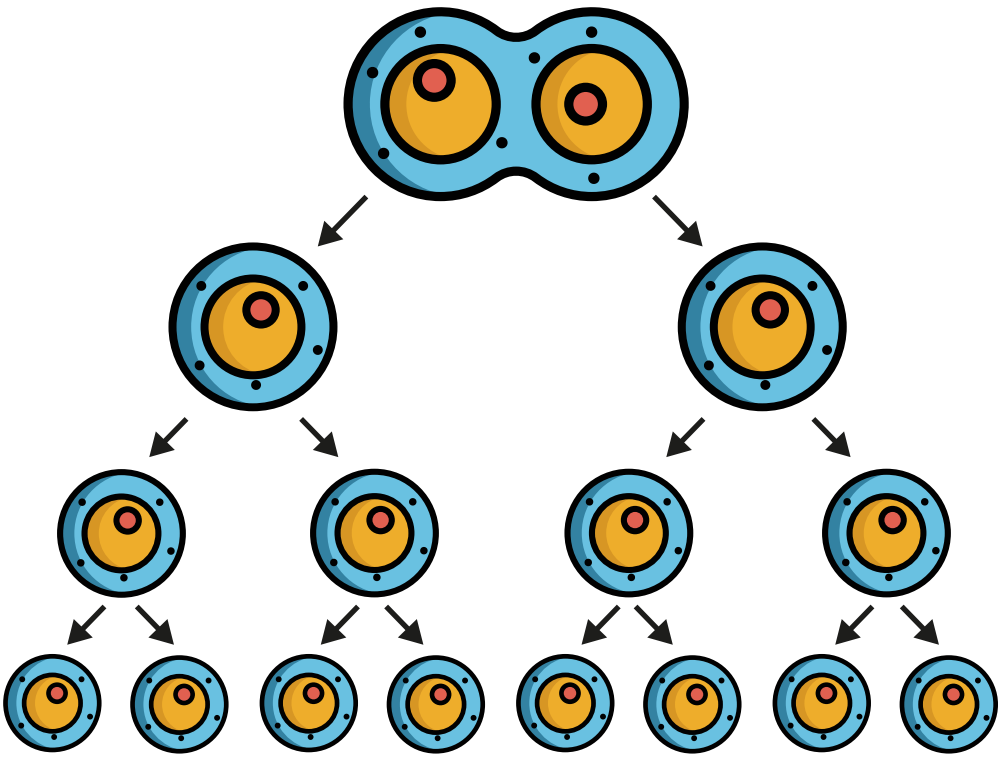
İLİŞKİLENDİRİYORUM

Amaç: Sevgili öğrencimiz, bu bölümde yeni öğreneceğiniz konuyu; zihninizde var olan bilgileriniz, yaşantılarınız ve diğer derslerde öğrendiklerinizle ilişkilendirmenizi bekliyoruz.

Verilen örneği okuyunuz. Ardından soruları yanıtlayınız. Cevaplarınızı kendi yaşamınızdan ya da çevrenizden örneklerle destekleyiniz..

Mitoz bölünmede hücre sayısı her defasında 2 katına çıkmaktadır. Bir hücre art arda 20 defa mitoz bölünme gerçekleştirirse kaç hücre oluşur?

Aşağıda bir hücrenin art arda 3 defa mitoz bölünme gerçekleştirdiği görülmektedir.



3.adım sonunda oluşan hücre sayısı $2 \cdot 2 \cdot 2$ şeklinde yazılabilir.

20. adım sonunda oluşan hücre sayısı için

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ yazmak sizce de zaman alıcı olmaz mı?

Bu durumda daha kısa bir gösterim yöntemi olan 2^{20} ifadesinin kullanılması daha uygun olacaktır.

1000000000 hücreye sahip bir bakterinin hücre bölünmesi üzerinden hesap yapılırken, her defasında bu kadar sıfırı yazmak zaman alıcı olacaktır.
Bunun yerine, $1000000000 = 10^9$ eşitliğinden yararlanarak işlemleri daha kolay hale getirebiliriz.

Mitoz bölünmede hücre sayısının her adımda iki katına çıkması gibi birçok gerçek yaşam durumunu kısa ve pratik biçimde göstermek için üslü gösterimler kullanılır. Üslü gösterimler, aynı sayının art arda çarpıldığı durumları daha düzenli ve anlaşılır biçimde ifade etmemizi sağlar. Bu gösterim sayesinde uzun çarpma işlemlerini kısaltabilir, büyük veya çok küçük sayılarla yapılan işlemleri daha kolay gerçekleştirebiliriz. Böylece hem yazım hem de işlem süreci sadeleşir, matematiksel ilişkiler daha net bir biçimde görülebilir. Üslü gösterimler, özellikle bilimsel hesaplamalarda ve günlük yaşamda karşılaşılan katlanarak artan ya da azalan durumları ifade etmede büyük kolaylık sağlar.

"BirAvuç Pirinç mi?Yoksa Bir Dağ mı?"

"BirAvuç Pirinç mi?Yoksa Bir Dağ mı?"
Bir zamanlar, eski Hindistan'da satranç oyununun mucidi, oyunu çok seven bir krala satranç oyununu öğretmiş. Kral bu oyuna hayran kalmış ve demiş ki:

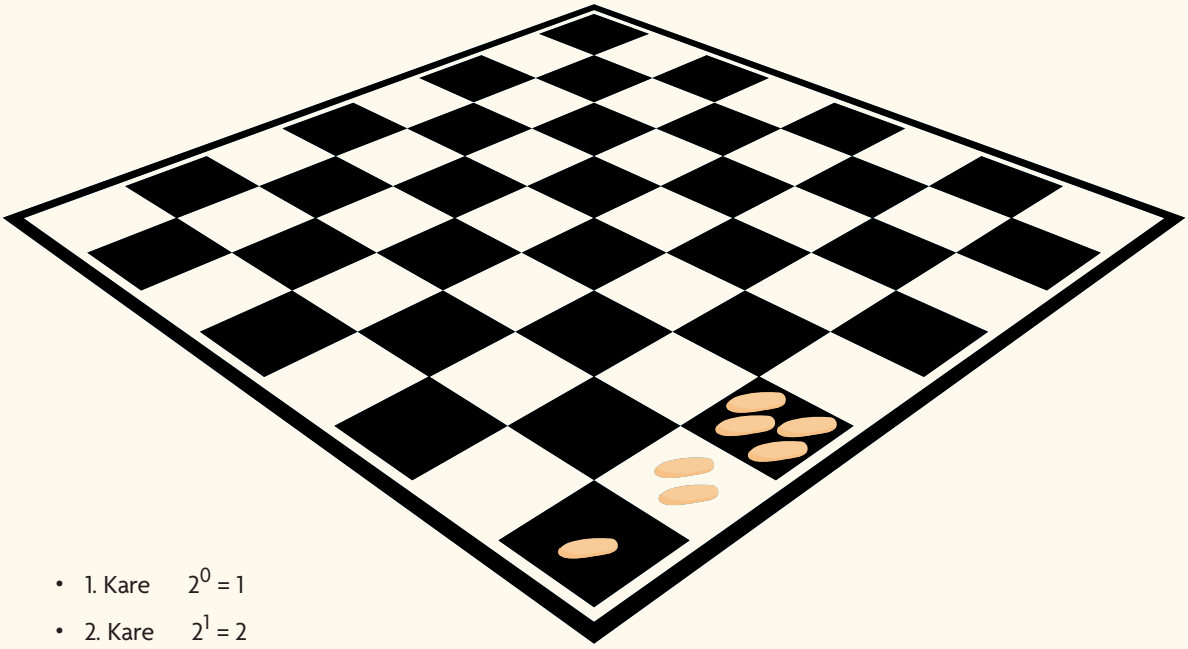
“Dile benden ne dilersen! Altın mı, toprak mı, saray mı?”

Mucidin yanıtı şaşırtıcı olmuş: “Majesteleri, çok bir şey istemem. Sadece satranç tahtasının ilk karesine 1 pirinç tanesi, ikinci karesine 2, üçüncü karesine 4 ... Her karede, bir öncekinin iki katı olacak şekilde devam etsin. Toplamda 64 kare var zaten.”

Kral içinden gülmüş: “Bu kadar zeki biri nasıl bu kadar basit bir şey ister?”
Hemen emir vermiş, ancak saray görevlileri birkaç gün sonra panikle geri dönmüş.
“Majesteleri! Tüm ülkenin pirincini topladık, yetmedi! Bu miktar... hesaplanamayacak kadar büyük!”

Bu nasıl olabilir?

“Bir tahtada sadece 64 kare var. Peki nasıl olur da bu kadar büyük bir sayı eder?”
Çünkü her karedeki miktar bir **üslü sayı** ile ifade edilir!



- 1. Kare $2^0 = 1$
- 2. Kare $2^1 = 2$
- 3. Kare $2^2 = 4$
- ⋮
- 64. Kare $2^{63} = 9.223.372.036.854.775.808$

Bu, **dünyadaki toplam pirinç üretiminin milyarlarca katı** eder!

Bu hikâye, bize **üslü sayıların ne kadar hızlı büyüdüğünü** gösteriyor.

Başta çok küçük gibi görünse de, taban sabit kalıp üs arttıkça sayılar katlanarak büyür. İşte bu yüzden, üslü sayılar çok büyük veya çok küçük sayılarla çalışırken en etkili yoldur.

UYGULAYARAK ÖĞRENİYORUM

Amaç: Bu bölümde bilgilerinizi etkinlikler ve uygulamalarla pekiştirmenizi, öğrenmeyi daha kalıcı hâle getirmenizi amaçlıyoruz.

Etkinliklerde verilen adımları dikkatle uygulayınız. Çalışmanızı güvenli ve düzenli bir şekilde yapınız..

GERÇEK SAYILARIN ÜSLÜ GÖSTERİMİ

Gerçek sayıların Üslü Gösterimleri

Tabloda verilen üslü gösterimlerin sonuçlarını örnekteki gibi bularak tabloyu uygun şekilde doldurunuz.

İşlem	Üslü Gösterim	Sonuç
$2 \cdot 2 \cdot 2$	2^3	8
$\left(\frac{3}{5}\right) \cdot \left(\frac{3}{5}\right)$		
$-3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$	-3^6	-729
$(-2) \cdot (-2)$		
$(-2) \cdot (-2) \cdot (-2)$		
$0 \cdot 0 \cdot 0$	0^3	0
$0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0$		
1	11^0	1
1	$(-6)^0$	1
$\frac{1}{3}$	3^{-1}	$\frac{1}{3}$
$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}$		

HATIRLATMA

Üslü gösterim; **aynı sayının** birden fazla kez çarpılmasını **kısa ve düzenli bir biçimde ifade etmeye yarayan bir yazım biçimidir.**

$a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$ üslü gösteriminde

- a sayısı taban
- n sayısı üs veya kuvvet (kaç kere çarpıldığını gösterir, pozitif bir tam sayıdır.)
- a sıfırdan farklı gerçek sayı ve n pozitif gerçek sayı olmak üzere $a^{-1} = \frac{1}{a}$ ve $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
- n; negatif tam sayı ise $a^n = \frac{1}{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}$ olur.
- $a^0 = 1$'dir. $(a \neq 0)$
- $0^a = 0$'dır. $(a \neq 0)$

BİLİMSEL GÖSTERİM

0,00000000012 sayısını yazarken sürekli bu sıfırları yazmak ister misiniz?

Her defasında bu kadar sıfır yazmak zorunda olsaydık, yazmak, hesaplamak veya anlamak hem zor hem de zaman alıcı olurdu.

Örneğin;

- 0,00000000012 = ☐ · 10^{-9}
- 0,00000000012 = ☐ · 10^{-10}
- 0,00000000012 = ☐ · 10^{-11}

Peki bu yazım şekillerinden hangisini kullanmak bilimsel çalışmalarda daha doğru olur hiç düşündünüz mü? Sizce belirli bir formatı var mıdır?

- Bir su molekülünün çapı = 0,00000000028 = 2,8 · 10^{-10}
- İnsan vücudunda bulunan hücre sayısı ortalama = 37000000000000 = 3,7 · 10^{13}

Bilimsel gösterim, kısa, net ve etkili bir anlatım sağlar.

Bilimsel gösterim (ya da bilimsel notasyon), çok büyük veya çok küçük sayıları daha kolay yazmak ve okumak için kullanılan bir yöntemdir. Bu yöntem, sayıları a · 10^n biçiminde ifade eder. Burada:

- a; 1 ile 10 arasında bir sayı (10 hariç),
- n; bir tam sayı,
- 10 ise tabandır.

Işık hızı yaklaşık 300000 km/sn olduğuna göre ışığın 27 saniyede kaç metre yol alabileceğini hiç düşündünüz mü?

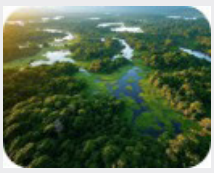
NOT



Bir DNA sarmalının kalınlığı yaklaşık $2 \cdot 10^{-9}$ metredir.



Bir atom çekirdeğinin çapı yaklaşık 10^{-15} metredir.



Amazon ormanlarındaki ağaç sayısı yaklaşık $3 \cdot 10^{11}$ adettir.



Olası satranç oyunlarının sayısı yaklaşık 10^{120} tanedir.

Bu sayıya Shannon sayısı denir.

ÖRNEK

Bir uzay aracının motoru, saatte $3 \cdot 10^7$ joule enerji harcamaktadır. Bu araç, 5 saatlik bir yolculuk sırasında, her saat başına harcanan enerjiyi 4 adet motora eşit şekilde dağıtarak kullanıyor.

a) Her bir motorun 1 saatte harcadığı enerji ne kadardır? (Cevabınızı bilimsel gösterim biçimde yazınız.)

ÇÖZÜM

Toplam enerji: $3 \cdot 10^7$ joule ve 4 motora eşit dağıtılır: $\frac{3 \cdot 10^7}{4} = 0{,}75 \cdot 10^7$ joule

Bu ifadeyi bilimsel gösterime çevirelim: $0{,}75 \cdot 10^7 = 7500000 = 7{,}5 \cdot 10^6$ joule

Her bir motor, 1 saatte $7{,}5 \cdot 10^6$ joule enerji harcar.

b) 5 saatlik yolculuk sonunda toplamda tüm motorlar tarafından harcanan enerji ne olur? (Cevabınızı bilimsel gösterim biçimde yazınız.)

ÇÖZÜM

Dört motor 1 saatte toplam $3 \cdot 10^7$ joule enerji harcıyor.

5 saat boyunca: $5 \cdot 3 \cdot 10^7 = 15 \cdot 10^7$ joule enerji harcanır.

Bu ifadeyi bilimsel gösterime çevirelim: $15 \cdot 10^7 = 150000000 = 1{,}5 \cdot 10^8$ joule

5 saatlik yolculuk sonunda toplamda tüm motorlar tarafından $1{,}5 \cdot 10^8$ joule enerji harcanır.

SIRA SİZDE 1.

Genç bir biyolog olarak bir laboratuvarda staj yaptığınızı düşününüz. İlk deneyinizde, özel bir bakteri türünün kontrollü büyümesini gözlemliyorsunuz.

Başlangıçta petri kabında $6 \cdot 10^3$ adet bakteri bulunmaktadır. Bu bakteriler her 20 dakikada bir bölünerek sayıca iki katına çıkmaktadır. Deney toplam 2 saat sürmektedir.

Buna göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

1. **Bakteriler her 20 dakikada bir bölündüğüne göre 2 saat sonunda kaç kez bölünme gerçekleşir? Bu sürenin sonunda oluşan bakteri sayısını bilimsel gösterimle ifade ediniz.**

2. **Deney sonunda gözlemlerinizi yorumlayınız. "Eğer bu bakterilerin büyümesi durdurulmasaydı, 1 gün içinde yaklaşık ne kadar alan kaplayabilirdi?" şeklinde bir tahminde bulununuz.**

SIRA SİZDE 2.

Standart bir musluk dakikada 12 ila 15 litre su akıtır. Eğer diş fırçalama sırasında musluk açık bırakılırsa, her dakikada 12 – 15 litre su boşa gidebilir.

Türkiye'nin 2024 yılı verilerine göre nüfusu yaklaşık 85 milyon kişidir. Nüfusun 75 milyonu diş fırçalıyor olsun.

Buna göre her birey günde 1 dakika gereksiz yere açık tutulan musluğu kapatarak 10 litre su tasarrufu sağlarsa, bir haftada yapılabilecek toplam su tasarrufu bilimsel gösterimle nasıl ifade edilir?

GERÇEK SAYILARIN ÜSLÜ GÖSTERİMLERİYLE YAPILAN ÇARPMA VE BÖLME İŞLEMLERİ 1

Tabloda verilen işlemlerin sonuçlarını örneklerdeki gibi bularak uygun yerlere yazınız.

İşlem	İşlemin Açık Hali	Sonuç
$2^3 \cdot 2^5$	$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{3 \text{ tane}} \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{5 \text{ tane}}$	2^8
$5^6 \cdot 5^3 \cdot 5^2$		
$(-2)^6 \cdot (-2)^5 \cdot (-2)^3$		
$3^5 \cdot 3^{-6}$	$\cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \frac{1}{\cancel{3}} \cdot \frac{1}{\cancel{3}} \cdot \frac{1}{\cancel{3}} \cdot \frac{1}{\cancel{3}} \cdot \frac{1}{\cancel{3}} \cdot \frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
$7^{-4} \cdot 7^3$		
$\left(\frac{3}{5}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^4$		
$2^x \cdot 2^3$		
$x^a \cdot x^b$		
$\frac{5^4}{5^3}$	$\frac{\cancel{5} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{5} \cdot 5}{\cancel{5} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{5}}$	5
$\frac{3^4}{3^6}$		
$(-5)^3 \div (-5)^1$		
$\frac{2^5}{2^{-4}}$		
$\frac{x^a}{x^b}$		

NOT

x sıfırdan farklı bir gerçek sayı a ve b birer pozitif tam sayı ve a > b olsun. Bu durumda üslü gösterimde tabanlar aynı ise çarpma ve bölme işlemi :

$$x^a \cdot x^b = \underbrace{(x \cdot x \cdot x \cdot \ldots \cdot x)}_{\text{a tane}} \cdot \underbrace{(x \cdot x \cdot x \cdot \ldots \cdot x)}_{\text{b tane}} = \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{(a+b) \text{ tane}} = x^{a+b}$$

$$\frac{x^a}{x^b} = \frac{\overbrace{(x \cdot x \cdot x \cdot \ldots \cdot x)}^{\text{a tane}}}{\underbrace{(x \cdot x \cdot x \cdot \ldots \cdot x)}_{\text{b tane}}} = \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{(a-b) \text{ tane}} = x^{a-b}$$

ÖRNEK

Güneş enerjisiyle çalışan özel bir yapay fotosentez cihazı, her saniyede yaklaşık $4 \cdot 10^{21}$ adet su molekülünü parçalayarak enerji üretiyor. Bu moleküller parçalanırken oksijen ve hidrojen atomlarına ayrılıyor.

Mol Hesabının Formülü:

$$n(\text{mol}) = \frac{N}{N_A}$$

- n: Madde miktarı(mol)
- N: Tanecik (atom, molekül, iyon vb.) sayısı
- N_A: Avagadro sayısı ($N_A = 6{,}022 \cdot 10^{23}\,\text{mol}^{-1}$)

Her bir su molekülü 3 atom içerdiğine göre, cihaz 1 saatte yaklaşık kaç mol atom üretir?

ÇÖZÜM

Beklenen işlem adımları:

1. **Molekül sayısı (saniyelik):** $4 \cdot 10^{21}$
2. **Toplam atom sayısı (saniyelik):** Molekül sayısı x 3 =?
3. **1 saatte üretilen toplam atom sayısı:** Toplam atom sayısı (saniyelik) x 3600 =?
4. **Mol hesabı:** $\dfrac{\text{Bir saatte üretilen toplam atom sayısı}}{\text{Avagadro sayısı}} = ?$

İşlem adımları:

- **Saniyede üretilen atom sayısı:** $4 \cdot 10^{21} \cdot 3 = 12 \cdot 10^{21} = 1{,}2 \cdot 10^{22}$ atom
- **1 saatte (3600 saniyede) üretilen toplam atom sayısı:**
$$1{,}2 \cdot 10^{22}\,\text{atom / sn x } 3600\,\text{sn}$$
$$= 1{,}2 \cdot 10^{22} \cdot 3{,}6 \cdot 10^{3}\,\text{atom}$$
$$= (1{,}2 \cdot 3{,}6) \cdot 10^{22+3}\,\text{atom}$$
$$= 4{,}32 \cdot 10^{25}\ \text{atom}$$
- **Mol hesabı:**
$$M = \frac{4{,}32 \cdot 10^{25}\,\text{atom}}{6{,}022 \cdot 10^{23}\,\text{mol}^{-1}} = \frac{4{,}32}{6{,}022} \cdot 10^{25-23}\,\text{mol atom}$$
$$M \approx 0{,}7174 \cdot 10^{2}\,\text{mol atom}$$
$$M \approx 71{,}74\ \text{mol atom}$$

Cihaz, 1 saatte yaklaşık 71,74 mol atom üretir.

ÖRNEK

Üslü gösterimlerle çarpma ve bölme işlemlerine dair elde ettiğiniz önermelerden yararlanarak, $\dfrac{9 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{-11}}{3^9}$ ifadesinin eşitini bulunuz.

ÇÖZÜM

$9 = 3^2$ ve $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-11} = (-3)^{11} = -3^{11}$ olur.

Buradan $\dfrac{3^2 \cdot \left(-3^{11}\right)}{3^9} = \dfrac{-3^{2+11}}{3^9} = \dfrac{-3^{13}}{3^9} = -3^{13-9} = -3^4 = -81$ bulunur.

SIRA SİZDE 3.

Bir teknoloji şirketi, yüksek güvenlikli bir veri merkezinde her gün düzenli olarak yedekleme işlemi yapmaktadır. Bu işlem sırasında her saniye yaklaşık $2{,}5 \cdot 10^6$ veri yedeklenmektedir. Yedekleme sistemi günde 12 saat boyunca aralıksız çalışmaktadır. Her yedeklenen dosya ortalama $5 \cdot 10^3$ bayttır.

Buna göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

1. **12 saatte toplam kaç saniye vardır? Her saniye $2{,}5 \cdot 10^6$ bayt yedeklendiğine göre, 12 saatte toplam kaç bayt veri yedekleneceğini bilimsel gösterimle ifade ediniz.**

2. **Toplam yedeklenen veri, her biri $5 \cdot 10^3$ bayt olan dosyalara ayrılırsa, kaç dosya oluşacağını bilimsel gösterimle ifade ediniz.**

HATIRLATMA

- 1 saat = 3600 saniye
- 12 saat = 12 • 3600 saniye = 43.200 saniye
- Bilimsel gösterim: Sonuçları n tam sayı, a sıfırdan farklı gerçek sayı ve $1 \le a < 10$ olmak üzere $a \cdot 10^n$ biçiminde ifade etmeyi unutma.

SIRA SİZDE 4.

Bir uzay ajansı, gezegenler arası veri iletimi için anten ağları kurmaktadır. Her ana anten, 8 adet alt anten içerir. Her alt anten, kendi içinde 16 adet sinyal birimi barındırmaktadır. Bir sinyal birimi, saniyede 32 veri paketi iletebilmektedir.

Buna göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) **Bir ana antenin toplam sinyal birimi sayısını üslü ifadeyle bulunuz.**

b) **Bir ana anten saniyede kaç veri paketi iletebilir?**

c) **Eğer toplamda 2^{15} veri paketi iletilmesi gerekiyorsa, bir ana anten bunu kaç saniyede tamamlar?**

GERÇEK SAYILARIN ÜSLÜ GÖSTERİMLERİYLE YAPILAN ÇARPMA VE BÖLME İŞLEMLERİ 2

Tabloda verilen işlemlerin sonuçlarını örneklerdeki gibi bularak uygun yerlere yazınız.

İşlem	İşlemin Açık Hali	Sonuç
$2^2 \cdot 3^2$	$2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = (2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3) = 6 \cdot 6$	6^2
$5^x \cdot 6^x$		
$\left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^4$		
$(-2)^5 \cdot (5)^5$		
$\left(-\frac{1}{3}\right)^2 \cdot (-9)^2$		
$x^a \cdot y^a$		
$\frac{12^4}{3^4}$		
$\frac{6^5}{(-2)^5}$		
$\frac{10^a}{5^a}$		
$\frac{x^m}{y^m}$		

NOT

x ve y sıfırdan farklı birer gerçek sayı m bir pozitif tam sayı olsun. Bu durumda üslü gösterimde tabanlar farklı üsler aynı ise çarpma ve bölme işlemi :

$$x^m \cdot y^m = \underbrace{(x \cdot x \cdot x \cdot \ldots \cdot x)}_{\text{m tane}} \cdot \underbrace{(y \cdot y \cdot y \cdot \ldots \cdot y)}_{\text{m tane}}$$

$$= \underbrace{(x \cdot y) \cdot (x \cdot y) \cdot (x \cdot y) \cdot \ldots \cdot (x \cdot y)}_{\text{m tane}}$$

$$= (x \cdot y)^m$$

$$\frac{x^m}{y^m} = \frac{\overbrace{x \cdot x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}^{\text{m tane}}}{\underbrace{y \cdot y \cdot y \cdot \ldots \cdot y}_{\text{m tane}}}$$

$$= \underbrace{\left(\frac{x}{y}\right) \cdot \left(\frac{x}{y}\right) \cdot \left(\frac{x}{y}\right) \cdot \ldots \cdot \left(\frac{x}{y}\right)}_{\text{m tane}}$$

$$= \left(\frac{x}{y}\right)^m$$

BİR SAYININ KUVVETİNİN KUVVETİ

Tabloda verilen işlemlerin sonuçlarını örnekteki gibi bularak doldurunuz.

İşlem	İşlemin Açık Hali	Sonuç
$\left(2^3\right)^4$	$2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^3$	2^{12}
$\left(7^4\right)^2$		
$\left(-10^2\right)^3$		
$\left(4^{-3}\right)^{-1}$		
$\left(6^3\right)^{-2}$		

HATIRLATMA

x sıfırdan farklı bir gerçek sayı, a ve b bir tam sayı ve b > 0 olsun. Bu durumda üslü gösterimlerin üssünü alma işlemi:

$$\left(x^a\right)^b = \underbrace{\left(x^a\right) \cdot \left(x^a\right) \cdot \left(x^a\right) \cdot \ldots \cdot \left(x^a\right)}_{b \text{ tane}} = x^{\overbrace{a+a+a+\ldots+a}^{b \text{ tane}}} = x^{a \cdot b}$$

ETKİNLİK 1: İki Dirhem Bir Çekirdek – Üslü İfadelerle Altın Yolculuğu

Amaç: Bu etkinlikte, bir çekirdek kadar altının gün gün iki katına çıktığı bir senaryoyla üslü ifadelerin nasıl kullanıldığını öğreneceksiniz.

Yönerge: Görev 1, görev 2 ve görev 3'ü sırasıyla size verilen "iki dirhem bir çekirdek" senaryosuna ait açıklama ve problem senaryosunu dikkatli bir şekilde okuyarak cevaplandırınız.

"İki dirhem bir çekirdek" deyimi, Osmanlı Dönemi'nde insanlarınözenle giyinip güzel görünmeleri anlamına gelir. Aslında bu söz, eski tartı birimleri olan dirhem (3,2 gram) ve çekirdek (0,2 gram) üzerinden ortaya çıkmıştır. Yani bu söz, az ama değerli şeyleri anlatmak için kullanılır.

Problem Senaryosu: Bir kuyumcudan sadece 1 çekirdek kadar altın (0,2 gram) aldınız. Bu altının miktarı her gün iki katına çıkıyor. Bu durum 10 gün boyunca sürüyor.

Görev 1: Bu sürecin sonunda elinizde ne kadar altın olur?

Görev 2: Altınınız tam olarak 1 dirhem (3,2 gram) olduğunda kaç gün geçmiştir?

Görev 3: Eğer bu büyümeye 20 gün devam etseydiniz, toplamda kaç dirhem altınınız olurdu?

ÖRNEK

Bir laboratuvarda iki farklı bakteri türü incelenmektedir.

- Tür A'daki bakterilerin sayısı, her geçen saat başına 5^4 katına çıkmaktadır.
- Tür B'deki bakterilerin sayısı her saat başına 7^4 katına çıkmaktadır.
- Başlangıçta her iki türde de 120 bakteri bulunmaktadır.

a) 6 saat sonra, her iki türdeki bakteri sayısı ne olur?

ÇÖZÜM

Tür A'nın Bakteri Sayısı:

- Başlangıçta 120 bakteri.
- Tür A'daki bakteri sayısı her saat başına 5^4 katına çıkıyor.

  Bakteri sayısını saat (t) cinsinden genel olarak şu şekilde yazabiliriz: $120 \cdot \left(5^4\right)^t$

  Buradan t = 6 saat sonra Tür A bakteri sayısı, $120 \cdot \left(5^4\right)^6 = 120 \cdot 5^{4 \cdot 6} = 120 \cdot 5^{24}$ olarak hesaplanır.

Tür B'nin Bakteri Sayısı:

- Başlangıçta 120 bakteri.
- Tür B'daki bakteri sayısı her saat başına 7^4 katına çıkıyor.

  Bakteri sayısını saat (t) cinsinden genel olarak şu şekilde yazabiliriz: $120 \cdot \left(7^4\right)^t$

  Buradan t = 6 saat sonra Tür B bakteri sayısı, $120 \cdot \left(7^4\right)^6 = 120 \cdot 7^{4.6} = 120 \cdot 7^{24}$ olarak hesaplanır.

b) 6 saatin sonunda Tür B'deki bakterilerin sayısı, Tür A'daki bakterilerin sayısının kaç katıdır?

ÇÖZÜM

6 saatin sonunda Tür B'deki bakterilerin sayısı, Tür A'daki bakterilerin sayısına oranı:

$\frac{120 \cdot 7^{24}}{120 \cdot 5^{24}} = \frac{120}{120} \cdot \frac{7^{24}}{5^{24}} = 1 \cdot \left(\frac{7}{5}\right)^{24} = \left(\frac{7}{5}\right)^{24}$ olarak hesaplanır.

6 saatin sonunda Tür B'deki bakterilerin sayısı, Tür A'daki bakterilerin sayısının $\left(\frac{7}{5}\right)^{24}$ katıdır.

c) Eğer her iki bakteri türünün üreme oranı 3^4 kat hızlandırılırsa, iki bakteri türünün yeni üreme oranlarının çarpımı kaç olur?

ÇÖZÜM

Eğer her iki bakteri türünün üreme oranı 3^4 kat hızlandırılırsa, iki bakteri türünün yeni üreme oranlarının çarpımı:

$\left(5^4 \cdot 3^4\right) \cdot \left(7^4 \cdot 3^4\right) = \left(3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 7\right)^4 = 315^4$ olarak hesaplanır.

ÖRNEK

$\left(\frac{50^7}{5^{14}}+\frac{3^{-7}}{6^{-7}}\right)\cdot\left(2^{-2}\right)^3$ **işleminin sonucunu bulunuz.**

ÇÖZÜM

$\frac{50^7}{5^{14}}=\frac{50^7}{\left(5^2\right)^7}=\frac{50^7}{25^7}=\left(\frac{50}{25}\right)^7=2^7$, $\frac{3^{-7}}{6^{-7}}=\left(\frac{3}{6}\right)^{-7}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-7}=2^7$ ve $\left(2^{-2}\right)^3=2^{(-2).3}=2^{-6}$

olarak hesaplanır. Buradan cevap;

$\left(2^7+2^7\right)\cdot 2^{-6}=\left(2.2^7\right)\cdot 2^{-6}=2^{1+7-6}=2^2=4$ olarak bulunur.

ÖRNEK

$5^x=2$ **olduğuna göre** 25^{3x+1} **ifadesinin eşitini bulunuz.**

ÇÖZÜM

$25^{3x+1}=\left(5^2\right)^{3x+1}=5^{2\cdot(3x+1)}=5^{6x+2}$ olarak bulunur.

$5^{6x+2}=\left(5^x\right)^6\cdot 5^2$ olarak yazılır ve $5^x=2$ değeri yerine yazılırsa, cevap $2^6\cdot 5^2=64\cdot 25=1600$ olarak hesaplanır.

SIRA SİZDE 5.

$\left(\left(\frac{1}{0,5}\right)^8\right)^{-2}\cdot\left(\frac{20^{11}}{10^{11}}\right)^2$ **işleminin sonucunu bulunuz.**

SIRA SİZDE 6.

$123\underbrace{0000\ldots0}_{24\text{ tane}}$ sayısının basamak sayısı bulunurken üslü sayılardan yararlanılabilir.

Sayı $A\cdot 10^n=123\cdot 10^{24}$ şeklinde yazılır. Verilen sayının basamak sayısı A sayma sayısının basamak sayısının n fazlasına eşittir.

- 123 sayısının basamak sayısı 3'tür.
- n=24 olarak bulunur.
- Verilen sayının basamak sayısı 3 + 24 = 27 olarak hesaplanır.

Benzer şekilde $(20^2)^3\cdot 4^{11}\cdot 5^{20}$ **sayısının kaç basamaklı olduğunu hesaplayınız.**

ÜSLÜ GÖSTERİMDE TOPLAMA VE ÇIKARMA İŞLEMİ

Tabloda verilen işlemlerin sonuçlarını örneklerdeki gibi bularak uygun yerlere yazınız.

İşlem	Ortak Çarpan Parantezindeki İşlem	Sonuç
$5 \cdot x + 3 \cdot x$	$(5+3) \cdot x$	$8x$
$3 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5^2$		
$4 \cdot 3^{10} - 2 \cdot 3^{10}$		
$0{,}2 \cdot 10^3 + 0{,}3 \cdot 10^3 - 10^3$		
$3^x + 3 \cdot 3^x - 2 \cdot 3^x$		
$a \cdot 6^y + b \cdot 6^y$		
$a \cdot x^n + b \cdot x^n - c \cdot x^n$		

NOT

Tabanı ve üssü aynı olan üslü gösterimler, ortak çarpan parantezine alınarak toplanabilir ve çıkarılabilir. Bu durum aşağıdaki önerme biçiminde gösterilmiştir.

n bir tam sayı; a, b, c gerçek sayı ve x sıfırdan farklı olmak üzere ;

$$a \cdot x^n + b \cdot x^n - c \cdot x^n = (a + b - c) \cdot x^n$$

ÖRNEK

Bir astronom, uzaydaki belirli bir bölgeden gelen yıldız ışığını inceliyor. Ölçümler sonucunda, 1 santimetreküp uzay bölgesinde bulunan foton miktarını hesaplıyor. Fotonlar, ışık parçacıklarıdır ve farklı dalga boylarına göre yoğunlukları değişebilir. Buna göre foton miktarları ışık türüne göre şu şekildedir:

- Görünür ışık fotonları: $4{,}2 \times 10^9$ N
- Kızılötesi ışık fotonları: $1{,}5 \times 10^8$ N
- Morötesi ışık fotonları: 3×10^7 N

Buna göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

1. **Bu uzay bölgesindeki toplam foton miktarını bilimsel olarak ifade ediniz.**

ÇÖZÜM

Üslü gösterimlerde toplam işleminin yapılabilmesi için öncelikle üslü gösterimli ifadelerin benzer olması gerekmektedir. Eğer üslü gösterimler benzer değilse önce onları benzer yapmalıyız. Bunun için verilen foton sayılarında 10' nun kuvveti biçiminde yazılan gösterimleri en küçük kuvvet (burada 10'nun 7. kuvveti) eşitlemeye çalışın. Bunun için bilimsel gösterim bölümüne tekrar bakabilirsiniz. Üslü gösterimleri eşitledikten sonra katsayıları toplayabilirsiniz.

$$\begin{aligned} & 4{,}2 \cdot 10^9 + 1{,}5 \cdot 10^8 + 3 \cdot 10^7 \\ &= 420 \cdot 10^7 + 15 \cdot 10^7 + 3 \cdot 10^7 \\ &= (420 + 15 + 3) \cdot 10^7 \\ &= 438 \cdot 10^7 \\ &= 4{,}38 \cdot 10^9 \end{aligned}$$

2. **Kızılötesi foton miktarı %20 oranında azalırsa, yeni toplam foton miktarı ne olur?**

ÇÖZÜM

Kızılötesi foton miktarı %20 oranında azalırsa, yeni toplam foton miktarını hesaplayalım.

Öncelikle Kızılötesi foton miktarı $1,5 \cdot 10^8$ N bu sayının %20'si demek 5'te 1 oranını bulmak demektir. Yani kızılötesi foton miktarı 5'te 1 oranında azalıyorsa foton miktarının 5'te 4'ünü bulmak yeni miktarı doğrudan hesaplamamıza yardımcı olacaktır.

$$1,5 \cdot 10^8 \cdot \frac{4}{5}$$
$$= \frac{1,5 \cdot 4 \cdot 10^8}{5}$$
$$= \frac{6 \cdot 10^8}{5}$$
$$= 1,2 \cdot 10^8$$

Bu durumda toplam foton miktarı $= 4,2 \cdot 10^9 + 1,2 \cdot 10^8 + 3 \cdot 10^7$
$= 420 \cdot 10^7 + 12 \cdot 10^7 + 3 \cdot 10^7$
$= (420 + 12 + 3) \cdot 10^7$
$= 435 \cdot 10^7$
$= 4,35 \cdot 10^9$ olur.

SIRA SİZDE 7.

Bir genetik araştırma laboratuvarında, üç farklı organizmanın DNA örnekleri mikroskobik düzeyde incelenmektedir. Araştırmacılar, her organizmanın DNA'sında bulunan baz çifti (adenin-timin ve guanin-sitozin eşleşmeleri) sayısını hesaplamıştır.

Ölçüm sonuçları:

- Organizma A'nın DNA'sında: $3,2 \cdot 10^8$ baz çifti bulunuyor.
- Organizma B'nin DNA'sında: $7,5 \cdot 10^7$ baz çifti var.
- Organizma C'nin DNA'sında: $1,08 \cdot 10^8$ baz çifti tespit edilmiştir.

Buna göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

1. **Bu üç organizmanın DNA'sında toplam kaç baz çifti vardır? Sonucu bilimsel gösterimle ifade ediniz.**

2. **Eğer Organizma B'de ölçüm hatasından dolayı $1,5 \cdot 10^7$ fazla baz çifti yazıldığı tespit edilirse, doğru toplam baz çifti sayısı ne olur?**

3. **Toplam sayının yaklaşık olarak 10^8 mertebesinde olduğunu söyleyebilir miyiz? Açıklayınız.**

GERÇEK SAYILARIN KÖKLÜ GÖSTERİMİ



Yanda, yol kenarında bulunan kare şeklindeki Arsa 1'in alanı 20 m^2, Arsa 2'nin alanı ise 16 m^2 olarak verilmiştir. Bu arsaların yola bakan kenarlarına çit çekilecektir. Buna göre iki arsanın da yola bakan kenarına kaç metre çit çekileceğini bulunuz.

İhtiyacınız olan çit uzunluklarını bulabildiniz mi? Bu uzunlukları bulurken farklı bir matematiksel gösterim kullandınız mı?

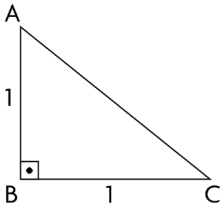
İşte burada kök kavramı devreye girmektedir.

Arsa 2'de ihtiyaç duyulan çit uzunluğu , "Hangi sayının karesi 16'dır?" sorusunun cevabıyla 4 metre olarak bulunur.

Fakat Arsa 1'de ihtiyaç duyulan çit uzunluğu "Hangi sayının karesi 20'dir?" sorusunun cevabıyla $\sqrt{20}$ metre olarak bulunur.

Kareköklü sayılar, özellikle tam kare olmayan sayıların karekköklerini ifade etmek için kullanılır. Bu sayıların ortaya çıkışı, gerçek hayat problemleriyle başlamış olup, Pisagor bu alandaki öncülerden biridir.

Şimdi de köklü sayıların keşfedilmesine öncülük eden durumu inceleyelim. Dik kenar uzunlukları birer birim olan bir dik üçgenin hipotenüs uzunluğunu bulalım.



$|AC|^2 = 1^2 + 1^2$

$|AC|^2 = 2$

Sizce hangi sayının karesi 2'dir?

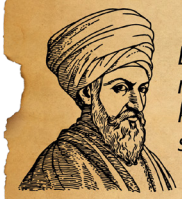
Pisagor sadece rasyonel sayıları kullanarak bu soruya bir cevap bulamamıştır. Bu durum köklü sayılar kavramının ortaya çıkmasına katkı sağlamıştır. Buradan da karesi 2 olan sayı $\sqrt{2}$ olarak ifade edilmiştir.

Köklü ve Üslü Gösterimler Arasındaki İlişki

Köklü ve üslü gösterimler, belirli matematiksel kurallar çerçevesinde birbirine dönüştürülebilen iki farklı ifade biçimidir. Bu bölümde, köklü ve üslü gösterimler arasındaki ilişkiyi kavrayabilmek amacıyla bu iki gösterim türünü karşılaştıracak ve aralarındaki dönüşümün mantığını birlikte keşfedeceğiz.

Pisagor, M.Ö.570 ile M.Ö. 495 yılları arasında yaşamış olan İyonyalı filozof ve matematikçidir. Babillerin kil tabletlerinde yer alan ve Antik Mısır'da piramitlerin inşasında pratik olarak kullanılan teoremi kanıtlamış ve kendi adını vermiştir. Bu kanıt sayesinde o dönemde henüz keşfedilmemiş irrasyonel sayıların bulunmasına katkıda bulunmuştur.





El-Harizmi gibi İslam dünyasındaki matematikçiler karekök için Arapça "cezr" (kök) kelimesini kullanıyordu. Yazılı metinlerde sembol değil, sözcükle ifade yaygındı.

Christoff Rudolff, Alman matematikçi, "Coss" adlı cebir kitabında karekök için ilk defa $\sqrt{\ }$ sembolünü kullandı. Bu sembol, Almanca "radix" (kök) kelimesinin stilize edilmiş "r" harfinden türetildiği düşünülmektedir.



ETKİNLİK 2: Gizli Bağlantıyı Bul!

Aşağıdaki tabloda bazı sayıların kuvvetleri ve kökleri verilmiştir. İnceleyiniz.

1. ifade	2. ifade
$7^2 = 49$	$\sqrt{49} = 7$
$5^3 = 125$	$\sqrt[3]{125} = 5$
$2^5 = 32$	$\sqrt[5]{32} = 2$

1. **Aşağıda verilen köklü gösterimlerden hangileri, önceki yıllarda karşılaştığınız ve değerini bildiğiniz ifadelerdir?**

- $\sqrt{49} = 7$ (karekök 49)
- $\sqrt[3]{125} = 5$ (küpkök 125)
- $\sqrt[5]{32} = 2$ (beşinci dereceden kök 32)

2. **Bir sayı köklü olarak ifade edilebiliyorsa, bu sayı üslü gösterimle de yazılabilir mi? Aynı şekilde, üslü olarak verilen bir sayı köklü gösterim biçiminde ifade edilebilir mi? Bu iki gösterim türü arasında nasıl bir dönüşüm ilişkisi vardır?**

Tablodaki bir köklü gösterimi seçerek, üslü gösterim biçiminde ifade edelim.

$\sqrt{49} = 49^x$ eşitliğinde x yerine yazılması gereken sayıyı bulmamız gerekiyor.

$\sqrt{49} = 7$ olduğunu biliyoruz. $49^x = 7$ yazabiliriz.

$$\left(7^2\right)^x = 7^1$$

$$7^{2x} = 7^1$$

$$2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \text{ olarak bulunur.}$$

Yani $\sqrt{49}$ köklü gösterimi $\left(49\right)^{\frac{1}{2}}$ şeklinde üslü gösterime dönüştürülebilir.

$$\sqrt{49} = 49^{\frac{1}{2}}$$

3. Yukarıda doğrulama yöntemleri ile elde ettiğimiz $\sqrt{49} = 49^{\frac{1}{2}}$ ifadesine benzer şekilde aşağıda verilen tablolarda boş bırakılan yerleri doldurunuz.

Köklü Gösterim	Üslü Gösterim
$\sqrt{49}$	$(49)^{\frac{1}{2}}$
$\sqrt{3}$	
$\sqrt[3]{7}$	$7^{\frac{1}{3}}$
$\sqrt[5]{11}$	
$\sqrt[7]{5^3}$	$\left(5^3\right)^{\frac{1}{7}} = 5^{3.\frac{1}{7}} = 5^{\frac{3}{7}}$
$\sqrt[5]{2^4}$	
$\sqrt{15^9}$	
$\sqrt[9]{-3}$	

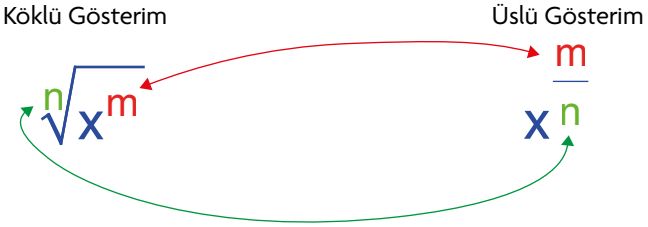
Üslü Gösterim	Köklü Gösterim
$2^{\frac{1}{4}}$	
$4^{\frac{2}{3}}$	
$7^{\frac{11}{5}}$	
$(-3)^{\frac{1}{5}}$	
$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$	
$6^{\frac{1}{3}}$	
$(-7)^{\frac{1}{7}}$	
$5^{\frac{2}{5}}$	

NOT

m ve n pozitif tam sayı; $n \geq 2$ ve x bir pozitif gerçek sayı olmak üzere $x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$ şeklinde ifade edilebilir.

$\sqrt[n]{x^m}$ ifadesine **köklü gösterim** denir. Bu gösterimde n değerine **kökün derecesi** adı verilir. $\sqrt[n]{x^m}$ ifadesi, " **n. dereceden kök x üzeri m** " şeklinde okunur.

Özel olarak n=2 olduğunda $\sqrt{x^m}$ şeklinde yazılır. Bu ifade, "**karekök x üzeri m**" şeklinde okunur.



ÖRNEK

$\sqrt[5]{x^a \cdot y^b \cdot z^c} = x \cdot y^2 \cdot z^3$ eşitliği veriliyor.

Buna göre a+b+c **ifadesinin değerini bulunuz.**

ÇÖZÜM

$\sqrt[5]{x^a \cdot y^b \cdot z^c}$ ifadesini üslü gösterim şeklinde yazalım.

$$\sqrt[5]{x^a \cdot y^b \cdot z^c} = \left(x^a \cdot y^b \cdot z^c\right)^{\frac{1}{5}}$$

$$= \left(x^a\right)^{\frac{1}{5}} \cdot \left(y^b\right)^{\frac{1}{5}} \cdot \left(z^c\right)^{\frac{1}{5}}$$

$= x^{a.\frac{1}{5}} \cdot y^{b.\frac{1}{5}} \cdot z^{c.\frac{1}{5}} = x^{\frac{a}{5}} \cdot y^{\frac{b}{5}} \cdot z^{\frac{c}{5}}$ olarak bulunur.

Buradan $x^{\frac{a}{5}} \cdot y^{\frac{b}{5}} \cdot z^{\frac{c}{5}} = x \cdot y^2 \cdot z^3$ eşitliğinde kuvvetler eşitlenerek,

$\frac{a}{5} = 1 \Rightarrow a = 5,$

$\frac{b}{5} = 2 \Rightarrow b = 10$ ve

$\frac{c}{5} = 3 \Rightarrow c = 15$ olarak hesaplanır. a + b + c = 5 + 10 + 15 = 30'du

ÖRNEK

x ve y pozitif tam sayılar olmak üzere $\sqrt[3]{1080} = x\sqrt[3]{y}$ **eşitliğini sağlayan <u>en büyük</u> x değeri için** $x \cdot y$ **işleminin sonucu kaçtır?**

ÇÖZÜM

1080 sayısını çarpanlara ayırarak yazalım.

$$1080 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5$$

$\sqrt[3]{1080} = x\sqrt[3]{y}$ eşitliğini sağlayan en büyük x değerini bulabilmek için $1080 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5$ değerini yerine yazalım ve kök dışarısına çıkarılabilecek en büyük değeri hesaplayalım.

$$\sqrt[3]{1080} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 3^3 \cdot 5} = \left(2^3 \cdot 3^3 \cdot 5\right)^{\frac{1}{3}} = \left(2^3\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(3^3\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(5\right)^{\frac{1}{3}} = 2 \cdot 3 \cdot \left(5\right)^{\frac{1}{3}} = 6 \cdot \left(5\right)^{\frac{1}{3}} = 6\sqrt[3]{5}$$

$6\sqrt[3]{5} = x\sqrt[3]{y}$ olduğundan x yerine yazılabilecek en büyük değer 6 olarak bulunur.

$x \cdot y = 6 \cdot 5 = 30$ olarak hesaplanır.

SIRA SİZDE 8.

a ve b pozitif tam sayılar olmak üzere $\sqrt[5]{96} = a\sqrt[5]{b}$ eşitliğini sağlayan <u>en büyük</u> a değeri için $a + b$ işleminin sonucu kaçtır?

ETKİNLİK 3: "Her köklü ifade gerçek sayı mıdır?"

$2^2 = 4 \longrightarrow \sqrt{4} = 2$
$7^2 = 49 \longrightarrow \sqrt{49} = 7$
$10^2 = 100 \longrightarrow \sqrt{100} = 10$

Basit Düşünelim!
$\sqrt{a}$: "Hangi sayının karesi a'dır?"

$2^3 = 8 \longrightarrow \sqrt[3]{8} = 2$
$3^3 = 27 \longrightarrow \sqrt[3]{27} = 3$
$5^3 = 125 \longrightarrow \sqrt[3]{125} = 5$

$\sqrt[3]{a}$: "Hangi sayının küpü a'dır?"

$2^4 = 16 \longrightarrow \sqrt[4]{16} = 2$
$5^4 = 625 \longrightarrow \sqrt[4]{625} = 5$
$(0,1)^4 = 0,0001 \longrightarrow \sqrt[4]{0,0001} = 0,1$

$\sqrt[4]{a}$: "Hangi sayının dördüncü kuvveti a'dır?"

UYARI

Kök içinde negatif bir sayı olduğunda ne olur?

- Hangi sayının karesi (–9)'dur?
- Hangi sayının küpü (–8)'dir?
- Hangi sayının dördüncü kuvveti (– 625)'dir?
- Bir gerçek (reel) sayının çift sayı kuvveti negatif bir sayı olabilir mi?

1. Verilen örnekleri inceleyiniz ve tabloda boş bırakılan yerleri doldurunuz.

	Gerçek Sayıdır	Rasyonel Sayıdır	Tam Sayıdır
$\sqrt{\frac{4}{9}}$	✓	✓	✗
$\sqrt[3]{-27}$	✓	✓	✓
$\sqrt[4]{-1}$	✗	✗	✗
$\sqrt{3}$	✓	✗	✗
$\sqrt[5]{-7}$	✓	✗	✗
$\sqrt[8]{-8}$	✗	✗	✗
$\sqrt[3]{-0,001}$	✓	✓	✗
$\sqrt[3]{-\frac{8}{125}}$			
$\sqrt[11]{2}$			
$\sqrt[4]{-2}$			
$\sqrt[4]{0,0016}$			
$\sqrt[7]{-1}$			
$\sqrt{-3}$			
$\sqrt[7]{-2}$			

NOT

k pozitif bir tam sayı, a bir gerçek sayı olmak üzere $\sqrt[2k+1]{a}$ ifadesi, tüm a değerleri için gerçek sayıdır. $\sqrt[2k]{a}$ ifadesi, $a \geqslant 0$ için gerçek sayıdır. Başka bir deyişle, bir gerçek sayının tek dereceli kökleri her zaman gerçektir. Ancak çift dereceli bir kökün gerçek bir sayı olabilmesi için, kök alınan sayının sıfır ya da pozitif olması gerekir.

UYARI

n çift sayı, $\sqrt[n]{a}$, a negatif gerçek sayı olduğunda $\sqrt[n]{a}$ gerçek sayı değildir.

2. Verilen örnekleri inceleyiniz ve tabloda boş bırakılan yerleri doldurunuz.

Köklü Gösterim	İşlemler	Sonuç
$\sqrt[5]{2^5}$	$\sqrt[5]{2^5} = \left(2^5\right)^{\frac{1}{5}} = 2^{5\cdot\frac{1}{5}} = 2^1 = 2$	2
$\sqrt[5]{(-2)^5}$	$\sqrt[5]{(-2)^5} = \left(-2^5\right)^{\frac{1}{5}} = -2^{5\cdot\frac{1}{5}} = -2^1 = -2$	−2
$\sqrt[4]{2^4}$	$\sqrt[4]{2^4} = \left(2^4\right)^{\frac{1}{4}} = 2^{4\cdot\frac{1}{4}} = 2^1 = 2$	2
$\sqrt[4]{(-2)^4}$	$\sqrt[4]{(-2)^4} = \left(2^4\right)^{\frac{1}{4}} = 2^{4\cdot\frac{1}{4}} = 2^1 = 2$	2
$\sqrt[3]{(-5)^3}$		
$\sqrt{(-7)^2}$		
$\sqrt[7]{3^7}$		
$\sqrt[10]{(-1)^{10}}$		
$\sqrt[3]{6^3}$		

NOT

a bir gerçek sayı, n pozitif tam sayı ve $n \geqslant 2$ olmak üzere,

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a, & n \text{ tek ise} \\ |a|, & n \text{ çift ise} \end{cases} \text{ olur.}$$

ÖRNEK

$\sqrt[4]{(-8)^4} + \sqrt[3]{(-5)^3} - \sqrt{(-3)^2}$ **işleminin sonucunu bulunuz.**

ÇÖZÜM

$\sqrt[4]{(-8)^4} = |-8| = 8$, $\sqrt[3]{(-5)^3} = -5$ ve $\sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$'tür.

Buradan $\sqrt[4]{(-8)^4} + \sqrt[3]{(-5)^3} - \sqrt{(-3)^2} = 8 + (-5) - 3 = 0$ olarak bulunur.

SIRA SİZDE 9.

$\sqrt[3]{\pi^3} - \sqrt{(\pi-3)^2} + \sqrt[5]{(-2)^5}$ **işleminin sonucunu bulunuz.** $(\pi \approx 3{,}14)$

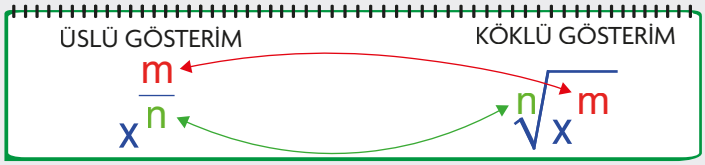
ETKİNLİK 4. KÖKÜN KUVVETİ İLE KUVVETİN KÖKÜ

Aşağıdaki tabloda, verilen örneklerde işlem sırasına dikkat edilerek işlemler yapılmış ve elde edilen sonuçlar karşılaştırılmıştır. Tabloda boş bırakılan yerleri uygun şekilde tamamlayınız.

1. İfade	İşlem / Sonuç	2. İfade	İşlem / Sonuç	Karşılaştırma
$\sqrt{25^3}$	$\sqrt{25^3} = \sqrt{(5^2)^3} = \sqrt{5^6} = \sqrt{(5^3)^2} = \sqrt{125^2} = 125$	$(\sqrt{25})^3$	$(\sqrt{25})^3 = 5^3 = 125$	$\sqrt{25^3} = (\sqrt{25})^3$
$\sqrt[4]{(-4)^2}$	$\sqrt[4]{(-4)^2} = \sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2$	$(\sqrt[4]{-4})^2$	$\sqrt[4]{-4}$ karmaşık sayı belirtir.	$\sqrt[4]{(-4)^2} \neq (\sqrt[4]{-4})^2$
$\sqrt{(-1)^4}$		$(\sqrt{-1})^4$		
$\sqrt[3]{(-64)^2}$		$(\sqrt[3]{-64})^2$		
$\sqrt{4^4}$		$(\sqrt{4})^4$		

UYARI

$x^{\frac{m}{n}}$ üslü gösterimi köklü gösterime çevrilirken önce x sayısının m. dereceden kuvveti alınır daha sonra n. dereceden kökü hesaplanır. Dönüşüm sırasına dikkat ediniz.



ETKİNLİK 5.

Verilen örnekleri inceleyiniz ve tabloda boş bırakılan yerleri doldurunuz.

Köklü Gösterim	İşlemler	Köklü Gösterim
$\sqrt[6]{2^3}$	$\sqrt[6]{2^3} = 2^{\frac{3}{6}} = 2^{\frac{3\div3}{6\div3}} = 2^{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{2}$
$\sqrt[15]{7^{10}}$	$\sqrt[15]{7^{10}} = 7^{\frac{10}{15}} = 7^{\frac{10\div5}{15\div5}} = 7^{\frac{2}{3}}$	$\sqrt[3]{7^2}$
$\sqrt[3]{5^2}$	$\sqrt[3]{5^2} = 5^{\frac{2}{3}} = 5^{\frac{2\cdot4}{3\cdot4}} = 5^{\frac{8}{12}}$	$\sqrt[12]{5^8}$
$\sqrt[21]{3^{14}}$		$\sqrt[3]{3^2}$
	$\ldots = \ldots = 3^{\frac{3\cdot4}{2\cdot4}} = \ldots$	
	$\ldots = \ldots = 5^{\frac{8\div4}{20\div4}} = \ldots$	

ÖRNEK

$a,b,c \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $\sqrt[15]{8^4} = \sqrt[b]{a^c}$ eşitliği sağlanmaktadır.

Buna göre $a + b + c$ **ifadesinin alabileceği en küçük değeri bulunuz.**

ÇÖZÜM

$\sqrt[15]{8^4} = \sqrt[b]{a^c}$ eşitliğinde a, b ve c'nin alabileceği en küçük değerleri bulalım. 15, 8 ve 4 sayılarını nasıl daha küçük sayılara dönüştürebilirsiniz?

$8 = 2^3$ eşitliğinden yararlanalım.

$\sqrt[15]{8^4} = \sqrt[15]{\left(2^3\right)^4} = \sqrt[15]{2^{12}}$ olarak yazılır. Kökün derecesi ve kök içerisindeki ifadenin kuvvetini sadeleştirelim.

$\sqrt[15]{2^{12}} = \sqrt[15\div3]{2^{12\div3}} = \sqrt[5]{2^4}$ Buradan $\sqrt[15]{8^4} = \sqrt[b]{a^c}$ eşitliğine ulaşılır.

$a + b + c$ ifadesinin alabileceği en küçük değer $2 + 5 + 4 = 11$ olarak bulunur.

SIRA SİZDE 10.

$b,c \in \mathbb{Z}^+$ ve $a \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $\sqrt[15]{8^4} = \sqrt[b]{a^c}$ eşitliği sağlanmaktadır.

Buna göre $a + b + c$ **ifadesinin alabileceği en küçük değeri bulunuz.**

UYARI

Soruda yapılan değişikliği gözden kaçırmayınız.

ÖRNEK

Kenar uzunluğu a birim olan bir küpün yüzey alanı $6a^2$ birimkare, hacmi a^3 birimküptür.

Yüzey alanı 18 birimkare olan küpün bir ayrıtının uzunluğu x birim, hacmi 16 birimküp olan bir küpün bir ayrıtının uzunluğu y birim, alanı 10 birimkare olan bir karenin bir kenarının uzunluğu z birimdir.

Buna göre x, y **ve** z **değerlerini küçükten büyüğe sıralayınız.**

ÇÖZÜM

x, y ve z değerlerini hesaplayalım. Bir ayrıtının uzunluğu x birim küpün yüzey alanı $6x^2$ birimkaredir.

$$6 \cdot x^2 = 18$$
$$x^2 = 3$$
$$x = \sqrt{3} \text{ birim olarak bulunur.}$$

Bir ayrıtının uzunluğu y birim küpün hacmi y^3 birimküptür.

$$y^3 = 16$$
$$y = \sqrt[3]{16} \text{ birimdir.}$$

Bir kenarının uzunluğu z birim olan karenin alanı z^2 birimkaredir.

$$z^2 = 10$$
$$z = \sqrt{10} \text{ birim olarak hesaplanır.}$$

x, y ve z değerlerini küçükten büyüğe sıralayalım.

1. yol

x, y ve z değerlerinin kök derecelerini eşitleyelim. Karekökün derecesi 2'dir. 2 ve 3; 6'da eşitlenir.

$$x = \sqrt[2\cdot3]{3^{1\cdot3}} = \sqrt[6]{3^3} = \sqrt[6]{27}$$
$$y = \sqrt[3\cdot2]{16^{1\cdot2}} = \sqrt[6]{16^2} = \sqrt[6]{256}$$
$$z = \sqrt[2\cdot3]{10^{1\cdot3}} = \sqrt[6]{10^3} = \sqrt[6]{1000}$$

$$\Rightarrow \quad 27 < 256 < 1000$$
$$\sqrt[6]{27} < \sqrt[6]{256} < \sqrt[6]{1000}$$
$$x < y < z$$

2. yol

$$x = \sqrt{3}$$
$$\sqrt{1} < \sqrt{3} < \sqrt{4}$$
$$1 < \sqrt{3} < 2$$
$$1 < x < 2$$
$$x \approx 1,.....$$

,

$$y = \sqrt[3]{16}$$
$$\sqrt[3]{8} < \sqrt[3]{16} < \sqrt[3]{27}$$
$$2 < \sqrt[3]{16} < 3$$
$$2 < y < 3$$
$$y \approx 2,.....$$

,

$$z = \sqrt{10}$$
$$\sqrt{9} < \sqrt{10} < \sqrt{16}$$
$$3 < \sqrt{10} < 4$$
$$3 < z < 4$$
$$z \approx 3,.....$$

olduğundan $x < y < z$

SIRA SİZDE 11.

Aşağıda verilen ifadelerin her birinin doğru mu, yoksa yanlış mı olduğunu belirleyiniz. Değerlendirmelerinizi gerekçelendirerek açıklayınız.

1. Bir köklü gösterimin sonucu rasyonel bir sayıysa, bu durum kök içindeki sayının tam kare olduğunu gösterir.

   ( ) Doğru ( ) Yanlış

2. Bir köklü gösterimi üslü gösterime dönüştürdüğümüzde, sayının değeri değişmez.

   ( ) Doğru ( ) Yanlış

3. Karekök içinde negatif bir sayı varsa, bu ifade gerçek sayılar kümesinde tanımsızdır.

   ( ) Doğru ( ) Yanlış

4. Bir doğal sayının karekökü alınırsa ve sonuç doğal sayı çıkmazsa, bu ifade mutlaka irrasyoneldir.

   ( ) Doğru ( ) Yanlış

KÖKLÜ GÖSTERİM TOPLAMA VE ÇIKARMA İŞLEMİ

1. Aşağıdaki tabloda üslü gösterimle toplama ve çıkarma işlemlerine yer verilmiştir.

İşlemlerin sonuçlarını önce üslü gösterim kullanarak bulunuz. Köklü gösterimle işlemin nasıl yapılabileceği ile ilgili varsayımınız doğrultusundaki sonucu köklü olarak yazınız.

İşlemin Üslü Gösterimi	Üslü Sonuç	İşlemin Köklü Gösterimi	Köklü Sonuç
$3\cdot 2^{\frac{1}{3}}+2^{\frac{1}{3}}$	$(3+1)\cdot 2^{\frac{1}{3}}$	$3\cdot\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2}$	$(3+1)\cdot\sqrt[3]{2}=4\cdot\sqrt[3]{2}$
$5\cdot 2^{\frac{2}{3}}+3\cdot 2^{\frac{2}{3}}$	$(5+3)\cdot 2^{\frac{2}{3}}$		
$4\cdot 5^{\frac{1}{2}}-6\cdot 5^{\frac{1}{2}}$			
$4\cdot 5^{\frac{1}{2}}-(-6\cdot 5^{\frac{1}{2}})$			
$6\cdot 2^{\frac{1}{5}}-3\cdot 2^{\frac{1}{5}}+2\cdot 2^{\frac{1}{5}}$			
$-3\cdot 10^{\frac{1}{3}}+5\cdot 10^{\frac{1}{3}}+4\cdot 10^{\frac{1}{3}}$			
$a\cdot y^{\frac{1}{n}}+b\cdot y^{\frac{1}{n}}-c\cdot y^{\frac{1}{n}}$			

2. m,n pozitif tam sayı $n \geq 2$, x, y pozitif gerçek sayı ve a, b, c gerçek sayı olmak üzere aşağıdaki tabloda köklü gösterimle işlemler verilmiştir.

Verilen örnekleri inceleyiniz ve tabloda boş bırakılan yerleri doldurunuz.

İşlem	Önerme
$a \cdot \sqrt[n]{x^m} + b \cdot \sqrt[n]{x^m}$	$a \cdot \sqrt[n]{x^m} + b \cdot \sqrt[n]{x^m} = (a+b) \cdot \sqrt[n]{x^m}$
$a \cdot \sqrt[n]{x^m} - b \cdot \sqrt[n]{x^m}$	
$a \cdot \sqrt[n]{x^m} + b \cdot \sqrt[n]{x^m} - c \cdot \sqrt[n]{x^m}$	

NOT

Kök dereceleri ve kök içindeki sayıları aynı olan köklü gösterimler, ortak çarpan parantezine alınarak toplanabilir ve çıkarılabilir. Bu durum aşağıdaki önerme biçiminde gösterilmiştir.

m, n ($n \geq 2$) pozitif tam sayı, x, y pozitif gerçek sayı ve a, b, c gerçek sayı olmak üzere;

$$a \cdot \sqrt[n]{x^m} + b \cdot \sqrt[n]{x^m} - c \cdot \sqrt[n]{x^m} = (a+b-c) \cdot \sqrt[n]{x^m}$$

3. Kök dereceleri aynı fakat kök içindeki sayıları farklı olan iki köklü gösterim toplanabilir ya da çıkarılabilir mi? Açıklayınız. Aşağıda yer alan örnekler üzerinden açıklamalarınızı yazabilirsiniz.

$2 \cdot \sqrt[3]{3} + 5 \cdot \sqrt[3]{5}$

$2 \cdot \sqrt[3]{3} + 5 \cdot \sqrt[3]{75}$

$2 \cdot \sqrt[3]{3} - 5 \cdot \sqrt[3]{5}$

$2 \cdot \sqrt[3]{3} - 5 \cdot \sqrt[3]{75}$

4. Kök dereceleri farklı fakat kök içindeki sayıları aynı olan iki köklü gösterim toplanabilir ya da çıkarılabilir mi? Açıklayınız. Aşağıda yer alan örnekler üzerinden açıklamalarınızı yazabilirsiniz.

$2 \cdot \sqrt[3]{3} + 5 \cdot \sqrt{3}$

$2 \cdot \sqrt[3]{3} - 5 \cdot \sqrt{3}$

ÖRNEK

$\sqrt{16}+\sqrt[4]{81}-\sqrt[3]{-27}$ **işleminin sonucunu bulunuz.**

ÇÖZÜM

Örnekte yer alan köklü gösterimlerin dikkat ettiyseniz kök dereceleri birbirinden farklı bu durumda, toplama ve çıkarma işlemlerinin sırasıyla yapılabilmesi için her bir ifadeyi tek tek kök dışına çıkarmak önemlidir.

$\sqrt{16}=4$

$\sqrt[4]{81}=\sqrt[4]{3^4}=3^{\frac{4}{4}}=3$

$\sqrt[3]{-27}=\sqrt[3]{-3^3}=-3^{\frac{3}{3}}=-3$ $\Rightarrow$ 4 + 3 − (−3) = 10 işlemin sonucu bu durumda 10 olarak bulunur.

ÖRNEK

$\sqrt{50}-\sqrt{18}+\sqrt{2}$ **işleminin sonucu kaçtır?**

ÇÖZÜM

Örnekte yer alan köklü gösterimde kök derecelerinin aynı fakat kök içinde yer alan sayılarının farklı olduğu görülmektedir. Bu durumda öncelik yine kök içinde yer alan sayıları kökten kurtarmak.

$\sqrt{50}=\sqrt{25\cdot 2}=5\sqrt{2}$

$\sqrt{18}=\sqrt{9\cdot 2}=3\sqrt{2}$ $\Rightarrow$ $5\sqrt{2}-3\sqrt{2}+\sqrt{2}=(5-3+1)\sqrt{2}=3\sqrt{2}$

SIRA SİZDE 12

$54\sqrt{3}-\sqrt{27}+\sqrt{12}$ **işleminin sonucu kaçtır?**

SIRA SİZDE 13.

$\dfrac{\sqrt{0,09}+\sqrt{0,25}}{\sqrt[3]{0,027}}$ **işleminin sonucu kaçtır?**

ÖRNEK

Bir depoda iki farklı boyutta kargo paketi bulunmaktadır. Küçük paketlerin ağırlığı $\sqrt{50}$ kg, büyük paketlerin ağırlığı ise $\sqrt{200}$ kg'dır.

Eğer 3 küçük paket ve 2 büyük paket taşırsanız toplam kaç kilogram yük taşımış olursunuz?

ÇÖZÜM

$3\sqrt{50}+2\sqrt{200}=3\cdot 5\sqrt{2}+2\cdot 10\sqrt{2}=15\sqrt{2}+20\sqrt{2}=35\sqrt{2}$

SIRA SİZDE 14.

Bir bahçede iki farklı çeşmeden su alınmaktadır. İlk çeşmenin su akışı $\sqrt{75}$ litre/dakika, ikinci çeşmenin su akışı ise $\sqrt{27}$ litre/dakikadır.

Eğer iki çeşme aynı anda çalışırsa 5 dakikada toplam kaç litre su akar?

KÖKLÜ GÖSTERİM ÇARPMA VE BÖLME İŞLEMİ

1. **Aşağıdaki tabloda üslü gösterimle çarpma ve bölme işlemlerine yer verilmiştir. İşlemlerin sonuçlarını önce üslü gösterim kullanarak bulunuz. Köklü gösterimle işlemin nasıl yapılabileceği ile ilgili varsayımınız doğrultusundaki sonucu köklü olarak yazınız.**

İşlemin Üslü Gösterim	Üslü Sonuç	İşlemin Köklü Gösterimi	Köklü Sonuç
$2^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}}$	$(2\cdot 3)^{\frac{1}{2}} = 6^{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$	$\sqrt{2}\cdot\sqrt{3} = \sqrt{2\cdot 3} = \sqrt{6}$
$3^{\frac{1}{4}} \cdot 5^{\frac{1}{4}}$			
$5\cdot 2^{\frac{1}{2}} \cdot 3\cdot 2^{\frac{1}{2}}$			
$\dfrac{6^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}}$			
$\dfrac{6^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}}}{3^{\frac{1}{3}}}$			
$(5^{\frac{1}{2}})^{\frac{2}{5}}$			

2. **m, n pozitif tam sayı, x, y pozitif gerçek sayı ve a, b gerçek sayı olmak üzere aşağıdaki tabloda köklü gösterimle işlemler verilmiştir.**

   Varsayımlarınızla genellemelerinizi karşılaştırarak önermelerinizi tablodaki örnek gibi doldurunuz.

İşlem	Önerme
$\sqrt[n]{x^m} \cdot \sqrt[n]{y^m}$	$\sqrt[n]{x^m \cdot y^m} = \sqrt[n]{(x\cdot y)^m}$
$a\sqrt[n]{x^m} \cdot b\sqrt[n]{y^m}$	
$\dfrac{\sqrt[n]{x^m}}{\sqrt[n]{y^m}}$	
$\dfrac{a\sqrt[n]{x^m}}{b\sqrt[n]{y^m}}$	
$\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}}$	

3. Kök dereceleri farklı olan iki köklü gösterim çarpılabilir veya bölünebilir mi? Açıklayınız. Aşağıda yer alan örnekler üzerinden açıklamalarınızı yazabilirsiniz.

$\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt{2}$

$\sqrt[6]{5} \cdot \sqrt[3]{4}$

NOT

Kök dereceleri aynı olan köklü gösterimler de çarpma işlemi yaparken varsa kök dışındaki sayılar kendi aralarında çarpılıp kök dışına yazılırken kök içindeki sayılarda kendi aralarında çarpılarak yine kök derecesi değiştirilmeden kök içine yazılır. Benzer şekilde bölme işlemini de yapabilirsiniz. Bu durum aşağıdaki önerme biçiminde gösterilmiştir.

$n \geq 2$ pozitif tam sayı, x, y pozitif gerçek sayı ve a, b (b sıfırdan farklı) gerçek sayı olmak üzere;

$$a\sqrt[n]{x} \cdot b\sqrt[n]{y} = a \cdot b\sqrt[n]{x \cdot y} \qquad \frac{a\sqrt[n]{x}}{b\sqrt[n]{y}} = \frac{a}{b} \cdot \sqrt[n]{\frac{x}{y}}$$

ÖRNEK

$\frac{\sqrt{45} \cdot \sqrt{20}}{\sqrt{5}}$ **işleminin sonucu kaçtır?**

ÇÖZÜM

$$\sqrt{\frac{45 \cdot 20}{5}} = \sqrt{9 \cdot 20} = \sqrt{9 \cdot 4 \cdot 5}$$
$$= 3 \cdot 2\sqrt{5} = 6\sqrt{5}$$

SIRA SİZDE 15.

$\frac{\sqrt{48} \cdot (\sqrt{75} - \sqrt{12})}{\sqrt{3}}$ **işleminin sonucu kaçtır?**

ÖRNEK

$\frac{x \cdot \sqrt{50}}{\sqrt{8}} = 5\sqrt{2}$ **eşitliğini sağlayan x pozitif gerçek sayısının değeri kaçtır?**

ÇÖZÜM

$$\frac{x \cdot \sqrt{50}}{\sqrt{8}} = 5\sqrt{2}$$

$$x = 5\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{50}} = 5\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{8}}{5\sqrt{2}}$$

$$x = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

SIRA SİZDE 16.

$\frac{\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[4]{3}}{\sqrt[12]{6}}$ **işleminin sonucu kaçtır?**

KÖKLÜ GÖSTERİMLERİN EŞLENİĞİNİ BULMA

1. **Aşağıdaki tabloda verilen çarpma işlemlerini örnekteki gibi yaparak tabloda sonuç kısmına uygun yerlere yazınız.**

İşlem	Sonuç
$\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$	$\sqrt{2 \cdot 2} = \sqrt{4} = 2$
$\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}$	
$3\sqrt{7} \cdot \sqrt{7}$	
$(\sqrt{3} - \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{3} + \sqrt{2})$	$(\sqrt{3} - \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{3} + \sqrt{2}) = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} + \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} - \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} + \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$ $= \sqrt{3^2} - \sqrt{6} + \sqrt{6} - \sqrt{2^2} = 3 - 2 = 1$
$(\sqrt{7} - \sqrt{5}) \cdot (\sqrt{7} + \sqrt{5})$	
$(3 - \sqrt{2}) \cdot (3 + \sqrt{2})$	
$\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2^2}$	

2. **Yukarıdaki tabloda elde ettiğiniz sonuçlar doğrultusunda genellemelerinizi aşağıdaki tablodaki sonuç kısmına yazınız.**

   a ve b pozitif bir gerçek sayıdır.

İşlem	Sonuç
$\sqrt{a} \cdot \sqrt{a}$	
$(\sqrt{a} - \sqrt{b}) \cdot (\sqrt{a} + \sqrt{b})$	
$(a - \sqrt{b}) \cdot (a + \sqrt{b})$	

NOT

- $(a-\sqrt{b})$ ifadesinin eşleniği $(a+\sqrt{b})$ dir.
- $\sqrt{b}$ sayısının eşleniği $\sqrt{b}$ dir.

İrrasyonel bir sayının eşleniği ile çarpımı rasyoneldir. Bu durum işlem yaparken daha kolay işlem yapmamızı sağlamak için özellikle kesirli ifadelerde payda da irrasyonel bir sayı olması durumunda tercih edilir. Örneğin;

$\frac{1}{a-\sqrt{b}}$ şeklinde verilmiş bir cebirsel ifadede pay ve payda $(a+\sqrt{b})$ cebirsel ifade ile genişletildiğinde

$\frac{1\cdot(a+\sqrt{b})}{a-\sqrt{b}\cdot(a+\sqrt{b})} = \frac{(a+\sqrt{b})}{a^2-b}$ payda rasyonel bir sayı olur.

ÖRNEK

Aşağıda verilen köklü gösterimlerin paydalarını rasyonel yapınız.

$\frac{6}{\sqrt{2}}$

$\frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{6\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$

$\frac{5}{\sqrt{5}}$

$\frac{5}{\sqrt{5}} = \frac{5\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{5}}{5} = \sqrt{5}$

$\frac{3}{\sqrt{2}-1}$

$\frac{3}{\sqrt{2}-1} = \frac{3\cdot(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)\cdot(\sqrt{2}+1)} = \frac{3\cdot\sqrt{2}+3}{1} = 3\cdot\sqrt{2}+3$

$\frac{4}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$

$\frac{4}{\sqrt{7}+\sqrt{3}} = \frac{4\cdot(\sqrt{7}-\sqrt{3})}{(\sqrt{7}+\sqrt{3})\cdot(\sqrt{7}-\sqrt{3})} = \frac{4\cdot(\sqrt{7}-\sqrt{3})}{7-3} = \frac{4\cdot(\sqrt{7}-\sqrt{3})}{4} = \sqrt{7}-\sqrt{3}$

$\frac{10}{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

$\frac{10}{2\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{10\cdot(2\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(2\sqrt{3}-\sqrt{2})\cdot(2\sqrt{3}+\sqrt{2})} = \frac{10\cdot(2\sqrt{3}+\sqrt{2})}{12-2} = \frac{10\cdot(2\sqrt{3}+\sqrt{2})}{10} = 2\sqrt{3}+\sqrt{2}$

HATIRLATMA

Paydayı rasyonel yapmak için pay ve payda paydanın eşleniği ile genişletilir.

SIRA SİZDE 17.

$\frac{3}{2\sqrt{2}-3} + \sqrt{50}$ **işleminin sonucu kaçtır?**

SIRA SİZDE 18.

$\frac{12}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\frac{2}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}$ **işleminin sonucu kaçtır?**

GERİ BİLDİRİM

Bu geri bildirim sayesinde kendi cevabınızı kontrol edebilir, hatalarınızı düzelterek öğrenmenizi pekiştirebilirsiniz.

GERÇEK SAYILARIN ÜSLÜ GÖSTERİMLERİ

İşlem	Üslü Gösterim	Sonuç
$2 \cdot 2 \cdot 2$	2^3	8
$\left(\frac{3}{5}\right)\cdot\left(\frac{3}{5}\right)$	$\left(\frac{3}{5}\right)^2$	$\frac{9}{25}$
$-3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$	-3^6	-729
$(-2) \cdot (-2)$	$(-2)^2$	4
$(-2) \cdot (-2) \cdot (-2)$	$(-2)^3$	-8
$0 \cdot 0 \cdot 0$	0^3	0
$0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0$	0^5	0
1	11^0	1
1	$(-6)^0$	1
$\frac{1}{3}$	3^{-1}	$\frac{1}{3}$
$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}$	$\left(\frac{1}{3}\right)^2 = (3)^{-2}$	$\frac{1}{9}$

SIRA SİZDE 1.

ÇÖZÜM

1.
- Başlangıçtaki bakteri sayısı: 6.10^3
- Her 20 dakikada bir 2 katına çıkıyor
- Toplam süre: 2 saat = 120 dakika
- 120 dakikada gerçekleşen bölünme sayısı: $\frac{120}{20} = 6$ kez

Deney sonunda kaç bakteri oluşur?

Her 20 dakikada bir 2 katına çıkıyor, yani:

Toplam katlanma oranı = $2^6 = 64$

Başlangıçtaki bakteri sayısı 6.10^3 olduğu için son bakteri sayısı $6.10^3.64 = 384.10^3$ olarak hesaplanır.

Cevap bilimsel gösterim ile ifade edersek $3,84.10^5$ 'tir.

Gözlem ve Tahmin:

Gözlem: 2 saat sonunda bakteri sayısı yaklaşık 384 000'e ulaştı. Bu artış **üstel** olduğundan, durdurulmazsa çok hızlı şekilde devasa sayılara ulaşır.

2. Tahmin: 1 gün (24 saat) boyunca büyümeye devam ederse ne olur?

- 24 saat = 1440 dakika
- Bölünme sayısı: $\frac{1440}{20} = 72$ kez

Yani bakteri sayısı 1 günün sonunda $6 \cdot 10^3 \cdot 2^{72}$ değerine ulaşır. Eğer bu bakterilerin büyümesi durdurulmasaydı, bir gün sonunda milyarlarca kat artar ve büyük bir alanı kaplayarak laboratuvar koşullarını tehdit edebilirdi. Bu sayıda bakteri, fiziksel olarak tüm laboratuvarı, hatta bir binayı bile doldurabilecek kadar fazla yer kaplardı.

SIRA SİZDE 2.

ÇÖZÜM

- Türkiye nüfusu (2024): 75 milyon = 75.10^6 kişi
- Her birey günde 10 litre su tasarrufu yapıyor.
- Süre: 1 hafta (7 gün)

1. Günlük toplam su tasarrufu (litre)

Her bireyin günde 10 litre su tasarrufu yaptığı bilindiği için günlük toplam su tasarrufu $75.10^6.10 = 75.10^{6+1} = 75.10^7$ litredir.

2. Haftalık toplam tasarruf (litre)

$75.10^7.7 = 525.10^7$ olarak hesaplanır.

3. Bilimsel gösterimle ifade edelim.

$525.10^7 = 5,25.10^9$

GERÇEK SAYILARIN ÜSLÜ GÖSTERİMLERİYLE YAPILAN ÇARPMA VE BÖLME İŞLEMLERİ 1

İşlem	İşlemin Açık Hali	Sonuç
$2^3 \cdot 2^5$	$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{3 \text{ tane}} \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{5 \text{ tane}}$	2^8
$5^6 \cdot 5^3 \cdot 5^2$	$5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$	5^{11}
$(-2)^6 \cdot (-2)^5 \cdot (-2)^3$	$(-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot \ldots \cdot (-2)$	$(-2)^{14}$
$3^5 \cdot 3^{-6}$	$\cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \frac{1}{\cancel{3}} \cdot \frac{1}{\cancel{3}} \cdot \frac{1}{\cancel{3}} \cdot \frac{1}{\cancel{3}} \cdot \frac{1}{\cancel{3}} \cdot \frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
$7^{-4} \cdot 7^3$	$\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{7} \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$	$\frac{1}{7}$
$\left(\frac{3}{5}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^4$	$\frac{5}{3} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5}$	$\left(\frac{3}{5}\right)^3$
$2^x \cdot 2^3$	$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{x \text{ tane}} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$	2^{x+3}
$x^a \cdot x^b$	$\underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{a \text{ tane}} \cdot \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{b \text{ tane}}$	x^{a+b}
$\frac{5^4}{5^3}$	$\frac{\cancel{5} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{5} \cdot 5}{\cancel{5} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{5}}$	5
$\frac{3^4}{3^6}$	$\frac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}$	3^{-2}
$(-5)^3 \div (-5)^1$	$\frac{(-5) \cdot (-5) \cdot (-5)}{(-5)}$	5^2
$\frac{2^5}{2^{-4}}$	$\frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$	2^9
$\frac{x^a}{x^b}$	$\frac{\overbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}^{a \text{ tane}}}{\underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{b \text{ tane}}}$	x^{a-b}

SIRA SİZDE 3.

ÇÖZÜM

1. Toplam veri miktarını hesaplayalım:

12 saatte toplam kaç saniye vardır?

Bir saat 60 dakika, her dakika 60 saniye olduğuna göre:

12 saat= 12 • 60 • 60 saniye= 43200 saniyedir.

Her saniye $2,5.10^6$ bayt yedeklendiğine göre, 12 saatte toplam $2,5.10^6 \cdot 43200 = 108000 \cdot 10^6$ bayt yedekleme yapılır. Sonucu bilimsel gösterimle yazalım.

$$108000.10^6 = 1,08.10^5.10^6 = 1,08.10^{5+6} = 1,08.10^{11}$$

2. Dosya sayısını hesaplayalım:

Toplam yedeklenen veri, her biri 5.10^3 bayt olan dosyalara ayrılırsa,

$$\frac{1,08 \cdot 10^{11}}{5 \cdot 10^3} = \frac{1,08}{5} \cdot \frac{10^{11}}{10^3} = 0,216 \cdot 10^{11-3} = 0,216 \cdot 10^8 = 2,16 \cdot 10^7$$

- **Toplam yedeklenen veri:** $1,08 \cdot 10^{11}$ bayt
- **Oluşan toplam dosya sayısı:** $2,16 \cdot 10^7$ dosya

SIRA SİZDE 4.

ÇÖZÜM

- **Her ana anten** 2^3 alt anten içeriyor.
- **Her alt anten** 2^4 sinyal birimi içeriyor.
- **Her sinyal birimi** saniyede 2^5 veri paketi iletiyor.

a) Bir ana antenin toplam sinyal birimi sayısı nedir?

İpucu: Toplam sinyal birimi = (alt anten sayısı) × (her bir alt antenin sinyal birimi sayısı)

İşlem: $2^3 \cdot 2^4 = 2^{3+4} = 2^7$

b) Bir ana anten saniyede kaç veri paketi iletebilir?

İpucu: Toplam veri paketi = (sinyal birimi sayısı) × (bir sinyal biriminin veri paketi iletim gücü)

İşlem: $2^7 \cdot 2^5 = 2^{7+5} = 2^{12}$

c) Toplamda 2^{15} veri paketi iletilmesi gerekiyorsa, bir ana anten bu işlemi kaç saniyede tamamlar?

İpucu: Toplam süre = (gereken toplam paket sayısı) ÷ (saniyede iletilebilen paket sayısı)

Bu işlemde üslü sayıların **tabanları aynı, üsleri çıkarılır.**

İşlem: $\frac{2^{15}}{2^{12}} = 2^{15-12} = 2^3 = 8$

GERÇEK SAYILARIN ÜSLÜ GÖSTERİMLERİYLE YAPILAN ÇARPMA VE BÖLME İŞLEMLERİ 2

İşlem	İşlemin Açık Hali	Sonuç
$2^2 \cdot 3^2$	$2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = (2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3) = 6 \cdot 6$	6^2
$5^x \cdot 6^x$	$\underbrace{5 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 5}_{x \text{ tane}} \cdot \underbrace{6 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 6}_{x \text{ tane}} = \underbrace{(5 \cdot 6) \cdot (5 \cdot 6) \cdot \ldots \cdot (5 \cdot 6)}_{x \text{ tane}}$	$(5 \cdot 6)^x$
$\left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^4$	$\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5}\right) \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5}\right) \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5}\right) \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5}\right)$	$\left(\frac{2}{5}\right)^4$
$(-2)^5 \cdot (5)^5$	$(-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = (-2 \cdot 5) \cdot (-2 \cdot 5) \cdot (-2 \cdot 5) \cdot (-2 \cdot 5) \cdot (-2 \cdot 5)$	-10^5
$\left(-\frac{1}{3}\right)^2 \cdot (-9)^2$	$\left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot (-9) \cdot (-9) = \left(\left(-\frac{1}{3}\right) \cdot (-9)\right) \cdot \left(\left(-\frac{1}{3}\right) \cdot (-9)\right)$	3^2
$x^a \cdot y^a$	$\underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{a \text{ tane}} \cdot \underbrace{y \cdot y \cdot \ldots \cdot y}_{a \text{ tane}} = \underbrace{(x \cdot y) \cdot (x \cdot y) \cdot \ldots \cdot (x \cdot y)}_{a \text{ tane}}$	$(x \cdot y)^a$
$\frac{12^4}{3^4}$	$\frac{12 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 12}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = \left(\frac{12}{3}\right) \cdot \left(\frac{12}{3}\right) \cdot \left(\frac{12}{3}\right) \cdot \left(\frac{12}{3}\right)$	4^4
$\frac{6^5}{(-2)^5}$	$\frac{6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6}{(-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2)} = \left(\frac{6}{-2}\right) \cdot \left(\frac{6}{-2}\right) \cdot \left(\frac{6}{-2}\right) \cdot \left(\frac{6}{-2}\right) \cdot \left(\frac{6}{-2}\right)$	-3^5
$\frac{10^a}{5^a}$	$\frac{\overbrace{10 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot 10}^{a \text{ tane}}}{\underbrace{5 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 5}_{a \text{ tane}}} = \underbrace{\left(\frac{10}{5}\right) \cdot \left(\frac{10}{5}\right) \cdot \ldots \cdot \left(\frac{10}{5}\right)}_{a \text{ tane}}$	2^a
$\frac{x^m}{y^m}$	$\frac{\overbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}^{m \text{ tane}}}{\underbrace{y \cdot y \cdot \ldots \cdot y}_{m \text{ tane}}} = \underbrace{\frac{x}{y} \cdot \frac{x}{y} \cdot \ldots \cdot \frac{x}{y}}_{m \text{ tane}}$	$\left(\frac{x}{y}\right)^m$

BİR SAYININ KUVVETİNİN KUVVETİ

İşlem	İşlemin Açık Hali	Sonuç
$\left(2^3\right)^4$	$2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^3$	2^{12}
$\left(7^4\right)^2$	$7^4 \cdot 7^4$	7^8
$\left(-10^2\right)^3$	$-10^2 \cdot 10^2 \cdot 10^2 = -10^{2+2+2}$	-10^6
$\left(4^{-3}\right)^{-1}$	$\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\right)^{-1} = \left(\left(\frac{1}{4}\right)^3\right)^{-1} = \left(\frac{1}{4^3}\right)^{-1} = \left(4^3\right)^1$	4^3
$\left(6^3\right)^{-2}$	$\left(\frac{1}{6^3}\right)^2 = \left(\frac{1}{6^3}\right)\cdot\left(\frac{1}{6^3}\right) = \frac{1}{6^{3+3}} = \frac{1}{6^6}$	6^{-6}

ETKİNLİK 1: İki Dirhem Bir Çekirdek – Üslü İfadelerle Altın Yolculuğu

ÇÖZÜM

Görev 1:

ilk gün dahil olmak üzere 10 gün sonunda kaç gram olduğunu sorduğumuz için, n=10 alınır.

(çünkü ilk gün zaten 0,2 gram var ve sonra 10 kez katlanır): Bu durumda $0,2 \cdot 2^n = 0,2 \cdot 1024 = 204,8$ gram

Görev 2:

$0,2 \cdot 2^n = 3,2$

$2^n = 16$

$n = 4$

Görev 3:

$0,2 \cdot 2^{20}$ çekirdek kadar altın olurdu, bu değeri de dirheme çevirmek için 3,2 grama bölmek gerekir.

$$\frac{0,2 \cdot 2^{20}}{3,2} = \frac{2^{21}}{32} = \frac{2^{21}}{2^5} = 2^{21-5} = 2^{16}$$

SIRA SİZDE 5.

ÇÖZÜM

$$\left(\left(\frac{1}{0,5}\right)^8\right)^{-2} = \left(\left(\frac{1}{\frac{5}{10}}\right)^8\right)^{-2} = \left(\left(\frac{10}{5}\right)^8\right)^{-2} = \left(\left(2\right)^8\right)^{-2} = \left(2\right)^{8\cdot(-2)} = 2^{-16}$$ ve

$$\left(\frac{20^{11}}{10^{11}}\right)^2 = \left(\left(\frac{20}{10}\right)^{11}\right)^2 = \left(2^{11}\right)^2 = 2^{11.2} = 2^{22}$$ olarak hesaplanır.

Bulunan değerler yerine yazılırsa

$$\left(\left(\frac{1}{0,5}\right)^8\right)^{-2} \cdot \left(\frac{20^{11}}{10^{11}}\right)^2 = 2^{-16} \cdot 2^{22} = 2^{-16+22} = 2^6 = 64$$ olarak bulunur.

SIRA SİZDE 6.

ÇÖZÜM

$(20^2)^3 \cdot 4^{11} \cdot 5^{20}$ sayısının basamak sayısını bulabilmek için $A \cdot 10^n$ şeklinde yazalım.

$$(20^2)^3 \cdot 4^{11} \cdot 5^{20} = 20^6 \cdot 4^{11} \cdot 5^{20} = (2 \cdot 10)^6 \cdot \left(2^2\right)^{11} \cdot 5^{20} = 2^6 \cdot 10^6 \cdot 2^{22} \cdot 5^{20} = 2^6 \cdot 10^6 \cdot 2^2 \cdot 2^{20} \cdot 5^{20}$$

$$= (2^2 \cdot 2^6) \cdot (2 \cdot 5)^{20} \cdot 10^6 = 2^8 \cdot 10^{20} \cdot 10^6$$

$$= 256 \cdot 10^{26}$$

olarak yazılabilir.

- A=256 sayısı üç basamaklıdır.
- n=26 olarak alınır.
- Sayının basamak sayısı 3+26=29 olarak hesaplanır.

ÜSLÜ GÖSTERİMDE TOPLAMA VE ÇIKARMA İŞLEMİ

İşlem	Ortak Çarpan Parantezindeki İşlem	Sonuç
$5 \cdot x + 3 \cdot x$	$(5+3) \cdot x$	$8x$
$3 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5^2$	$(3+2) \cdot 5^3 = 5 \cdot 5^3$	5^4
$4 \cdot 3^{10} - 2 \cdot 3^{10}$	$(4-2) \cdot 3^{10} = 2 \cdot 3^{10}$	$2 \cdot 3^{10}$
$0{,}2 \cdot 10^3 + 0{,}3 \cdot 10^3 - 10^3$	$(0{,}2 + 0{,}3 - 1) \cdot 10^3$	$-0{,}5 \cdot 10^3$
$3^x + 3 \cdot 3^x - 2 \cdot 3^x$	$(3+1-2) \cdot 3^x$	$2 \cdot 3^x$
$a \cdot 6^y + b \cdot 6^y$	$(a+b) \cdot 6^y$	$(a+b) \cdot 6^y$
$a \cdot x^n + b \cdot x^n - c \cdot x^n$	$(a+b-c) \cdot x^n$	$(a+b-c) \cdot x^n$

SIRA SİZDE 7.

ÇÖZÜM

1) $3{,}2 \cdot 10^8 + 7{,}5 \cdot 10^7 + 1{,}08 \cdot 10^8 = (32 + 7{,}5 + 10{,}8) \cdot 10^7 = 50{,}3 \cdot 10^7 = 5{,}03 \cdot 10^8$

2) $7{,}5 \cdot 10^7 + 1{,}5 \cdot 10^7 = (7{,}5 + 1{,}5) \cdot 10^7 = 9 \cdot 10^7$

$3{,}2 \cdot 10^8 + 9 \cdot 10^7 + 1{,}08 \cdot 10^8 = (32 + 9 + 10{,}8) \cdot 10^7 = 51{,}8 \cdot 10^7 = 5{,}18 \cdot 10^8$

ETKİNLİK 2.3. KÖKLÜ VE ÜSLÜ GÖSTERİMLER ARASINDAKİ İLİŞKİ

Köklü Gösterim	Üslü Gösterim
$\sqrt{49}$	$(49)^{\frac{1}{2}}$
$\sqrt{3}$	$3^{\frac{1}{2}}$
$\sqrt[3]{7}$	$7^{\frac{1}{3}}$
$\sqrt[5]{11}$	$11^{\frac{1}{5}}$
$\sqrt[7]{5^3}$	$\left(5^3\right)^{\frac{1}{7}} = 5^{3.\frac{1}{7}} = 5^{\frac{3}{7}}$
$\sqrt[5]{2^4}$	$\left(2^4\right)^{\frac{1}{5}} = 2^{4.\frac{1}{5}} = 2^{\frac{4}{5}}$
$\sqrt{15^9}$	$\left(15^9\right)^{\frac{1}{2}} = 15^{9.\frac{1}{2}} = 15^{\frac{9}{2}}$
$\sqrt[9]{-3}$	$(-3)^{\frac{1}{9}}$

Üslü Gösterim	Köklü Gösterim
$2^{\frac{1}{4}}$	$\sqrt[4]{2}$
$4^{\frac{2}{3}}$	$\sqrt[3]{4^2}$
$7^{\frac{11}{5}}$	$\sqrt[5]{7^{11}}$
$(-3)^{\frac{1}{5}}$	$\sqrt[5]{-3}$
$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$	$\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$
$6^{\frac{1}{3}}$	$\sqrt[3]{6}$
$(-7)^{\frac{1}{7}}$	$\sqrt[7]{-7}$
$5^{\frac{2}{5}}$	$\sqrt[5]{5^2}$

SIRA SİZDE 8.

ÇÖZÜM

$\sqrt[5]{96} = a\sqrt[5]{b}$ eşitliğini sağlayan en büyük a değerini bulabilmek için 96 yerine çarpanlara ayrılmış halini, $2^5 \cdot 3$ değerini yazalım ve kök dışarısına çıkarılabilecek en büyük değeri hesaplayalım.

$$\sqrt[5]{96} = \sqrt[5]{2^5 \cdot 3} = \left(2^5 \cdot 3\right)^{\frac{1}{5}} = \left(2^5\right)^{\frac{1}{5}} \cdot (3)^{\frac{1}{5}} = 2 \cdot 3^{\frac{1}{5}} = 2\sqrt[5]{3} \quad \Rightarrow \quad 2\sqrt[5]{3} = a\sqrt[5]{b}$$

Buradan $a + b = 2 + 3 = 5$ olarak hesaplanır.

ETKİNLİK 3.1.HER KÖKLÜ İFADE GERÇEK SAYI MIDIR?

	Gerçek Sayıdır	Rasyonel Sayıdır	Tam Sayıdır
$\sqrt{\frac{4}{9}}$	✓	✓	✗
$\sqrt[3]{-27}$	✓	✓	✓
$\sqrt[4]{-1}$	✗	✗	✗
$\sqrt{3}$	✓	✗	✗
$\sqrt[5]{-7}$	✓	✗	✗
$\sqrt[8]{-8}$	✗	✗	✗
$\sqrt[3]{-0,001}$	✓	✓	✗
$\sqrt[3]{-\frac{8}{125}}$	✓	✓	✗
$\sqrt[11]{2}$	✓	✗	✗
$\sqrt[4]{-2}$	✗	✗	✗
$\sqrt[4]{0,0016}$	✓	✓	✗
$\sqrt[7]{-1}$	✓	✓	✓
$\sqrt{-3}$	✗	✗	✗
$\sqrt[7]{-2}$	✓	✗	✗

UYARI

n çift sayı, $\sqrt[n]{a}$ a negatif gerçek sayı olduğunda $\sqrt[n]{a}$ gerçek sayı değildir.

$\sqrt[4]{-2}$ ifadesinde kökün derecesi çift, kökün içerisindeki sayı negatif olduğundan $\sqrt[4]{-2}$ gerçek sayı değildir.

HATIRLATMA

- Her tam sayı bir rasyonel sayıdır. Her rasyonel sayı bir gerçek sayıdır.

  Örneğin;

  $\sqrt[7]{-1} = \sqrt[7]{(-1)^7} = (-1)^{7 \cdot \frac{1}{7}} = -1$

  $\sqrt[7]{-1}$ bir tam sayıdır, rasyonel sayıdır ve gerçek sayıdır.

- Bir rasyonel sayı tam sayı olmayabilir.

  Örneğin;

  $\sqrt[3]{-0,001} = \sqrt[3]{-\frac{1}{1000}} = \sqrt[3]{\left(-\frac{1}{10}\right)^3} = \left(-\frac{1}{10}\right)^{3 \cdot \frac{1}{3}} = -\frac{1}{10}$

  $\sqrt[3]{-0,001}$ rasyonel sayıdır ve gerçek sayıdır. Ancak tam sayı değildir.

- Bir gerçek sayı rasyonel sayı olmayabilir.

  Örneğin;

  $\sqrt[11]{2}$ bir gerçek sayıdır. Ancak 2 bir sayının 11. kuvveti olarak yazılamaz. Yani $\sqrt[11]{2} = \sqrt[11]{x^{11}}$ koşulunu sağlayacak bir x gerçek sayısı bulunamaz. Bu nedenle 2 kök dışına çıkartılamaz.

  $\sqrt[11]{2}$ gerçek sayıdır. Ancak rasyonel sayı ve tam sayı değildir.

ETKİNLİK 3.2.

Köklü Gösterim	İşlemler	Sonuç
$\sqrt[5]{2^5}$	$\sqrt[5]{2^5} = \left(2^5\right)^{\frac{1}{5}} = 2^{5 \cdot \frac{1}{5}} = 2^1 = 2$	2
$\sqrt[5]{(-2)^5}$	$\sqrt[5]{(-2)^5} = \left(-2^5\right)^{\frac{1}{5}} = -2^{5 \cdot \frac{1}{5}} = -2^1 = -2$	–2
$\sqrt[4]{2^4}$	$\sqrt[4]{2^4} = \left(2^4\right)^{\frac{1}{4}} = 2^{4 \cdot \frac{1}{4}} = 2^1 = 2$	2
$\sqrt[4]{(-2)^4}$	$\sqrt[4]{(-2)^4} = \left(2^4\right)^{\frac{1}{4}} = 2^{4 \cdot \frac{1}{4}} = 2^1 = 2$	2
$\sqrt[3]{(-5)^3}$	$\sqrt[3]{(-5)^3} = \left(-5^3\right)^{\frac{1}{3}} = -5^{3 \cdot \frac{1}{3}} = -5^1 = -5$ veya $\sqrt[3]{(-5)^3} = -5$	–5
$\sqrt{(-7)^2}$	$\sqrt{(-7)^2} = \left(7^2\right)^{\frac{1}{2}} = 7^{2 \cdot \frac{1}{2}} = 7^1 = 7$ veya $\sqrt{(-7)^2} = \lvert -7 \rvert = 7$	7
$\sqrt[7]{3^7}$	$\sqrt[7]{3^7} = \left(3^7\right)^{\frac{1}{7}} = 3^{7 \cdot \frac{1}{7}} = 3^1 = 3$ veya $\sqrt[7]{3^7} = 3$	3
$\sqrt[10]{(-1)^{10}}$	$\sqrt[10]{(-1)^{10}} = \left(1^{10}\right)^{\frac{1}{10}} = 1^{10 \cdot \frac{1}{10}} = 1^1 = 1$ veya $\sqrt[10]{(-1)^{10}} = \lvert -1 \rvert = 1$	1
$\sqrt[3]{6^3}$	$\sqrt[3]{6^3} = \left(6^3\right)^{\frac{1}{3}} = 6^{3 \cdot \frac{1}{3}} = 6^1 = 6$ veya $\sqrt[3]{6^3} = 6$	6

SIRA SİZDE 9.

ÇÖZÜM

$\sqrt[3]{\pi^3} = \pi,$

$\sqrt{(\pi-3)^2} = |\pi-3| = \pi-3$ ve "$(\pi \approx 3{,}14)$ olduğundan $\pi-3$ ifadesinin değeri pozitiftir."

$\sqrt[5]{(-2)^5} = -2$ 'dir.

Buradan $\sqrt[3]{\pi^3} - \sqrt{(\pi-3)^2} + \sqrt[5]{(-2)^5} = \pi - (\pi-3) + (-2) = \pi - \pi + 3 - 2 = 1$ olarak bulunur.

ETKİNLİK 4. KÖKÜN KUVVETİ İLE KUVVETİN KÖKÜ

1. İfade	İşlem / Sonuç	2. İfade	İşlem / Sonuç	Karşılaştırma
$\sqrt{25^3}$	$\sqrt{25^3} = \sqrt{(5^2)^3} = \sqrt{5^6} = \sqrt{(5^3)^2} = \sqrt{125^2} = 125$	$\left(\sqrt{25}\right)^3$	$\left(\sqrt{25}\right)^3 = 5^3 = 125$	$\sqrt{25^3} = \left(\sqrt{25}\right)^3$
$\sqrt[4]{(-4)^2}$	$\sqrt[4]{(-4)^2} = \sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2$	$\left(\sqrt[4]{-4}\right)^2$	$\sqrt[4]{-4}$ gerçek sayı belirtmez.	$\sqrt[4]{(-4)^2} \neq \left(\sqrt[4]{-4}\right)^2$
$\sqrt{(-1)^4}$	$\sqrt{(-1)^4} = \sqrt{1} = 1$	$\left(\sqrt{-1}\right)^4$	$\sqrt{-1}$ gerçek sayı belirtmez.	$\sqrt{(-1)^4} \neq \left(\sqrt{-1}\right)^4$
$\sqrt[3]{(-64)^2}$	$\sqrt[3]{(-64)^2} = \sqrt[3]{4096} = \sqrt[3]{16^3} = 16$	$\left(\sqrt[3]{-64}\right)^2$	$\left(\sqrt[3]{-64}\right)^2 = \left(\sqrt[3]{(-4)^3}\right)^2 = (-4)^2 = 16$	$\sqrt[3]{(-64)^2} = \left(\sqrt[3]{-64}\right)^2$
$\sqrt{4^4}$	$\sqrt{4^4} = \sqrt{256} = \sqrt{16^2} = \|16\| = 16$	$\left(\sqrt{4}\right)^4$	$\left(\sqrt{4}\right)^4 = 2^4 = 16$	$\sqrt{4^4} = \left(\sqrt{4}\right)^4$

ETKİNLİK 5.

Köklü Gösterim	İşlemler	Köklü Gösterim
$\sqrt[6]{2^3}$	$\sqrt[6]{2^3} = 2^{\frac{3}{6}} = 2^{\frac{3\div3}{6\div3}} = 2^{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{2}$
$\sqrt[15]{7^{10}}$	$\sqrt[15]{7^{10}} = 7^{\frac{10}{15}} = 7^{\frac{10\div5}{15\div5}} = 7^{\frac{2}{3}}$	$\sqrt[3]{7^2}$
$\sqrt[3]{5^2}$	$\sqrt[3]{5^2} = 5^{\frac{2}{3}} = 5^{\frac{2\cdot4}{3\cdot4}} = 5^{\frac{8}{12}}$	$\sqrt[12]{5^8}$
$\sqrt[21]{3^{14}}$	$\sqrt[21]{3^{14}} = 3^{\frac{14}{21}} = 3^{\frac{14\div7}{21\div7}} = 3^{\frac{2}{3}}$	$\sqrt[3]{3^2}$
$\sqrt{3^3}$	$\sqrt{3^3} = 3^{\frac{3}{2}} = 3^{\frac{3\cdot4}{2\cdot4}} = 3^{\frac{12}{8}}$	$\sqrt[8]{3^{12}}$
$\sqrt[20]{5^8}$	$\sqrt[20]{5^8} = 5^{\frac{8}{20}} = 5^{\frac{8\div4}{20\div4}} = 5^{\frac{2}{5}}$	$\sqrt[5]{5^2}$

SIRA SİZDE 10.

ÇÖZÜM

$\sqrt[15]{8^4} = \sqrt[b]{a^c}$ eşitliğinde a,b ve c'nin alabileceği en küçük değerleri bulalım. 15, 8 ve 4 sayılarını nasıl daha küçük sayılara dönüştürebilirsiniz?

$8 = 2^3$ eşitliğinden yararlanalım.

$\sqrt[15]{8^4} = \sqrt[15]{\left(2^3\right)^4} = \sqrt[15]{2^{12}}$ olarak yazılır.

Kökün derecesi ve kök içerisindeki ifadenin kuvvetini sadeleştirelim.

$\sqrt[15]{2^{12}} = \sqrt[15\div3]{2^{12\div3}} = \sqrt[5]{2^4}$

Buradan $\sqrt[15]{8^4} = \sqrt[5]{2^4}$ eşitliğine ulaşılır.

a'nın tam sayı olduğuna dikkat edelim.

$\sqrt[15]{8^4} = \sqrt[5]{\left(-2\right)^4}$ eşitliği sağlanır.

a + b + c ifadesinin alabileceği en küçük değer $\left(-2\right) + 5 + 4 = 7$ olarak bulunur.

SIRA SİZDE 11.

ÇÖZÜM

Aşağıda verilen ifadelerin her birinin doğru mu, yoksa yanlış mı olduğunu belirleyiniz. Değerlendirmelerinizi gerekçelendirerek açıklayınız.

1. Bir köklü gösterimin sonucu rasyonel bir sayıysa, bu durum kök içindeki sayının tam kare olduğunu gösterir.

( ) Doğru (✗) Yanlış

Bir köklü ifadenin sonucu rasyonel olabilir ama bu kök içindeki sayının tam kare olduğunu göstermez. Sadece karekök için bu mantık geçerlidir.
Örneğin,
$\sqrt[3]{8} = 2$ rasyonel sonuç verir ama kök içindeki sayı (8) tam küptür, tam kare değildir.

2. Bir köklü gösterimi üslü gösterime dönüştürdüğümüzde, sayının değeri değişmez.

(✓) Doğru ( ) Yanlış

Bir köklü ifade üslü gösterime çevrildiğinde sayının değeri değişmez çünkü matematiksel eşdeğerlik korunur. Sayının sadece gösterim şekli değişir.
Örneğin
$\sqrt[3]{8} = 2$ ve $8^{\frac{1}{3}} = \left(2^3\right)^{\frac{1}{3}} = 2^1 = 2$ olduğundan $\sqrt[3]{8} = 8^{\frac{1}{3}}$ olur.

3. Karekök içinde negatif bir sayı varsa, bu ifade gerçek sayılar kümesinde tanımsızdır.

(✓) Doğru ( ) Yanlış

Karekökün derecesi 2'dir. 2 çift bir sayıdır. Kareköklü gösterimlerde kökün derecesi çift ve kökün içerisinde bulunan sayı negatif ise bu ifade gerçek sayı belirtmez.

4. Bir doğal sayının karekökü alınırsa ve sonuç doğal sayı çıkmazsa, bu ifade mutlaka irrasyoneldir.

(✓) Doğru ( ) Yanlış

Karekökü alınan doğal sayı tam kare ise sonuç doğal sayıdır. Örneğin, 1, 4, 9, 16 vb sayılar tam karedir ve karekökü alındığında sonuç 1, 2, 3, 4 vb. doğal sayılar çıkar ve bu sayılar aynı zamanda rasyonel sayılardır. Ancak **tam kare olmayan** x doğal sayısı için,
$\sqrt{x} = a$ koşulunu sağlayan bir a rasyonel sayısı var olsaydı
$\sqrt{x} = a = \sqrt{a^2}$ olacağından $x = a^2$ eşitliğine ulaşılırdı. Bu bir çelişki yaratır. Çünkü x tam kare olmayan bir doğal sayı olarak seçilmiştir.
Sonuç olarak bir doğal sayının karekökü ya doğal sayıdır ve rasyoneldir. Sonuç doğal sayı değil ise rasyonel sayı değildir yani irrasyoneldir.

KÖKLÜ GÖSTERİM TOPLAMA VE ÇIKARMA İŞLEMİ

1.

İşlemin Üslü Gösterimi	Üslü Sonuç	İşlemin Köklü Gösterimi	Köklü Sonuç
$3\cdot 2^{\frac{1}{3}}+2^{\frac{1}{3}}$	$(3+1)\cdot 2^{\frac{1}{3}}$	$3\cdot\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2}$	$(3+1)\cdot\sqrt[3]{2}=4\cdot\sqrt[3]{2}$
$5\cdot 2^{\frac{2}{3}}+3\cdot 2^{\frac{2}{3}}$	$(5+3)\cdot 2^{\frac{2}{3}}$	$5\cdot\sqrt[3]{2^2}+3\sqrt[3]{2^2}$	$(5+3)\cdot\sqrt[3]{2^2}=8\cdot\sqrt[3]{4}$
$4\cdot 5^{\frac{1}{2}}-6\cdot 5^{\frac{1}{2}}$	$(4-6)\cdot 5^{\frac{1}{2}}$	$4\sqrt{5}-6\sqrt{5}$	$(4-6)\cdot\sqrt{5}=-2\cdot\sqrt{5}$
$4\cdot 5^{\frac{1}{2}}-(-6\cdot 5^{\frac{1}{2}})$	$(4-(-6))\cdot 5^{\frac{1}{2}}$	$4\sqrt{5}-(-6\sqrt{5})$	$(4-(-6))\cdot\sqrt{5}=10\sqrt{5}$
$6\cdot 2^{\frac{1}{5}}-3\cdot 2^{\frac{1}{5}}+2\cdot 2^{\frac{1}{5}}$	$(6-3+2)\cdot 2^{\frac{1}{5}}$	$6\sqrt[5]{2}-3\sqrt[5]{2}+2\sqrt[5]{2}$	$(6-3+2)\sqrt[5]{2}=5\sqrt[5]{2}$
$-3\cdot 10^{\frac{1}{3}}+5\cdot 10^{\frac{1}{3}}+4\cdot 10^{\frac{1}{3}}$	$(-3+5+4)\cdot 10^{\frac{1}{3}}$	$-3\sqrt[3]{10}+5\sqrt[3]{10}+4\sqrt[3]{10}$	$(-3+5+4)\sqrt[3]{2}=6\sqrt[3]{2}$
$a\cdot y^{\frac{1}{n}}+b\cdot y^{\frac{1}{n}}-c\cdot y^{\frac{1}{n}}$	$(a+b-c)\cdot y^{\frac{1}{n}}$	$a\cdot\sqrt[n]{y}+b\cdot\sqrt[n]{y}-c\cdot\sqrt[n]{y}$	$(a+b-c)\sqrt[n]{y}$

2.

İşlem	Önerme
$a\cdot\sqrt[n]{x^m}+b\cdot\sqrt[n]{x^m}$	$a\cdot\sqrt[n]{x^m}+b\cdot\sqrt[n]{x^m}=(a+b)\cdot\sqrt[n]{x^m}$
$a\cdot\sqrt[n]{x^m}-b\cdot\sqrt[n]{x^m}$	$a\cdot\sqrt[n]{x^m}-b\cdot\sqrt[n]{x^m}=(a-b)\cdot\sqrt[n]{x^m}$
$a\cdot\sqrt[n]{x^m}+b\cdot\sqrt[n]{x^m}-c\cdot\sqrt[n]{x^m}$	$a\cdot\sqrt[n]{x^m}+b\cdot\sqrt[n]{x^m}-c\cdot\sqrt[n]{x^m}=(a+b-c)\cdot\sqrt[n]{x^m}$

3.

$2\cdot\sqrt[3]{3}+5\cdot\sqrt[3]{5}$

Hayır.

Çünkü kök dereceleri aynı olsa da kök içindeki sayılar aynı olmadığı için benzer değildir ve bu yüzden toplanamaz.

$2\cdot\sqrt[3]{3}+5\cdot\sqrt[3]{75}$

Evet.

$2\cdot\sqrt[3]{3}+5\cdot\sqrt[3]{375}=2\cdot\sqrt[3]{3}+5\cdot\sqrt[3]{125\cdot 3}=2\cdot\sqrt[3]{3}+5\cdot 5\cdot\sqrt[3]{3}=2\sqrt[3]{3}+25\sqrt[3]{3}=27\sqrt[3]{3}$

$2\cdot\sqrt[3]{3}-5\cdot\sqrt[3]{5}$

Hayır.

Çünkü kök dereceleri aynı olsa da kök içindeki sayılar aynı olmadığı için benzer değildir ve bu yüzden toplanamaz.

$2\cdot\sqrt[3]{3}-5\cdot\sqrt[3]{75}$

Evet.

$2\cdot\sqrt[3]{3}+5\cdot\sqrt[3]{375}=2\cdot\sqrt[3]{3}-5\cdot\sqrt[3]{125\cdot 3}=2\cdot\sqrt[3]{3}-5\cdot 5\cdot\sqrt[3]{3}=2\sqrt[3]{3}-25\sqrt[3]{3}=-23\sqrt[3]{3}$

4.

$2\cdot\sqrt[3]{3}+5\cdot\sqrt{3}$

Hayır.
Çünkü kök dereceleri aynı olmamakla birlikte benzer ifade değildir.

$2\cdot\sqrt[3]{3}-5\cdot\sqrt{3}$

Hayır.
Çünkü kök dereceleri aynı olmamakla birlikte benzer ifade değildir.

SIRA SİZDE 12.

ÇÖZÜM

$$4\sqrt{3}-\sqrt{27}+\sqrt{12} = 4\sqrt{3}-\sqrt{9\cdot3}+\sqrt{4\cdot3} = 4\sqrt{3}-3\sqrt{3}+2\sqrt{3} = (4-3+2)\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$$

SIRA SİZDE 13.

ÇÖZÜM

$$\frac{\sqrt{0,09}+\sqrt{0,25}}{\sqrt[3]{0,027}} = \frac{\sqrt{\frac{9}{100}}+\sqrt{\frac{25}{100}}}{\sqrt[3]{\frac{27}{1000}}} = \frac{\frac{3}{10}+\frac{5}{10}}{\frac{3}{10}} = \frac{8}{3}$$

SIRA SİZDE 14.

ÇÖZÜM

$$(\sqrt{75}+\sqrt{27})\cdot5 = (5\sqrt{3}+3\sqrt{3})\cdot5 = 8\sqrt{3}\cdot5 = 40\sqrt{3}$$

KÖKLÜ GÖSTERİM ÇARPMA VE BÖLME İŞLEMİ

1.

İşlemin Üslü Gösterim	Üslü Sonuç	İşlemin Köklü Gösterimi	Köklü Sonuç
$2^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}}$	$(2\cdot 3)^{\frac{1}{2}} = 6^{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$	$\sqrt{2}\cdot\sqrt{3} = \sqrt{2\cdot 3} = \sqrt{6}$
$3^{\frac{1}{4}} \cdot 5^{\frac{1}{4}}$	$(3\cdot 5)^{\frac{1}{4}} = 15^{\frac{1}{4}}$	$\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[4]{5}$	$\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[4]{5} = \sqrt[4]{3\cdot 5} = \sqrt[4]{15}$
$5\cdot 2^{\frac{1}{2}} \cdot 3\cdot 2^{\frac{1}{2}}$	$5\cdot 3\cdot (2\cdot 2)^{\frac{1}{2}} = 15\cdot (2)^{2\cdot\frac{1}{2}}$	$5\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{2}$	$5\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{2} = 5\cdot 3\cdot\sqrt{2\cdot 2}$ $= 15\sqrt{4} = 15\cdot 2 = 30$
$3\cdot 5^{\frac{1}{3}} \cdot 2\cdot 5^{\frac{1}{3}}$	$3\cdot 2\cdot (5\cdot 5)^{\frac{1}{3}} = 6\cdot (5)^{2\cdot\frac{1}{3}}$ $= 6\cdot 5^{\frac{2}{3}}$	$3\sqrt[3]{5}\cdot 2\sqrt[3]{5}$	$3\sqrt[3]{5}\cdot 2\sqrt[3]{5} = 3\cdot 2\cdot\sqrt[3]{5\cdot 5}$ $= 6\cdot\sqrt[3]{25}$
$\dfrac{6^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}}$	$\dfrac{6^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}} = \left(\dfrac{6}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = (3)^{\frac{1}{2}}$	$\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\dfrac{6}{2}}$	$\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\dfrac{6}{2}} = \sqrt{3}$
$\dfrac{10^{\frac{1}{5}}}{5^{\frac{1}{5}}}$	$\dfrac{10^{\frac{1}{5}}}{5^{\frac{1}{5}}} = \left(\dfrac{10}{5}\right)^{\frac{1}{5}} = 2^{\frac{1}{5}}$	$\dfrac{\sqrt[5]{10}}{\sqrt[5]{5}} = \sqrt[5]{\dfrac{10}{5}}$	$\dfrac{\sqrt[5]{10}}{\sqrt[5]{5}} = \sqrt[5]{\dfrac{10}{5}} = \sqrt[5]{2}$
$\dfrac{6^{\frac{1}{3}}\cdot 2^{\frac{1}{3}}}{3^{\frac{1}{3}}}$	$\dfrac{6^{\frac{1}{3}}\cdot 2^{\frac{1}{3}}}{3^{\frac{1}{3}}} = \dfrac{(6\cdot 2)^{\frac{1}{3}}}{3^{\frac{1}{3}}}$ $= \left(\dfrac{12}{3}\right)^{\frac{1}{3}} = 4^{\frac{1}{3}}$	$\dfrac{\sqrt[3]{6}\cdot\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3}} = \sqrt[3]{\dfrac{6\cdot 2}{3}}$	$\dfrac{\sqrt[3]{6}\cdot\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3}} = \sqrt[3]{\dfrac{\cancel{6}\cdot 2}{\cancel{3}}} = \sqrt[3]{2\cdot 2}$ $= \sqrt[3]{4}$
$\dfrac{10^{\frac{1}{3}}\cdot 3^{\frac{1}{3}}}{6^{\frac{1}{3}}}$	$\dfrac{10^{\frac{1}{3}}\cdot 3^{\frac{1}{3}}}{6^{\frac{1}{3}}} = \dfrac{(10\cdot 3)^{\frac{1}{3}}}{6^{\frac{1}{3}}}$ $= \left(\dfrac{30}{6}\right)^{\frac{1}{3}} = 5^{\frac{1}{3}}$	$\dfrac{\sqrt[3]{10}\cdot\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{6}} = \sqrt[3]{\dfrac{10\cdot 3}{6}}$	$\dfrac{\sqrt[3]{10}\cdot\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{6}} = \sqrt[3]{\dfrac{10\cdot 3}{6}} = \sqrt[3]{\dfrac{30}{6}}$ $= \sqrt[3]{5}$
$(5^{\frac{1}{2}})^{\frac{2}{5}}$	$(5^{\frac{1}{2}})^{\frac{2}{5}} = 5^{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}} = 5^{\frac{1}{5}}$	$\sqrt[5]{(\sqrt{5})^2}$	$\sqrt[5]{(\sqrt{5})^2} = \sqrt[5\cdot 2]{5^2} = \sqrt[10]{5^2}$ $= \sqrt[5]{5}$

2.

İşlem	Önerme
$\sqrt[n]{x^m} \cdot \sqrt[n]{y^m}$	$\sqrt[n]{x^m \cdot y^m} = \sqrt[n]{(x \cdot y)^m}$
$a\sqrt[n]{x^m} \cdot b\sqrt[n]{y^m}$	$a \cdot b \cdot \sqrt[n]{x^m \cdot y^m} = a \cdot b \cdot \sqrt[n]{(x \cdot y)^m}$
$\dfrac{\sqrt[n]{x^m}}{\sqrt[n]{y^m}}$	$\sqrt[n]{\dfrac{x^m}{y^m}} = \sqrt[n]{\left(\dfrac{x}{y}\right)^m}$
$\dfrac{a\sqrt[n]{x^m}}{b\sqrt[n]{y^m}}$	$\dfrac{a}{b} \cdot \sqrt[n]{\dfrac{x^m}{y^m}} = \dfrac{a}{b} \cdot \sqrt[n]{\left(\dfrac{x}{y}\right)^m}$
$\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}}$	$\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = (x^{\frac{1}{m}})^{\frac{1}{n}} = x^{\frac{1}{m \cdot n}} = \sqrt[m \cdot n]{x}$

3. Cevap öğrenciden beklenmektedir.

SIRA SİZDE 15.

ÇÖZÜM

$$\frac{\sqrt{48} \cdot (\sqrt{75} - \sqrt{12})}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{16 \cdot 3} \cdot (\sqrt{25 \cdot 3} - \sqrt{4 \cdot 3})}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3} \cdot (5\sqrt{3} - 2\sqrt{3})}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 12\sqrt{3}$$

SIRA SİZDE 16.

ÇÖZÜM

UYARI

Çarpma işleminde kök dereceleri eşit değilse öncelikle kök dereceleri eşitlenir sonra çarpma işlemi yapılır. Bunun için köklü ifadelerde kök genişletme işlemini bilmeniz gerekmektedir.

$$\frac{\sqrt[3 \cdot 4]{2^4} \cdot \sqrt[4 \cdot 3]{3^3}}{\sqrt[12]{6}} = \sqrt[12]{\frac{2^4 \cdot 3^3}{6}} = \sqrt[12]{\frac{16 \cdot 27}{6}} = \sqrt[12]{72}$$

KÖKLÜ GÖSTERİMLERİN EŞLENİĞİNİ BULMA

1.

İşlem	Sonuç
$\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}$	$\sqrt{2\cdot 2}=\sqrt{4}=2$
$\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}$	$\sqrt{3\cdot 3}=\sqrt{9}=3$
$3\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}$	$3\sqrt{7\cdot 7}=3\sqrt{49}=3\cdot 7=21$
$5\sqrt{5}\cdot 3\sqrt{5}$	$5\cdot 3\sqrt{5\cdot 5}=15\sqrt{25}=15\cdot 5=75$
$(\sqrt{3}-\sqrt{2})\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{2})$	$(\sqrt{3}-\sqrt{2})\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{2})=\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}+\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}-\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}-\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}$ $=\sqrt{3^2}-\sqrt{6}+\sqrt{6}-\sqrt{2^2}=3-2=1$
$(\sqrt{7}-\sqrt{5})\cdot(\sqrt{7}+\sqrt{5})$	$(\sqrt{7}-\sqrt{5})\cdot(\sqrt{7}+\sqrt{5})=\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}+\sqrt{7}\cdot\sqrt{5}-\sqrt{5}\cdot\sqrt{7}-\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}$ $=\sqrt{7^2}-\sqrt{35}+\sqrt{35}-\sqrt{5^2}=7-5=2$
$(3-\sqrt{2})\cdot(3+\sqrt{2})$	$(3-\sqrt{2})\cdot(3+\sqrt{2})=3\cdot 3+3\cdot\sqrt{2}-\sqrt{2}\cdot 3-\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}$ $=3^2-3\sqrt{2}+3\sqrt{2}-\sqrt{2^2}=9-2=7$
$\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{2^2}$	$\sqrt[3]{2\cdot 2^2}=\sqrt[3]{2^{1+2}}=\sqrt[3]{2^3}=2$
$\sqrt[5]{2}\cdot\sqrt[5]{2^4}$	$\sqrt[5]{2\cdot 2^4}=\sqrt[5]{2^{1+4}}=\sqrt[5]{2^5}=2$

2.

İşlem	Sonuç
$\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}$	$\sqrt{a\cdot a}=\sqrt{a^2}=a$
$(\sqrt{a}-\sqrt{b})\cdot(\sqrt{a}+\sqrt{b})$	$(\sqrt{a}-\sqrt{b})\cdot(\sqrt{a}+\sqrt{b})=\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}+\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}-\sqrt{b}\cdot\sqrt{a}-\sqrt{b}\cdot\sqrt{b}$ $=\sqrt{a^2}+\sqrt{a\cdot b}-\sqrt{a\cdot b}-\sqrt{b^2}$ $=a-b$
$(a-\sqrt{b})\cdot(a+\sqrt{b})$	$(a-\sqrt{b})\cdot(a+\sqrt{b})=a\cdot a+a\cdot\sqrt{b}-\sqrt{b}\cdot a-\sqrt{b}\cdot\sqrt{b}$ $=a^2+a\sqrt{b}-a\sqrt{b}-\sqrt{b^2}$ $=a^2-b$

SIRA SİZDE 17.

ÇÖZÜM

$$\frac{3}{2\sqrt{2}-3} + \sqrt{50}$$

$\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

NOT

Paydada köklü bir ifade olduğunda paydayı kökten kurtarıp daha kolay işlem yapmak için pay ve paydayı, paydadaki kökün eşleniği ile genişletebilirsiniz.

$$\frac{3}{2\sqrt{2}-3} \quad (2\sqrt{2}+3)$$

$$\frac{3\cdot(2\sqrt{2}+3)}{(2\sqrt{2}-3)\cdot(2\sqrt{2}+3)} = \frac{6\sqrt{2}+9}{(2\sqrt{2})^2-3^2} = \frac{6\sqrt{2}+9}{-1}$$

$$= -6\sqrt{2}-9$$

$$-6\sqrt{2}-9 + 5\sqrt{2} = -\sqrt{2}-9$$

SIRA SİZDE 18.

ÇÖZÜM

$$\frac{12\cdot(\sqrt{3}-\sqrt{5})}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})\cdot(\sqrt{3}-\sqrt{5})} + \frac{2\cdot(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{3}-\sqrt{5})\cdot(\sqrt{5}+\sqrt{3})} = \frac{12\cdot(\sqrt{3}-\sqrt{5})}{-5+3} + \frac{2\cdot(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{3-5}$$

$$= -6\cdot(\sqrt{3}-\sqrt{5}) - (\sqrt{5}+\sqrt{3}) = -7\sqrt{3}+5\sqrt{5}$$

DEĞERLENDİRİYORUM

Amaç: Bu bölümde, öğrendiklerinizi gözden geçirmenizi, kendi öğrenme sürecinizi değerlendirmenizi ve eksiklerinizi fark etmenizi amaçlıyoruz.

Soruları dikkatle yanıtlayınız. Cevaplarınızı geribildirimlerle karşılaştırarak eksik gördüğünüz noktaları tekrar ediniz.

SORULAR

1. Aşağıdaki tabloda bazı elementlerin 1 gramında bulunan atom sayısı yaklaşık olarak verilmiştir.

Element	1 Gramdaki Yaklaşık Atom Sayısı
Hidrojen	$5{,}97 \cdot 10^{23}$
Karbon	$5{,}01 \cdot 10^{22}$
Oksijen	$3{,}76 \cdot 10^{22}$
Demir	$1{,}08 \cdot 10^{22}$
Altın	$3{,}05 \cdot 10^{21}$

Buna göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a. 1 gram karbondaki atom sayısı ile 1 gram oksijendeki atom sayısı arasındaki farkın pozitif değeri yaklaşık kaçtır?

b. Demir, altın ve hidrojen elementlerinin birer gramındaki atom sayılarının toplamının yaklaşık değerini bilimsel gösterim ile ifade ediniz.

c. 1 gram hidrojendeki atom sayısı 1 gram altındaki atom sayısının yaklaşık değerini bilimsel gösterim ile ifade ediniz.

2. $A = 7 \cdot 8^3 \cdot 25^3$ **sayısı kaç basamaklıdır?**

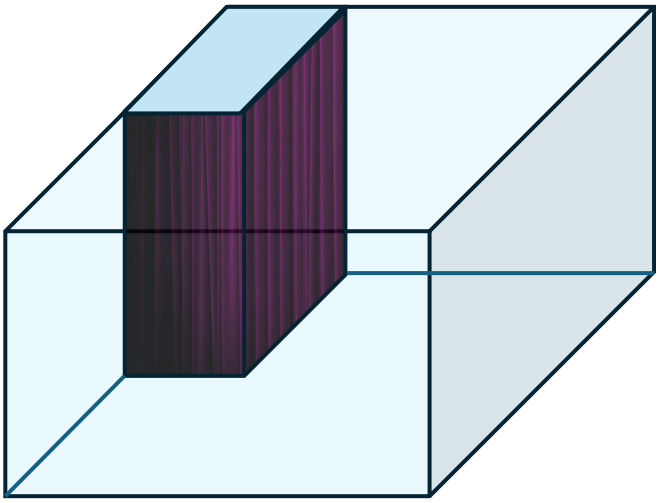
3. **Aşağıda verilen işlemlerin sonucu kaçtır?**

a. $\sqrt{108} + 5\sqrt{12} + \sqrt{75}$

b. $\frac{1}{\sqrt{3}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1}$

c. $\frac{\sqrt[6]{15}}{\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[4]{5}}$

4.



Uğur Bey evinin kare tabanlı odasının bir bölümünü 2 parça perde ile ayırarak dikdörtgen tabanlı bir oyun bölgesi oluşturmak istemektedir. Bu oda yandaki şekilde modellenmektedir. Oda ve oyun bölgesi ile ilgili aşağıdaki bilgiler veriliyor.

- Odanın taban alanı 48 metrekaredir.
- Odanın yüksekliği $2\sqrt{3}$ metredir.
- Oyun bölgesinin tabanının uzun kenarının uzunluğu kısa kenarının uzunluğunun 2 katıdır.
- Odanın bir kenar uzunluğu oyun bölgesinin tabanının uzun kenar uzunluğunun 2 katıdır.

Buna göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a. Odanın tabanının çevre uzunluğu kaç metredir?

b. Oyun bölgesini oluşturmak için kullanılan perdenin metrekaresi 30 TL olduğuna göre Uğur Bey'in bu işlem için toplam kaç TL ödemesi gerekmektedir?

c. Uğur Bey oyun bölgesinin dışında kalan bölümün zeminine parke döşetecektir.

Bunun için kaç metrekare parke kullanmalıdır?

GERİ BİLDİRİM

Bu geri bildirim sayesinde kendi cevabınızı kontrol edebilir, hatalarınızı düzelterek öğrenmenizi pekiştirebilirsiniz.

ÇÖZÜM 1.

a) 1 gram karbondaki atom sayısı ile 1 gram oksijendeki atom sayısı arasındaki farkı bulmak için atom sayısı fazla olanın atom sayısından az olanın atom sayısının çıkarılması gerekir. Tabloya göre karbonun atom sayısı oksijenin atom sayısından fazla olduğundan Fark = Karbon – Oksijen olmalıdır. Buna göre Fark = $5{,}01 \cdot 10^{22} - 3{,}76 \cdot 10^{22}$ elde edilir.

Çıkartma işlemini kolaylaştırmak için bu ifadeyi 10^{22} parantezine alalım.

Fark = $5{,}01 \cdot 10^{22} - 3{,}76 \cdot 10^{22} = (5{,}01 - 3{,}76) \cdot 10^{22}$ bulunur. Buradaki işlemi tamamladığımızda Fark = $1{,}25 \cdot 10^{22}$ elde edilir.

b) Bu toplama işlemini yapabilmek için demir, altın ve hidrojen elementlerinin birer gramındaki atom sayılarını 10^{22} cinsinden yazalım.

- Demir: $1{,}08 \cdot 10^{22}$
- Altın: $0{,}305 \cdot 10^{22}$
- Hidrojen: $59{,}7 \cdot 10^{22}$

Şimdi toplama işlemini yapalım.

Demir + Altın + Hidrojen = $1{,}08 \cdot 10^{22} + 0{,}305 \cdot 10^{22} + 59{,}7 \cdot 10^{22} = (1{,}08 + 0{,}305 + 59{,}7) \cdot 10^{22} = 61{,}085 \cdot 10^{22}$ olarak bulunur.

c) Katı bulmak için 1 gram hidrojendeki atom sayısını 1 gram altındaki atom sayısına bölelim:

$$\frac{5{,}97 \cdot 10^{23}}{3{,}05 \cdot 10^{21}} = \frac{5{,}97}{3{,}05} \cdot 10^{23-21} \cong 2 \cdot 10^2 = 200$$

ÇÖZÜM 2.

10'un kuvveti cinsinden yazılarak A sayısının sondan kaç basamağının sıfır olduğu hesaplanabilir.

$$A = 7 \cdot 8^3 \cdot 25^3 = 7 \cdot (2^3)^3 \cdot (5^2)^3 = 7 \cdot 2^9 \cdot 5^6 = 7 \cdot 2^3 \cdot 2^6 \cdot 5^6 = 7 \cdot 2^3 \cdot (2 \cdot 5)^6$$
$$= 7 \cdot 2^3 \cdot 10^6 = 7 \cdot 8 \cdot 10^6 = 56 \cdot 10^6 = 56000000$$

elde edilir. Yani sayı 8 basamaklıdır.

ÇÖZÜM 3.

a) Verilen kareköklü ifadelerin her birini $a\sqrt{b}$ biçiminde yazalım. Burada toplama işleminin yapılabilmesi için b sayılarının birbirine eşit olmasına dikkat edelim.

$$\sqrt{108} - 5\sqrt{12} + \sqrt{75} = \sqrt{36 \cdot 3} - 5\sqrt{4 \cdot 3} + \sqrt{25 \cdot 3} = 6\sqrt{3} - 10\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = \sqrt{3} \cdot (6 - 10 + 5) = \sqrt{3}$$

b) Verilen kesirlerin paydalarının birbirinin eşleniği olduğuna dikkat edilmektedir. Burada kesirlerin paydaları eşlenikleri ile genişletilerek paydalar eşitlenebilir.

$$\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}-1}=\frac{\sqrt{3}-1}{\left(\sqrt{3}+1\right)\cdot\left(\sqrt{3}-1\right)}+\frac{\sqrt{3}+1}{\left(\sqrt{3}-1\right)\cdot\left(\sqrt{3}+1\right)}=\frac{2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$$

($\sqrt{3}-1$ ve $\sqrt{3}+1$ ifadeleri sırasıyla $\sqrt{3}+1$ ve $\sqrt{3}-1$ ile genişletilmiştir.)

c) Verilen köklü ifadeler öncelikle üslü hale getirilir. Üslü ifadelerdeki özellikleri kullanılarak işlemler yapıldıktan sonra tekrar köklü hale getirilerek sonuca ulaşılır.

$$\frac{\sqrt[6]{15}}{\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[4]{5}}=\frac{\sqrt[6]{3\cdot5}}{\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[4]{5}}=\frac{\sqrt[6]{3}\cdot\sqrt[6]{5}}{\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[4]{5}}=\frac{3^{\frac{1}{6}}\cdot5^{\frac{1}{6}}}{3^{\frac{1}{3}}\cdot5^{\frac{1}{4}}}=\frac{3^{\frac{1}{6}}}{3^{\frac{1}{3}}}\cdot\frac{5^{\frac{1}{6}}}{5^{\frac{1}{4}}}=3^{\frac{1}{6}-\frac{1}{3}}\cdot5^{\frac{1}{6}-\frac{1}{4}}=3^{-\frac{1}{6}}\cdot5^{-\frac{1}{12}}=3^{-\frac{1\cdot2}{6\cdot2}}\cdot5^{-\frac{1}{12}}=\left(3^{2}\right)^{-\frac{1}{12}}\cdot5^{-\frac{1}{12}}$$

$$=9^{-\frac{1}{12}}\cdot5^{-\frac{1}{12}}=45^{-\frac{1}{12}}=\frac{1}{\sqrt[12]{45}}$$

ÇÖZÜM 4.

a) Odanın tabanı kare olduğundan alanı bir kenar uzunluğunun karesi ile hesaplanır. Tabanın bir kenar uzunluğu a metre olsun. O halde "Alan= $a^2 = 48 \Rightarrow a = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$ metre bulunur.

Buna göre tabanın çevresi = $4 \cdot 4\sqrt{3} = 16\sqrt{3}$ metredir.

b) Odanın bir kenar uzunluğu oyun bölgesinin tabanının uzun kenar uzunluğunun 2 katı olduğundan oyun bölgesinin tabanının uzun kenarının uzunluğu = $\frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$ metredir. Oyun bölgesinin tabanının uzun kenarının uzunluğu kısa kenarının uzunluğunun 2 katı olduğundan oyun bölgesinin tabanının kısa kenarının uzunluğu = $\frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ metredir.

Odanın yüksekliği ile perdenin yüksekliğinin birbirine eşit ve $2\sqrt{3}$ metre olduğu açıktır. Buna göre toplam perde alanını bulmak için kısa ve uzun perdelerin kenar uzunlukları ile yüksekliklerini çarpıp topladığımızda

Alan = $2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} + 2\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} = 6 + 12 = 18$ metrekare elde edilir. 1 metrekare perde 30 TL olduğundan 18 metrekare perdenin toplam tutarı $18 \cdot 30 = 540$ TL elde edilir.

c) Odanın taban alanından oyun bölgesinin taban alanını çıkardığımızda kalan bölümün zemininin alanı elde edilir.

Odanın taban alanı – oyun bölgesinin taban alanı = $48 - \sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} = 48 - 6 = 42$ metrekaredir.

ÖĞRENDİKLERİM

Amaç: Bu bölümde, öğrendiklerinizi özetlemenizi, günlük hayatta ve farklı derslerde kullanabileceğiniz bilgileri belirlemenizi amaçlıyoruz.

Aşağıdaki öğretici bilgi haritasını inceleyin.

ÜSLÜ ve KÖKLÜ GÖSTERİMLER

ÜSLÜ GÖSTERİMLER

Üslü ifade, bir sayının kendisiyle tekrarlı olarak **çarpılmasını** kısaca göstermek için kullanılan bir gösterim biçimidir. Bir üslü ifade, **taban** ve **üs** olmak üzere iki bölümden oluşur.

- **Taban** (temel), tekrarlı olarak çarpılan sayıdır.
- **Üs** (kuvvet) tabanın kaç kere kendisiyle çarpıldığını gösterir.

Üslü ifadelerde toplama, çıkarma, çarpma, bölme işlemleri yapılabilir.

n, m birer pozitif tam sayı; a sıfırdan farklı gerçek sayı olmak üzere

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$\frac{1}{a^n} = a^{-n}$$

ve benzeri özelliklere; $a^n = \underbrace{a.a.....a}_{n \text{ tane}}$

eşitliğinden yararlanılarak ulaşıldığını **unutmayalım.**

Her köklü ifade üslü ifade şeklinde yazılabilir. Ancak her üslü ifadenin köklü ifade şeklinde yazılamayacağına dikkat edelim.

Her bilimsel gösterim üslü ifade şeklinde gösterilebilir.

KÖKLÜ GÖSTERİMLER

Köklü ifade, bir sayının hangi sayının karesi, küpü ya da başka bir kuvveti olduğunu bulmak için kullanılan bir ifade biçimidir.

m ve n pozitif tam sayı; $n \geq 2$ ve x bir pozitif gerçek sayı olmak üzere

$x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$ şeklinde ifade edilir.

$\sqrt[n]{x^m}$ ifadesine köklü gösterim denir.

$\sqrt[n]{x^m}$ biçimindeki bir köklü ifade,

- n.dereceden kök x üzeri m şeklinde okunur.
- n değeri kökün derecesidir.
- Bu ifade, "hangi sayının n. kuvveti x^m eder?" sorusunun cevabını arar
- n = 2 olduğunda $\sqrt{x^m}$ şeklinde yazılır.
- Bu ifade "karekök x üzeri m" şeklinde okunur.
- k pozitif tam sayı,a bir gerçek sayı olmak üzere $\sqrt[2k+1]{a}$ ifadesi tüm a değerleri için gerçek sayıdır.
- $\sqrt[2k]{a}$ ifadesi $a \geq 0$ için gerçek sayıdır.

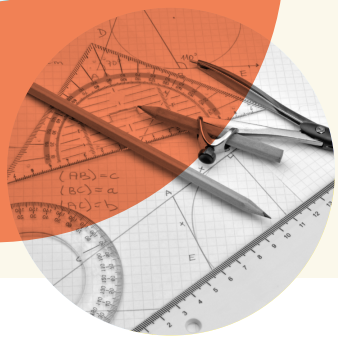
a gerçek sayı, n pozitif tam sayı ve $n \geq 2$ olmak üzere

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a, & n \text{ tek ise} \\ |a|, & n \text{ çift ise} \end{cases} \text{ olur.}$$

BİLİMSEL GÖSTERİM

n tam sayı, a sıfırdan farklı gerçek sayı ve $1 \leq |a| < 10$ olmak üzere $a \cdot 10^n$ ifadesine **bilimsel gösterim** denir.

Daha fazlası için karekodu okutunuz.



SEMBOLLER VE ARALIKLAR

BAŞLARKEN

Sevgili öğrencimiz, bu çalışma kartında bireysel öğrenme yolculuğunuza destek sunmak amaçlanmaktadır. Çalışmalarınızı yürütürken "Hazırlanıyorum", "İlişkilendiriyorum", "Uygulayarak Öğreniyorum", "Değerlendiriyorum" bölümlerini sırası ile yapmanızı; her bölüm ve etkinlik sonundaki geri bildirimleri alarak ilerlemenizi; "Öğrendiklerim" bölümünde öğrenme sürecinizi gözden geçirmenizi bekliyoruz.

Bu çalışma kartında, gerçek sayı aralıkları ve bu aralıklarla yapılan işlemlerde küme sembol ve işlemlerinden yararlanma konusunu farklı bağlamlarda ele alıp aşağıdaki sorulara birlikte yanıt arayacağız.

- Gerçek sayı aralıklarını gösterirken ve bu aralıklarla işlemler yaparken küme sembol ve işlemlerini neden ve nasıl kullanırız?
- Gerçek sayı aralıklarına neden ihtiyaç duyarız? Gerçek sayıları neden mutlak değerli gösteririz?

Bu soruların cevaplarını "Gerçek Sayı Kümeleri, Gerçek Sayı Aralıkları ve Gerçek Sayıların Mutlak Değerli Eşitsizlikleri" başlıkları altında detaylı bir şekilde öğreneceksiniz.

HAZIRLANIYORUM

Amaç: Bu bölümde ön bilgilerinizi hatırlamanızı ve temaya hazırlıklı hâle gelmenizi amaçlıyoruz.

Aşağıda yer alan ifadeler, bu temada tamamlanması hedeflenen öğrenme çıktısını ele almadan önce sahip olmanız gereken bazı temel becerileri içermektedir. Lütfen her bir ifadeyi dikkatlice okuyunuz.

- Eğer ifadedeki beceriye hakim olduğunuzu düşünüyorsanız kutucuğu işaretleyiniz.
- Eğer temayı henüz tam olarak bilmediğinizi ya da hatırlamadığınızı düşünüyorsanız kutucuğu boş bırakınız.

	ÖN ÖĞRENME KONTROL LİSTESİ	✓
1	Gerçek sayıların alt kümelerini (doğal, tam, rasyonel, irrasyonel) birbirinden ayırt edebilirim.	☐
2	Sayı doğrusunda iki sayı arasındaki bir aralığı gösterebilirim.	☐
3	Kapalı, açık ve yarı açık aralıkları sayıları temsil etmesi için kullanabilirim.	☐
4	İrrasyonel sayıların yaklaşık değerlerini tahmin edebilir ve sayı doğrusunda gösterebilirim.	☐
5	Sayı doğrusunda ● (içi dolu nokta) ve ○ (içi boş nokta) kullanarak aralıkları gösterebilirim.	☐
6	[a, b], (a, b), [a, b), (a, b] şeklindeki gösterimleri doğru aralıklar ile eşleştirilebilirim.	☐

"Ön Öğrenme Kontrol Listesi"ni doldurduktan sonra aşağıda verilen "Kontrol Noktası" sorularını çözünüz ve cevaplarınızı kontrol ediniz.

KONTROL NOKTASI

SORU 1. Aşağıda verilen aralıkları sayı doğrusu üzerinde gösteriniz.

a) $(-3, 5)$

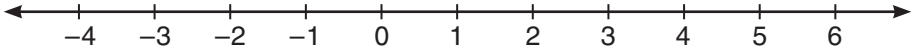
b) $[-2, 6)$

c) $[2, 8]$

d) $(4, 7]$

SORU 2. Aşağıda verilen gerçek sayıların sayı doğrusu üzerinde yaklaşık yerlerini gösteriniz.

$-\sqrt{14}$ $\sqrt{6}$ $-\sqrt{8}$ $\sqrt{30}$



SORU 3. –2 ile 5 arasındaki sayıları (–2 ve 5 dahil değil) bir aralık şeklinde gösteriniz.

SORU 4. $2 < x \leq 5$ olacak şekilde x gerçek sayılarını aralık biçiminde gösteriniz.

SORU 5. Verilen her bir sayının ait olduğu küme sembolünün alt hizasındaki kutucuğu (✓) sembolü ile işaretleyiniz.

(ℕ: Doğal sayılar ℤ: Tam sayılar ℚ: Rasyonel sayılar ℚ' : İrrasyonel sayılar ℝ: Gerçek sayılar)

Sayı	ℕ	ℤ	ℚ	ℚ'	ℝ
5	☐	☐	☐	☐	☐
–3	☐	☐	☐	☐	☐
7/2	☐	☐	☐	☐	☐
$\sqrt{7}$	☐	☐	☐	☐	☐
$-\sqrt{4}$	☐	☐	☐	☐	☐
0	☐	☐	☐	☐	☐
π	☐	☐	☐	☐	☐
4,25	☐	☐	☐	☐	☐

GERİ BİLDİRİM
Bu geri bildirim sayesinde kendi cevabınızı kontrol edebilir, hatalarınızı düzelterek öğrenmenizi pekiştirebilirsiniz.

ÇÖZÜM 1.

a) 

b) 

c) 

d) 

HATIRLATMA

Aralık nasıl gösterilir?

- Sayı doğrusunda iki sayı arasındaki tüm sayılar taranır.
- Başlangıç ve bitiş noktaları için;
  - **(a, b) nda** uç noktalar dahil değildir,
  - **[a, b] nda** uç noktalar dahildir,
  - **(a, b] nda** a noktası dahil değil b noktası dahildir,
  - **[a, b) nda** a noktası dahildir, b noktası dahil değildir,

kuralları uygulanır.

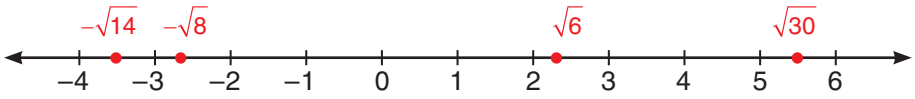
ÇÖZÜM 2.

$\sqrt{6}$ → $\sqrt{4} < \sqrt{6} < \sqrt{9}$, $2 < \sqrt{6} < 3$

$\sqrt{30}$ → $\sqrt{25} < \sqrt{30} < \sqrt{36}$, $5 < \sqrt{30} < 6$

$-\sqrt{14}$ → $-\sqrt{16} < -\sqrt{14} < -\sqrt{9}$, $-4 < -\sqrt{14} < -3$

$-\sqrt{8}$ → $-\sqrt{9} < -\sqrt{8} < -\sqrt{4}$, $-3 < -\sqrt{8} < -2$



HATIRLATMA

Kareköklü bir sayının değerinin hesaplanması:

Kareköklü bir ifadenin içinde yer alan pozitif sayı **tam kare** (bir tam sayının karesi) değilse (ör. 14, 8, 6, 30) bu ifade bir **irrasyonel sayı**dır. İrrasyonel olan sayının sayı doğrusundaki yeri yaklaşık olarak gösterilebilir. Bunun için irrasyonel sayının hangi iki tam kare sayı arasında yer aldığı tespit edilir ve bu iki tam sayının arasındaki yer **yaklaşık olarak konumudur**. (Geometrik yöntemler kullanılarak sayının sayı doğrusundaki konumunu çok daha hassas olacak şekilde belirlemek mümkündür.)

ÇÖZÜM 3.

Bu aralık, (–2, 5) şeklinde gösterilir ve "–2'den büyük, 5'ten küçük tüm gerçek sayılar bu aralığa dahildir." anlamına gelmektedir.



Matematiksel olarak her sayı pek çok sınır belirlenerek **aralık gösterimi** ile ifade edilebilir.

- Sınırların her ikisi de aralığa dahilse [–2, 5] şeklinde,
- Aralığa –2 dahil olup 5 dahil edilmezse [–2, 5) şeklinde,
- $x > -2$ şeklindeki ifade aralık olarak $(-2, \infty)$ şeklinde,
- $x < 5$ şeklindeki ifade aralık olarak $(-\infty, 5)$ şeklinde gösterilir.

ÇÖZÜM 4.
2'den büyük ve 5'ten küçük veya eşit tüm gerçek sayılar (2, 5] aralığındadır.

ÇÖZÜM 5.

Sayı	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{Q}'$	$\mathbb{R}$
5	☑	☑	☑	☐	☑
–3	☐	☑	☑	☐	☑
7/2	☐	☐	☑	☐	☑
$\sqrt{7}$	☐	☐	☐	☑	☑
$-\sqrt{4}$	☐	☑	☑	☐	☑
0	☑	☑	☑	☐	☑
π	☐	☐	☐	☑	☑
4,25	☐	☐	☑	☐	☑

HATIRLATMA

1. Her doğal sayı aynı zamanda bir tam sayıdır, her tam sayı da bir rasyonel sayıdır.
2. İrrasyonel ve rasyonel sayılar kümeleri kesişmez. Bir sayı ya rasyonel ya da irrasyonel olur, ikisi birden olamaz.
3. Bir kareköklü ifadede, eğer karekök içindeki pozitif sayı bir tam sayının karesi ise sayı rasyonel, değilse sayı irrasyonel olur.
4. Sayı doğrusundaki tüm sayılar birer gerçek sayıdır. Gerçek sayılar kümesi, rasyonel ve irrasyonel sayıların birleşiminden oluşur.

- **Doğal Sayılar** ($\mathbb{N}$): 0, 1, 2, 3, ...
- **Tam Sayılar** ($\mathbb{Z}$): ..., −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, ...
- **Rasyonel Sayılar** ($\mathbb{Q}$): Kesirli yazılabilen tüm sayılar. (Örn: 1/2, −3/4, 5, 4,25).
- **İrrasyonel Sayılar** ($\mathbb{Q}'$): Kesirli yazılamayan, ondalık kısmı düzensiz ve sonsuz olan sayılar. (Örn: $\sqrt{7}$, π , e).
- **Gerçek Sayılar** ($\mathbb{R}$): Rasyonel ve irrasyonel sayıları içeren en geniş sayı kümesidir. ($\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$).

İLİŞKİLENDİRİYORUM

Amaç: Bu bölümde yeni öğreneceğiniz temayı; zihninizde var olan bilgileriniz, yaşantılarınız ve diğer derslerde öğrendiklerinizle ilişkilendirmenizi bekliyoruz.

Aşağıdaki metni dikkatle okuyunuz. Verilen durumu küme kavramı ve işlemleriyle ilişkilendiriniz. Bu ilişkiyi kurarken gerçek sayı kümeleriyle olan bağlantısını düşününüz.

Günlük yaşamda nesneleri ortak özelliklerine göre gruplandırıldığı gibi matematikte de sayılar belirli özelliklerine göre sınıflandırılır. Bu sınıflandırma, sayıların düzenli bir yapısının sonucu olup aralarındaki ilişkileri anlamayı kolaylaştırır.

1. Sayı Kümeleri

Gerçek yaşamda birçok nesneyi belirli ortak özelliklerine göre gruplandırırız:

- Bir kütüphanede kitaplar türlerine göre (roman, şiir, bilim kitabı) ayrılır.
- Bir markette ürünler gıda, temizlik ya da teknoloji reyonlarına yerleştirilir.

Matematikte de sayılar belirli özelliklerine göre gruplandırılır:

- **Doğal sayılar:** 0, 1, 2, 3, ...
- **Tam sayılar:** ..., –2, –1, 0, 1, 2, ...
- **Çift sayılar:** ..., -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, ...
- **Asal sayılar:** 2, 3, 5, 7, 11, ...

Bu etkinlikte "Kütüphane ve Kitap" teması üzerinden **küme kavramını** tanımanız ve aşağıdaki temel kavramlar hakkında bilgi edinmeniz amaçlanmaktadır. Edineceğiniz bu bilgileri, bir sonraki tema olan **gerçek sayı kümelerini** öğrenirken kullanmanız beklenmektedir. Bu etkinlik kapsamında aşağıdaki kavram ve işlemler ele alınacaktır:

- **Kavramlar:** Eleman, Boş Küme, Alt Küme, Evrensel Küme
- **Gösterim Yöntemleri:** Liste Yöntemi, Ortak Özellik Yöntemi
- **Küme İşlemleri:** Birleşim, Kesişim, Fark, Tümleme

ETKİNLİK 1.

Kütüphaneki Kitap Rafları ve Küme Kavramları



Bir kütüphanede kitaplar, 1'den 50'ye kadar numaralandırılmıştır. Kitaplar, içeriklerine göre farklı kategoriler altında toplanmıştır:

- A Kategorisi: 30'dan küçük ve tek sayılar ile numaralandırılan kitaplardır.
- B Kategorisi: 20'den büyük ve çift sayılar ile numaralandırılan kitaplardır.
- C Kategorisi: 10 ile 50 arasındaki tam kare sayılar ile numaralandırılan kitaplardır.

Okuyucular kitap numaralarına bakarak kitabın hangi kategori ya da kategorilere ait olduğunu anlayarak kitabın içeriği hakkında bilgi sahibi olabilir. Bazı kitaplar, bu kurallar gereği birden fazla kategoriye ait olabilir. Örneğin, 25 numaralı kitap hem A kategorisine hem de C kategorisine aittir.

1. Her bir kategoride yer alan kitap numaralarının oluşturduğu topluluklar aşağıda tanımlanmıştır. A, B, C kategorilerinde yer alan kitapların numaralarının oluşturduğu toplulukları A, B, C ile gösterelim.

Buna göre;

a) A topluluğuna ait kitap numaralarını yazınız.

.....

.....

b) B topluluğuna ait kitap numaralarını yazınız.

.....

.....

c) C topluluğuna ait kitap numaralarını yazınız.

.....

.....

2. Bir kitap, tanımlanan kategorilere ait numaraya sahip ise o topluluğun bir elemanı olur. Örneğin, 7 numaralı bir kitap; A kategorisinde tanımlanan kitap numaralarına uygun olduğu için bu topluluğun bir elemanıdır. Bu ifade semboller yardımıyla "$7 \in A$" olarak gösterilir. Fakat 8 numaralı kitap, A kategorisinde tanımlanan sayılardan biri olmadığı için bu topluluğun elemanı değildir. Bu durum ise semboller yardımıyla "$8 \notin A$" şeklinde gösterilir.

Yukarıda verilen açıklamalardan yola çıkarak aşağıdaki boşlukları doldurunuz.

- **15 numaralı kitabın A topluluğuna ait olup olmadığını matematiksel sembol ile ifade ediniz.**

.....

.....

- **24 numaralı kitabın B topluluğuna ait olup olmadığını matematiksel sembol ile ifade ediniz.**

.....

.....

- **25 numaralı kitabın C topluluğuna ait olup olmadığını matematiksel sembol ile ifade ediniz.**

.....

.....

- **30 numaralı kitabın A topluluğuna ait olup olmadığını matematiksel sembol ile ifade ediniz.**

.....

.....

- **Küme**, iyi tanımlanmış nesneler topluluğudur. Bir kümede yer alan her bir nesneye **eleman** denir.
- Kümenin elemanları, yalnızca bir kez yazılır; tekrar eden elemanlar tek kabul edilir.

Gösterim:

- Kümeler büyük harflerle adlandırılır: A, B, C, ...
- Bir elemanın kümeye ait olması: $a \in A$
- Bir elemanın kümeye ait olmaması: $a \notin A$
- Bir kümenin eleman sayısı: $s(A)$

NOT

- "İyi tanımlanmış" ifadesi, kümenin hangi nesneleri içerdiğinin herkes tarafından açık ve anlaşılır şekilde belirlenebilmesi demektir.

3. A kümesine ait kitap sayısı 15'tir. Bu ifade s(A) = 15 olarak gösterilir ve A kümesinin 15 tane kitaptan oluştuğunu ifade eder. **Benzer şekilde B ve C kümelerine ait kitapların sayısını bulup aşağıda boş bırakılan yerlere yazınız.**

- B kümesinin eleman sayısı ..... ve ..... olarak ifade edilir.

- C kümesinin eleman sayısı ..... ve ..... olarak ifade edilir.

4. A kümesine ait kitap numaraları 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29'dur.
Listeleme yönteminde bu kümenin elemanları, küme parantezi içinde ve aralarına virgül koyularak gösterilir.
A kümesinin elemanları A = {1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29} biçiminde gösterilir.
Ortak özellik yönteminde kümenin elemanlarının taşıdığı şartlar veya ortak özellikler belirtilerek küme gösterilir. A kümesinin elemanları A = {x | x = 2k+1, k < 15, k bir doğal sayı} şeklinde gösterilir ve x öyle ki 30'dan küçük tek doğal sayılar şeklinde okunur.

Yukarıdaki açıklamalardan yararlanarak aşağıdaki soruları yanıtlayınız.

a) B kümesine ait kitapların numaralarını liste ve ortak özellik yöntemiyle yazınız.

Liste Yöntemi: B = {.....}

Ortak Özellik Yöntemi: B = {x |.....}

b) C kümesine ait kitapların numaralarını liste ve ortak özellik yöntemiyle yazınız.

Liste Yöntemi: C = {.....}

Ortak Özellik Yöntemi: C = {x |.....}

HATIRLATMA

Küme Gösterim Yöntemleri

Yöntem	Açıklama	Gösterim	Örnek
Liste Yöntemi	Kümenin elemanları, küme parantezi **{ }** içine yazılır. Elemanlar virgülle ayrılır. Aynı eleman bir kez yazılır, sıranın önemi yoktur.	A = {1, 2, 3, 4}	A = {1, 2, 3, 4} ={4, 3, 2, 1}
Ortak Özellik Yöntemi	Kümenin elemanlarını temsil eden bir değişken seçilir. Değişkenden sonra "I" veya ":" (öyle ki) sembolü yazılır. Elemanların sahip olduğu ortak özellik belirtilir.	A = {x | x ortak özelliği sağlar}	A = {x | x < 5, x bir doğal sayı}

5. Aşağıdaki maddelerde verilen her açıklamayı dikkatlice okuyunuz ve sonunda istenilenleri liste yöntemiyle yazınız.

a) Hem A hem de C kümelerine ait kitaplar, matematiksel olarak A ∩ C ile gösterilir ve "A kesişim C kümesi" şeklinde okunur.
Kesişim kümesi, her iki kümede ortak olan elemanlardan oluşur. Yani bu kitaplar hem A hem de C kategorisine ait özelliği taşır.
Örneğin, 25 numaralı kitap; hem A hem de C kategorisinde olduğundan liste yöntemi ile
A ∩ C = {25} şeklinde gösterilir.

Buna göre

- **Hem A hem de B kategorisinde yer alan kitapların numaralarını,**
- **Hem B hem de C kategorisinde yer alan kitapların numaralarını boş bırakılan yerlere yazınız.**

A ∩ B = {.....}

B ∩ C = {.....}

b) A veya B kümelerine ait kitapların numaraları matematiksel olarak A ∪ B şeklinde gösterilir ve *"A birleşim B kümesi"* şeklinde okunur. Birleşim kümesi, her iki kümenin elemanlarını bir araya getirir. Aynı eleman birden fazla yazılmaz. Yani bu küme, hem A hem de B kategorisindeki kitapların hepsini kapsar. Örneğin:

A ∪ B = {1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36, 38, 40, 42, 44, 46, 48, 50}

A B

Birleşim kümesinde yer alan bu sayılar A veya B kümesine ait bulunan kitaplar şeklinde yorumlanır.

Benzer şekilde A veya C ile B veya C kümelerine ait kitap numaralarını boş bırakılan yerlere yazınız.

A ∪ C = {.....}

B ∪ C = {.....}

c) 25 numaralı kitap, hem A hem de C kategorisinde yer aldığı için A ∩ C kümesinin bir elemanıdır. Ancak bazı kitaplar, sadece A veya sadece C kategorisinde olabilir; bunlar numaralarına bakılarak anlaşılabilir. Örneğin; 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 27, 29 numaralı kitaplar, yalnızca A türündedir ve C kategorisindeki kitaplarla ortak bir içeriğe sahip değildir.
Matematikte "A türünde olup C türünde olmayan kitaplar" A \ C şeklinde gösterilir ve "A fark C" şeklinde okunur.
A \ C = {1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 27, 29}

Benzer şekilde aşağıdaki boşlukları doldurunuz ve her ifadenin anlamını yanındaki kutucuklara yazınız.

A \ B = {.....} →

C \ B = {.....} →

C \ A = {.....} →

B \ A = {.....} →

Yukarıda boş bırakılan yerleri uygun bir şekilde doldurduktan sonra sizce B kümesine ait kitapların hepsi A kümesine ait kitaplar mıdır? Neden?

ç) Kütüphanede A kategorisine ait kitapların numaraları aşağıdaki gibidir.
A = {1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29}

A kümesine ait olmayan kitapların numaraları
{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50} şeklinde listelenir.

Bu kitaplar matematikte A'nın tümleyeni olarak adlandırılır ve A′ sembolü ile gösterilir.
A′ = {2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50}

Benzer şekilde aşağıdaki kümelerin tümleyenlerinin elemanlarını ve her bir ifadenin anlamını ilgili bölümlere yazınız.

B′ = {.....} →

C′ = {.....} →

D kategorisine ait kitaplar, iki basamaklı ve çift asal sayı olacak şekilde tanımlanıyor. Bu şartı sağlayan herhangi bir sayı var mıdır?

6. Kütüphanedeki tüm kitapların numaralarından oluşan küme E ile gösterilmiştir.
Buna göre aşağıdaki boşlukları doldurunuz.

a) Kütüphanedeki tüm kitapların numaralarını kullanarak E kümesini liste yöntemiyle oluşturunuz.

.....

.....

b) E kümesinin eleman sayısını yazınız.

.....

.....

c) 51 sayısı bu kümenin elemanı mıdır? Açıklayınız.

.....

.....

ç) A, B ve C kümelerinin tüm elemanları aynı zamanda E kümesinin elemanı mıdır? Açıklayınız.

.....

.....

NOT

Küme İşlemleri ve Temel Kavramlar

- **Birleşim Kümesi (A ∪ B)**
  A ve B kümelerinin tüm elemanlarının bir araya gelmesiyle oluşan kümeye **birleşim kümesi** denir.
  A ∪ B sembolü ile gösterilir.
- **Kesişim Kümesi (A ∩ B)**
  A ve B kümelerinin ortak elemanlarının oluşturduğu kümeye **kesişim kümesi** denir.
  A ∩ B sembolü ile gösterilir.
- **Fark Kümesi (A \ B veya A – B)**
  A kümesinde olup B kümesinde olmayan elemanlardan oluşan kümeye **A fark B kümesi** denir.
  A \ B veya A – B sembolleriyle gösterilir.
- **Tümleyen Küme (A′)**
  E evrensel kümesinin alt kümesi olan A kümesi için E kümesinde olup A kümesinde olmayan elemanlardan oluşan kümeye **A kümesinin tümleyeni** denir. A′ sembolü ile gösterilir.
- **Alt Küme (A ⊆ B)**
  Eğer A kümesinin tüm elemanları B kümesinin de elemanı ise A kümesi B'nin **alt kümesi**dir. A ⊆ B ile gösterilir.
- Bu durumda B kümesi, A kümesini kapsar şeklinde de yorumlanır. Her küme kendisinin alt kümesidir.
- **Evrensel Küme (E)**
  Üzerinde işlem yapılan tüm kümeleri kapsayan kümeye **evrensel küme** denir ve bu küme E ile gösterilir.
- **Boş Küme (∅)**
  Hiçbir elemanı olmayan kümeye **boş küme** denir. ∅ veya { } sembolleriyle gösterilir.
  Boş küme her kümenin alt kümesidir.

ETKİNLİK 2.

Küme Bilgisi ile Doğru–Yanlış Etkinliği

Aşağıdaki tabloda kümelerle ilgili bazı ifadeler verilmiştir.

- Her ifadeyi dikkatlice okuyunuz.
- İfadenin doğru olduğunu düşünüyorsanız "Doğru" sütunundaki kutucuğu işaretleyiniz.
- İfadenin yanlış olduğunu düşünüyorsanız "Yanlış" sütunundaki kutucuğu işaretleyiniz.

Açıklama	Doğru	Yanlış
Bir kümenin her elemanı yalnızca bir kez yazılır.	☐	☐
Kümelerde elemanların yazılış sırası önemlidir.	☐	☐
A = {2, 4, 6} kümesi ile A = {6, 2, 4} kümesi aynı kümeyi ifade eder.	☐	☐
"a ∈ A" ifadesi, "a elemanıdır A" şeklinde okunur.	☐	☐
"a ∉ A" ifadesi, "a, A'nın elemanı değildir." anlamına gelir.	☐	☐
Kümeler her zaman küçük harflerle gösterilir.	☐	☐
Liste yöntemi, tüm elemanların süslü parantez { } içinde virgülle ayrılarak yazılmasıdır.	☐	☐
Ortak özellik yöntemi, kümenin tüm elemanlarının sahip olduğu özelliğin sözel veya matematiksel olarak tanımlanmasıdır.	☐	☐
"x | p(x)" ifadesi, "x öyle ki p(x)" diye okunur.	☐	☐
n elemanlı bir A kümesinin eleman sayısı s(A) = n ile gösterilir.	☐	☐

ÖRNEK

P = {1, 3, 5, 7, 9}, Q = {3, 7}, R = {7}

Yukarıda verilen kümelere göre aşağıdaki ifadelerden hangileri doğrudur? Gerekçesi ile birlikte açıklayınız.

I. Q kümesinin her bir elemanı P kümesinin elemanıdır.

II. R kümesinin her bir elemanı Q kümesinin elemanıdır.

III. P kümesinin her bir elemanı R kümesinin elemanıdır.

ÇÖZÜM

I. Q kümesinin her bir elemanı P kümesinin de elemanıdır.

Çünkü Q = {3,7} ve bu elemanların **tamamı** P kümesinde vardır. Bu ifade $Q \subseteq P$ şeklinde gösterilir.

II. R kümesinin her bir elemanı Q kümesinin elemanıdır. Çünkü R = {7} ve 7, Q kümesinin elemanıdır. Bu ifade $R \subseteq Q$ şeklinde gösterilir.

III. P kümesinin her bir elemanı R kümesinin elemanı değildir. Çünkü P kümesindeki 1, 3, 5 ve 9 elemanları R kümesinde yoktur.

Sonuç olarak

I. ve II. ifadeler doğru, III. ifade yanlıştır.

SIRA SİZDE 1.

Aşağıdaki tabloda verilen boşlukları doldurunuz.

Kümenin Açıklaması	**Ortak Özellik Yöntemi**	**Liste Yöntemi**
10'dan küçük çift doğal sayılar	$A = \{ x \in \mathbb{N} \mid x < 10 \text{ ve } x \text{ çift} \}$	.....
.....	.....	$B = \{ -2, -1, 0, 1, 2 \}$
.....	$C = \{ x \in \mathbb{N} \mid x = 5k, k \in \mathbb{N} \}$	.....
4'ten büyük ve 10'dan küçük doğal sayılar	.....	$D = \{ 5, 6, 7, 8, 9 \}$
.....	$E = \{ x \in \mathbb{N} \mid x \text{ asal ve } x < 20 \}$	.....

ÖRNEK

A = { 1, 3, 5, 7 } kümesi veriliyor.

Buna göre aşağıdakilerden hangileri A kümesinin alt kümesidir? Açıklayınız.

I. { 1, 5 }
II. { 2, 3 }
III. { }
IV. { 7 }
V. { 1, 3, 5, 7 }

ÇÖZÜM

Bir kümedeki tüm elemanlar **A kümesinde bulunuyorsa** o küme **A'nın alt kümesidir**.

I) { 1, 5 }
• Kümenin tüm elemanları, A kümesinde olduğundan alt kümedir.
•

II) { 2, 3 }
• Kümedeki 2 elemanı, A kümesinde olmadığından alt küme değildir.

III) { }
• Boş küme her kümenin alt kümesidir.

IV) { 7 }
• Kümedeki 7 elemanı, A kümesinde olduğundan alt kümedir.
•

V) { 1, 3, 5, 7 }
• Bir küme kendisinin alt kümesidir.

GERİ BİLDİRİM

Bu geri bildirim sayesinde kendi cevabınızı kontrol edebilir, hatalarınızı düzelterek öğrenmenizi pekiştirebilirsiniz.

ETKİNLİK 1.

ÇÖZÜM 1.

a) 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29

b) 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36, 38, 40, 42, 44, 46, 48, 50

c) 16, 25, 36, 49

ÇÖZÜM 2.

$15 \in A \quad 24 \in B \quad 25 \in C \quad 30 \notin A$

ÇÖZÜM 3.
B kümesinin eleman sayısı 15 ve s(B) = 15 olarak ifade edilir.
C kümesinin eleman sayısı 4 ve s(C) = 4 olarak ifade edilir.

ÇÖZÜM 4.
a) Liste Yöntemi B = {22, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36, 38, 40, 42, 44, 46, 48, 50}
Ortak Özellik Yöntemi B = $\{x \mid x = 2k, k < 50, k \in \mathbb{N}\}$

b) Liste Yöntemi C = {16 ,25, 36, 49}
Ortak Özellik Yöntemi C = $\{x \mid x^2 < 50, x \in \mathbb{N}\}$

ÇÖZÜM 5.
a) $B \cap C = \{36\}$ $A \cap B = \{\}$

b) $A \cup B = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 22, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 32, 34, 36, 38, 40, 42, 44, 46, 48, 50\}$
$B \cup C = \{16, 22, 24, 25, 26, 28, 30, 32, 34, 36, 38, 40, 42, 44, 46, 48, 49, 50\}$

c) $A \setminus B = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29\}$
$C \setminus B = \{16, 25, 49\}$
$C \setminus A = \{16, 36, 49\}$
$B \setminus A = \{22, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36, 38, 40, 42, 44, 46, 48, 50\}$

ç) $B' = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 41, 43, 45, 47, 49\}$
B kümesine ait olmayan kitap numaraları.
$C' = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48\}$
C kümesine ait olmayan kitaplara ait numaralar.

ÇÖZÜM 6.
a) $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50\}$

b) s(E) = 50

c) $51 \notin E$ kütüphanedeki kitap sayısı 50 olduğu için 51 numaralı kitap evrensel kümeye ait değildir.

ç) A, B ve C kümelerinin tüm elemanları aynı zamanda E kümesinin de bir elemanıdır. Bu yüzden A, B, C kümeleri evrensel kümenin birer alt kümesidir yani evrensel küme hepsini kapsar.

ETKİNLİK 2.

ÇÖZÜM

Açıklama	Doğru	Yanlış
Bir kümenin her elemanı yalnızca bir kez yazılır.	✅	☐
Kümelerde elemanların yazılış sırası önemlidir.	☐	❌
A = {2, 4, 6} kümesi ile A = {6, 2, 4} kümesi aynı kümeyi ifade eder.	✅	☐
"a ∈ A" ifadesi, "a elemanıdır A" şeklinde okunur.	✅	☐
"a ∉ A" ifadesi, "a, A'nın elemanı değildir." anlamına gelir.	✅	☐
Kümeler her zaman küçük harflerle gösterilir.	☐	❌
Liste yöntemi, tüm elemanların süslü parantez { } içinde virgülle ayrılarak yazılmasıdır.	✅	☐
Ortak özellik yöntemi, kümenin tüm elemanlarının sahip olduğu özelliğin sözel veya matematiksel olarak tanımlanmasıdır.	✅	☐
"x | p(x)" ifadesi, "x öyle ki p(x)" diye okunur.	✅	☐
n elemanlı bir A kümesinin eleman sayısı s(A) = n ile gösterilir.	✅	☐

SIRA SİZDE 1.

ÇÖZÜM

Kümenin Açıklaması	Ortak Özellik Yöntemi	Liste Yöntemi
10'dan küçük çift doğal sayılar	A = { x ∈ ℕ | x < 10 ve x çift }	A = { 2, 4, 6, 8 }
–2 'den 2'e kadar olan tam sayılar	B = { x ∈ ℤ | –2 ≤ x ≤ 2 }	B = { -2, -1, 0, 1, 2 }
5'in doğal sayı katları	C = { x ∈ ℕ | x = 5k, k ∈ ℕ }	C = { 5, 10, 15, 20, ... }
4'ten büyük ve 10'dan küçük doğal sayılar	D = { x ∈ ℕ | 4 < x < 10 }	D = { 5, 6, 7, 8, 9 }
20'den küçük asal doğal sayılar	E = { x ∈ ℕ | x asal ve x < 20 }	E = { 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 }

UYGULAYARAK ÖĞRENİYORUM

Amaç: Bu bölümde bilgilerinizi etkinlikler ve uygulamalarla pekiştirmenizi, öğrenmeyi daha kalıcı hâle getirmenizi amaçlıyoruz. Örnek ya da etkinliklerde verilen adımları dikkatle uygulayınız. Çalışmanızı dikkatli ve düzenli bir şekilde yapınız.

GERÇEK SAYI KÜMELERİ

ÖRNEK

Aşağıdaki tabloda bazı sayı kümeleri ve gösterimleri verilmiştir. Boş bırakılan yerleri uygun şekilde doldurunuz.

Sayı Kümesi	Sembol	Listeleme veya Ortak Özellik Yöntemi ile Gösterimi
Rakamlar		{ 0, 1, 2, ..., 9 }
Doğal Sayılar	$\mathbb{N}$	
Sayma Sayıları		$\{ x \mid x > 0, x \in \mathbb{N} \}$
Pozitif Tam Sayılar	$\mathbb{Z}^+$	{ 1, 2, 3, ... }
Negatif Tam Sayılar		{..., −3, −2, −1 }
Tam Sayılar	$\mathbb{Z}$	{ ..., −2, −1, 0, 1, 2, ... }
Rasyonel Sayılar	$\mathbb{Q}$	
İrrasyonel Sayılar		
Reel (Gerçek, Gerçel) Sayılar	$\mathbb{R}$	
Tek Tam Sayılar		
3'ün katı olan tam sayılar		
−2 ile 5 arasındaki reel sayılar		
5'ten küçük reel sayılar		

ÇÖZÜM

Sayı Kümesi	Sembol	Listeleme veya Ortak Özellik Yöntemi ile Gösterimi
Rakamlar		{ 0, 1, 2, ..., 9 }
Doğal Sayılar	$\mathbb{N}$	$\mathbb{N} = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, ... \}$
Sayma Sayıları		$\{ x \mid x > 0, x \in \mathbb{N} \}$
Pozitif Tam Sayılar	$\mathbb{Z}^+$	{ 1, 2, 3, ... }
Negatif Tam Sayılar	$\mathbb{Z}^-$	{..., −3, −2, −1 }
Tam Sayılar	$\mathbb{Z}$	{ ..., −2, −1, 0, 1, 2, ... }
Rasyonel Sayılar	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{Q} = \{ p/q \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}\backslash\{0\} \}$
İrrasyonel Sayılar		$\mathbb{Q}' = \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \notin \mathbb{Q}\}$
Reel (Gerçek, Gerçel) Sayılar	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R} = \{x \mid$ x rasyonel veya irrasyonel bir sayı olsun$\}$
Tek Tam Sayılar		$\{x \in \mathbb{Z} \mid x = 2k + 1, k \in \mathbb{Z} \}$ veya {..., −5, −3, −1, 1, 3, 5, ...}
3'ün Katı Olan Tam Sayılar		$\{x \in \mathbb{Z} \mid x = 3k, k \in \mathbb{Z} \}$ veya {..., −6, −3, 0, 3, 6, 9, ...}
−2 ile 5 Arasındaki Reel Sayılar	(−2, 5)	$\{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 5\}$
5'ten Küçük Reel Sayılar	(−∞, 5)	$\{x \in \mathbb{R} \mid x < 5\}$

ETKİNLİK 3.

Sayı Kümeleri Etkinliği

Aşağıdaki tabloda verilen sayıların ait oldukları sayı kümelerini belirleyiniz ve tabloyu örnek çözüme uygun şekilde doldurunuz.

Sayı	Elemanı Olduğu Sayı Kümeleri
7	$\mathbb{N}, \mathbb{Z}^+, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$
0	$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$
$\sqrt{5}$	
$-4/3$	
16	
-9	
2,5	
π	

SAYI KÜMELERİ VE İLİŞKİLERİ

Gerçek sayılar kümesi ($\mathbb{R}$); doğal sayılar ($\mathbb{N}$), tam sayılar ($\mathbb{Z}$), rasyonel sayılar ($\mathbb{Q}$) ve irrasyonel sayılar ($\mathbb{Q}'$) kümelerini kapsayan en geniş kümedir.

Küme Adı	Sembol	Örnek Elemanlar	Özellik
Doğal Sayılar	$\mathbb{N}$	0, 1, 2, 3, 4, ...	Sıfırdan başlayıp sonsuza kadar devam eden sayıların kümesidir.
Tam Sayılar	$\mathbb{Z}$	..., –2, –1, 0, 1, 2, ...	Sıfırın, negatif ve pozitif sayıların birleşiminden oluşan kümedir.
Rasyonel Sayılar	$\mathbb{Q}$	1/2, –3, 0, 4.5	Kesir olarak yazılabilen tüm sayıların oluşturduğu kümedir.
İrrasyonel Sayılar	$\mathbb{Q}'$	$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}$	Kesir biçiminde ifade edilemeyen sayıların oluşturduğu kümedir.
Gerçek Sayılar	$\mathbb{R}$	$0, 2, \sqrt{\frac{2}{3}}, 2/5$	Rasyonel ve irrasyonel sayıların birleşiminden oluşan kümedir.

- **Rakamlar:** 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
- **En küçük doğal sayı:** 0
- **En küçük sayma sayısı:** 1
- **0 ne pozitif ne de negatif** bir sayıdır.
  - **Sıfırla çarpma:** $a \cdot 0 = 0$
  - **Sıfıra bölme:** $a \neq 0$ olmak üzere, $\frac{a}{0}$ ifadesi tanımsızdır.
  - **Sıfır ile bölünme:** $a \neq 0$ olmak üzere, $\frac{0}{a} = 0$

SIRA SİZDE 2.

$-41, \frac{1}{2}, \sqrt[3]{27}, 5, 0, \pi, \sqrt{16}$

sayılarından hangileri irrasyonel sayıdır?

ÖRNEK

$B = \{ x \mid 50 \leq x < 300 \text{ ve } x = 7k, k \in \mathbb{Z} \}$ **olduğuna göre B kümesinin eleman sayısını bulunuz.**

ÇÖZÜM.

Kümenin elemanları, 7'nin tam katı olan $50 \leq x < 300$ yani 50'nin dahil, 300'ün hariç olduğu tam sayılardır.

- 50'den **büyük,** 7'nin katı olan en küçük sayıyı bulalım:
  $50 \div 7 = 7{,}142857...$
  7,14... olduğundan en yakın tam sayı 8 alınır ve $7 \cdot 8 = 56$ sayısı 7'nin katı olan 50'den büyük en küçük sayıdır.
- 300'den **küçük** (300 hariç) olan en büyük 7'nin tam sayı katını bulalım:
  300'den küçük, 7'nin katı olan en büyük tam sayıyı bulmak amacıyla 300 dahil olmadığı için $299 \div 7 = 42{,}714285...$ işleminden $42 \cdot 7 = 294$ sayısını elde ederiz.
  B kümesinin elemanları, 56'dan 294'e kadar olan tam sayılardır. Terim sayısı formülü ile hesaplanırsa

$$\frac{294 - 56}{7} + 1 = 35$$

B kümesinin eleman sayısı 35 bulunur.

Sabit Farkla Artıp - Azalan Sayı Örüntülerinde Terim Sayısı Bulma:

- İlk ve son sayısı belli olan ve sayılar arasında sabit bir artış veya azalış bulunan sayı örüntüsünde, toplam terim sayısı aşağıdaki formülle bulunur.

$$\text{Terim Sayısı} = \frac{\text{Son Terim} - \text{İlk Terim}}{\text{Artış Miktarı}} + 1$$

SIRA SİZDE 3.

Rasyonel sayılar kümesi $\mathbb{Q}$, tam sayılar kümes $\mathbb{Z}$ olmak üzere $A = \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ kümesinin elemanlarını belirleyelim.

Aşağıdaki sayılardan hangileri A kümesinin bir elemanıdır?

I. $-\frac{7}{5}$

II. $\frac{12}{4}$

III. $\frac{0}{3}$

IV. -15

GERÇEK SAYI ARALIKLARI

- Sizce bir sıcaklık değeri 20°C ile 25°C arasında ise bu nasıl gösterilir?
- Sayı doğrusunda 15 ve 30 arasında kaç farklı gerçek sayı olduğunu yazabilir misiniz?
- Günlük hayatta sıcaklık dışında başka hangi durumları aralıklarla ifade edebilirsiniz?
- "Kapalı aralık" ve "açık aralık" kavramlarını duydunuz mu? Sizce farkları ne olabilir?
- Bilgisayarınızın şarj seviyesi 0 ile 100 arasında değişiyor olması bir aralık belirtir mi? Neden?

Sayı kümeleri ve gerçek sayı aralıklarını mühendisler binaların ne kadar yük taşıyabileceğini hesaplarken, doktorlar hastaların kan değerlerini yorumlarken, yatırımcılar hisse senedi fiyatlarını takip ederken kullanırlar. Spor müsabakalarında oyuncuların istatistikleri, hava durumu tahminlerinde sıcaklık değerleri, bir oyunda alınan puanlar dahi aralıklarla ifade edilebilir. Böylece hem sağlık durumları düzenli olarak izlenir hem yapılar güvenli şekilde inşa edilir hem de günlük hayatta daha doğru kararlar verilir.

Alan	Aralık Örneği
Tıp	Kan şekeri değeri 70 ile 100 mg/dL arasında normal kabul edilir.
Mühendislik	Köprünün taşıma kapasitesi 0 ile 20.000 ton arasındadır.
Finans	Hisse fiyatı 120 ile 135 TL arasında değişmektedir.
Spor	Bir futbol takımı, maçın 60 ile 75. dakikaları arasında maçın en fazla golünü atmıştır.
Hava Durumu	Günlük sıcaklık 18 ile 26 °C arasında seyretmektedir.
Oyunlar	Oyunda alınan puan 2000 ile 3000 arasında değişmektedir.

ETKİNLİK 4.

Boy ve Kütle Aralıkları

Bir spor salonuna kayıt yaptıran Ayşe, Burak ve Ceren adlı üç arkadaşın boy ve kütleleri ile ilgili bilgiler aşağıdaki gibidir.

- Ayşe'nin boyu 160 cm'dir.
- Burak'ın boyu 175 cm'dir.
- Ceren'in boyunun, Ayşe'nin boyundan uzun ve Burak'ın boyundan kısa olduğu biliniyor.
- Ayşe'nin kütlesi 55 kg'dır.
- Ceren'in kütlesi, 65 kg veya 65 kg'dan fazla ancak 75 kg'dan azdır.
- Burak'ın kütlesi 80 kg ile 90 kg arasındadır.

Bu bilgilerden yararlanarak tabloda verilen boşlukları doldurunuz.

Sözel İfade	Aralık Gösterimi	Sayı Doğrusu	Cebirsel Temsil	Küme Gösterimi
Ceren'in boyu Ayşe'nin boyundan uzun, Burak'ın boyundan kısadır.	(160, 175)		$160 < x < 175$	
Ceren'in kütlesi; 65 kg veya 65 kg'dan fazla ve 75 kg'dan azdır.				$C_K = \{x \mid 65 \leq x < 75, x \in \mathbb{R}\}$
Burak'ın kütlesi 80 kg ile 90 kg arasındadır.				

ÖRNEK

$A = \{ x \mid -4 \leq x \leq 7, x \in \mathbb{R} \}$ $B = \{ x \mid -4 < x < 9, x \in \mathbb{R} \}$ kümeleri veriliyor.

Buna göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) A∩B kümesini aralık olarak ifade ederek sayı doğrusu üzerinde gösteriniz.

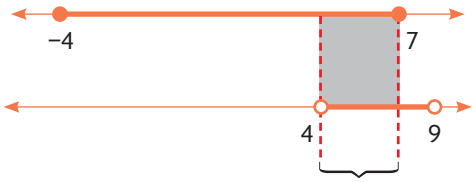
b) A–B kümesini aralık olarak ifade ederek sayı doğrusu üzerinde gösteriniz.

c) A∪B kümesini aralık olarak ifade ederek sayı doğrusu üzerinde gösteriniz.

d) B' kümesini aralık olarak ifade ederek sayı doğrusu üzerinde gösteriniz.

ÇÖZÜM

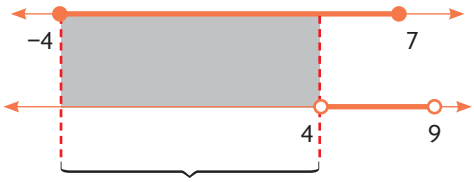
a) A kümesinde –4 ve 7 sayılarının ikisi de aralığa dahil olduğundan $A = [-4, 7]$,
B kümesinde 4 ve 9 sayıları aralığa dahil olmadığından $B = (4, 9)$ şeklinde gösterilir.
Bu aralıkları sayı doğrusunda yandaki gibi gösterebiliriz.



A∩B = (4, 7] olur. 4 sayısı A kümesinin elemanıdır fakat
B kümesinin elemanı olmadığı için kesişim kümesinin elemanı değildir.
7 sayısı, A kümesinin ve B kümesinin de ortak elemanı olduğu için
kesişim kümesinin elemanı olarak alınır.



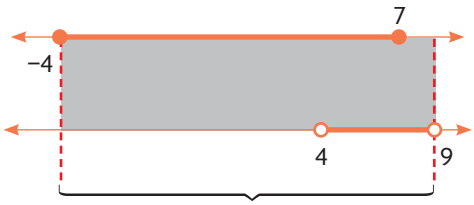
b) A–B kümesinin aralık şeklinde ve sayı doğrusu üzerinde gösterimi aşağıda verilmiştir.



A Kümesinin B kümesinden farklı elemanlarının oluşturduğu küme A–B kümesi olup A–B = [–4, 4] dır. Bu kümenin sayı doğrusunda gösterimi aşağıdaki gibidir.



c) A∪B kümesinin aralık şeklinde ve sayı doğrusu üzerinde gösterimi aşağıda verilmiştir.



A∪B kümesi, A ve B kümesinin elemanlarının birleşiminden oluşmaktadır. 4 elemanı, B kümesinin elemanı değil fakat A kümesinin elemanı olduğu için birleşim kümesinin elemanı olur. Bu durumda A∪B = [-4, 9) olur. Bu aralık, sayı doğrusunda aşağıdaki gibi gösterilir.



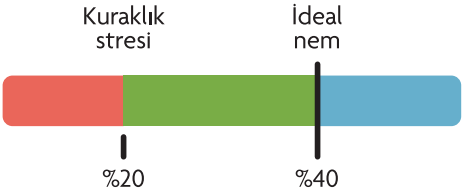
d) B' kümesinin aralık şeklinde ve sayı doğrusu üzerinde gösterimi aşağıda verilmiştir.

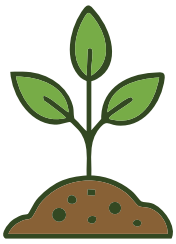


B kümesinin tümleyeni, B kümesine ait olmayan gerçek sayılardan oluşmaktadır. B' = (–∞, 4] ∪ [9, ∞)

Toprak Nemi ve Bitki Gelişimi

Bitkilerin sağlıklı büyümesi için topraktaki nem miktarı büyük önem taşır. Topraktaki nem miktarı, bitkinin köklerindeki besin maddeleri ve suyu alabilme kapasitesini doğrudan etkiler. Nem miktarı düşük olduğunda bitki kökleri yeterli su alamaz ve bitkide solgunluk, yaprak dökümü gibi belirtiler ortaya çıkar. Buna karşılık toprakta aşırı nem bulunması durumunda kökler oksijensiz kalır, bu da kök çürümesine ve bitkinin gelişiminin yavaşlamasına yol açar.





Topraktaki nem ölçümleri genellikle *toprak nem sensörleri* ile yapılır. Bu sensörler, topraktaki su miktarını belirleyerek tarımsal sulama sistemlerinin verimli kullanılmasını sağlar.

Eğer toprak nem oranı %20 ile %40 arasında ise bitkiler için nem ideal düzeydedir. %20'nin altındaki nem değerleri kuraklık stresi anlamına gelirken, %40'ın üzerindeki nem değerleri su fazlalığı ve oksijen azlığını işaret eder.

Verilen metne göre aşağıdaki yönergeleri yerine getiriniz.

a) Aşağıdaki sözel ifadeleri cebirsel, aralık ve küme gösterimiyle ifade ediniz.

Sözel İfade	Cebirsel Gösterim	Aralık Gösterimi	Küme Gösterimi
Toprak nem oranı %20 ile %40 arasında	$\%20 < x < \%40$	$(20, 40)$	$A = \{x \mid 20 < x < 40, x \in \mathbb{R}\}$
Toprak nem oranı %20'den az			
Toprak nem oranı %40'tan fazla			

b) Bitki gelişiminin ideal olduğu ve su fazlalığının görüldüğü nem miktarının aralıklarının kesişim kümesini yazınız.

c) Toprak nem oranının aşağıdaki değerlerde olması ne anlama gelir? Açıklayınız.

Nem Oranı (%)	Yorum
%15	Toprak çok kurudur, bitki kökleri su bulmakta zorlanır. Kuraklık stresi başlar.
%30	
%50	

ÇÖZÜM

a)

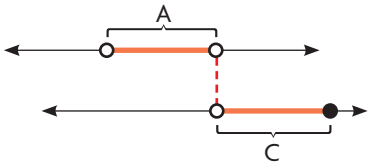
Sözel İfade	Cebirsel Gösterim	Aralık Gösterimi	Küme Gösterimi
Toprak nem oranı %20 ile %40 arasında	$\%20 < x < \%40$	$(20, 40)$	$A = \{x \mid \%20 < x < \%40, x \in \mathbb{R}\}$
Toprak nem oranı %20'den az	$0 \leq x < \%20$	$[0, 20)$	$B = \{x \mid 0 \leq x < \%20, x \in \mathbb{R}\}$
Toprak nem oranı %40'tan fazla	$\%40 < x \leq \%100$	$(40, 100]$	$C = \{x \mid \%40 < x \leq \%100, x \in \mathbb{R}\}$

$\%0 \leq$ Nem Oranı $\leq \%100$

Dolayısıyla **%0** tamamen kuru toprak, hiç su yok anlamına gelirken **%100** toprak, tamamen suya doymuş anlamına gelmektedir.

b) A = Bitki Gelişiminin İdeal Olduğu Aralık = (20, 40)
C = Su Fazlalığının GörüldüğüAaralık = (40, 100]

→ Bu iki kümenin kesişimi yoktur, çünkü toprakta aynı anda hem ideal nem hem de fazla nem durumu olamaz.



$A \cap C = \emptyset$

c)

Nem Oranı (%)	Yorum
%15	Toprak çok kurudur, bitki kökleri su bulmakta zorlanır. Kuraklık stresi başlar.
%30	Toprak ideal nem aralığındadır, bitki gelişimi sağlıklıdır.
%50	Toprak fazla nemlidir, oksijen azlığı nedeniyle kök çürümesi riski vardır.

ETKİNLİK 5.

Sıcaklık ve Nem Aralıklarıyla Sebze Yetiştirme

Aşağıdaki tabloda bazı sebze türlerinin yetişebileceği sıcaklık ve nem aralıkları verilmiştir. Verilen aralıklar, yaklaşık değerler olup genel olarak kabul edilen yetiştirme koşullarını göstermektedir.

Sebze	Sıcaklık (°C)		Nem (%)	
	Minimum (°C)	Maksimum (°C)	Minimum (%)	Maksimum (%)
Domates	18	28	50	70
Biber	20	30	55	75
Salatalık	16	25	60	80

Verilenlere göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) Her sebzenin yetişebileceği sıcaklık ve nem aralıklarını sayı doğrusu üzerinde gösteriniz.

b) Hem domatesin hem de salatalığın yetişebileceği sıcaklık değerini aralık ve küme gösterimi ile gösteriniz.

c) 22 °C sıcaklık ve %65 nemde hangi sebzeler yetişebilir?

ÇÖZÜM

a)

Domates:

Günlük dilde "18 - 28 °C sıcaklık aralığı" ifadesi, genellikle uç değerler de dahil edilerek kullanılır.
Bu durum aralık gösterimi ile **[18, 28]** şeklinde ifade edilir. Sayı doğrusunda aşağıdaki gibi gösterilir.



Nem oranının %50 - %70 olması, aralık gösterimi ile **[50, 70]** şeklinde ifade edilir. Sayı doğrusunda bu aralık aşağıdaki gibi gösterilir.



Biber:

Sıcaklığın 20 - 30 °C ve nem oranının %55 - 75 olması, uç değerlerin de dahil olduğu aralıkları göstermektedir.
Aralık gösterimi ile sıcaklık **[20, 30]** şeklinde ifade edilir. Sayı doğrusunda bu aralık aşağıdaki gibi gösterilir.



Aralık gösterimi ile nem oranı **[55, 75]** şeklinde ifade edilir. Sayı doğrusunda bu aralık aşağıdaki gibi gösterilir.



Salatalık:

Salatalık için uygun yetişme koşulları için tabloda sıcaklık 16 - 25 °C ve nem oranı %60 - 80 olarak verilmiştir.
Sıcaklık **[16, 25]** ve nem **[60, 80]** şeklinde ifade edilir. Sayı doğrusunda sıcaklık aşağıdaki gibi gösterilir.



b) Domatesin yetiştiği sıcaklık D kümesi ile salatalığın yetiştiği sıcaklık S ile gösterilsin. Her iki bitkinin de yetişebildiği ortak sıcaklık küme gösterimiyle $D \cap S$ şeklinde ifade edilir. Aralık gösterimi ile $[18, 25]$ ve ortak özellik yöntemiyle $\{x \mid 18 \leq x \leq 25, x \in \mathbb{R}\}$ şeklinde ifade edilir.

c) 22 °C sıcaklık ve %65 nemde tüm sebzeler yetişebilir.

ÖRNEK

- Bir tiyatro kulübünün sahnede kullanılacak bir dekor platformu bulunmaktadır. Platformun güvenliği ve dengesi için üzerine çıkan üç öğrencinin toplam kütlesi en az 260 kg, en fazla 310 kg olmalıdır.
- Tüm öğrencilerin kütleleri sırasıyla 68 kg, 82 kg, 95 kg ve y kg olarak verilmiştir.

Buna göre

a) y nin alabileceği değer aralığını bulunuz. Bu aralığı belirlerken sahneye çıkacak üç öğrencinin kütlelerinden oluşabilecek sıralı üçlüleri inceleyerek yazınız.

b) y = 120 kg olsaydı bu öğrenci hangi üçlü kombinasyonların içinde yer alabilirdi? Açıklayınız.

ÇÖZÜM

a) Platforma çıkacak üç öğrencinin toplam kütlesi 260 ile 310 kg arasında olmalıdır. Dört öğrencinin kütleleri 68 kg, 82 kg, 95 kg, y kg'dır. Soruda y'nin alabileceği değer aralığı sorulmaktadır. y, platforma çıkan üç kişiden biridir.
y'nin bulunduğu sıralı üçlüler aşağıdaki gibidir.

- 68 + 82 + y
- 68 + 95 + y
- 82 + 95 + y

Her bir üçlünün toplamının 260 ile 310 arasında olması koşulunu aşağıdaki tabloya yazalım.

Kütleler	Denklem	Koşul
68, 82, y	$260 \leq 150 + y \leq 310$	$110 \leq y \leq 160$
68, 95, y	$260 \leq 163 + y \leq 310$	$97 \leq y \leq 147$
82, 95, y	$260 \leq 177 + y \leq 310$	$83 \leq y \leq 133$

y'nin alabileceği değer aralığı $110 \leq y \leq 133$ olarak bulunur.

b) 120 kg, $110 \leq y \leq 133$ aralığı içindedir.
Üçlü kombinasyonların kütleleri toplamı,
68 + 82 + 120 = 270 kg
68 + 95 + 120 = 283 kg
82 + 95 + 120 = 297 kg olarak bulunur.

Platformun taşıyabileceği ağırlık 260 – 310 kg arasında olduğundan y = 120 kg olan öğrenci, yukarıdaki üçlü kombinasyonların içinde yer alarak platforma çıkabilir.

SIRA SİZDE 4.

Dünya Sağlık Örgütüne göre yetişkin bireylerin sağlıklı kalabilmesi için haftada en az 150 dakika orta tempolu yürüyüş yapması önerilmektedir. Bu da günde ortalama en az 20 - 30 dakika yürüyüş anlamına gelmektedir. Ancak büyük şehirlerde, özellikle trafik yoğunluğunun arttığı saatlerde (07.00 - 09.00 ve 18.00 - 20.00) hava kirliliği seviyesi yükseldiğinden bu saatlerde yapılan yürüyüşlerin 20 dakikayı geçmemesi tavsiye edilmektedir. Diğer saatlerde yürüyüş için belirli bir üst sınır yoktur.

Bir kişi aşağıdaki zaman dilimlerinde yürüyüş yapmayı planlamaktadır.

- [06.40, 07.10]
- [07.20, 07.50]
- [19.00, 19.25]
- [20.30, 21.00]

Bu kişinin yürüyüş programını uygunluk açısından değerlendiriniz.

ARALIKLARIN MUTLAK DEĞER GÖSTERİMİ

Sevgili öğrenciler, bu bölümde gerçek sayı ve mutlak değer kavramlarından yola çıkarak bir aralığın mutlak değer sembolü ile nasıl ifade edilebileceğini keşfedeceksiniz. Ayrıca bu gösterimlerin sayı doğrusu üzerindeki karşılıklarını ve gerçek yaşam durumlarıyla ilişkileri hakkında bilgi sahibi olacaksınız.

Bir çikolata fabrikasında, çikolata paketlerinin her birinin kütlesinin 100 gram olması hedeflenmektedir. Fakat üretim sırasında makineler paketlere ±2 gramlık hata payı ile dolum yapabilmektedir. Buna göre bir paketin kütlesi en az 98 gram, en fazla 102 gram olabilir. Matematiksel olarak bu durum,

$98 \leq m \leq 102$ şeklinde ifade edilir.

Aynı durum mutlak değerli eşitsizlik ile aşağıdaki şekilde gösterilebilir.

$|m-100| \leq 2$

Bu ifade, paketin kütlesinin 100 gramdan farkını göstermektedir. Bu fark ister eksik (örneğin 98 g) ister fazla (örneğin 102 g) olsun, hata payı veya tolerans içeren durumlar mutlak değerli eşitsizliklerle ifade edilebilir.

	Matematiksel İfade	**Anlamı**
Ekmek Gramajı	200 ± 6 g	Ekmek, 194 - 206 gram arasında olmalıdır.
Aşı Saklama Sıcaklığı	5 ± 3 °C	Sıcaklık 2 - 8 °C arasında olmalıdır.
Çanakkale Köprüsünün Uzunluğu	4608 ± 2,8 m	Köprünün uzunluğu hava sıcaklığına bağlı olarak 4605,2 - 4610,8 m arasında değişmektedir.
GPS Konum Doğruluğu	± 5 m	Telefonun gerçek konumu, verilen noktadan en fazla 5 metre daha yakın ya da daha uzaktır.

ÖRNEK

Bir sporcu, bisikletinin lastik basıncını 6 bar olarak ayarlamak istemektedir. Ancak kullandığı basınç göstergesi ±0,2 bar doğruluk payına sahiptir.

Buna göre, aşağıda istenen bilgileri belirtiniz.

1) Lastik basıncının alabileceği en küçük ve en büyük değerleri bulunuz.

2) Lastik basıncının alabileceği değer aralığını aşağıdaki şekillerde gösteriniz.

- Sayı doğrusu gösterimi:
- Cebirsel gösterim:
- Aralık gösterimi:
- Küme gösterimi:

3) Lastik basıncı aralığını mutlak değerli eşitsizlik ile ifade ediniz.

4) Lastik basıncının ulaşamayacağı değerleri belirleyiniz ve bu değerleri, hem aralık gösterimiyle hem de mutlak değerli eşitsizlik biçiminde yazınız.

ÇÖZÜM

1) Göstergedeki değer: 6 bar olup hata payı: ±0,2 bardır.
En küçük değer = Göstergedeki değer – hata payı = 6 – 0,2 = 5,8 bardır.
En büyük değer = Göstergedeki değer + hata payı = 6 + 0,2 = 6,2 bardır.
Lastik basıncının alabileceği değer aralığı [5,8; 6,2], cebirsel gösterimi 5,8 bar ≤ Basınç ≤ 6,2 bar biçimindedir.

2) Sayı doğrusunda bu aralık aşağıdaki gibi gösterilir.



Aralık gösterimi: [5,8; 6,2]
Cebirsel temsili: $5{,}8 \leq x \leq 6{,}2$
Küme gösterimi: $B = \{x \mid 5{,}8 \leq x \leq 6{,}2, x \in \mathbb{R}\}$

3) Mutlak değerli eşitsizlik ile $|x-6| \leq 0{,}2$ şeklinde ifade edilir.
Lastiğin gerçek basıncı, göstergedeki değerden en fazla 0,2 bar farklı olabilir. Yani basınç 5,8 - 6,2 bar aralığındadır.

4) Aralık dışı değerler: $x < 5{,}8$ veya $x > 6{,}2$
Mutlak değerli eşitsizlik: $|x-6| > 0{,}2$
Basınç, göstergedeki değerden ±0,2 bardan farklı olamaz; yani 5,8 barın altına veya 6,2 barın üstüne çıkamaz.

ÖRNEK

Bir fabrikada şeker paketleri 1000 g olacak şekilde üretilmektedir. Ancak her paketin kütlesinde en fazla ±10 g sapma olmalıdır. Aksi durumlar hatalı üretim kabul edilecektir.

Buna göre şeker paketlerinin kabul edilebilir kütle aralığını mutlak değerli eşitsizlikten faydalanarak bulunuz.

ÇÖZÜM

Hedef 1000 g, tolerans ±10 g
$|x-1000| \leq 10$
$990 \leq x \leq 1010$
[990, 1010]

SIRA SİZDE 5.



Görseldeki gibi bir fırın, pizzayı 200 °C'de pişirebilmektedir. Fırın sıcaklığı, bu değerden +15 °C veya -15 °C farklı olursa pizza için ideal sıcaklık sağlanmaktadır.

Buna göre pizzanın pişirilmesinde gerekli olan fırının ideal sıcaklık aralığını mutlak değerli eşitsizlik ile yazınız.

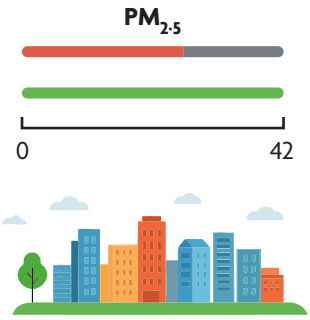
SIRA SİZDE 6.

Bir sporcunun ideal nabız hızı 140 atım/dk.dır. Eğer bu değerden ±25 atım/dk. sapma olursa sporcu yorulur ve egzersizi bırakması gerekir.

Buna göre sporcunun güvenli nabız aralığını mutlak değerli eşitsizlik olarak yazınız.

ETKİNLİK 6.

Hava Kalitesi Araştırması – $PM_{2.5}$ Ölçümleri



Bir şehirde hava kalitesini ölçmek için $PM_{2.5}$ değerleri incelenmiştir.

$PM_{2.5}$, çapı 2,5 mikrometreden küçük olan ve solunduğunda akciğerlere ulaşabilen zararlı toz parçacıklarıdır. Bu parçacıklar, özellikle solunum yolları ve genel sağlık açısından risk oluşturur. Dünya Sağlık Örgütü (WHO), günlük ortalama $PM_{2.5}$ değerinin 15 $\mu g/m^3$'ü geçmemesi gerektiğini belirtmektedir.
Ölçümler, yıl boyunca günlük ortalama $PM_{2.5}$ değerlerinin 0 ile 42 $\mu g/m^3$ arasında değiştiğini göstermesi gerekirken ölçüm cihazında meydana gelen geçici bir arızadan dolayı cihazın –5 ile 42 g/m^3 arasında değerler gösterdiği gözlemlenmiştir.

Buna göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) $PM_{2.5}$ ölçüm cihazına göre yıl boyunca alabileceği değerleri aralık gösterimi ile yazınız.

b) DSÖ'nün belirlediği 15 µg/m3 sınırına göre "güvenli" değer aralığını belirtiniz.

c) Cihazın ölçüm değerlerine bakarak Dünya Sağlık Örgütüne göre sağlıklı olmayan kısmını iki kümenin farkı şeklinde gösteriniz.

d) Ölçüm cihazının hata payının –5 ile 0 arasındaki kısmını mutlak değerli eşitsizlik biçiminde yazınız.

ÇÖZÜM

a) $PM_{2,5}$ değer aralığı

Ölçüm cihazına göre değerleri –5 ile 42 (–5 ve 42 de aralığa dahil) arasında değişmektedir.
Bu durumda aralık gösterimi, [–5, 42] olur.

b) DSÖ sınırına göre güvenli aralık

DSÖ: 15 µg/m^3'ün aşılmaması gerektiğini belirtmektedir. Dolayısıyla güvenli aralık [0, 15] olur. Bu durumda ölçüm değeri 0 ile 15 arasında ise hava kalitesi sağlık açısından kabul edilebilir seviyededir.

c) Sağlıksız değer aralığı (küme farkı ile)

Tüm ölçümler: [–5, 42]
Güvenli ölçümler: [0, 15]
Sağlıksız kısım:
$[-5, 42] \setminus [0, 15] = [-5, 0) \cup (15, 42]$
Bu durumda 0'ın altındaki değerler cihaz hatası, 15'in üstündeki değerler sağlıksız hava anlamına gelir.

d) Ölçüm cihazı hata payı

Hata payı [–5, 0] aralığıdır. Bu aralık cebirsel olarak $-5 \leq x \leq 0$ şeklinde ifade edilir.
Aralığın mutlak değerli gösterimi $|x + 2{,}5| \leq 2{,}5$ şeklindedir. Yani ölçüm cihazı, **–2,5** değeri etrafında **±2,5** birimlik bir sapma gösterebilir. Bu da cihazın ölçüm değerlerinin **–5 ile 0 arasında değişebileceği** anlamına gelir.

Ölçüm Hataları ve Negatif Değerler

Ölçüm cihazları, her zaman mükemmel ölçüm yapmaz. Bazen cihazlar, gerçek değerin altında veya üstünde sapmalar gösterebilir. Hatta bazı hassas cihazlar, sıfır civarında küçük negatif değerler gösterebilir. Bu negatif değerler gerçek ortamda yoktur, sadece cihazın ölçüm hatasından kaynaklanır.

Örneğin hava kalitesi sensörü –5 µg/m^3 ölçtüyse, aslında –5 µg/m^3 yoktur, bu durum bir cihaz hatasıdır.

ÖRNEK

Bir termometre Fahrenheit (°F) cinsinden ölçüm yapmaktadır. Ölçüm sonucunda gösterilen değer gerçek değerden en fazla 3 °F farklı olabilir. Termometre F = 77 °F göstermektedir.

Fahrenheit - Celsius dönüşümü formülü

$$C = \frac{5}{9}(F - 32)$$

olduğuna göre sıvının gerçek sıcaklığının Celsius cinsinden alabileceği değer aralığını mutlak değerli eşitsizlik ile ifade ediniz.

ÇÖZÜM

Gerçek sıcaklık:

$|F-77| \leq 3 \Rightarrow 74 \leq F \leq 80$

$$C = \frac{5}{9}(F - 32) \qquad F = \frac{9}{5}C + 32 \qquad 74 \leq \frac{9}{5}C + 32 \leq 80$$

$$\frac{70}{3} \leq C \leq \frac{80}{3}$$

$$\Rightarrow C \in \left[\frac{70}{3}, \frac{80}{3}\right]$$

Mutlak değerli eşitsizlik $|C-25| \leq \frac{5}{3}$ olarak bulunur.

Bir x gerçek sayısı için mutlak değer, x sayısının sayı doğrusu üzerinde 0 noktasına olan uzaklığıdır ve bu sayı |x| ile gösterilir.

$$|x| = \begin{cases} x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Örnekler:
|5| = 5 |−5| = 5 |0| = 0

• **Aralık: (a, b) Cebirsel Temsili ($x \in \mathbb{R}$): $a < x < b$**
Bu aralık, x'in a ile b arasında olduğunu gösterir. Mutlak değer ifadesi ile aşağıdaki gibi gösterilir.

$$\left|x - \frac{a+b}{2}\right| < \frac{b-a}{2}$$

• **Aralık: (a, b] Cebirsel Temsili ($x \in \mathbb{R}$): $a \le x \le b$**
Mutlak değer ifadesi ile aşağıdaki gibi gösterilir.

$$\left|x - \frac{a+b}{2}\right| \le \frac{b-a}{2}$$

Açıklama:

$\frac{a+b}{2} \rightarrow$ aralığın orta noktası $\frac{b-a}{2} \rightarrow$ aralığın yarı uzunluğu

Bu ifade, x'in orta noktaya olan uzaklığının yarı uzunluktan küçük olduğunu belirtir.

NOT

Mutlak Değerli Eşitsizlikler (a, b, $x \in \mathbb{R}$ ve $r > 0$)

• $|x-a| < r$
Eşitsizliğinin Cebirsel Temsili: $a-r < x < a+r$
Aralık Gösterimi: $(a-r, a+r)$ şeklindedir.

• $|x-a| > r$
Eşitsizliğinin Cebirsel Temsili: $x < a-r$ veya $x > a+r$
Aralık Gösterimi: $(-\infty, a-r) \cup (a+r, \infty)$

• $|x-a| \le r$
Eşitsizliğinin Cebirsel Temsili: $a-r \le x \le a+r$
Aralık Gösterimi: $[a-r, a+r]$ şeklindedir.

• $|x-a| \ge r$
Eşitsizliğinin Cebirsel Temsili: $x \le a-r$ veya $x \ge a+r$
Aralık Gösterimi: $(-\infty, a-r] \cup [a+r, \infty)$

ÖRNEK

$x \in \mathbb{R}$ **olmak üzere, aşağıda verilen mutlak değerli eşitsizlikleri aralık gösterimiyle yazınız.**

a) $|x-2| \le 5$ **b)** $|x+1| > 3$

ÇÖZÜM

a) Bilgi kutusunda verilen ifadeye dikkat edersek $|x-a| \le r$ eşitsizliğinin cebirsel temsili $a-r \le x \le a+r$, aralık gösterimi $[a-r, a+r]$ şeklindedir.

Buna göre $|x-2| \le 5$ mutlak değerli eşitsizliği $2-5 \le x \le 2+5$ cebirsel temsili ile ifade edilir.
Bu durumda $-3 \le x \le 7$, aralık gösterimi $[-3, 7]$ olur.

b) Bilgi kutusunda verilen ifadeye dikkat edersek $|x-a| > r$ eşitsizliğinin cebirsel temsili $x < a-r$ veya $x > a+r$, aralık gösterimi $(-\infty, a-r) \cup (a+r, \infty)$ şeklindedir.

$|x+1| > 3 = x < -3-1$ veya $x > 3-1$, eşitsizliğin cebirsel temsili $x < -4$ veya $x > 2$,
aralık gösterimi $(-\infty, -4) \cup (2, \infty)$ olur.

SIRA SİZDE 7.

Radyoda yapılan hava durumu bülteninde şu açıklamaya yer verilmiştir:

"Kentte son birkaç gündür sıcaklık 8 °C civarında seyretmektedir. Meteoroloji verilerine göre yarından itibaren hava hızla soğuyacak ve cuma sabahı hava sıcaklığı 5 °C ile 9 °C arasında azalacaktır."

Bu bilgilere göre cuma sabahı sıcaklığın alabileceği değerleri gösteren eşitsizliği mutlak değer biçiminde yazınız.

SIRA SİZDE 8.

Bir paraşütle atlama kursunda eğitmen, kursiyerlerine şu açıklamayı yapmıştır:

"Yerden 900 metre yükseklikteki bir uçaktan atlarken yere güvenli bir şekilde inebilmek için paraşütünüzü uçaktan atladıktan sonra 350 ile 450 metre arasında açmanız gerekmektedir."

Bu bilgilere göre paraşüt açıldığı anda, kursiyerin yerden yüksekliğinin alabileceği değerleri gösteren eşitsizliği mutlak değer biçiminde yazınız.

GERİ BİLDİRİM

Bu geri bildirim sayesinde kendi cevabınızı kontrol edebilir, hatalarınızı düzelterek öğrenmenizi pekiştirebilirsiniz.

ETKİNLİK 3.

ÇÖZÜM

Sayı	Elemanı Olduğu Sayı Kümeleri
7	$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$
0	$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$
$\sqrt{5}$	$\mathbb{Q}', \mathbb{R}$
$-4/3$	$\mathbb{Q}, \mathbb{R}$
16	$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$
-9	$\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$
2.5	$\mathbb{Q}, \mathbb{R}$
π	$\mathbb{Q}', \mathbb{R}$

SIRA SİZDE 2.

ÇÖZÜM

Sadece π sayısı

SIRA SİZDE 3.

ÇÖZÜM

$\mathbb{Q}$: Rasyonel sayılar kümesi $\left\{\frac{a}{b} : a,b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\right\}$

$\mathbb{Z}$: Tam sayılar kümesi {...,−2, −1, 0, 1, 2, ...}

A = $\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$: Tam sayı olmayan rasyonel sayılar

Şimdi verilenleri inceleyelim.

I. $-\frac{7}{5} = -1{,}4$ Rasyoneldir ve tam sayı değildir.
→ A kümesine ait bir elemandır. ☑

II. $\frac{12}{4}$ Rasyonel ve tam sayıdır.
→ A kümesine ait değildir. ☒

III. $\frac{0}{3} = 0$ pay 0, payda ≠ 0 olduğu için tanımlı
0 bir tam sayı olduğundan
→ A kümesine ait değildir. ☒

IV. −15 Tam sayı olduğundan
→ A kümesine ait değildir. ☒

Sadece I numaralı sayı A kümesindedir.

NOT: Kesri en sade hâline getiriniz. Eğer sonuç tam sayı olmuyorsa kesir A kümesinin bir elemanıdır, tam sayı oluyorsa A kümesinde yer almaz.

ETKİNLİK 4.

ÇÖZÜM

Sözel İfade	Aralık Gösterimi	Sayı Doğrusu	Cebirsel Temsil	Küme Gösterimi
Ceren'in boyu Ayşe'nin boyundan uzun, Burak'ın boyundan kısadır.	(160, 175)		160 < x < 175	C = {x | 160 < x < 175, x ∈ $\mathbb{R}$}
Ceren'in kütlesi 65 kg veya 65 kg'dan fazla ve 75 kg'dan azdır.	[65, 75)		65 ≤ x < 75	C_K = {x | 65 ≤ x < 75, x ∈ $\mathbb{R}$}
Burak'ın kütlesi 80 kg ile 90 kg arasındadır.	(80, 90)		80 < x < 90	B = {x | 80 < x < 90, x ∈ $\mathbb{R}$}

SIRA SİZDE 4.

ÇÖZÜM

- [06.40, 07.10] → 30 dakika
- [07.20, 07.50] → 30 dakika
- [19.00, 19.25] → 25 dakika
- [20.30, 21.00] → 30 dakika

- Günlük en az 20 dakika yürüyüş olmalı.
- 07.00 - 09.00 ve 18.00 - 20.00 arasında en fazla 20 dakika yürünebilir.
- Diğer saatlerde üst sınır yok.

- [06.40, 07.10] → 30 dakika ☑
- [07.20, 07.50] → 30 dakika ☒ (Bu saat aralığında 20 dakikayı geçmemeli, uygun değil.)
- [19.00, 19.25] → 25 dakika ☒ (Bu saat aralığında en fazla 20 dakika olmalı, uygun değil.)
- [20.30, 21.00] → 30 dakika ☑

- 30 + 30 + 25 + 30 = 115 dakika → Günlük alt sınır olan 20 dakikayı karşılıyor.

Sonuç:

Kişinin yürüyüş programı kısmen uygundur. Ancak 07.20 - 07.50 ve 19.00 - 19.25 aralıkları, hava kirliliği nedeniyle önerilen süre sınırını aştığından uygun değildir.

SIRA SİZDE 5.

ÇÖZÜM

- Pizzayı pişirme sıcaklığı: 200 °C
- Tolerans: ±15 °C

Adım 1: **Eşitsizlik ile ifade edelim.**
Fırın sıcaklığı x olsun.

$200-15 \leq x \leq 200+15 \rightarrow 185 \leq x \leq 215$

Adım 2: **Mutlak değerli eşitsizlik ile yazalım.**
Mutlak değerli eşitsizlik formülü:
$|x-200| \leq 15$

SIRA SİZDE 6.

ÇÖZÜM

- İdeal nabız: 140 atım/dk.
- Tolerans: ±25 atım/dk. (Bu aralık dışında sporcu yorulur.)

Adım 1: **Eşitsizlik ile ifade edelim.**
Nabız x olsun.
$140-25 \leq x \leq 140+25$
$115 \leq x \leq 165$

Adım 2: **Mutlak değerli eşitsizlik ile yazalım.**
$|x-140| \leq 25$

SIRA SİZDE 7.

ÇÖZÜM

- $\frac{5+9}{2} = 7$ $\quad \frac{9-5}{2} = 2$ $\quad$ Buna göre $|8-x-7| \leq 2$
  $= |1-x| \leq 2$
-
-
-

SIRA SİZDE 8.

ÇÖZÜM

- Başlangıç yüksekliği: 900 m
- Paraşütün açılma mesafesi: 350 ile 450 m arasındadır.
  Yani paraşüt, atlayıştan sonraki 350 - 450 m arasında açılmalı.
- Paraşüt açıldığı andaki yerden yükseklik: H = 900 − x
- Burada x, atlayıştan sonra alınan mesafe yani $350 \leq x \leq 450$'dir.

$\frac{350+450}{2} = 400$ $\quad \frac{450-350}{2} = 50$

Buna göre $|x-400| \leq 50$
$x = 900 - H$
$|900 - H - 400| \leq 50$
$= |500 - H| \leq 50$

DEĞERLENDİRİYORUM

Amaç: Bu bölümde, öğrendiklerinizi gözden geçirmenizi, kendi öğrenme sürecinizi değerlendirmenizi ve eksiklerinizi fark etmenizi amaçlıyoruz.

Soruları dikkatle yanıtlayınız. Cevaplarınızı geri bildirimlerle karşılaştırarak eksik gördüğünüz noktaları tekrar ediniz.

SORULAR

1. Bir şehirde bulunan su deposundaki su seviyesi, günlük değişimler nedeniyle 3,5 m ile 5,2 m arasında değişmektedir.

Buna göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) Bu durumu gerçek sayı aralığı olarak ifade ediniz.

b) Aralığı sayı doğrusu üzerinde gösteriniz.

c) Aralığı küme gösterimi ile yazınız.

2. Bir çikolata fabrikasında bir çikolatanın standart ağırlığı 50 gramdır. Tolerans ±2 gram olarak belirlenmiştir.

Buna göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) Çikolata ağırlığını mutlak değerli eşitsizlik ile ifade ediniz.

b) Bu durumu aralık gösterimi ile yazınız.

c) 48 gramdan hafif veya 52 gramdan ağır çikolataları sayı doğrusu üzerinde gösteriniz.

3. Bir üniversitenin Pilotaj (Uçak Pilotu Eğitimi) bölümüne öğrenci kabul edilecektir. Adayların yalnızca akademik başarıları değil aynı zamanda fiziksel uygunlukları da dikkate alınmaktadır. Uçuş güvenliği, kokpit tasarımı ve acil durumlarda hızlı hareket edebilme gibi etkenler nedeniyle adayların belirli bir boy ve kilo aralığında olmaları gerekmektedir.

Bu kapsamda yapılan açıklamaya göre başvuru yapacak öğrencilerin:

- Boylarının en az 165 cm, en fazla 195 cm,
- Ağırlıklarının ise 60 ile 90 kg arasında olması gerekmektedir.

Buna göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) Boy için mutlak değerli eşitsizliği yazınız.

b) Ağırlıkları için mutlak değerli eşitsizliği yazınız.

c) 170 cm boyunda ve 95 kg ağırlığında bir aday bu meslek için uygun şartları taşıyor mu?

4. Bir okul, yaz tatilinde öğrencilerin takım çalışması ve doğa sevgisini geliştirmek amacıyla bir yaz kampı düzenlemektedir. Kamp programında kano gezileri, orman yürüyüşleri, kamp ateşi etkinlikleri ve temel ilk yardım eğitimleri yer almaktadır. Kamp yöneticileri, etkinliklerin fiziksel dayanıklık ve güvenlik gerektirmesi nedeniyle katılımcıların yaşlarının 12 ile 15 yaş arasında olması şartını koşmuştur.
Buna göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) Kampa katılacak öğrencilerin yaş aralıklarını mutlak değerli eşitsizlik ile ifade ediniz.

b) 11 yaşındaki ve 16 yaşındaki öğrenciler uygun şartları taşıyor mu? Açıklayınız.

c) Kampa katılabilecek öğrencilerin yaşlarını aralık gösterimi ile yazınız.

GERİ BİLDİRİM

Bu geri bildirim sayesinde kendi cevabınızı kontrol edebilir, hatalarınızı düzelterek öğrenmenizi pekiştirebilirsiniz.

ÇÖZÜM 1.

a) Su seviyesi **3,5 m ile 5,2 m** arasında değişiyor.

- 3,5 ile 5,2 arasındaki tüm gerçek sayılar bu durumu gösterir.
- $x \in \mathbb{R}$, su seviyesini göstermek üzere $3,5 \leq x \leq 5,2$ eşitsizliği ile gösterilir.
- Aralık gösterimi $[3,5 , 5,2]$ biçimindedir.

b) Sayı doğrusundaki gösterimi:



c) Küme gösterimi (ortak özellik yöntemi):
$\{x \in \mathbb{R} \mid 3,5 \leq x \leq 5,2\}$ biçimindedir.

ÇÖZÜM 2.

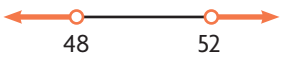
a) Mutlak değerli eşitsizlik ile ifade edelim.

x ağırlığı için
$50-2 \leq x \leq 50+2$
$48 \leq x \leq 52$
$|x-50| \leq 2$ bulunur.

b) Aralık gösterimi ile yazalım.
Aralık gösterimi $[48, 52]$ biçimindedir.

c) 48 gramdan hafif veya 52 gramdan ağır çikolataları sayı doğrusu üzerinde gösterelim

$x < 48$ veya $x > 52$
Sayı doğrusu üzerinde bu iki noktayı içi boş daire ile işaretleyebiliriz (48 ve 52 dahil değil).



ÇÖZÜM 3.

Pilotaj bölümüne kabul edilmek için:

- Boy: 165 - 195 cm
- Kilo: 60 - 90 kg olmalıdır.

a) Boy için mutlak değerli eşitsizlik

Boy aralığı: $165 \leq \text{boy} \leq 195$

- Orta nokta (standart değer)

genellikle aralığın ortası noktası: $\frac{165+195}{2} = 180$

- Tolerans: $\frac{195-165}{2} = 15$

Buna göre boy için mutlak değerli eşitsizlik,
$|\text{boy}-180| \leq 15$ şeklinde ifade edilir.

b) Kilo için mutlak değerli eşitsizlik

Kilo aralığı: $60 \leq \text{kilo} \leq 90$

- Ortanca değer: $\frac{60+90}{2} = 75$
- Tolerans: $\frac{90-60}{2} = 15$

Kilo için mutlak değerli eşitsizlik,
$|\text{kilo}-75| \leq 15$ şeklinde ifade edilir.

c) 170 cm boyunda ve 95 kg ağırlığında aday kabul edilir mi?

- Boy kontrolü: $165 \leq 170 \leq 195$ ☑
- Kilo kontrolü: $60 \leq 95 \leq 90$ ✖

Aday kilogram sınırını aştığı için uygun değildir.

ÇÖZÜM 4.

Yaz kampına katılacak öğrencilerin yaşı 12 - 15 aralığında olmalıdır.

a) Mutlak değerli eşitsizlik ile ifade edelim.

- Aralık: $12 \leq \text{yaş} \leq 15$
- Aralığın ortası: $\frac{12+15}{2} = 13{,}5$
- Tolerans: $15-13{,}5 = 1{,}5$

Buna göre mutlak değerli eşitsizlik:

$|\text{yaş}-13{,}5| \leq 1{,}5$

b) 11 ve 16 yaşındaki öğrenciler kabul edilir mi?

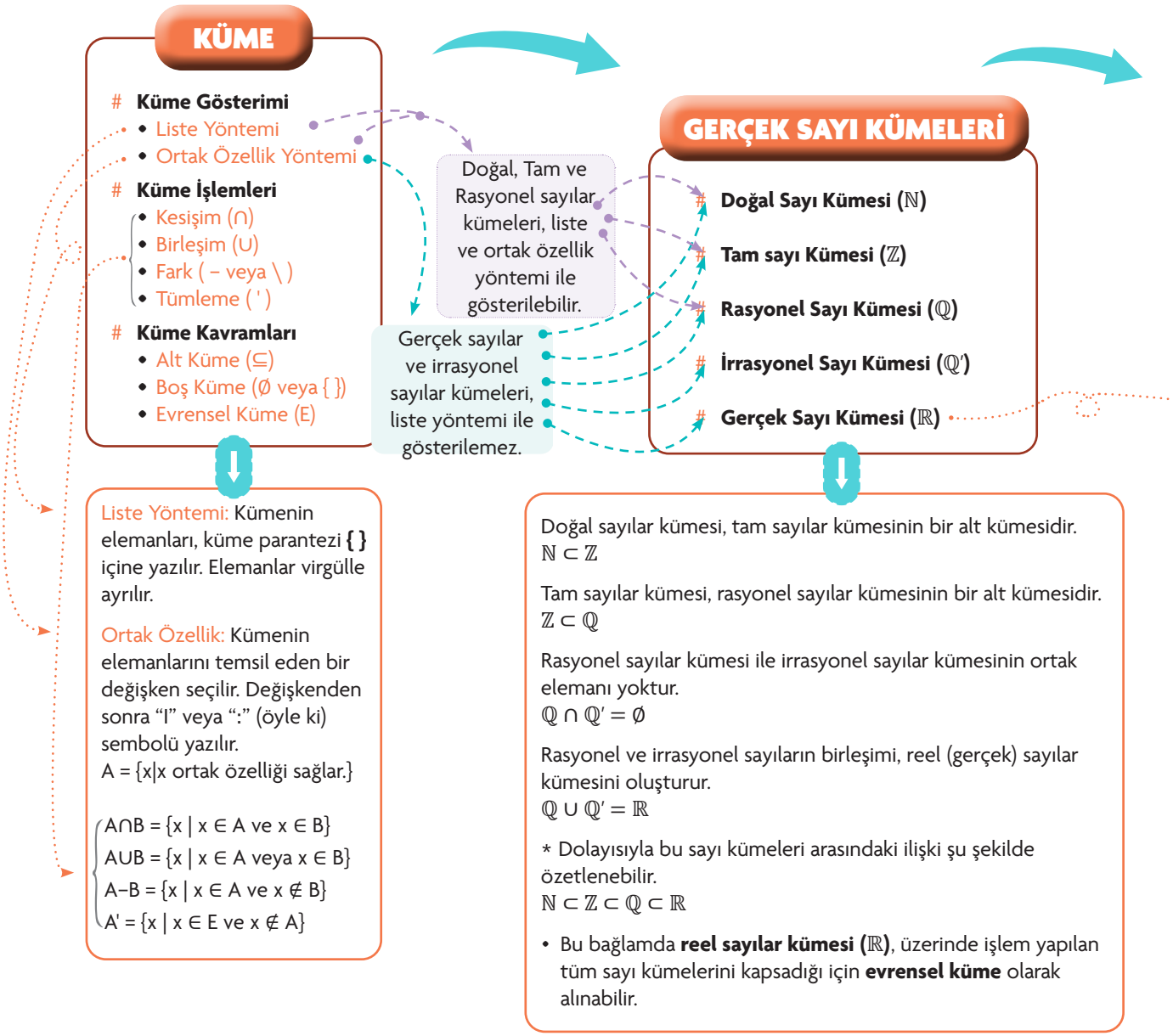
- Kabul edilen yaş aralığı: 12 - 15
- 11 yaş: $11 < 12 \rightarrow$ Kabul edilmez. ✖
- 16 yaş: $16 > 15 \rightarrow$ Kabul edilmez. ✖

c) Aralık gösterimi ile yazalım.

- Aralık: 12'den 15'e kadar olan yaşlar
- 12 ve 15 dahil olduğu için köşeli parantez kullanılır.

ÖĞRENDİKLERİM

Amaç: Bu bölümde öğrendiklerinizi özetlemenizi, günlük hayatta ve farklı derslerde kullanabileceğiniz bilgileri belirlemenizi amaçlıyoruz.
Verilen bilgileri dikkatle okuyunuz. Temanın temel kavramlarını, önemli noktalarını ve bağlantılarını gözden geçirerek öğrenmenizi pekiştiriniz.
Aşağıdaki bilgi haritasını inceleyiniz ve boş bırakılan bölüme bu konuyla ilgili edindiğiniz önemli bilgileri yazınız.



Gerçek sayılar, sayılamayacak çoklukta olduğu için aralıklarla [a, b], (a, b), [a, b) ve (a, b] şeklinde gösterilir.

Gerçek sayı aralıkları, mutlak değerli eşitsizlikler ile temsil edilebilir.

GERÇEK SAYI ARALIKLARI

- # **Sayı Doğrusu**
- # **Cebirsel gösterim**
- # **Küme Gösterimi**

- (a, b) aralığının sayı doğrusunda gösterimi:



- [a, b] aralığının sayı doğrusunda gösterimi:



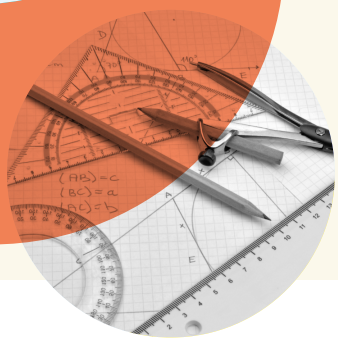
- (a, b) aralığının cebirsel gösterimi $a < x < b$
- [a, b] aralığının cebirsel gösterimi: $a \leq x \leq b$
- (a, b) aralığının küme gösterimi: $A = \{x \mid a < x < b, x \in \mathbb{R}\}$
- [a, b] aralığının küme gösterimi: $A = \{x \mid a \leq x \leq b, x \in R\}$

GERÇEK SAYI ARALIKLARININ MUTLAK DEĞER GÖSTERİMİ

Mutlak Değerli Eşitsizlikler ($a, b, x \in \mathbb{R}$ ve $r > 0$)

- # $|x - a| < r$ eşitsizliğinin cebirsel temsili $a - r < x < a + r$, aralık gösterimi $(a - r, a + r)$ şeklindedir.
- # $|x - a| > r$ eşitsizliğinin cebirsel temsili $x < a - r$ veya $x > a + r$, aralık gösterimi $(-\infty, a - r) \cup (a + r, \infty)$ şeklindedir.
- # $|x - a| \leq r$ eşitsizliğinin cebirsel temsili $a - r \leq x \leq a + r$, aralık gösterimi $[a - r, a + r]$ şeklindedir.
- # $|x - a| \geq r$ eşitsizliğinin cebirsel temsili $x \leq a - r$ veya $x \geq a + r$, aralık gösterimi $(-\infty, a - r] \cup [a + r, \infty)$ şeklindedir.

Daha fazlası için karekodu okutunuz.



SAYI KÜMELERİ

BAŞLARKEN

Sevgili öğrencimiz, bu çalışma kartında sizlerin bireysel öğrenme yolculuğuna destek sunmak amaçlanmaktadır. Çalışmalarınızı yürütürken "Hazırlanıyorum", "İlişkilendiriyorum", "Uygulayarak Öğreniyorum", "Değerlendiriyorum" bölümlerini sırası ile yapmanızı; her bölüm ve etkinlik sonundaki geri bildirimleri alarak ilerlemenizi; "Öğrendiklerim" bölümünde öğrenme sürecinizi gözden geçirmenizi bekliyoruz.

Sayı kümeleri, matematiğin temel taşlarından biridir ve günlük yaşamımızın her alanında karşımıza çıkar. Sayı kümelerine yönelik matematiksel muhakeme becerilerinin gelişimi özellikle matematiksel kavramlar ve işlemler arasında ilişkilerin yorumlanabilmesi için önemlidir.

- Negatif sayıların günlük hayattaki kullanım alanlarını düşündünüz mü?
- Sayı kümelerinin nasıl sınıflandırıldığını merak ettiniz mi?
- Sayıların sıralamasında farklı, sayı kümelerindeki sayıların sıralamasında farklı yöntemler kullanıldığını fark ettiniz mi?

HAZIRLANIYORUM

Amaç: Bu bölümde ön bilgilerinizi hatırlamanızı ve temaya hazırlıklı hâle gelmenizi amaçlıyoruz. Aşağıda yer alan ifadeler, bu temada tamamlanması hedeflenen öğrenme çıktısını ele almadan önce sahip olmanız gereken bazı temel becerileri içermektedir

- Lütfen her bir ifadeyi dikkatlice okuyunuz.
- Eğer ifadedeki bilgiye hâkim olduğunuzu düşünüyorsanız kutucuğu işaretleyiniz.
- Eğer konuyu henüz tam olarak bilmediğinizi ya da hatırlamadığınızı düşünüyorsanız kutucuğu boş bırakınız.

SORULAR	ÖN ÖĞRENME KONTROL LİSTESİ	✓
1	Sayı kümelerini sınıflandırabilirim.	☐
2	Gerçek sayılar kümesinde sayıların yerini ve konumunu belirleyebilir ve sayı doğrusunda gösterebilirim.	☐
3	Cebirsel ifadelerle işlem yapabilir, birinci dereceden denklemleri çözebilirim.	☐
4	Eşitliğin her iki tarafına aynı işlemi uygulayabilirim.	☐

"Ön Öğrenme Kontrol Listesi"ni doldurduktan sonra aşağıda verilen "Kontrol Noktası" sorularını çözünüz ve cevaplarınızı kontrol ediniz.

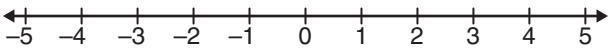
KONTROL NOKTASI

SORU 1. Aşağıdaki tabloda verilen sayıların hangi sayı kümesine ait olduklarını işaretleyiniz. (Birden fazla kümeyi işaretleyebilirsiniz.)

	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{Q}'$	$\mathbb{R}$
3,2					
$\frac{3}{2}$					
0					
$\sqrt{25}$					
$\sqrt{8}$					
$(-2)^3$					
π					

SORU 2. Aşağıda verilen gerçek sayıların sayı doğrusu üzerindeki yaklaşık yerlerini gösteriniz.

$\sqrt{13}$ $\quad -\frac{7}{2}$ $\quad \sqrt{1{,}96}$



SORU 3. Aşağıdaki denklemleri çözünüz.

1) $\frac{x}{3} - 4 = 10$ olduğuna göre x kaçtır?

2) $2 \cdot (x + 3) - x = 9$ olduğuna göre x kaçtır?

SORU 4. Ayşe'nin telefon faturası 50 TL'dir. Faturadaki her hizmet için 5 TL indirim uygulandığında toplam fatura 35 TL oluyor.

Buna göre denklem kurarak Ayşe'nin faturasındaki hizmet sayısını bulunuz.

SORU 5. Aşağıdaki boşluklara > veya < işaretlerinden uygun olanı yerleştiriniz.

a) 12 ... 1 b) – 8 ... – 10 c) 3,5 ... $\sqrt{12}$

SORU 6. Bir pizzacıda 8 dilimlik pizzanın 3 dilimi yenmiştir.

Buna göre geriye kalan pizza miktarını hangi sayı kümesi ile ifade edebiliriz?

SORU 7. Aşağıda boş bırakılan yerleri doldurunuz.

1. Bir mağazadaki bir üründe 2,5 TL indirim yapıldı. Bu sayı ..... kümesine aittir.
2. Bir şehrin sıcaklığı –12°C olduğunda bu değer ..... kümesine ait olur ancak ..... kümesine ait olmaz.
3. π sayısı, ... kümesinde yer alır ama ..... kümesinde yer almaz.

SORU 8. Ayşe'nin yaşı, kardeşinin yaşının 2 katıdır. 4 yıl sonra yaşlarının toplamı 44 olacaktır.

Buna göre Ayşe'nin ve kardeşinin bugünkü yaşlarını bulunuz.

SORU 9. Bir otoparkta giriş için sabit 10 TL alınmakta, otoparkta kalınan her saat için ayrıca 15 TL ücret uygulanmaktadır.

Mert'in otopark ücreti toplam 55 TL olduğuna göre Mert arabasını otoparkta kaç saat bırakmıştır?

SORU 10.

Bir sınavdan geçme notu 50'dir.

- Ayşe: 48 puan
- Mehmet: 72 puan
- Elif: 50 puan almıştır.

Her öğrencinin puanını "geçme notu" ile karşılaştırınız.

GERİ BİLDİRİM

Bu geri bildirim sayesinde kendi cevabınızı kontrol edebilir, hatalarınızı düzelterek öğrenmenizi pekiştirebilirsiniz.

KONTROL NOKTASI

ÇÖZÜM 1.

	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{Q}'$	$\mathbb{R}$
3,2			✓		✓
$\frac{3}{2}$			✓		✓
0	✓	✓	✓		✓
$\sqrt{25}$	✓	✓	✓		✓
$\sqrt{8}$				✓	✓
$(-2)^3$		✓	✓		✓
π				✓	✓

HATIRLATMA

1. Doğal Sayılar Kümesi:

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, ...\}$

2. Tam Sayılar Kümesi:

$\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$

3. Rasyonel Sayılar Kümesi:

$\mathbb{Q} = \{..., 1/2, -3/4, 5, 0, 2.75, ...\}$

4. İrrasyonel Sayılar Kümesi:

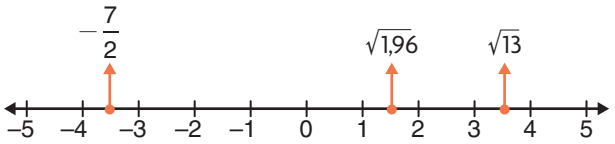
$\mathbb{Q}' = \{..., -\sqrt{3}, \sqrt{2}, \pi, e, ...\}$

5. Reel Sayılar Kümesi:

$\mathbb{R} = \{..., -5, 0, 3.4, \sqrt{7}, \pi, ...\}$

ÇÖZÜM 2.

- $-\frac{7}{2}$ sayısı -4'ten büyük, -3'ten küçüktür.
- $\sqrt{1,96}$ sayısı 1'den büyük, 2'den küçüktür.
- $\sqrt{13}$ sayısı 3'ten büyük, 4'ten küçüktür.



ÇÖZÜM 3.

1)	2)
$\frac{x}{3} - 4 = 10$ $\frac{x}{3} = 10 + 4$ $\frac{x}{3} = 14$ $x = 42$	$2(x + 3) - x = 9$ $2x + 6 - x = 9$ $x = 3$

ÇÖZÜM 4.

Burada bilinmeyen hizmet sayısına x diyelim. O hâlde toplam fatura miktarı $50 - 5x$ olur.

Bu durumda

$50 - 5x = 35$

$x = 3$ bulunduğundan

hizmet sayısı 3 olur.

ÇÖZÜM 5.

a)	b)	c)
$12 < 15$	$-8 > -10$	$3{,}5 > \sqrt{12}$

ÇÖZÜM 6.

Kalan miktar: $\frac{5}{8}$'dir.

$\frac{5}{8}$ **bir rasyonel sayıdır** ($\mathbb{Q}$).

Doğal sayılar kümesi ($\mathbb{N}$) ve tam sayılar kümesine ($\mathbb{Z}$) girmez.

Gerçek sayılar kümesine ($\mathbb{R}$) de dâhildir.

Cevap: $\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{R}$ kümelerine aittir.

ÇÖZÜM 7.

1. Bir mağazadaki bir üründe 2,5 TL indirim yapıldı. Bu sayı rasyonel sayılar kümesine ($\mathbb{Q}$) aittir.
2. Bir şehrin sıcaklığı −12°C olduğunda bu değer tam sayılar kümesine ($\mathbb{Z}$) ait olur ancak doğal sayılar kümesine ($\mathbb{N}$) ait olmaz.
3. π sayısı, gerçek sayılar kümesinde ($\mathbb{R}$) yer alır ama rasyonel sayılar kümesinde ($\mathbb{Q}$) yer almaz.

ÇÖZÜM 8.

- Kardeşinin bugünkü yaşı: x
- Ayşe'nin bugünkü yaşı: 2x

4 yıl sonra

- Kardeşi: x + 4, Ayşe: 2x + 4 olur.

$(x+4)+(2x+4)=44$

$3x+8=44$

$3x=36$

x = 12 olup kardeşinin yaşı 12 ve Ayşe'nin yaşı 24 olur.

ÇÖZÜM 9.

Toplam ücret: 55 TL

$10+15x=55$

$15x=45$

$x=3$

olur.

O hâlde Mert, arabasını 3 saat otoparkta bırakmıştır.

ÇÖZÜM 10.

Geçme notu 50 olduğundan 50 ve üzeri not alanlar geçer, 50'den az not alanlar kalır. O hâlde

- Ayşe: 48 < 50 (Kaldı.)
- Mehmet: 72 ≥ 50 (Geçti.)
- Elif: 50 = 50 (Geçti.)

İLİŞKİLENDİRİYORUM

Amaç: Bu bölümde ele alacağınız içerikleri zihninizde var olan bilgileriniz, yaşantılarınız ve diğer derslerde öğrendiklerinizle ilişkilendirmenizi bekliyoruz. Etkinlikte verilen adımları dikkatle uygulayınız.

ETKİNLİK

Bir coğrafya araştırmasında üç öğrenci, farklı bölgelerdeki yükseklikleri incelemektedir.

- Zeynep, deniz seviyesinin altında bulunan bir çukurun derinliğini 5 metre olarak ölçmüştür.
- Efe, İstanbul Boğazı kıyısında yaptığı rakım ölçümünde "0" sonucuna ulaşmıştır.
- Mert, Erciyes Dağı'nın eteklerinde yükseklik ölçümünü 2150 metre olarak bulmuştur.

Öğretmen tahtaya şu notu yazar:

- Deniz seviyesinin altındaki yükseklikler **negatif tam sayılarla,**
- Deniz seviyesindeki nokta **0 (nötr),**
- Deniz seviyesinin üstündeki yükseklikler ise **pozitif tam sayılarla** gösterilir.

Ardından sıralamayı şöyle açıklar:

$-5 < 0 < 2150$

Bu eşitsizlik, sayıların yalnızca soyut bir kavram olmadığını; **coğrafi yükseklikler, derinlikler, sıcaklıklar, borç ve alacaklar** gibi gerçek yaşam durumlarını ifade etmekte kullanıldığını gösterir.

Son olarak tahtaya genel ilişkiyi yazar.

$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Tüm bu yükseklik değerleri aslında **gerçek sayılar kümesine** ($\mathbb{R}$) aittir.

UYGULAYARAK ÖĞRENİYORUM

Amaç: Bu bölümde bilgilerinizi etkinlikler ve uygulamalarla pekiştirmenizi, öğrenmeyi daha kalıcı hâle getirmenizi amaçlıyoruz.

Etkinliklerde verilen adımları dikkatle uygulayınız. Çalışmanızı dikkatli ve düzenli bir şekilde yapınız.

ETKİNLİK 1.

Bir maddenin yoğunluğu, onun ayırt edici bir özelliğidir. Yoğunluk, **kütle** ve **hacim** ölçülerek hesaplanır.

$$\text{Yoğunluk} = \frac{\text{Kütle (gr)}}{\text{Hacim (cm}^3\text{)}}$$

Tablo 1: *Maddelerin Ölçüm Verileri*

Madde	Kütle (gr)	Hacim (cm^3)	Yoğunluk (gr/cm^3)
Bakır	356	80	4,45
Su	200	100	?
Zeytinyağı	135	150	?
Kurşun	4,5	5	?

ÖRNEK:

$$\text{Bakır} \rightarrow \frac{356}{80} = 4,45 gr/cm^3$$

Buna göre

1. Verilen örneğe uygun biçimde diğerlerini hesaplayarak tabloyu tamamlayınız.

2. Tabloda yoğunluk değerlerini yazarken hangi sayı kümelerinin kullanıldığını belirtiniz.

VARSAYIM OLUŞTURMA

Matematik dersinde öğretmen, öğrencilerin ilgisini çekmek için bir soru sorar.

"Sabah okula gelirken hava sıcaklığını termometreden ölçtüm. 12,3 °C idi. Hemen yan binanın girişindeki ekranda ise 15,7 °C yazıyordu. Dikkat ettiniz mi? İki farklı değer var. Şimdi düşünelim. 12,3 ile 15,7 arasında hangi sıcaklık değerleri olabilir? Varsayımı olan var mı?"

1. Mehmet: Hocam bence 12,3 ile 15,7 arasında en az bir sıcaklık vardır. Mesela 14 °C.

Öğretmen: Güzel ama yalnızca bir sıcaklık mı var yoksa daha fazla olabilir mi?

2. Elif: Bence 12,3 ile 15,7 arasında sadece 13, 14, 15 gibi tam sayılar vardır.

Öğretmen: İlginç bir düşünce. Peki 13,5 °C gibi bir ölçüm olamaz mı?

3. Ali: Benim varsayımım şu: İki sayı arasında sonsuz sayıda sıcaklık değeri vardır. Çünkü termometre daha hassas ölçse hep yeni değerler bulabiliriz.

Öğretmen: Bu oldukça güçlü bir iddia. Bunu örneklerle destekleyebilir misin?

4. Zeynep: Bence negatif sayılar için bu kural işlemiyor. Mesela -5 °C ile -4 °C arasında başka bir sıcaklık olamaz.

Öğretmen: Peki -4,5 °C olamaz mı?

5. Ahmet: Hocam, bence şöyle demek doğru olur: Eğer $a < b$ ise o zaman $(a + b) / 2$ mutlaka aradadır. Mesela 12,3 ile 15,7'nin ortası 14 °C olur. Bu da ikisinin arasındadır.

Öğretmen: Harika! Bu çok sağlam bir yöntem olabilir.

ETKİNLİK 2. Aşağıda verilen tabloya sayı kümelerinin sıralama özellikleriyle ilgili oluşturduğunuz genellemelere göre boş bırakılan yerleri işaretleyiniz.

Sayı Kümeleri	Sıralama Özelliği Var	Sıralama Özelliği Yok
$\mathbb{N}$		
$\mathbb{Z}$		
$\mathbb{Q}$		
$\mathbb{R}$		

ETKİNLİK 3. Aşağıdaki sayı kümelerinin sıralama özelliklerine dair verilen önermelerin sözel ifadelerini yazınız.

Sıralama Özelliği	Sözel İfade
$a \leq a$	
$a < b$ veya $b < a$	
$a \leq b$ ve $b \leq c$ ise $a \leq c$ dir	
$a \leq b$ ve $b \leq a$ ise $a = b$ dir	
$a \leq b$ ise $a \pm c \leq b \pm c$ dir	Eşitsizliklerin her iki tarafına aynı sayı eklenip çıkarılabilir.
$a \leq b$ ve $c \geq 0$ ise $a \cdot c \leq b \cdot c$ dir	
$a \leq b$ ve $c \leq 0$ ise $a \cdot c \geq b \cdot c$ dir	
$0 < a < b$ veya $a < b < 0$ ise $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ dir.	
$0 < a < b$ ise $a^n < b^n$ $(n \in \mathbb{Z}^+)$	

ÖRNEK

Bir okulda kullanılan sınıf termometresi bozuktur. Termometre, gerçek sıcaklıktan 3°C daha az veya 2°C daha fazla göstermektedir.



Termometre 22 °C gösterdiğine göre sınıftaki gerçek sıcaklığın alabileceği en geniş değer aralığını bulunuz.

ÇÖZÜM

Gerçek sıcaklık x derece olsun.

1. Durum	2. Durum
Termometre 3 °C az gösteriyor. Gösterilen = x − 3 22 = x − 3 ise x = 25 olur.	Termometre 2 °C fazla gösteriyor. Gösterilen = x + 2 22 = x + 2 ise x = 20 olur. O hâlde gerçek sıcaklık 20 ≤ x ≤ 25 olur.

ÖRNEK

Bir öğrencinin spor sağlığı test sonuçları aşağıda verilmiştir. Testlerin yanında (!) işareti varsa referans aralığı dışında olduğunu göstermektedir.

Test Adı	Sonuç	Birim	Referans Aralığı
Glikoz	92	mg/dl	70-100
Kolestrol	215!	mg/dl	120-200
D Vitamini	... !	mg/dl	20-60

Yukarıdaki tabloya göre öğrencinin D vitamini sonucu tam okunamıyor fakat yanında ! işareti olduğu için bu sonucun referans aralığı dışında olduğu biliniyor.

Buna göre öğrencinin D vitamini sonucunun alabileceği en geniş değer aralığını bulunuz.

ÇÖZÜM

Referans aralığı: 20-60

O hâlde D vitamini sonucu: D < 20 veya D > 60 olur.

O hâlde öğrencinin D vitamini sonucu şu aralıkta olabilir: $(-\infty, 20) \cup (60, \infty)$

ÖRNEK

Zeynep, bahçesine her yıl 1,5 metre uzayan bir sarmaşık dikmiştir. Bahçe çitinin yüksekliği, sarmaşığın boyunun 3 katından 6 santimetre kısadır. Sarmaşık dikildikten sonra çitin ve sarmaşığın boyları arasındaki eşitsizlikler aşağıda verilmiştir.

- 2 yıl sonra → çit yüksekliği ≥ sarmaşık yüksekliği,
- 8 yıl sonra → çit yüksekliği ≤ sarmaşık yüksekliğidir.

Buna göre sarmaşığın dikildikten 1 yıl sonraki boyunun alabileceği tam sayı değerleri toplamı kaçtır?

ÇÖZÜM

Çit yüksekliği y,
sarmaşık yüksekliği x olsun.
O hâlde $y = 3x - 6$ olur.

2 yıl sonra

$x + 2 \cdot 1{,}5 \le 3x - 6$

$x + 3 \le 3x - 6$

$\frac{9}{2} \le x$ olur.

8 yıl sonra

$x + 8 \cdot 1{,}5 \ge 3x - 6$

$x + 12 \ge 3x - 6$

$9 \ge x$ olur.

$\frac{9}{2} \le x \le 9$

1 yıl sonra

$\frac{9}{2} + 1{,}5 \le x + 1{,}5 \le 9 + 1{,}5$

$6 \le x + 1{,}5 \le \frac{21}{2}$

Buna göre sarmaşığın dikildikten 1 yıl sonraki boyunun alabileceği tam sayı değerleri toplamı 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 40'tır.

ÖRNEK

Ömer ve Ahmet, yaz tatilinde cep harçlıklarını artırmak için limonata satmaya karar vermiştir.

- Ömer, her gün tanesini **8 TL**'den satmak üzere **en az 20, en fazla 40 adet** limonata satmaktadır.
- Ahmet ise tanesini **5 TL**'den satmak üzere **en az 10, en fazla 30 adet** limonata satmaktadır.

Buna göre gün sonunda Ömer'in kazancı ile Ahmet'in kazancı arasındaki fark <u>en fazla</u> kaç TL olabilir?

ÇÖZÜM

Ömer günde x, Ahmet ise y adet limonata satmış olsun.

$20 \le x \le 40$ olur. Tanesi 8 TL olduğu için eşitsizliğin her tarafı 8 ile çarpılır.

$160 \le 8x \le 320$ olur.

$10 \le y \le 30$ olur. Tanesi 5 TL olduğu için eşitsizliğin her tarafı 5 ile çarpılır.

$50 \le 5y \le 150$ olur.

Ömer ile Ahmet'in kazançları arasındaki fark $(8x - 5y)$ olur.

$50 \le 5y \le 150$ eşitsizliğin her tarafını " –" ile çarpalım, bu durumda

$-150 \le -5y \le -50$ olur.

$160 \le 8x \le 320$
$-150 \le -5y \le -50$
} Taraf tarafa toplandığında $10 \le 8x - 5y \le 270$ olur.

O hâlde Ömer'in kazancı ile Ahmet'in kazancı arasındaki fark en fazla 270 TL'dir.

ÖRNEK



y

Bir marangoz, dikdörtgen biçiminde ahşap bir masa tablası yapmaktadır. Bu masanın kısa kenarının uzunluğu y olup ölçüm sonucuna göre $6 < y < 8$ aralığında yer almaktadır. Masanın uzun kenarının uzunluğu kısa kenarının uzunluğunun 3 katından 2 cm fazladır.

Buna göre masa tablasının üst yüzey alanının santimetrekare cinsinden alabileceği değer aralığını bulunuz.

ÇÖZÜM

Kısa kenar uzunluğu: y

Uzun kenar uzunluğu: (3y + 2)

Alan: $y \cdot (3y + 2) = (3y^2 + 2y)$ olur.

Verilen aralık $6 < y < 8$ ise $36 < y^2 < 64$ olur. Eşitsizliğin her tarafını 3 ile çarptığımızda $108 < 3y^2 < 192$ olur.

$6 < y < 8$ eşitsizliğin her tarafını 2 ile çarptığımızda ise $12 < 2y < 16$ olur. Bu iki eşitsizliği taraf tarafa toplayalım.

$108 < 3y^2 < 192$
$12 < 2y < 16$
} Buradan $120 < (3y^2 + 2y) < 208$ aralığı elde edilir.

ÖRNEK

Bir arabanın deposundaki yakıt miktarı bir hafta boyunca ölçülmüştür. Depodaki yakıt en az 8 litre, en fazla 26 litre olarak kaydedilmiştir. Bir gün ölçüm yapıldığında depodaki yakıt miktarı $\frac{5x - 4}{2}$ litre olarak bulunmuştur.

Buna göre x tam sayısının alabileceği kaç farklı değer vardır?

ÇÖZÜM

Yakıt miktarı $\frac{5x - 4}{2}$ litredir.

Depodaki yakıt aralığı: $8 \le \frac{5x - 4}{2} \le 26$

Her iki tarafı 2 ile çarpalım.

$16 \le 5x - 4 \le 52$

Her tarafa 4 ekleyelim

$20 \le 5x \le 56$

Her tarafı 5'e bölelim

$4 \le x \le 11{,}2$ bu durumda x in alabileceği tam sayı değerleri 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 olup x, sekiz farklı değer alır.

ÖRNEK

Aşağıdaki tabloda A ve B operatörlerinin tarife paketleri gösterilmiştir.

A Operatörü	B Operatörü
Sabit Ücret: 120 TL 1 GB: 10 TL	Sabit Ücret: 150 TL 1 GB: 8 TL

Buna göre tarife değişikliği yapmak isteyen birinin B operatörünü maliyet yönünden tercih edebilmesi için bir ayda kullandığı internet tam sayı cinsinden en az kaç GB'dir?

ÇÖZÜM

Kullanılan internet miktarı x olsun. Bu durumda

A operatörünün maliyeti (120 + 10x) TL olur.

B operatörünün maliyeti (150 + 8x) TL olur.

Öyleyse

$120 + 10x > 150 + 8x$

$2x > 30$

$x > 15$

$x = 16$ olur.

SIRA SİZDE 1.

Bir havayolu şirketi, uçaktaki boş koltuk sayısı azaldıkça bilet fiyatlarını otomatik olarak artırıyor. Aşağıdaki tabloda, uçakta kalan koltuk sayısına göre uygulanan tek yön bilet fiyatı gösterilmiştir.

Kalan Koltuk Sayısı (x)	Bilet Fiyatı (TL)
$100 < x \leq 150$	200
$80 < x \leq 100$	250
$50 < x \leq 80$	300
$30 < x \leq 50$	350
$1 < x \leq 30$	500

Uçakta başta 110 boş koltuk varken uçuşa az bir zaman kala gelen 35 kişilik bir gruptan herkes sırayla gelip 1 bilet almıştır.

Bu müşteriler sırayla bilet aldıkça fiyatlar güncellendiğine göre grubun ödeyeceği toplam ücret en az kaç TL olur?

SIRA SİZDE 2.

Bir fabrikanın üretim bandında bir hafta boyunca üretilen kutular sayılmıştır. Günlük üretim en az **120**, en fazla **280** kutu olarak kaydedilmiştir. Bir günde yapılan ölçümde üretim miktarı, **(3x + 10)** kutu olarak bulunmuştur.

Buna göre x tam sayısının alabileceği kaç farklı değer vardır?

SIRA SİZDE 3.

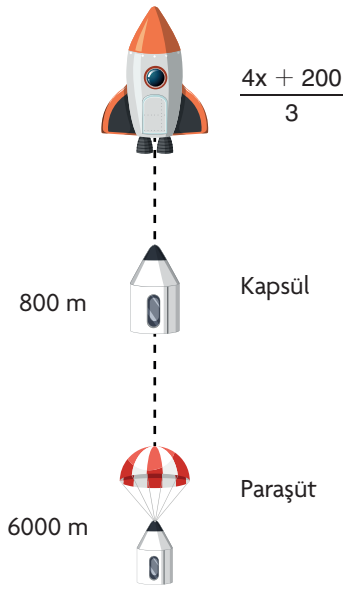
x, y ve z birer tam sayıdır.

$y < z - y < 0$ **ve** $x < z$ **olduğuna göre** $x + y + z$ **ifadesinin alabileceği en büyük tam sayı değeri kaçtır?**

SIRA SİZDE 4.

Bir roket, $\frac{4x + 200}{3}$ metre yüksekliğe ulaştığında kapsül ayrılıyor. Kapsül, 800 metre serbest düşüş yaptıktan sonra paraşütünü açıyor.

Kapsülün paraşütünü açtığı yükseklik en az 6000 metre olduğuna göre x tam sayısının alabileceği en küçük değer kaçtır?



SIRA SİZDE 5.

Bir manavda Ayşe elma, Mehmet ise armut satmaktadır. Ayşe'nin sattığı elma miktarı a kilogram, Mehmet'in sattığı armut miktarı ise b kilogramdır. Gün sonunda yapılan hesaplamaya göre iki satış arasındaki ilişki $a - 2b + 3 = 0$ şeklindedir.

Mehmet'in sattığı armut miktarı $-6 < b < 5$ aralığında olduğuna göre a nın alabileceği tam sayı değerlerinin toplamı kaçtır?

ARADA OLMA ÖZELLİĞİ

Sayı kümelerinin arada olma özelliğini inceleme

1) Doğal sayılar kümesinde arada olma özelliği ile ilgili varsayımlarınızı yazınız.

2) Tam sayılar kümesinde arada olma özelliği ile ilgili varsayımlarınızı yazınız.

3) Rasyonel sayılar kümesinde arada olma özelliği ile ilgili varsayımlarınızı yazınız.

4) Gerçek sayılar kümesinde arada olma özelliği ile ilgili varsayımlarınızı yazınız.

5) Tabloda $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ kümelerindeki bazı elemanlar verilmiştir.

Buna göre sayı kümelerine ait elemanların arasında o sayı kümesine ait başka bir eleman ya da elemanlar var ise tabloyu örnekteki gibi doldurunuz.

$\mathbb{N}$		$\mathbb{Z}$		$\mathbb{Q}$		$\mathbb{R}$	
Hangi Sayılar Arasında Arandığı	**Aradaki Sayı Örneği**	**Hangi Sayılar Arasında Arandığı**	**Aradaki Sayı Örneği**	**Hangi Sayılar Arasında Arandığı**	**Aradaki Sayı Örneği**	**Hangi Sayılar Arasında Arandığı**	**Aradaki Sayı Örneği**
2 ile 5	3	-3 ile 1	0	$\frac{3}{2}$ ile 2	$\frac{9}{5}$	$\sqrt{3}$ ile 4	$\frac{5}{2}$
30 ile 50		-5 ile 2		-1 ile 0		$\sqrt{3}$ ile 2	
22 ile 23		-2 ile -1		-1 ile $\frac{1}{2}$		π ile 4	
10 ile 100		-4 ile 0		$\frac{1}{2}$ ile $\frac{3}{4}$		$\sqrt{2}$ ile π	
0 ile 1		3 ile 4		$\frac{1}{3}$ ile 1		$-\sqrt{\frac{5}{2}}$ ile 0	

6) Elde ettiğimiz sonuçlardan yararlanarak verilen sayı kümelerinde arada olma özelliği ile ilgili genellemeleri içeren aşağıdaki soruları çözünüz.

Aşağıda verilen genellemelerdeki boşluklara "vardır" veya "yoktur" yazınız.

a) Doğal sayılar ve tam sayılar kümelerinde arada olma özelliği .....

b) Rasyonel sayılar ve reel sayılar kümelerinde arada olma özelliği .....

c) Ardışık iki tam sayı arasında en az bir tam sayı .....

d) Herhangi iki rasyonel sayı arasında en az bir rasyonel sayı .....

e) Herhangi iki reel sayı arasında en az bir reel sayı .....

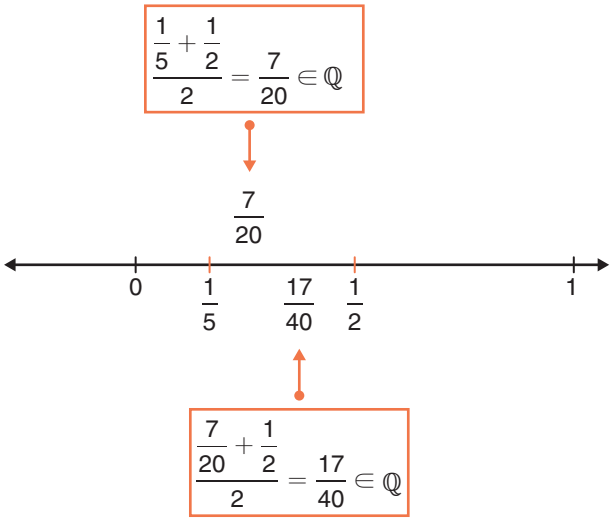
Not: Çözümleri 133. sayfadadır.

ÖRNEK

$\frac{1}{5} < x < \frac{1}{2}$ **eşitsizliğini sağlayan iki tane rasyonel sayı yazınız.**

ÇÖZÜM

Verilen sayıları sayı doğrusunda gösterelim.



ÖRNEK

"a ve b $\in \mathbb{Q}$ olmak üzere a ve b arasında en az bir tane rasyonel sayı vardır." **önermesini ispatlayınız.**

ÇÖZÜM

1) İlk olarak iki tarafa b ekleyelim.

$2b < a + b$

Her iki tarafı 2'ye bölelim.

$b < \frac{a+b}{2}$

2) Şimdi ise iki tarafa a ekleyelim.

$a + b < a + a$

Her 2 tarafı 2'ye bölelim.

$\frac{a+b}{2} < a$ olur. Bu durumda $\frac{a+b}{2} < a$ olur.

$\frac{a+b}{2} = c$ dersek $b < c < a$ olur.

SIRA SİZDE 6.

$A = \{x \mid x = 5k + 2, k \in \mathbb{Z}\}$ **kümesinin arada olma özelliği olup olmadığını belirleyerek işlem adımlarınızı gösteriniz.**

SIRA SİZDE 7.

Aşağıda verilen önermelerin yanlış olduklarını karşıt örnek sunma yöntemini kullanarak ispatlayınız.

1. a, b $\in \mathbb{R}$ olmak üzere

$a > b$ ise $a^2 > b^2$ dir.

2. Herhangi iki tam sayının toplamı, bu sayıların çarpımından küçüktür.

3. a ve b birer çift sayı ise a^b sayısı çifttir.

4. Verilen bir eşitsizliğin her iki tarafını doğal sayı ile çarptığımızda eşitsizlik yön değiştirmez.

5. $(a^b)^c = (a)^{b-c}$ dir.

SAYI KÜMELERİNİN DÖRT İŞLEME GÖRE KAPALILIĞININ İNCELENMESİ

NOT

Bir kümedeki herhangi iki eleman bir işleme girdiğinde elde edilen sonuç yine aynı kümenin elemanı ise bu küme o işleme göre kapalıdır.

1) $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{R}$ kümelerinden alınan herhangi iki eleman ile yapılan bir işlemin (toplama, çıkarma, çarpma ve bölme) sonucunun aynı kümenin elemanı olup olmaması durumuyla ilgili varsayımlar oluşturunuz ve varsayımlarınızı yazınız.

2) Tabloda verilen her bir küme için bu kümeye ait herhangi iki eleman seçiniz. Seçtiğiniz elemanlarla toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemlerini yaparak tabloyu örnekteki gibi doldurunuz.

Küme	Elemanlar	Toplama	Çıkarma	Çarpma	Bölme
$\mathbb{N}$	2 ve 5	$2 + 5 = 7 \in \mathbb{N}$	$2 - 5 = -3 \notin \mathbb{N}$	$2 . 5 = 10 \in \mathbb{N}$	$\frac{2}{7} \notin \mathbb{N}$
$\mathbb{Z}$					
$\mathbb{Q}$					
$\mathbb{R}$					

3) $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{R}$ kümelerinin kapalılık özelliği ile ilgili genellemelerinizi oluşturunuz.

4) $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{R}$ kümelerinin kapalılık özelliği ile ilgili önermelerinizi oluşturarak yazınız.

5) Oluşturduğunuz önermeler yardımıyla aşağıdaki tabloda verilen önermelerin "doğruluk" ve "yanlışlık" durumlarını işaretleyerek belirtiniz. Yanlış olanları "gerekçe" sütununa karşıt örnek vererek belirtiniz.

	DOĞRU	YANLIŞ	GEREKÇE
Tam sayılar kümesi, çarpma işlemine göre kapalıdır.			
Reel sayılar kümesi, bölme işlemine göre kapalıdır.			
Rasyonel sayılar kümesi, çıkarma işlemine göre kapalıdır.			
İrrasyonel sayılar kümesi, toplama işlemine göre kapalıdır.			
Doğal sayılar kümesi, bölme işlemine göre kapalıdır.			
Rasyonel sayılar kümesi, çarpma işlemine göre kapalıdır.			

Not: Çözümleri 135. sayfadadır.

ÖRNEK

$A = \{x \mid x = 4k, k \in \mathbb{Z}\}$ **kümesinin toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemine göre kapalı olup olmadığını inceleyiniz.**

- **Toplama işlemine göre kapalı mıdır?**

$-8 + (-12) = -20 \in A$

veya 4'ün katı olan iki farklı sayı alalım. $4a + 4b = 4(a + b)$ olduğundan kapalıdır.

- **Çıkarma işlemine göre kapalı mıdır?**

$-8 - (-12) = +4 \in A$

veya 4'ün katı olan iki farklı sayı alalım. $4a - 4b = 4(a - b)$ olduğundan kapalıdır.

- **Çarpma işlemine göre kapalı mıdır?**

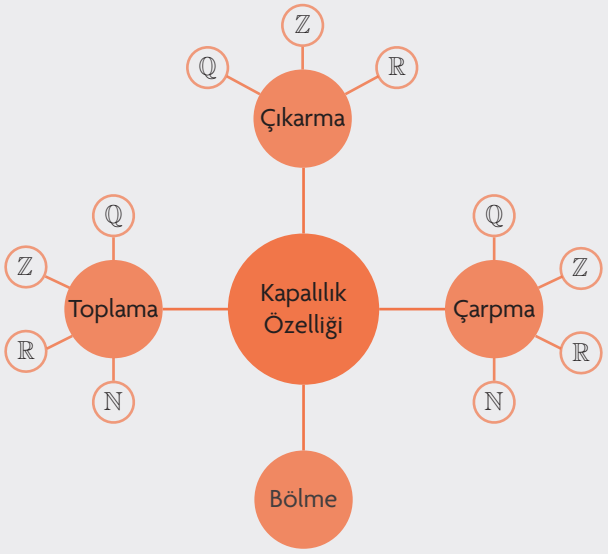
$-8 \cdot (-12) = 96 \in A$

veya 4'ün katı olan iki farklı sayı alalım. $4a \cdot 4b = 16.(a \cdot b)$ olduğundan kapalıdır.

- **Bölme işlemine göre kapalı mıdır?**

$\frac{-8}{-12} = \frac{2}{3} \notin A$ olduğundan kapalı değildir.

HATIRLATMA



GERİ BİLDİRİM

Bu geri bildirim sayesinde kendi cevabınızı kontrol edebilir, hatalarınızı düzelterek öğrenmenizi pekiştirebilirsiniz.

ETKİNLİK 1.

ÇÖZÜM

Tablo 1: *Maddelerin Ölçüm Verileri*

Madde	Kütle (g)	Hacim (cm^3)	Yoğunluk (g/cm^3)
Bakır	356	80	4,45 Rasyonel Sayı Reel Sayı
Su	200	100	2 Doğal Sayı Tam Sayı Rasyonel Sayı Reel Sayı
Zeytinyağı	135	150	0,9 Rasyonel Sayı Reel Sayı
Kurşun	4,5	5	0,9 Rasyonel Sayı Reel Sayı

VARSAYIM OLUŞTURMA

Bu etkinlikte öğrenciler, iki sıcaklık değeri arasındaki sayıları düşünerek **gerçek sayıların arada olma (yoğunluk) özelliğini** keşfetmeye çalışmıştır.

- **Mehmet,** iki sayı arasında en az bir değer olabileceğini doğru bir şekilde ifade etmiştir. Ancak bu aralıkta yalnızca tek bir değer değil birden fazla değer olabileceğini fark etmelidir.
- **Elif,** yalnızca tam sayıları düşünerek aralığı sınırlamıştır. Öğretmenin yönlendirmesiyle ondalıklı sayıların da bu aralıkta yer alabileceğini fark etmesi beklenir.
- **Ali,** iki sayı arasında sonsuz sayıda değer bulunabileceğini belirterek güçlü ve doğru bir genelleme yapmıştır. Bu düşünce, gerçek sayıların temel özelliklerinden biridir.
- **Zeynep,** negatif sayılarla ilgili yanlış bir varsayımda bulunmuştur. Negatif sayılar arasında da sonsuz sayıda gerçek sayı bulunduğu örneklerle gösterilebilir.
- **Ahmet;** iki sayı arasındaki bir değeri bulmak için ortalama alma yöntemini kullanarak, matematiksel olarak geçerli ve genellenebilir bir strateji sunmuştur.

Genel Değerlendirme

Bu etkinlik, öğrencilerin **tam sayılar ile gerçek sayılar arasındaki temel farkları** ve özellikle **gerçek sayıların arada olma (yoğunluk) özelliğini** keşfetmelerine olanak sağlamıştır. Öğrencilerin bazıları kavramı sezgisel düzeyde fark ederken bazıları sayı kümelerini sınırlı düşünme eğilimi göstermiştir. Yapılan tartışmalar ve öğretmen yönlendirmeleri sayesinde, iki gerçek sayı arasında **sonsuz sayıda gerçek sayı bulunduğu** genellemesine ulaşılması hedeflenmiştir. Etkinlik, kavram yanılgılarını ortaya çıkarması ve bu yanılgıların fırsat tanıması açısından etkilidir.

ETKİNLİK 2.

ÇÖZÜM

Sayı Kümeleri	Sıralama Özelliği Olan	Sıralama Özelliği Olmayan
$\mathbb{N}$	✓	
$\mathbb{Z}$	✓	
$\mathbb{Q}$	✓	
$\mathbb{R}$	✓	

ETKİNLİK 3.

ÇÖZÜM

Sıralama Özelliği	Sözel İfade
$a \leq a$	Her sayı kendisine eşit ya da kendisinden küçüktür.
$a < b$ veya $b < a$	İki farklı sayıdan biri, mutlaka diğerinden küçüktür.
$a \leq b$ ve $b \leq c$ ise $a \leq c$ dir.	Birinci sayı ikinci sayıdan, ikinci sayı da üçüncü sayıdan küçük ya da bu sayılar birbirine eşitse birinci sayı üçüncü sayıdan küçük ya da bu sayıya eşittir.
$a \leq b$ ve $b \leq a$ ise $a = b$ dir.	Bir sayı, başka bir sayıdan hem küçük hem büyük olamaz; bu durumda sayılar birbirine eşittir.
$a \leq b$ ise $a \pm c \leq b \pm c$ dir.	Eşitsizliklerin her iki tarafına aynı sayı eklenip çıkarılabilir.
$a \leq b$ ve $c \geq 0$ ise $a.c \leq b.c$ dir.	Eşitsizliğin her iki tarafı sıfırdan büyük bir sayı ya da sıfırla çarpılırsa sıralama korunur.
$a \leq b$ ve $c \leq 0$ ise $a.c \geq b.c$ dir.	Eşitsizliğin her iki tarafı negatif bir sayı ile çarpılırsa sıralama yön değiştirir.
$0 < a < b$ veya $a < b < 0$ ise $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ dir	Aynı işaretli iki sayıdan büyüğünün çarpmaya göre tersi daha küçüktür.
$0 < a < b$ ise $a^n < b^n$ $(n \in \mathbb{Z}^+)$	Sıfırdan büyük olan iki sayıdan büyüğün pozitif tam kuvveti de büyüktür.

SIRA SİZDE 1.

ÇÖZÜM

Grup sırayla birer bilet aldığı için kalan koltuk sayıları da (alış anında) x = 110, 109, 108, ... şeklinde azalır. 35 kişi olduğu için son satın alma anındaki kalan koltuk sayısı:

110 – (35 – 1) = 76 olur.

O hâlde satın almalar sırasında x değerleri: 110, 109, ..., 76 şeklindedir.

Bu aralıktaki her x değeri hangi fiyat dilimine düşüyor, ona bakalım:

- $100 < x \leq 150$ (fiyat 200 TL), bu dilimdeki x değerleri 101'den 110'a kadardır. Grubun ilk kaç kişisi burada koltuk satın alır?

110 ile 101 arası 110 – 101 + 1 = 10 kişi olduğundan 10 . 200 = 2000 TL'dir.

- $80 < x \leq 100$ (fiyat 250 TL), bu dilimdeki x değerleri 81'den 100'e kadardır. Grubun kaç kişisi burada koltuk satın alır?

100 ile 81 arası 100 – 81 + 1 = 20 kişi olduğundan 20 . 250 = 5000 TL'dir.

- $50 < x \leq 80$ (fiyat 300 TL), bu dilimdeki x değerleri 51'den 80'e kadardır. Grubun kalan koltuk satın almaları bu aralıkta olur.

80 ile 76 arası 80 – 76 + 1 = 5 kişi olduğundan 5 . 300 = 1500 TL'dir.

Toplam ödenecek tutar: 2000 + 5000 + 1500 = 8500 TL olur.

SIRA SİZDE 2.

ÇÖZÜM

Günlük üretim en az **130** adet dediği için

$3x + 10 \geq 130$

$3x \geq 120$

$x \geq 40$ olur.

Günlük üretim en fazla **280** dediği için

$3x + 10 \leq 280$

$3x \leq 270$

$x \leq 90$ olur.

Bu durumda $40 \leq x \leq 90$ olup x, toplam 51 değer alır.

SIRA SİZDE 3.

ÇÖZÜM

$y < z - y < 0$ eşitsizliğine göre $z - y = -1$ ve $y = -2$ diyebiliriz.

Buradan $z = -3$ olur.

$x < z$ olduğundan x in en büyük değeri -4'tür.

Bu durumda $x + y + z = -9$ olur.

SIRA SİZDE 4.

ÇÖZÜM

Kapsülün ayrıldığı yükseklik $\frac{4x + 200}{3}$ metredir.

Paraşüt Açılma Yüksekliği = Ayrılma Yüksekliği – 800.

Bu en az 6000 m olmalı:

$\frac{4x + 200}{3} - 800 \geq 6000$

Her iki tarafı toplayıp düzenleyelim.

$\frac{4x + 200}{3} \geq 6800$

Her iki taraf 3 ile çarpılırsa

$4x + 200 \geq 20400$ olur.

Her iki taraftan 200 çıkarılırsa

$4x \geq 20200$ olur.

Her iki taraf 4'e bölünürse

$x \geq 5050$ olup x in en küçük tam sayı değeri 5050'dir.

SIRA SİZDE 5.

ÇÖZÜM

$a - 2b + 3 = 0$ denkleminde b'yi a cinsinden yazalım.

$b = \frac{a+3}{2}$

$-6 < b < 5$

Aralığında b yerine a cinsinden bulduğumuz değeri yazalım.

$-6 < \frac{a+3}{2} < 5$

Eşitsizliğin her tarafını 2 ile çarpalım.

$-12 < a + 3 < 10$

Eşitsizliğin her tarafını -3 ile toplayalım.

$-15 < a < 7$

O hâlde a değerlerini toplayalım. $-14 - 13 - 12 \ldots + 7 + 6 = \left(\frac{\text{İlk Terim + Son Terim}}{2}\right) \cdot$ Terim Sayısı

Terim Sayısı $= \left(\frac{\text{Son Terim} - \text{İlk Terim}}{\text{Artış Miktarı}}\right) + 1$ olup

Terim Sayısı $= \frac{6-(-14)}{1} + 1 = 21$

Toplam $= (\frac{-14+6}{2}) \cdot 21 = -84$ olur

ARADA OLMA ÖZELLİĞİ

ÇÖZÜM 1.

Doğal sayılar kümesinde iki farklı doğal sayı arasında her zaman başka bir doğal sayı bulunmaz. Örneğin, 3 ile 4 arasında doğal bir sayı sayı yoktur. Bu nedenle doğal sayılar kümesi arada olma özelliğine sahip değildir.

ÇÖZÜM 2.

Tam sayılar kümesinde de iki ardışık tam sayı arasında başka bir tam sayı bulunmaz. Örneğin, 0 ile 1 veya –2 ile –1 arasında tam sayı yoktur. Bu nedenle tam sayılar kümesi de arada olma özelliğine sahip değildir.

ÇÖZÜM 3.

Rasyonel sayılar kümesinde iki farklı rasyonel sayı arasında her zaman başka bir rasyonel sayı bulunur. Örneğin, $\frac{2}{3}$ ile $\frac{1}{4}$ arasında $\frac{\frac{2}{3}+\frac{1}{4}}{2}=\frac{11}{24}$ gibi başka rasyonel sayılar vardır. Bu nedenle rasyonel sayılar kümesi arada olma özelliğine sahiptir.

ÇÖZÜM 4.

Gerçek sayılar kümesinde iki farklı gerçek sayı arasında her zaman başka bir gerçek sayı bulunur. Örneğin, 1 ile 2 arasında hem rasyonel sayılar hem de irrasyonel sayılar vardır. Bu nedenle gerçek sayılar kümesi arada olma özelliğine sahiptir.

ÇÖZÜM 5.

$\mathbb{N}$		$\mathbb{Z}$		$\mathbb{Q}$		$\mathbb{R}$	
Hangi Sayılar Arasında Arandığı	**Aradaki Sayı Örneği**	**Hangi Sayılar Arasında Arandığı**	**Aradaki Sayı Örneği**	**Hangi Sayılar Arasında Arandığı**	**Aradaki Sayı Örneği**	**Hangi Sayılar Arasında Arandığı**	**Aradaki Sayı Örneği**
2 ile 5	3	– 3 ile 1	0	$\frac{3}{2}$ ile 2	$\frac{9}{5}$	$\sqrt{3}$ ile 4	$\frac{5}{2}$
30 ile 50	44	– 5 ile 2	4	– 1 ile 0	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$ ile 2	$\sqrt{5}$
22 ile 23	Yok	– 2 ile – 1	Yok	– 1 ile $\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{4}$	π ile 4	$\frac{13}{5}$
10 ile 100	77	– 4 ile 0	– 2	$\frac{1}{2}$ ile $\frac{3}{4}$	$\frac{3}{5}$	$\sqrt{2}$ ile π	e
0 ile 1	Yok	3 ile 4	Yok	$\frac{1}{3}$ ile 1	$\frac{4}{7}$	$-\sqrt{\frac{5}{2}}$ ile 0	– 1

6. Elde ettiğimiz sonuçlardan yararlanarak verilen sayı kümelerinde arada olma özelliği ile ilgili genellemeleri içeren aşağıdaki soruları çözünüz.

a) Doğal sayılar ve tam sayılar kümelerinde arada olma özelliği yoktur.

b) Rasyonel sayılar ve reel sayılar kümelerinde arada olma özelliği vardır.

c) Ardışık iki tam sayı arasında en az bir tam sayı yoktur.

d) Herhangi iki rasyonel sayı arasında en az bir rasyonel sayı vardır.

e) Herhangi iki reel sayı arasında en az bir reel sayı vardır.

SIRA SİZDE 6.

ÇÖZÜM

A = {..., –8, –3, 2, 7, 12, 17, ...}

Arada Olma Özelliği: Eğer bir kümede a < b olacak şekilde iki eleman seçildiğinde mutlaka a < c < b şartını sağlayan başka bir eleman da o kümede varsa bu kümeye arada olma özelliği vardır denir.
Bizim kümede ardışık iki eleman arasındaki fark 5'tir. Herhangi iki sayı seçildiğinde 5k + 2 biçiminde yazılamayacağı için arada olma özelliği yoktur.
Örneğin, 2 ile 7 arasında 4 sayısını aldığımızda 4 ≠ 5k + 2 olur.

SIRA SİZDE 7.

ÇÖZÜM

1. a = – 1 ve b = – 2 olsun.

Burada

a > b

– 1 > – 2

Ancak

$a^2 = (-1)^2 = 1, b^2 = (-2)^2 = 4$

O hâlde

$a^2 < b^2$ dir.

2. $a = 1$ ve $b = 1$ olsun.

$a + b = 1 + 1 = 2$

$a \cdot b = 1 \cdot 1 = 1$

Burada görüyoruz ki

a + b > a · b olur.

3. $a = 2, b = 0$ olsun.

$a^b = 2^0 = 1$ (tek) olur.

4. Bu ifade her zaman doğru değildir. Çünkü eşitsizliklerde yönün değişip değişmemesi, çarpılan sayının pozitif veya negatif olmasına bağlıdır. Ancak Doğal Sayılar Kümesinde 0 elemanı da bulunduğundan burada dikkat edilmesi gereken durum 0 ile çarpmadır.

Karşıt Örnek:

$3 < 5$

Her iki tarafı 0 ile çarpalım (0 bir doğal sayıdır):

$3 \cdot 0 = 0$

$5 \cdot 0 = 0$ Bu durumda

$0 = 0$ olur.

5. a = 2, b = 3, c = 2 olsun.

$\left(2^3\right)^2 = (8)^2 = 64$

$2^{3-2} = 2^1 = 2$

$64 \neq 2$'dir.

SAYI KÜMELERİNİN DÖRT İŞLEME GÖRE KAPALILIĞININ İNCELENMESİ

1.

- **Doğal sayılar kümesi ($\mathbb{N}$):** $\mathbb{N}$ kümesinden seçilen iki elemanla yapılan **toplama ve çarpma** işlemlerinin sonucu, yine $\mathbb{N}$ kümesinin bir elemanıdır. Ancak **çıkarma ve bölme** işlemlerinin sonucu her zaman $\mathbb{N}$ kümesine ait olmayabilir.
- **Tam sayılar kümesi ($\mathbb{Z}$):** $\mathbb{Z}$ kümesinden seçilen iki elemanla yapılan **toplama, çıkarma ve çarpma** işlemlerinin sonucu yine $\mathbb{Z}$ kümesinin bir elemanıdır. **Bölme** işleminin sonucu, her zaman $\mathbb{Z}$ kümesine ait olmayabilir.
- **Rasyonel sayılar kümesi ($\mathbb{Q}$):** $\mathbb{Q}$ kümesinden seçilen iki elemanla yapılan **toplama, çıkarma ve çarpma** işlemlerinin sonucu, yine $\mathbb{Q}$ kümesine aittir. **Sıfıra bölme hariç**, bölme işleminin sonucu da $\mathbb{Q}$ kümesinin bir elemanıdır.
- **Gerçek sayılar kümesi ($\mathbb{R}$):** R kümesinden seçilen iki elemanla yapılan **toplama, çıkarma ve çarpma** işlemlerinin sonucu, yine $\mathbb{R}$ kümesinin bir elemanıdır. **Sıfıra bölme hariç**, bölme işleminin sonucu da $\mathbb{R}$ kümesine aittir.

2.

KÜME	ELEMANLAR	TOPLAMA	ÇIKARMA	ÇARPMA	BÖLME
$\mathbb{N}$	2 ve 5	$2 + 5 = 7 \in \mathbb{N}$	$2 - 5 = -3 \notin \mathbb{N}$	$2 . 5 = 10 \in \mathbb{N}$	$\frac{2}{7} \notin \mathbb{N}$
$\mathbb{Z}$	-3 ve 4	$-3 + 4 = 1 \in \mathbb{Z}$	$-3 - 4 = 1 \in \mathbb{Z}$	$-3 \cdot 4 = -7 \in \mathbb{Z}$	$-\frac{3}{4} \notin \mathbb{Z}$
$\mathbb{Q}$	$\frac{1}{3}$ ve $\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12} \in \mathbb{Q}$	$\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12} \in \mathbb{Q}$	$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12} \in \mathbb{Q}$	$\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{4}} = \frac{4}{3} \in \mathbb{Q}$
$\mathbb{R}$	$\sqrt{3}$ ve 2	$(\sqrt{3} + 2) \in \mathbb{R}$	$(\sqrt{3} - 2) \in \mathbb{R}$	$(\sqrt{3} \cdot 2 = 2\sqrt{3}) \in \mathbb{R}$	$\frac{\sqrt{3}}{2} \in \mathbb{R}$

3.

- **Doğal sayılar kümesi ($\mathbb{N}$):** Toplama ve çarpma işlemlerine göre kapalıdır. Çıkarma ve bölme işlemlerine göre kapalı değildir.
- **Tam sayılar kümesi ($\mathbb{Z}$):** Toplama, çıkarma ve çarpma işlemlerine göre kapalıdır. Bölme işlemine göre kapalı değildir.
- **Rasyonel sayılar kümesi ($\mathbb{R}$):** Toplama, çıkarma ve çarpma işlemlerine göre kapalıdır. Bölme işlemine göre de kapalıdır **(sıfıra bölme hariç).**
- **Gerçek sayılar kümesi ($\mathbb{R}$):** Toplama, çıkarma ve çarpma işlemlerine göre kapalıdır. Bölme işlemine göre de kapalıdır **(sıfıra bölme hariç).**

4.

- **Önerme 1 ($\mathbb{N}$):** Doğal sayılar kümesi, toplama ve çarpma işlemlerine göre kapalıdır; çıkarma ve bölme işlemlerine göre kapalı değildir.
- **Önerme 2 ($\mathbb{Z}$):** Tam sayılar kümesi, toplama, çıkarma ve çarpma işlemlerine göre kapalıdır; bölme işlemine göre kapalı değildir.
- **Önerme 3 ($\mathbb{Q}$):** Rasyonel sayılar kümesi, sıfıra bölme hariç dört işleme göre kapalıdır.
- **Önerme 4 ($\mathbb{R}$):** Gerçek sayılar kümesi, sıfıra bölme hariç dört işleme göre kapalıdır

5.

	DOĞRU	YANLIŞ	GEREKÇE
Tam sayılar kümesi, çarpma işlemine göre kapalıdır.	✓		
Reel sayılar kümesi, bölme işlemine göre kapalıdır. (Sıfıra bölme hariç)	✓		5 ÷ 0 tanımsızdır.
Rasyonel sayılar kümesi, çıkarma işlemine göre kapalıdır.	✓		
İrrasyonel sayılar kümesi, toplama işlemine göre kapalıdır.	✓		
Doğal sayılar kümesi, bölme işlemine göre kapalıdır.		✓	$3 \div 2 = 1{,}5 \in \mathbb{N}$
Rasyonel sayılar kümesi, çarpma işlemine göre kapalıdır.	✓		

DEĞERLENDİRİYORUM

Amaç: Bu bölümde öğrendiklerinizi gözden geçirmenizi, kendi öğrenme sürecinizi değerlendirmenizi ve eksiklerinizi fark etmenizi amaçlıyoruz.

Soruları dikkatle yanıtlayınız. Cevaplarınızı geri bildirimlerle karşılaştırarak eksik gördüğünüz noktaları tekrar ediniz.

SORULAR

1. Ali bisikletiyle bir parkurda antrenman yapıyor. Her 3 dakikada $(x - 2)$ kilometre yol alıyor. Arkadaşı Mehmet ise her 7 dakikada $(2x + 4)$ kilometre yol alıyor.

Ali'nin ortalama hızı, Mehmet'in ortalama hızından daha fazla olduğuna göre x in en küçük tam sayı değeri kaçtır?

2. Aşağıdaki tabloda bir kırtasiye mağazasında satılan A, B, C ve D defterlerinin fiyatları verilmiştir.

A	B	C	D
17 TL	22 TL	14 TL	?

Ömer bu dört farklı defterden birer tane satın alıyor.

Ömer'in toplam ödediği tutar 65 TL'den fazla ve 120 TL'den az olduğuna göre D defterinin fiyatının TL cinsinden alabileceği en geniş aralığı bulunuz.

3. Bir parka iki ayrı hava ölçüm istasyonu konulmuştur. Birinci istasyonun sıcaklık sapması x °C, ikinci istasyonun sıcaklık sapması y °C olarak ölçülüyor (Sapma: O günün ortalama sıcaklığının uzun dönem ortalamasına göre farkıdır.).

Teknik ekibe göre bu iki istasyonun sensörünün ölçümleri arasındaki denge ilişkisini veren denklem $x + y + 2 = 0$ şeklinde hesaplanmıştır.

İkinci istasyonun ölçümünün değer aralığı $-5 < y < 4$ olduğuna göre x in alabileceği tam sayı değerleri toplamını bulunuz.

4. Aşağıdaki tabloda Zeynep, Mehmet ve Ayşe'nin bir kırtasiyeden aldıkları kitap, defter ve kalem adetleri gösterilmiştir.

	Kalem Adedi	Kitap Adedi	Defter Adedi
Zeynep	2	2	3
Mehmet	1	3	3
Ayşe	1	2	4

Aldıkları ürünler için en çok parayı Ayşe, en az parayı Zeynep ödediğine göre bu 3 ürünün fiyatlarını büyükten küçüğe doğru sıralayınız.

5. Bir manavda elma kasası, armut kasası ve portakal kasası şeklinde üç farklı meyve kasası vardır. Tartının ekranı bozulduğu için kasalar tek başına tartılamamaktadır. Ancak tartıya iki kasa birlikte konduğunda ağırlık doğru bir şekilde ölçülmektedir.

Her kasanın ağırlığı birbirinden farklıdır.

- Elma kasası ile armut kasası birlikte tartıldığında 48 kg gelmektedir.
- Elma kasası ile portakal kasası birlikte tartıldığında 52 kg gelmektedir.
- Armut kasası ile portakal kasası birlikte tartıldığında 46 kg gelmektedir.

Buna göre her bir kasanın ağırlıklarını büyükten küçüğe doğru sıralayınız.

6. Aşağıdaki ifadelerin doğru (D) veya yanlış (Y) olduğunu tabloda belirtiniz.

İFADE	D / Y
Doğal sayılar kümesi, toplama işlemine göre kapalıdır.	
Tam sayılar kümesi, çıkarma işlemine göre kapalı değildir.	
Rasyonel sayılar kümesi, çarpma işlemine göre kapalıdır.	
İrrasyonel sayılar kümesi, toplama işlemine göre kapalı değildir.	
Tam sayılar kümesi, bölme işlemine göre kapalıdır.	
Rasyonel sayılar kümesi; sıfıra bölme hariç, bölme işlemine göre kapalıdır.	
Doğal sayılarda çıkarma işleminin sonucu her zaman bir doğal sayıdır.	
Gerçek sayılar kümesi, toplama ve çarpma işlemine göre kapalıdır.	
Bir irrasyonel sayının karekökü her zaman irrasyoneldir.	

GERİ BİLDİRİM

Bu geri bildirim sayesinde kendi cevabınızı kontrol edebilir, hatalarınızı düzelterek öğrenmenizi pekiştirebilirsiniz.

ÇÖZÜM 1.

$$\frac{x-2}{3} > \frac{2x+4}{7}$$

Paydaları kaldırmak için her iki tarafı 21 ile çarpalım.

$7(x - 2) > 3(2x + 4)$

Parantezleri açalım.

$7x - 14 > 6x + 12$

$x > 26$

Bu durumda x in alacağı en küçük tam sayı değeri 27'dir.

ÇÖZÜM 2.

Ömer 4 farklı defter aldığına göre aldığı tüm defterlerin adı A, B, C ve D dir. O hâlde

$A + B + C + D = 17 + 22 + 14 + D = 53 + D$

Verilen koşul: $65 < \text{Toplam} < 120$

$65 < 53 + D < 120$

Her iki taraftan 53 çıkaralım.

$65 - 53 < D < 120 - 53$

$12 < D < 67$ olur.

ÇÖZÜM 3.

$x + y + 2 = 0$ ise buradan $y = -x - 2$ olur.

Eşitsizlikte y yerine $-x - 2$ yazacak olursak

$-5 < -x - 2 < 4$ elde edilir. Eşitsizliğin her tarafına 2 eklersek

$-3 < -x < 6$ olur. Eşitsizliğin her tarafını -1 ile çarpalım.

$3 > x > -6$ elde edilir.

x'in alacağı tam sayı değerlerini toplayalım.

$2 + 1 + 0 + (-1) + (-2) + (-3) + (-4) + (-5) = -12$'dir.

ÇÖZÜM 4.

Kalemin fiyatı: a

Kitabın fiyatı: b

Defterin fiyatı: c diyelim.

O hâlde

$2a + 2b + 3c < a + 3b + 3c < a + 2b + 4c$ olur.

Burada her iki eşitsizliği ayrı ayrı çözelim.

$2a + 2b + 3c < a + 3b + 3c$ eşitsizliğinde

$a < b$ olur.

$a + 3b + 3c < a + 2b + 4c$ eşitsizliğinde ise

$b < c$ olur.

Bu durumda $a < b < c$ olur.

ÇÖZÜM 5.

Elma kasasının ağırlığı e kg olsun.

Portakal kasasının ağırlığı p kg olsun.

Armut kasasının ağırlığı a kg olsun.

$e + a = 48$

$e + p = 52$

$a + p = 46$ olur. Taraf tarafa toplandığında

$2a + 2p + 2e = 146$ buradan $a + p + e = 73$ olur.

O hâlde $a = 73 - 52 = 21$ kg

$e = 73 - 46 = 27$ kg

$p = 73 - 48 = 25$ kg'dır.

Bu durumda $a < p < e$ dir.

ÇÖZÜM 6.

İFADE	D / Y
Doğal sayılar kümesi, toplama işlemine göre kapalıdır.	D
Tam sayılar kümesi, çıkarma işlemine göre kapalı değildir.	Y
Rasyonel sayılar kümesi, çarpma işlemine göre kapalıdır.	D
İrrasyonel sayılar kümesi, toplama işlemine göre kapalı değildir.	D
Tam sayılar kümesi, bölme işlemine göre kapalıdır.	Y
Rasyonel sayılar kümesi; sıfıra bölme hariç, bölme işlemine göre kapalıdır.	D
Doğal sayılarda çıkarma işleminin sonucu her zaman bir doğal sayıdır.	Y
Gerçek sayılar kümesi, toplama ve çarpma işlemine göre kapalıdır.	D
Bir irrasyonel sayının karekökü her zaman irrasyoneldir.	D

ÖĞRENDİKLERİM

Amaç: Bu bölümde öğrendiklerinizi özetlemenizi, günlük hayatta ve farklı derslerde kullanabileceğiniz bilgileri belirlemenizi amaçlıyoruz.

Verilen bilgileri dikkatle okuyunuz. Temanın temel kavramlarını, önemli noktalarını ve bağlantılarını gözden geçirerek öğrenmenizi pekiştiriniz.

Sayı Kümeleri

Bir sayı birden fazla kümeye ait olabilir.

Örneğin:

- -12 tam sayıdır ($\mathbb{Z}$) ancak doğal sayı değildir.
- π gerçek sayıdır ($\mathbb{R}$) fakat rasyonel sayı değildir.

Kümeler arası ilişki: $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Kapalılık Özelliği

Bir kümedeki herhangi iki eleman bir işleme girdiğinde elde edilen sonuç yine aynı kümenin elemanı ise bu küme o işleme göre kapalıdır.

Örneğin,

$2 + 5 = 7 \in \mathbb{N}$

$2 - 5 = -3 \notin \mathbb{N}$

Doğal sayılar kümesi çıkarma işlemine göre kapalı değildir.

Arada Olma Özelliği

Doğal Sayılar

İki ardışık doğal sayı arasında başka doğal sayı yoktur. Örneğin 3 ile 4 arasında doğal sayı yoktur.

Tam Sayılar

0 ile 1 veya -2 ile -1 arasında tam sayı yoktur.

Rasyonel Sayılar

İki farklı rasyonel sayı arasında her zaman başka bir rasyonel sayı vardır.

Gerçek Sayılar

İki gerçek sayı arasında **sonsuz sayıda** gerçek sayı vardır.

Hatırlatma: $a < b$ ise $\frac{(a+b)}{2}$ mutlaka aradadır.

Sıralama Özelliği

Sözel İfadeler:

- Her sayı kendisine eşit ya da küçüktür.
- İki farklı sayıdan biri mutlaka diğerinden küçüktür.
- a ≤ b ve b ≤ c ise a ≤ c dir.
- Eşitsizliğin her iki tarafına aynı sayı eklenip çıkarılabilir.
- Pozitif sayı ile çarpılırsa yön korunur.
- Negatif sayı ile çarpılırsa yön değişir.

Hatırlatma (0 ile çarpma): Eşitsizlikte yön değişimi çarpılan sayının işaretine bağlıdır. 0 ile çarpıldığında iki taraf da 0 olur ve eşitsizlik anlamını kaybeder.

Günlük Hayat Bağlantısı

Sayılar günlük hayatta birçok durumu modellemek için kullanılır:

Yükseklik – Deniz Seviyesi Modeli

- Deniz seviyesinin altı → **negatif sayılar**
- Deniz seviyesi → **0**
- Deniz seviyesinin üstü → **pozitif sayılar**

Örnek: −5 m < 0 m < 2150 m

Bu model, tam sayıların sıralama ve arada olma özelliklerini gösterir. Ayrıca −5 ile 0 arasında −2 gibi başka sayılar da vardır (arada olma).

Bütçe – Borç ve Alacak

- −300 TL → borç
- 0 TL → başa baş
- +450 TL → kâr

Örnek: −300 < 0 < 450

Borçtan kâra geçişte arada birçok ara değer vardır (örneğin −150 TL).

Genel Sonuç

Günlük hayattaki yükseklik, sıcaklık, para, üretim, zaman gibi kavramlar;

- **negatif, sıfır ve pozitif sayılarla modellenir,**
- **eşitsizliklerle karşılaştırılır,**
- ve iki değer arasında çoğu zaman **ara değerler (arada olma özelliği)** bulunur.

Bu sayede sayı kümeleri yalnızca soyut kavramlar değil, gerçek yaşamı anlamlandırmamızı sağlayan modellerdir.

Sıcaklık

- −8°C (donma noktasının altı)
- 0°C (donma noktası)
- 12°C (pozitif sıcaklık)

Örnek eşitsizlik: $-8 < 0 < 12$

İki sıcaklık arasında sonsuz ara değer bulunabilir (örneğin −2,5°C).

Üretim / Değişim Miktarı

Bir fabrikanın üretim değişimi:

- −20 → üretim azaldı
- 0 → değişim yok
- +35 → üretim arttı

Burada da negatif, sıfır ve pozitif kavramları gerçek durumu modellemektedir.

Zaman Farkı

Bir sınava:

- –10 dakika → geç kalma
- 0 → tam zamanında
- +5 dakika → erken gelme

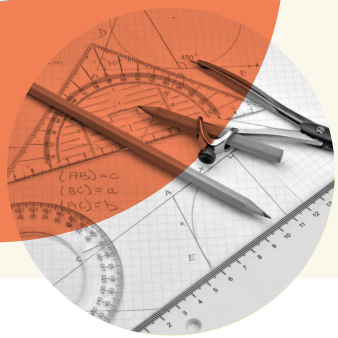
Bu durum da sayı doğrusunda sıralama ile gösterilebilir.

Genel Değerlendirme

Bu ünitede;

- Sayı kümelerinin özelliklerini,
- Kapalılık durumlarını,
- Arada olma (yoğunluk) özelliğini,
- Sıralama kurallarını,
- Eşitsizliklerde dikkat edilmesi gereken durumları (özellikle negatif ve 0 ile çarpma durumlarını) örnekler ve karşıt örnekler üzerinden öğrendim.

Daha fazlası için karekodu okutunuz.



İŞLEM ÖZELLİKLERİ VE CEBİRSEL GÖSTERİM

BAŞLARKEN

Sevgili öğrencimiz, bu çalışma kartında bireysel öğrenme yolculuğunuza destek sunmak amaçlanmaktadır. Çalışmalarınızı yürütürken "Hazırlanıyorum", "İlişkilendiriyorum", "Uygulayarak Öğreniyorum", "Değerlendiriyorum" bölümlerini sırası ile yapmanızı; her bölüm ve etkinlik sonundaki geri bildirimleri alarak ilerlemenizi; "Öğrendiklerim" bölümünde öğrenme sürecinizi gözden geçirmenizi bekliyoruz.
Bu çalışma kartında sayı kümelerini özellikleri bakımından karşılaştırarak gerçek sayıları anlamlandırabilecek ve analojik akıl yürüterek gerçek sayıların işlem özelliklerini genelleyebileceksiniz. Ayrıca sözel dille verilen önermeleri sembolik dille, sembolik dille verilen önermeleri sözel dille ifade edebileceksiniz.

HAZIRLANIYORUM

Amaç: Bu bölümde ön bilgilerinizi hatırlamanızı ve temaya hazırlıklı hâle gelmenizi amaçlıyoruz.

Aşağıda yer alan ifadeler, bu temada tamamlanması hedeflenen öğrenme çıktısını ele almadan önce sahip olmanız gereken bazı temel becerileri içermektedir

- Eğer ifadedeki bilgiye hakim olduğunuzu düşünüyorsanız kutucuğu işaretleyiniz.
- Eğer konuyu henüz tam olarak bilmediğinizi ya da hatırlamadığınızı düşünüyorsanız kutucuğu boş bırakınız.

SORULAR	ÖN ÖĞRENME KONTROL LİSTESİ	
1	Rasyonel sayılarda toplama işleminin değişme özelliğini bilirim.	
2	Rasyonel sayılarda toplama işleminin birleşme özelliğini bilirim.	
3	Rasyonel sayılarda toplama işleminin birim eleman özelliğini bilirim.	
4	Rasyonel sayılarda çarpma işleminin değişme özelliğini bilirim.	
5	Rasyonel sayılarda çarpma işleminin birleşme özelliğini bilirim.	
6	Rasyonel sayılarda çarpma işleminin birim eleman özelliğini bilirim.	
7	Rasyonel sayılarda çarpma işleminin yutan eleman özelliğini bilirim.	
8	Rasyonel sayılarda çarpma işleminin toplama ve çıkarma işlemleri üzerine dağılma özelliğini bilirim.	
9	Cebirsel ifadeleri belirleyip bunlarla işlemler yapabilirim.	

"Ön Öğrenme Kontrol Listesi"ni doldurduktan sonra aşağıda verilen "Kontrol Noktası" sorularını çözünüz ve cevaplarınızı kontrol ediniz.

KONTROL NOKTASI

SORU 1.

a) $\frac{2}{7}+\frac{4}{11}=\frac{4}{11}+$ **a olduğuna göre toplama işleminin değişme özelliğini kulanarak a yı bulunuz.**

b) $\frac{2}{9}+(\frac{5}{13}+\frac{3}{7})=(\frac{2}{9}+a)+\frac{3}{7}$ **olduğuna göre toplama işleminin birleşme özelliğini kulanarak a yı bulunuz.**

c) **(–4) + a = a + (–4) = (–4) olduğuna göre toplama işleminin birim eleman özelliğini kulanarak a yı bulunuz.**

d) $\frac{4}{5}\cdot 6=6\cdot a$ **olduğuna göre çarpma işleminin değişme özelliğini kulanarak a yı bulunuz.**

e) **53 · ((–34) · 12) = (53 · (–34)) · a olduğuna göre çarpma işleminin birleşme özelliğini kulanarak a yı bulunuz.**

f) $\frac{6}{11}\cdot a=a\cdot\frac{6}{11}=\frac{6}{11}$ **olduğuna göre çarpma işleminin birim eleman özelliğini kulanarak a yı bulunuz.**

g) **5 · a = a · 5 = 0 olduğuna göre çarpma işleminin yutan eleman özelliğini kulanarak a yı bulunuz.**

SORU 2. Bir spor mağazasında futbol topları 400 TL, basketbol topları 600 TL'dir.

Bu mağazadan üçer adet futbol ve basketbol topu almak isteyen bir kişinin ödeyeceği ücreti, çarpma işleminin toplama işlemi üzerine dağılma özelliğini kullanarak hesaplayınız.

SORU 3. Bir kantinde simit fiyatı x TL, çay fiyatı y TL'dir. Ali kantinden 3 simit ve 2 çay, Banu ise 4 simit ve 1 çay almıştır.

Buna göre bu iki öğrencinin TL cinsinden ödedikleri toplam parayı cebirsel olarak ifade ediniz.

GERİ BİLDİRİM

Bu geri bildirim sayesinde kendi cevabınızı kontrol edebilir, hatalarınızı düzelterek öğrenmenizi pekiştirebilirsiniz.

ÇÖZÜM 1.

a) Rasyonel sayılarda toplama işlemi yapılırken toplanan rasyonel sayıların yerlerinin değişmesi işlemin sonucunu değiştirmez. (Değişme özelliği)

Toplama işleminin değişme özelliği gereği $\frac{2}{7}+\frac{4}{11}=\frac{4}{11}+\frac{2}{7}$ olduğundan a = $\frac{2}{7}$ olur.

b) En az üç rasyonel sayı ile toplama işlemi yapılırken hangi iki rasyonel sayının önce toplandığının işlemin sonucuna etkisi yoktur. (Birleşme özelliği)

Toplama işleminin birleşme özelliği gereği $\frac{2}{9}+(\frac{5}{13}+\frac{3}{7})=(\frac{2}{9}+\frac{5}{13})+\frac{3}{7}$ olduğundan a = $\frac{5}{13}$ olur.

c) Bir rasyonel sayı 0 ile toplandığında sonuç kendisine eşit olur. 0 sayısı rasyonel sayılarda toplama işleminin etkisiz elemanıdır. (Etkisiz eleman özelliği)

Toplama işleminin etkisiz eleman özelliği gereği (–4) + 0 = 0 + (–4) = (–4) olduğundan a = 0 olur.

d) Rasyonel sayılarla çarpma işlemi yapılırken çarpanların yerlerinin değişmesi işlemin sonucunu değiştirmez. (Değişme özelliği)

Rasyonel sayılarda çarpma işleminin değişme özelliği gereği $\frac{4}{5}\cdot 6=6\cdot\frac{4}{5}$ olduğundan a = $\frac{4}{5}$ olur.

e) En az üç rasyonel sayı ile çarpma işlemi yapılırken hangi iki rasyonel sayının önce çarpıldığının işlemin sonucuna etkisi yoktur. (Birleşme özelliği)

Rasyonel sayılarda çarpma işleminin birleşme özelliği gereği $53 \cdot ((-34) \cdot 12) = (53 \cdot (-34)) \cdot 12$ olduğundan a = 12 olur.

f) Bir rasyonel sayı, 1 ile çarpıldığında sonuç kendisine eşit olur. 1 sayısı çarpma işleminin etkisiz elemanıdır. (Etkisiz eleman özelliği)

$\frac{6}{11} \cdot 1 = 1 \cdot \frac{6}{11} = \frac{6}{11}$ olduğundan a = 1 olur.

g) Bir rasyonel sayı 0 ile çarpıldığında sonuç 0 olur. 0 çarpma işleminin yutan elemanıdır. (Yutan eleman özelliği)

Rasyonel sayılarda çarpma işleminin yutan eleman özelliği gereği $5 \cdot a = a \cdot 5 = 0$ eşitliğinde a = 0 olmalıdır.

ÇÖZÜM 2.

Rasyonel sayılarda çarpma işleminin toplama ve çıkarma işlemi üzerine dağılma özelliği vardır. (Dağılma özelliği)

Rasyonel sayılarda çarpma işleminin toplama işlemi üzerine dağılma özelliğinden

$$\begin{aligned} 3 \cdot (400 + 600) &= 3 \cdot 400 + 3 \cdot 600 \\ &= 1200 + 1800 \\ &= 3000 \text{ TL olur.} \end{aligned}$$

ÇÖZÜM 3.

Ali: 3 simit + 2 çay = (3x + 2y) TL

Banu: 4 simit + 1 çay = (4x + y) TL

TOPLAM: 3x + 2y + 4x + y = (7x + 3y) TL

İLİŞKİLENDİRİYORUM

Amaç: Bu bölümde yeni öğreneceğiniz temayı; zihninizde var olan bilgileriniz, yaşantılarınız ve diğer derslerde öğrendiklerinizle ilişkilendirmenizi bekliyoruz.

- Tabloda verilen ifadelerin doğruluk veya yanlışlık durumları hakkında kesin bir hükme varmak mümkün müdür? Cevabınızı "Doğru" ya da "Yanlış" olarak tablo üzerinde belirtiniz.
- Tablodaki cevaplarınız ile ifadelerin açıklamalarını karşılaştırarak önerme kavramı ile ilgili fikirlerinizi oluşturunuz.

İfadeler	Doğru	Yanlış
Üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamı 180°dir.		
5 asal sayı değildir.		
x i 5 ile topla.		
2 + 3 = 5 ifadesi doğru mudur?		
10^{-20} küçük bir sayıdır.		

İfadeler	Açıklamalar
Üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamı 180°dir.	Kesinlikle doğrudur. İfadenin doğruluk veya yanlışlık durumu değişmez.
5 asal sayı değildir.	Kesinlikle yanlıştır. İfadenin doğruluk veya yanlışlık durumu değişmez.
x i 5 ile topla.	Bir emir cümlesidir. İfadenin doğruluk veya yanlışlık durumu belirlenemez.
2 + 3 = 5 ifadesi doğru mudur?	Bir soru cümlesidir. İfadenin doğruluk veya yanlışlık durumu belirlenemez.
10^{-20} küçük bir sayıdır.	10^{-20} sayısı, 5'ten küçük bir sayıdır fakat 0'dan büyük bir sayıdır. İfadenin doğruluk veya yanlışlık durumu belirlenemez.

Bazı ifadeler kesin bir şekilde doğru ya da yanlış olarak sınıflandırılabilirken bazıları ise belirsizlik taşımaktadır. Matematikte doğruluğu ya da yanlışlığı kesinlikle belirlenebilen ifadelere **önerme** denir. Önermeler, sözel olarak veya sembollerle ifade edilebilir.

UYGULAYARAK ÖĞRENİYORUM

Amaç: Bu bölümde bilgilerinizi etkinlikler ve uygulamalarla pekiştirmenizi, öğrenmeyi daha kalıcı hâle getirmenizi amaçlıyoruz. Adım adım verilen etkinlik basamaklarını uygulayınız. Çalışmanızı dikkatli ve düzenli bir şekilde yapınız.

ÖNERME KAVRAMI

ÖRNEK

Aşağıdaki tabloda bazı matematiksel ifadeler verilmiştir.
Verilen ifadelerin doğru ya da yanlış olma durumlarını belirleyerek tabloyu doldurunuz.

Önermenin Sözel İfadesi	Önermenin Sembolik İfadesi	Doğru/Yanlış
İki ile üçün toplamı beştir.	$2 + 3 = 5$	D
Beşin karesi, üçün karesi ile ikinin karesinin çarpımına eşittir.		
Dört ikiye bölünürse sonuç sekiz olur.		
Yedinin küpü kendisinden büyüktür.		

ÇÖZÜM

Önermenin Sözel İfadesi	Önermenin Sembolik İfadesi	Doğru/Yanlış
İki ile üçün toplamı beştir.	$2 + 3 = 5$	D
Beşin karesi, üçün karesi ile ikinin karesinin çarpımına eşittir.	$5^2 = 3^2 \cdot 2^2$	Y
Dört ikiye bölünürse sonuç sekiz olur.	$4 : 2 = 8$	Y
Yedinin küpü kendisinden büyüktür.	$7^3 > 7$	D

NOT

Kesin doğru ya da kesin yanlış hüküm bildiren ifadelere **önerme** denir. Önermeler, sözel olarak veya sembollerle ifade edilebilir. Bir önermenin hükmü değiştirilerek elde edilen önermeye o **önermenin değili** (olumsuzu) denir.

SIRA SİZDE 1.

Ali, Banu ve Can adlı üç öğrenci, sözel olarak verilen önermeleri sembolik dile çevirip doğruluk değerlerini belirlemiştir.

Buna göre hangi öğrencilerin cevapları doğrudur?

Öğrenci	Önermenin Sözel İfadesi	Sembolik yazılım	Doğru/Yanlış
Ali	4 ile 7'nin toplamı 11'e eşittir.	$4 + 7 = 11$	D
Banu	2'nin -3'üncü kuvveti $\frac{1}{8}$'e eşittir.	$2^{-3} = \frac{1}{8}$	D
Can	4'ün karekökü 2'ye eşittir.	$\sqrt{4} = 2$	D

NİCELEYİCİLER VE MANTIK BAĞLAÇLARI

Sözel olarak ifade edilmiş önermeler, sembolik dille de ifade edilebilir. Sembolik dil, matematiksel ifadelerin standartlaştırılması için önemlidir. Birden fazla önermeyi sembolik dille ifade etmek istersek bunu nasıl yapabiliriz?

İşte burada devreye mantık bağlaçları giriyor. Aşağıdaki tabloda önermeleri sembolik dille ifade ederken kullandığımız niceleyiciler ve mantık bağlaçları anlamları ile birlikte verilmiştir.

MATEMATİKSEL SEMBOLLERİN ANLAMLARI

	Niceleyiciler		Mantık Bağlaçları				
Sembol	$\forall$	$\exists$	$\vee$	$\wedge$	$\veebar$	$\Rightarrow$	$\Leftrightarrow$
Anlamı	her	bazı (en az bir)	veya	ve	ya da	ise	ancak ve ancak

ÖRNEK

Aşağıdaki tabloda bazı matematiksel ifadeler verilmiştir. Tabloda boş bırakılan bölümleri örnekteki gibi doldurunuz.

Önermenin Sözel İfadesi	Önermenin Sembolik İfadesi	Niceleyiciler/Mantık Bağlaçları
Her gerçek sayının karesi kendisinden büyüktür.	$\forall a \in \mathbb{R}, a^2 > a$	$\forall$
	$\exists x \in \mathbb{Z}, -3 < x < 7$	
2, bir tek sayıdır **veya** pozitif tam sayıdır.		
	$5 \in \mathbb{Q} \wedge 5 < 0$	
Bir açı, geniş açı **ya da** dar açıdır.		

ÇÖZÜM

Önermenin Sözel İfadesi	Önermenin Sembolik İfadesi	Niceleyiciler/Mantık Bağlaçları
Her gerçek sayının karesi kendisinden büyüktür.	$\forall a \in \mathbb{R}, a^2 > a$	$\forall$
–3 ile 7 arasında en az bir tam sayı vardır.	$\exists x \in \mathbb{Z}, -3 < x < 7$	$\exists$
2, bir tek sayıdır **veya** pozitif tam sayıdır.	$n \in \mathbb{Z},\ 2 = 2n + 1\ \vee\ 2 \in \mathbb{Z}^+$	$\vee$
5, rasyonel **ve** negatiftir.	$5 \in \mathbb{Q} \wedge 5 < 0$	$\wedge$
Bir açı, geniş açı **ya da** dar açıdır.	$90° < x < 180°\ \veebar\ 0° < x < 90°$	$\veebar$

NOT

$x = 2$ **ise** $2x = 4$ önermesinin sembolik ifadesi $x = 2 \Longrightarrow 2x = 4$'tür.
$x = 2$ ise $2x = 4$ önermesi doğrudur. Çünkü x yerine 2 yazdığımızda eşitliği sağlar.
Şimdi önermenin yönünü değiştirelim.
$2x = 4$ ise $x = 2$ önermesi de doğrudur. Çünkü $2x = 4$ denklemini çözdüğümüzde $x = 2$ olur.
Bir de şu önermeyi düşünelim.
$x = 2$ ise $x^2 = 4$ önermesi doğrudur. x yerine 2 yazdığımızda eşitliği sağlar.
Fakat $x^2 = 4$ ise $x = 2$ veya $x = -2$ olmalıdır.

İki önerme örneğini karşılaştırdığımızda $x = 2$ ise $2x = 4$ önermesinde bağlaç ancak ve ancak olmalıdır.
$x = 2 \Longleftrightarrow 2x = 4$ şeklinde yazılır. Yani $2x = 4$ olabilmesi için x in 2 olması gerekli ve yeterli şarttır.

Ama $x = 2 \Longrightarrow x^2 = 4$ önermesi ancak ve ancak bağlacıyla yazılamaz.

Bu önermede $x^2 = 4$ olabilmesi için x in 2 olması gerekli bir şart değil yeterli bir şarttır.

Yani $p \Longrightarrow q$ önermesinde q önermesinin doğru olması için p önermesi **gerekli ve yeterli bir şart** ise $p \Longleftrightarrow q$ olur.

Sözel olarak verilen "Üslü ifadelerden üsleri eşit olanlar çarpılırken tabanlar çarpılır, ortak üs aynen yazılır." ifadesi, matematiksel semboller kullanılarak $a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$ biçiminde yazılır. Matematikte kavramlar, özellikler ve işlemler sonucunda elde edilen ifadeler; sözel ya da sembolik olarak ifade edilebilir. Sözel ifadeler sembollerle, sembolik ifadeler de sözcüklerle yazılabilir.

SIRA SİZDE 2.

Aşağıda sözel olarak verilen önermeleri sembolik dille verilen yazımları ile eşleştirin.

I.	Sıfırdan farklı her gerçek sayının karesi pozitiftir.
II.	Birbirinden farklı gerçek sayıların farkı sıfırdan farklıdır.
III.	a ve b birer gerçek sayı olmak üzere a ve b nin çarpımı ancak ve ancak a veya b sayıları sıfıra eşitse sıfırdır.
IV.	a gerçek sayısı, sıfıra eşit veya sıfırdan küçük ve sıfıra eşit veya sıfırdan büyükse a sıfıra eşittir.
V.	a ve b gerçek sayılarının çarpımı negatifse a ya da b negatiftir.

A.	$\forall a, b \in \mathbb{R}, a \neq b$ için $a - b \neq 0$
B.	$\forall a, b \in \mathbb{R}, a \cdot b < 0 \Rightarrow (a < 0 \ \underline{\vee}\ b < 0)$
C.	$\forall a \in \mathbb{R}, a \neq 0$ için $a^2 > 0$
D.	$\forall a, b \in \mathbb{R}, a \cdot b = 0 \Longleftrightarrow (a = 0 \vee b = 0)$
E.	$\forall a \in \mathbb{R}, \ (a \leq 0 \ \wedge\ a \geq 0) \Rightarrow a = 0$
F.	$\forall a, b \in R, a^2 + b^2 = 0 \Rightarrow a + b = 0$

NOT

Bir önermenin hükmü değiştirilerek elde edilen önermeye o **önermenin değili** denir. Aşağıdaki tablolarda önermenin değili alınırken sembol, mantık bağlaçları ve niceleyicilerin dönüşümleri gösterilmiştir.

Sembol	$=$	$\neq$	$\in$	$\notin$	$<$	$>$	$\leq$	$\geq$
Sembolün Dönüşümü	$\neq$	$=$	$\notin$	$\in$	$\geq$	$\leq$	$>$	$<$

Sembol	∀	∃	∨	∧
Bağlaç veya Niceleyicilerin Dönüşümü	∃	∀	∧	∨

ÖRNEK

Tabloda verilen önermelerin değillerini yazınız.

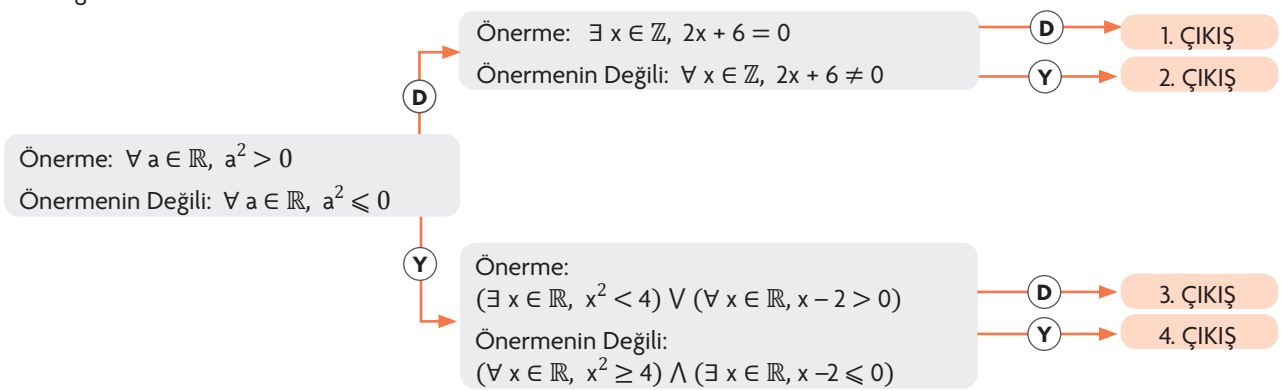
Önerme	Önermenin Değili
$\forall a \in \mathbb{R},\ a > 0$	
$\exists a \in \mathbb{Z},\ -3 < a < 7$	
$\exists x \in \mathbb{N},\ 3x - 6 = 0$	
$\forall a, b \in \mathbb{N},\ a - b \in \mathbb{N}$	

ÇÖZÜM

Önerme	Önermenin Değili
$\forall a \in \mathbb{R},\ a > 0$	$\exists a \in \mathbb{R},\ a \leq 0$
$\exists a \in \mathbb{Z},\ -3 < a < 7$	$\forall a \in \mathbb{Z},\ -3 \geq a \geq 7$
$\exists x \in \mathbb{N},\ 3x - 6 = 0$	$\forall x \in \mathbb{N},\ 3x - 6 \neq 0$
$\forall a, b \in \mathbb{N},\ a - b \in \mathbb{N}$	$\exists a, b \in \mathbb{N},\ a - b \notin \mathbb{N}$

SIRA SİZDE 3.

Aşağıda "Önermeler ve Değilleri" ile ilgili "Doğru (D)/Yanlış(Y)" denklikleri içeren tanılayıcı dallanmış ağaç verilmiştir. Verilen önermenin değilinin doğru yazıldığını düşünüyorsanız "D" seçeneğini, yanlış olduğunu düşünüyorsanız "Y" seçeneğini seçmeniz gerekmektedir.



Buna göre hangi çıkışa ulaşmanız gerekir?

SAYI KÜMELERİNİN İŞLEM ÖZELLİKLERİ

ÖRNEK

İşlemlerin sonuçlarını bulunuz. Verilen özelliği ve özelliğin sembolik gösterimini örnekte verildiği gibi yazınız.

İşlemler	Özellik	Sembol
$2\sqrt{5} + (-4\sqrt{5}) = \ldots$ $(-4\sqrt{5}) + 2\sqrt{5} = \ldots$	Toplama işleminin değişme özelliği	$\forall a, b \in \mathbb{R}, a + b = b + a$
$-\frac{1}{2} \cdot 7 = \ldots$ $7 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \ldots$		
$2{,}1 + (0{,}7 + 1{,}3) = \ldots$ $(2{,}1 + 0{,}7) + 1{,}3 = \ldots$		
$2\sqrt{3} \cdot \left(5\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{3}\right) = \ldots$ $\left(2\sqrt{3} \cdot 5\sqrt{3}\right) \cdot 4\sqrt{3} = \ldots$		
$\ldots + 7 = 7$ $7 + \ldots = 7$		
$-\frac{1}{2} \cdot \ldots = -\frac{1}{2}$ $\ldots \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$		
$2\sqrt{3} + \left(-2\sqrt{3}\right) = \ldots$ $\left(-2\sqrt{3}\right) + 2\sqrt{3} = \ldots$		
$4 \cdot \frac{1}{4} = \ldots$ $\frac{1}{4} \cdot 4 = \ldots$		
$2\sqrt{5} \cdot 0 = \ldots$ $0 \cdot 2\sqrt{5} = \ldots$		

ÇÖZÜM

İşlemler	Özellik	Sembol
$2\sqrt{5} + (-4\sqrt{5}) = -2\sqrt{5}$ $(-4\sqrt{5}) + 2\sqrt{5} = -2\sqrt{5}$	Toplama işleminin değişme özelliği	$\forall a, b \in \mathbb{R}, a + b = b + a$
$-\frac{1}{2} \cdot 7 = -\frac{7}{2}$ $7 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{7}{2}$	Çarpma işleminin değişme özelliği	$\forall a, b \in \mathbb{R}, a \cdot b = b \cdot a$
$2,1 + (0,7 + 1,3) = 4,1$ $(2,1 + 0,7) + 1,3 = 4,1$	Toplama işleminin birleşme özelliği	$\forall a, b, c \in \mathbb{R}, \ a + (b + c) = (a + b) + c$
$2\sqrt{3} \cdot \left(5\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{3}\right) = 120\sqrt{3}$ $\left(2\sqrt{3} \cdot 5\sqrt{3}\right) \cdot 4\sqrt{3} = 120\sqrt{3}$	Çarpma işleminin birleşme özelliği	$\forall a, b, c \in \mathbb{R}, \ a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
$0 + 7 = 7$ $7 + 0 = 7$	Toplama işleminin etkisiz eleman özelliği	$\forall a \in \mathbb{R}, a + 0 = 0 + a = a$
$-\frac{1}{2} \cdot 1 = -\frac{1}{2}$ $1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$	Çarpma işleminin etkisiz eleman özelliği	$\forall a \in \mathbb{R}, a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$
$2\sqrt{3} + \left(-2\sqrt{3}\right) = 0$ $\left(-2\sqrt{3}\right) + 2\sqrt{3} = 0$	Toplama işleminin ters eleman özelliği	$\forall a \in \mathbb{R}, a + (-a) = (-a) + a = 0$
$4 \cdot \frac{1}{4} = 1$ $\frac{1}{4} \cdot 4 = 1$	Çarpma işleminin ters eleman özelliği	$\forall a \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0, \ a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$
$2\sqrt{5} \cdot 0 = 0$ $0 \cdot 2\sqrt{5} = 0$	Çarpma işleminin yutan eleman özelliği	$\forall a \in \mathbb{R}, \ a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$

SIRA SİZDE 4.

Aşağıda verilen çarpma işlemi örneklerinin her biri bir özelliği göstermektedir.

1.	$17 \cdot 0 = 0$
2.	$-13 \cdot 1 = -13$
3.	$4 \cdot 3 = 3 \cdot 4$
4.	$6 \cdot (2 + 3) = 6 \cdot 2 + 6 \cdot 3$

A)	Değişme özelliği
B)	Çarpma işleminin toplama işlemi üzerine dağılma özelliği
C)	Yutan eleman
D)	Etkisiz eleman

Buna göre örnekler ile çarpma işleminin özelliklerini eşleştiriniz.

1. - ... 2. - ... 3. - ... 4. - ...

NOT

- Değişme Özelliği: $\forall a, b \in \mathbb{R}$ için $a + b = b + a$ ve $a \cdot b = b \cdot a$ olur.
- Birleşme Özelliği: $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ için $a + (b + c) = (a + b) + c$ ve $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ olur.
- Birim Eleman: $\forall a \in \mathbb{R}$ için $a + 0 = 0 + a = a$ ve $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ olur. Toplama işleminin birim elemanı 0, çarpma işleminin birim elemanı 1'dir.
- Ters Eleman: $\forall a \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$ için
  - $a + (-a) = (-a) + a = 0$ olduğundan a nın toplama işlemine göre tersi $-a$ olur.
  - $a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$ olduğundan a nın çarpma işlemine göre tersi $\frac{1}{a}$ olur.
- Yutan Eleman: $\forall a \in \mathbb{R}$ için $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$ olduğundan çarpma işleminin yutan elemanı 0'dır.
- Çarpma işleminin toplama işlemi üzerine dağılma özelliği: $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ için
  - $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ ve $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$ olur.
- Çarpma işleminin çıkarma işlemi üzerine dağılma özelliği: $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ için
  - $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$ ve $(b - c) \cdot a = b \cdot a - c \cdot a$ olur.
- Gerçek sayılarda toplama, çıkarma ve bölme işlemlerinin yutan elemanı yoktur.
- Gerçek sayılarda çıkarma ve bölme işlemlerinin değişme özelliği, birleşme özelliği, birim elemanı ve ters elemanı yoktur.

ÖRNEK

"Her tek doğal sayının karesinin 4 ile bölümünden kalan 1'dir." önermesi veriliyor.

a) Önermeyi matematiksel sembol kullanarak yazınız.

b) Önermenin cebirsel ispatını yapınız.

ÇÖZÜM

a) $\forall x \in \mathbb{N}$, x tek sayı $\Rightarrow x^2 = 4k + 1, k \in \mathbb{N}$

b) **Hipotez:** x tek sayıdır.

Hüküm: x^2 sayısının 4 ile bölümünden kalan 1'dir.

İspat: x tek doğal sayı olduğundan $\exists a \in \mathbb{N}$, $x = 2a + 1$ olur.

$x^2 = (2a + 1)^2$

$x^2 = 4a^2 + 4a + 1$

$x^2 = 4(a^2 + a) + 1$ elde edilir.

$\forall a \in \mathbb{N}$ için $4(a^2 + a)$ ifadesi 4'ün katı olduğundan bu sayıya 1 eklenmesiyle elde edilen $x^2 = 4(a^2 + a) + 1$ ifadesinin 4 ile bölümünden kalan 1'dir.

SIRA SİZDE 5.

"Her çift tam sayının karesi de çift tam sayıdır." önermesi veriliyor.

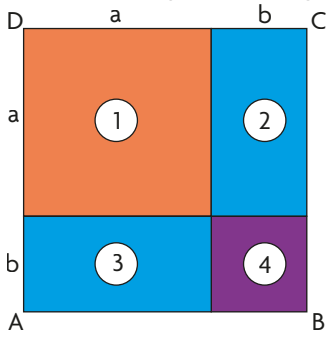
a) Önermeyi matematiksel sembol kullanarak yazınız.

b) Önermenin cebirsel ispatını yapınız.

ÖZDEŞLİKLERİN CEBİRSEL VE GEOMETRİK TEMSİLLERİ

ÖRNEK

Aşağıda bir kenar uzunluğu (a + b) birim olan ABCD karesi verilmiştir. ABCD karesi; 1 ve 4 numaralı bölgeler kare, 2 ve 3 numaralı bölgeler dikdörtgen olacak şekilde dört bölüme ayrılmıştır.



Verilen bilgilere göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

I. ABCD karesinin alanını bulunuz.

II. 1, 2, 3 ve 4 numaralı bölgelerin alanlarını bulunuz.

III. 1, 2, 3 ve 4 numaralı bölgelerin alanları toplamı ile ABCD karesinin alanının eşitliğini cebirsel ifadeyle yazınız.

ÇÖZÜM

I. Karenin bir kenar uzunluğu (a + b) birim olduğuna göre alanı $A(ABCD) = (a + b)^2$ birimkare olur.

II. 1, 2, 3 ve 4 numaralı bölgelerin alanları

(1) $= a^2$ (2) $= a \cdot b$ (3) $= a \cdot b$ (4) $= b^2$

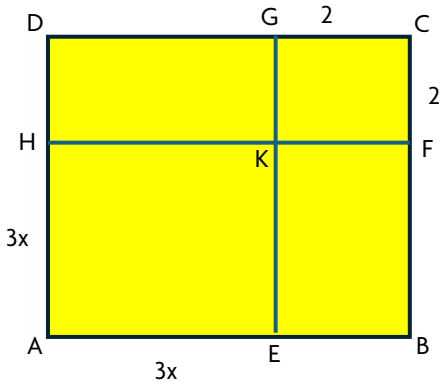
III. ABCD karesinin alanı; 1, 2, 3 ve 4 numaralı bölgelerin alanları toplamına eşittir. Buradan

$(a + b)^2 = a^2 + ab + ab + b^2$

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ özdeşliği elde edilir.

SIRA SİZDE 6.

Aşağıda şekilde verilen ABCD karesi, kenarlarına paralel olan [EG] ve [FH] doğru parçaları yardımıyla 4 bölgeye ayrılmıştır.



$|AH| = |AE| = 3x$ birim

$|CF| = |CG| = 2$ birim

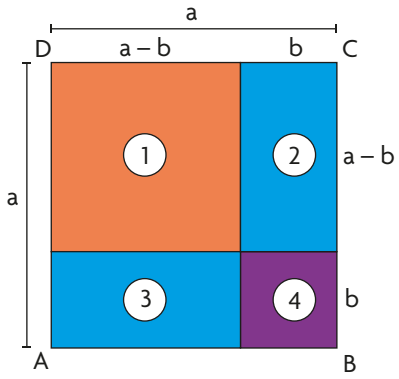
Verilenlere göre ABCD karesinin alanını bulunuz.

SIRA SİZDE 7.

$\sqrt{\frac{9}{16}+\frac{4}{9}+1}$ **işleminin sonucunu hesaplayınız.**

ÖRNEK

Aşağıda bir kenar uzunluğu a birim olan ABCD karesi verilmiştir. ABCD karesi; 1 ve 4 numaralı bölgeler kare, 2 ve 3 numaralı bölgeler dikdörtgen olacak şekilde dört bölüme ayrılmıştır.



Verilen bilgilere göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

I. ABCD karesinin alanını bulunuz.

II. 1, 2, 3 ve 4 numaralı bölgelerin alanlarını bulunuz.

III. 1 numaralı bölgenin alanını; ABCD karesinin ve 2, 3 ve 4 numaralı bölgelerin alanları yardımıyla cebirsel olarak ifade ediniz.

ÇÖZÜM

I. $A(ABCD) = a^2$

II. 1, 2, 3 ve 4 numaralı bölgelerin alanları:

$(1) = (a - b)^2$ $(2) = (a - b) \cdot b = a \cdot b - b^2$ $(3) = (a - b) \cdot b = a \cdot b - b^2$ $(4) = b^2$

III. 1 numaralı bölgenin alanı; ABCD karesinin alanından 2, 3 ve 4 numaralı bölgelerin alanları toplamı çıkarılarak bulunur.

$(a - b)^2 = a^2 - (a \cdot b - b^2 + a \cdot b - b^2 + b^2)$

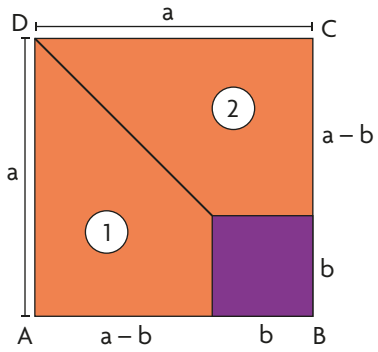
$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ özdeşliği elde edilir.

SIRA SİZDE 8.

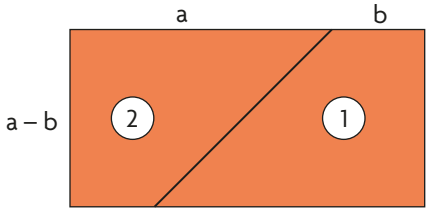
Alanı $(25a^2 - 20a + 4)$ birimkare olan bir karenin çevre uzunluğu 52 birim olduğuna göre a değerini bulunuz.

ÖRNEK

Şekil 1'de bir kenar uzunluğu a birim olan ABCD karesi verilmiştir. ABCD karesinin bir köşesinden bir kenar uzunluğu b birim olan kare şeklindeki bir bölge kesilip atılıyor. Daha sonra kalan turuncu renkli bölgeler Şekil 2'deki gibi birleştirilerek dikdörtgensel bir bölge elde ediliyor.



Şekil 1



Şekil 2

Verilen bilgilere göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

I. Şekil 1'e göre turuncu bölgenin alanını, büyük karenin alanından küçük karenin alanını çıkararak cebirsel yolla ifade ediniz.

II. Şekil 2'deki dikdörtgensel bölgenin alanını cebirsel olarak ifade ediniz.

III. Şekil 1 ve Şekil 2'deki turuncu bölgelerin alanlarının eşitliğini cebirsel olarak yazınız.

ÇÖZÜM

I. Şekil 1'deki turuncu bölgenin alanı, karelerin alanları farkından $a^2 - b^2$ olur.

II. Şekil 2' deki turuncu bölgenin alanı, dikdörtgenin alanından $(a - b) \cdot (a + b)$ olur.

III. Her iki şekilde de turuncu bölgelerin alanı eşit olacağından $a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b)$ özdeşliği elde edilir.

NOT

- Cebirsel ifadelerdeki değişkenlerin alacağı tüm gerçek sayı değerleri için sağlanan eşitliklere **özdeşlik** denir.

Aşağıda bazı özdeşlikler verilmiştir.

- İki terimin toplamının karesi özdeşliği: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- İki terimin farkının karesi özdeşliği: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- İki terimin karelerinin farkı özdeşliği: $a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b)$

SIRA SİZDE 9.

Aşağıdaki ifadelerin özdeşlerini yazınız.

a) $(x + 4)^2$ = ...

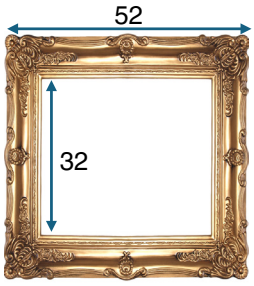
b) $x^2 - 12x + 36$ = ...

c) $x^4 - 81$ = ...

d) $(2x - 3y)^2$ = ...

SIRA SİZDE 10.

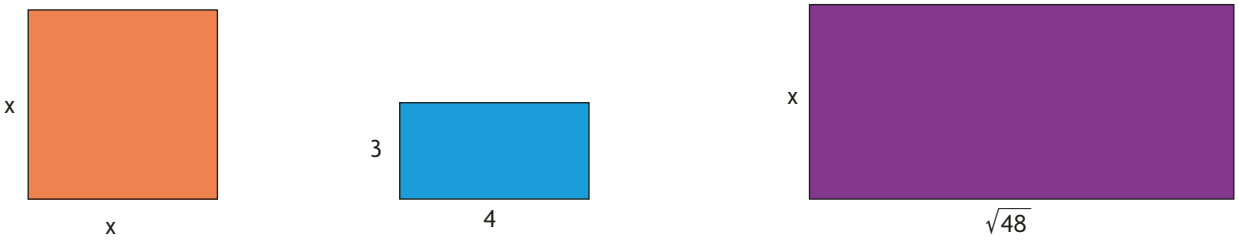
Aşağıda, bir marangozun ürettiği kare şeklindeki ahşap resim çerçevesinin görseli verilmiştir. Çerçevenin dış kenar uzunluğu 52 cm, iç kenar uzunluğu ise 32 cm'dir.



Çerçevede kullanılan ahşabın metrekare maliyeti 2000 TL olduğuna göre kullanılan ahşabın toplam maliyeti kaç TL'dir?

SIRA SİZDE 11.

Aşağıda, kenar uzunluğu x cm ve alanı A cm^2 olan bir kare; alanları B cm^2 ve C cm^2, kenar uzunlukları sırasıyla 3 cm ve 4 cm ile x cm ve $\sqrt{48}$ cm olan iki dikdörtgen verilmiştir.



A = C – B olduğuna göre x değerini bulunuz.

GERİ BİLDİRİM

Bu geri bildirim sayesinde kendi cevabınızı kontrol edebilir, hatalarınızı düzelterek öğrenmenizi pekiştirebilirsiniz.

SIRA SİZDE 1.

ÇÖZÜM

Ali kendisine verilen sözel önermeyi sembolik dille yazarken yanlış yazmış ve buna göre önermenin doğruluk değerini de yanlış bulmuştur. Banu ve Can kendilerine sözel olarak verilen önermeleri sembolik dille doğru yazmış ve doğruluk değerlerini de doğru bulmuşlardır.

SIRA SİZDE 2.

ÇÖZÜM

I $\longleftrightarrow$ C , II $\longleftrightarrow$ A , III $\longleftrightarrow$ D , IV $\longleftrightarrow$ E , V $\longleftrightarrow$ B

SIRA SİZDE 3.

ÇÖZÜM

Önerme: $\forall a \in \mathbb{R},\ a^2 > 0$

Önermenin Değili: $\forall a \in \mathbb{R},\ a^2 \leq 0$

Y

Önerme:
$(\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 < 4) \vee (\forall x \in \mathbb{R},\ x - 2 > 0)$

Önermenin Değili:
$(\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 4) \wedge (\exists x \in \mathbb{R},\ x - 2 \leq 0)$

D → 3. ÇIKIŞ

SIRA SİZDE 4.

ÇÖZÜM

1.	$17 \cdot 0 = 0$	Yutan eleman
2.	$-13 \cdot 1 = -13$	Etkisiz eleman
3.	$4 \cdot 3 = 3 \cdot 4$	Değişme özelliği
4.	$6 \cdot (2 + 3) = 6 \cdot 2 + 6 \cdot 3$	Çarpma işleminin toplama işlemi üzerine dağılma özelliği

1. - C 2. - D 3. - A 4. - B

SIRA SİZDE 5.

ÇÖZÜM

a) $\forall x \in \mathbb{Z},\ x = 2k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x^2 = 2m, m \in \mathbb{Z}$

b) **Hipotez:** x çift sayıdır.

Hüküm: x^2 çift sayıdır.

İspat: x çift sayı olduğundan $\exists\ a \in \mathbb{Z}$ için $x = 2a$ olur.

$x^2 = (2a)^2$

$x^2 = 4a^2$

$\forall a \in \mathbb{N}$ için $4a^2$ ifadesi 4'ün katı olduğundan bu sayı çift sayıdır.

Sonuç olarak $x^2 = 4a^2$ ifadesi çift sayıdır.

SIRA SİZDE 6.

ÇÖZÜM

ABCD karesinin bir kenarı $(3x + 2)$ birim olur. Bu karenin alanı $(3x + 2)^2 = 9x^2 + 12x + 4$ olur.

SIRA SİZDE 7.

ÇÖZÜM

$$\sqrt{\frac{9}{16}+\frac{4}{9}+1}=\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2+2.\frac{3}{4}.\frac{2}{3}}=\sqrt{\left(\frac{3}{4}+\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{3}{4}+\frac{2}{3}=\frac{17}{12}$$

SIRA SİZDE 8.

ÇÖZÜM

$25a^2-20a+4=(5a-2)^2$ olduğundan karenin bir kenarı $5a-2$ birim olur.
Buradan çevre $20a-8=52$ eşitliğinden $a=3$ bulunur.

SIRA SİZDE 9.

ÇÖZÜM

a) $(x+4)^2=x^2+8x+16$

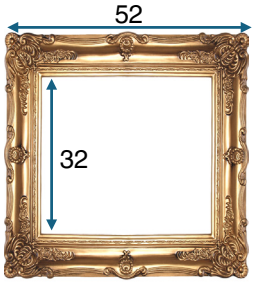
b) $x^2-12x+36=(x-6)^2$

c) $x^4-81=(x^2-9)\cdot(x^2+9)=(x-3)\cdot(x+3)\cdot(x^2+9)$

d) $(2x-3y)^2=4x^2-12xy+9y^2$

SIRA SİZDE 10.

ÇÖZÜM

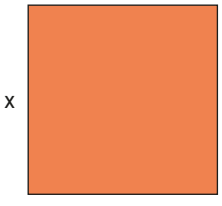


Çerçevede kullanılan ahşabın alanı $52^2-32^2=(52-32)\cdot(52+32)$
$=20\cdot84$
$=1680\ cm^2$
$=0,168\ m^2$

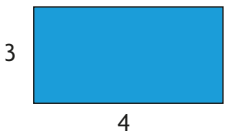
Maliyet $=0,168\cdot2000=336$ TL

SIRA SİZDE 11.

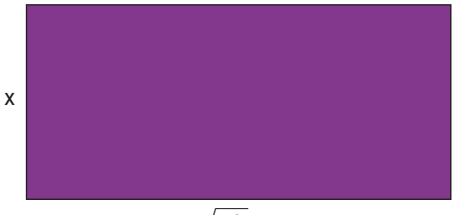
ÇÖZÜM



$A=x^2\ cm^2$



$B=3\cdot4=12\ cm^2$



$C=\sqrt{48}\,x=4\sqrt{3}\,x\ cm^2$

$A=C-B$ olduğundan $A-C+B=0$ olur.

Buradan

$x^2-4\sqrt{3}\,x+12=0$

$(x-2\sqrt{3})^2=0$

$x-2\sqrt{3}=0$ ve

$x=2\sqrt{3}$ cm bulunur.

DEĞERLENDİRİYORUM

Amaç: Bu bölümde öğrendiklerinizi gözden geçirmenizi, kendi öğrenme sürecinizi değerlendirmenizi ve eksiklerinizi fark etmenizi amaçlıyoruz.

Soruları dikkatle yanıtlayınız. Cevaplarınızı "Kontrol Listesi" ile karşılaştırınız. Eksik gördüğünüz noktaları tekrar ediniz.

SORULAR

1. "a ve b negatif gerçek sayılar olmak üzere a, b'den küçük ise a'nın karesi; b'nin karesinden büyüktür." **önermesini sembolik dille ifade ediniz.**

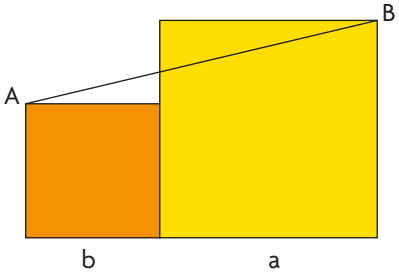
2. a ve b birer gerçek sayı olmak üzere a sayısı, $\sqrt{12}$ sayısının toplama işlemine göre tersi ve b sayısı, $\frac{\sqrt{3}}{15}$ sayısının çarpma işlemine göre tersidir.

Buna göre $a^2 - 2ab + b^2$ işleminin sonucu kaçtır?

3. **x = 2025 ve y = 2045 olmak üzere $(x + y)^2 - 4xy$ işleminin sonucu kaçtır?**

4. "a, b ∈ ℤ olmak üzere a ve b tek sayılar ise a·b de tektir." **önermesinin cebirsel ispatını yazınız.**

5. Aşağıda kenar uzunlukları a birim ve b birim olan sarı ve turuncu renkli iki kare verilmiştir.



Bu karelerin alanları toplamı 32 birimkare olduğuna göre |AB| kaç birimdir?

6. Aşağıda "Gerçek sayıların işlem özellikleri" konusuyla ilgili işlemler aşağıdaki yapılandırılmış gridde bulunan kutucuklara yazılmıştır. Kutucuklardaki numaraları kullanarak yapılandırılmış gridin altında yer alan soruları cevaplayınız.

Aynı kutucuğu birden fazla sorunun cevabı olarak kullanabilirsiniz.

1 $3 + 4 = 4 + 3$	2 $3 - 0 = -(0-3)$	3 $\sqrt{2}+\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)=\left(\sqrt{2}+\sqrt{7}\right)+\sqrt{5}$
4 $5 \cdot 3 = 3 \cdot 5$	5 $-\frac{1}{2}+0=-\frac{1}{2}$	6 $7 \cdot 0 = 0$
7 $-\frac{\sqrt{3}}{5}\cdot 1=\frac{-\sqrt{3}}{5}$	8 $4 - 0 = 4$	9 $3\cdot\frac{1}{3}=1$

I. Kutucuklardaki işlemlerden hangisinde/hangilerinde değişme özelliği kullanılmıştır?

II. Kutucuklardaki işlemlerden hangisinde/hangilerinde birleşme özelliği kullanılmıştır?

III. Kutucuklardaki işlemlerden hangisinde/hangilerinde etkisiz eleman özelliği kullanılmıştır?

IV. Kutucuklardaki işlemlerden hangisinde/hangilerinde yutan eleman özelliği kullanılmıştır?

V. Kutucuklardaki işlemlerden hangisinde/hangilerinde ters eleman özelliği kullanılmıştır?

GERİ BİLDİRİM

Bu geri bildirim sayesinde kendi cevabınızı kontrol edebilir, hatalarınızı düzelterek öğrenmenizi pekiştirebilirsiniz.

ÇÖZÜM 1.

$a, b \in \mathbb{R}^-, a < b \Rightarrow a^2 > b^2$

ÇÖZÜM 2.

$a = -\sqrt{12} = -2\sqrt{3}$ olur.

$$b = \frac{15}{\sqrt{3}} = \frac{15\sqrt{3}}{3} = 5\sqrt{3}$$

$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2 = (-2\sqrt{3} - 5\sqrt{3})^2 = (-7\sqrt{3})^2 = 49 \cdot 3 = 147$

ÇÖZÜM 3.

$x = 2025$ ve $y = 2045$ olmak üzere $(x + y)^2 - 4xy = x^2 + 2xy + y^2 - 4xy$

$= x^2 - 2xy + y^2$

$= (x - y)^2$

$= (2025 - 2045)^2 = (-20)^2 = 400$ bulunur.

ÇÖZÜM 4.

Hipotez: a ve b tek tam sayıdır.

Hüküm: $a \cdot b$ tek tam sayıdır.

İspat: a ve b tek tam sayı olduğundan $a = 2m + 1$ ve $b = 2n + 1$ $(m, n \in \mathbb{Z})$ olur.

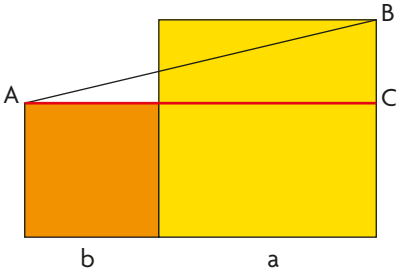
$a \cdot b = (2m + 1) \cdot (2n + 1)$

$= 4mn + 2m + 2n + 1$

$= 2(2mn + m + n) + 1$ olur. $2mn + m + n = k$ olacak şekilde $k \in \mathbb{Z}$ vardır.

$a \cdot b = 2k + 1$ olup $a \cdot b$ tek sayıdır.

ÇÖZÜM 5.



Karelerin alanları toplamı $a^2 + b^2 = 32$ birimkare verilmiş.
$|AC| = a + b$, $|BC| = a - b$ olur.

ABC üçgeninde Pisagor teoreminden

$|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2$

$|AB|^2 = (a + b)^2 + (a - b)^2$

$|AB|^2 = a^2 + 2ab + b^2 + a^2 - 2ab + b^2$

$|AB|^2 = 2a^2 + 2b^2$

$|AB|^2 = 2(a^2 + b^2)$

$|AB|^2 = 2 \cdot 32 = 64$ birimkare olur ve buradan $|AB| = 8$ birim bulunur.

ÇÖZÜM 6.

1 $3 + 4 = 4 + 3$	2 $3 - 0 = -(0-3)$	3 $\sqrt{2}+\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)=\left(\sqrt{2}+\sqrt{7}\right)+\sqrt{5}$
4 $5 \cdot 3 = 3 \cdot 5$	5 $-\frac{1}{2}+0=-\frac{1}{2}$	6 $7 \cdot 0 = 0$
7 $-\frac{\sqrt{3}}{5}\cdot 1=\frac{-\sqrt{3}}{5}$	8 $4 - 0 = 4$	9 $3\cdot\frac{1}{3}=1$

I. Kutucuklardaki işlemlerden hangisinde/hangilerinde değişme özelliği kullanılmıştır?

1 , 4

II. Kutucuklardaki işlemlerden hangisinde/hangilerinde birleşme özelliği kullanılmıştır?

3

III. Kutucuklardaki işlemlerden hangisinde/hangilerinde etkisiz eleman özelliği kullanılmıştır?

5, 7

IV. Kutucuklardaki işlemlerden hangisinde/hangilerinde yutan eleman özelliği kullanılmıştır?

6

V. Kutucuklardaki işlemlerden hangisinde/hangilerinde ters eleman özelliği kullanılmıştır?

9

ÖĞRENDİKLERİM

Amaç: Bu bölümde öğrendiklerinizi özetlemenizi, günlük hayatta ve farklı derslerde kullanabileceğiniz bilgileri belirlemenizi amaçlıyoruz.

Anahtar kavramları ve önemli bilgileri kendi cümlelerinizle yazınız. Aşağıda verilen yönlendirme metni ve tablo, konu ile ilgili öğrendiklerinizi özetlemenizde size yardımcı olacaktır. Tabloda ve metinde boş bırakılan yerleri kısa notlar ile tamamlayıp özetinizi hazırlayabilirsiniz.

Özetinizi hazırlarken zorluk yaşadığınızı hissederseniz çalışma kartını tekrar gözden geçirmenizi öneririz.

Önerme Kavramı

- Önermenin tanımı: .....
  .....
- Önermeler ..... olarak veya ..... ifade edilebilir.
- Bir önermenin hükmü değiştirilerek elde edilen önermeye ..... denir.

Mantık Bağlaçları ve Niceleyiciler

Bağlaç veya Niceleyici	Önermedeki Rolü
$\forall$	.....
.....	Önermenin en az bir eleman için doğru olması durumunda doğrudur.
$\vee$	.....
.....	Bu bağlaçla bağlanan tüm önermelerin doğru olması durumunda doğrudur.
$\underline{\vee}$	.....

Gerçek Sayılarda İşlem Özellikleri

İşlem Özellikleri	Toplama İşlemi	Çıkarma İşlemi	Çarpma İşlemi	Bölme İşlemi
Değişme Özelliği	Var	Yok	.....	.....
Birleşme Özelliği	.....	.....	.....	.....
Etkisiz Eleman Özelliği	.....	.....	.....	Yok
Yutan Eleman Özelliği	.....	Yok	.....	.....
Ters Eleman Özelliği	.....	.....	Var	.....

Özdeşlikler

- İki terimin toplamının karesi özdeşliği: $(a + b)^2$ = ...
- İki terimin farkının karesi özdeşliği: $(a - b)^2$ = ...
- İki terimin karelerinin farkı özdeşliği: $a^2 - b^2$ = ...

SAYILAR

Üslü ve Köklü İfadeler, Aralıklar ve İşlem Özellikleri Üzerine Yansıtıcı Yazı

Amaç: Bu çalışma, gerçek sayıların üslü ve köklü gösterimleriyle yapılan işlemler sırasında matematiksel muhakeme ve temsil becerileriniz üzerine farkındalık oluşturmak amacıyla hazırlanmıştır. Ayrıca, aralıklarla ilgili işlemlerde küme sembollerini ve işlemlerini nasıl kullandığınızı, sayı kümeleri arasındaki ilişkileri nasıl analiz ettiğinizi ve işlem özelliklerini cebirsel ifadelere nasıl dönüştürdüğünüzü değerlendirmeniz amaçlanmaktadır.

Aşağıdaki soruları çözerken kullandığınız yöntemi, düşünme sürecinizi ve ulaştığınız sonucu göz önünde bulundurarak yanıtlayınız. Sorulara kısa ve açık cümlelerle cevap vermeniz yeterlidir.

1. **Öğrendiğiniz bu temada sizin dikkatinizi çeken veya önemli bulduğunuz noktaları yazınız.**

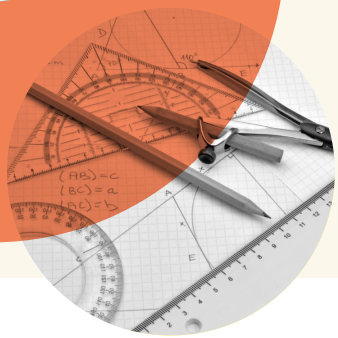
2. **Gerçek sayılarla yapılan işlemler üzerinden matematiksel muhakeme yaparak sayı kümeleri arasındaki ilişkileri ifade ediniz.**

   - **Sayı kümelerinden yararlanarak örnek aralıklar oluşturunuz.**

3. **Gerçek sayılarla ilgili problemlerin çözümünde üslü ve köklü ifadelerin hangi özelliklerinden yararlanılır? Kısaca açıklayınız.**

4. **Üslü ve köklü gösterimlerle öğrendiğiniz bilgilerin, günlük hayatta ya da matematiğin başka konularında nerelerde karşınıza çıkabileceğini örneklerle açıklayınız.**

Daha fazlası için karekodu okutunuz.



FONKSİYONLAR 101

BAŞLARKEN

Sevgili öğrencimiz, bu çalışma kartında bireysel öğrenme yolculuğunuza destek sunmak amaçlanmaktadır. Çalışmalarınızı yürütürken "Hazırlanıyorum", "İlişkilendiriyorum", "Uygulayarak Öğreniyorum", "Değerlendiriyorum" bölümlerini sırası ile yapmanızı; her bölüm ve etkinlik sonundaki geri bildirimleri alarak ilerlemenizi; "Öğrendiklerim" bölümünde öğrenme sürecinizi gözden geçirmenizi bekliyoruz.

Matematikte fonksiyonlar, bir niceliğin başka bir niceliğe bağlı olarak nasıl değiştiğini açıklayan modellerdir. Doğrusal fonksiyonların özelliklerini anlamak için temel bir model olan **doğrusal referans fonksiyon** $f(x) = x$'ten yola çıkılır.

Bu çalışma kartında, doğrusal fonksiyonların nitel özelliklerini anlamaya ve yorumlamaya yönelik olarak aşağıdaki sorular üzerinde düşüneceksiniz:

1. Bir fonksiyonun tanım kümesi, görüntü kümesi, artanlık-azalanlık ve sıfır noktası gibi özellikleri onun genel davranışını nasıl açıklar?
2. Doğrusal fonksiyonların özellikleri, $f(x) = x$ fonksiyonunda yapılan cebirsel ve grafiksel değişikliklerle nasıl ifade edilebilir?
3. Elde ettiğiniz doğrusal fonksiyonların grafik ve cebirsel temsilleri, gerçek yaşam durumlarını açıklamada ne tür yorumlara olanak sağlar?

HAZIRLANIYORUM

Amaç: Bu bölümde ön bilgilerinizi hatırlamanızı ve temaya hazırlıklı hâle gelmenizi amaçlıyoruz.

Aşağıda yer alan ifadeler, bu temada tamamlanması hedeflenen öğrenme çıktısını ele almadan önce sahip olmanız gereken bazı temel becerileri içermektedir. Lütfen her bir ifadeyi dikkatlice okuyunuz.

- Eğer ifadedeki beceriye hakim olduğunuzu düşünüyorsanız kutucuğu işaretleyiniz.
- Eğer beceriye yönelik eksiklikleriniz olduğu düşünüyorsanız ya da bu beceri üzerine herhangi bir deneyiminiz yoksa kutucuğu boş bırakınız.

Bu çalışma notla değerlendirilmeyecek olup amacı temaya ne ölçüde hazır olduğunuzu belirlemektir.

ÖN ÖĞRENME KONTROL LİSTESİ	
1. Gerçek yaşam durumlarında (örneğin telefon tarifeleri, spor etkinlikleri, alışveriş) doğrusal ilişki içeren değişkenleri ayırt edebilirim.	☐
2. Bir ilişki içerisindeki değişkenlerden hangisinin bağımsız, hangisinin bağımlı değişken olduğunu belirleyebilirim.	☐
3. Doğrusal bir ilişkiyi tablo, grafik veya sözel ifade biçiminde temsil edebilirim.	☐
4. Doğrusal bir ilişkiyi cebirsel olarak "y = mx + n" biçiminde ifade edebilirim.	☐
5. Doğrusal ilişkilerde elde edilen noktaların koordinat sisteminde bir doğru üzerinde yer aldığını açıklayabilirim.	☐
6. Eğim kavramının iki değişken arasındaki sabit değişim oranını temsil ettiğini ifade edebilirim.	☐
7. Eğim değeri pozitif olduğunda doğrunun artan, negatif olduğunda azalan olduğunu grafiksel olarak gösterebilirim.	☐
8. Gerçek yaşam durumlarında eğimin anlamını yorumlayabilirim (örneğin, zaman arttıkça alınan mesafenin artması).	☐

"Ön Öğrenme Kontrol Listesi"ni doldurduktan sonra aşağıda verilen "Kontrol Noktası" sorularını çözünüz ve cevaplarınızı kontrol ediniz.

KONTROL NOKTASI

SORU 1.

Bir spor salonu, yeni üyelerden kayıt sırasında 1000 TL sabit ücret almakta ve her ay için 1500 TL ödeme talep etmektedir.

Buna göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) Üyenin toplam ödeme miktarının, ay sayısına göre nasıl değiştiğini bir cebirsel ifade ile gösteriniz.

b) Bu ilişkinin doğrusal olup olmadığını belirleyiniz ve gerekçenizi açıklayınız.

SORU 2.

Bir cep telefonu operatörü, müşterilerine aylık sabit bir ücret karşılığında ve konuşulan her dakika için ek bir ücret uygulamaktadır. Tarifeye göre:

- Aylık sabit ücret: 100 TL
- Konuşulan her dakika ücreti: 0,5 TL

Yukarıda verilen bilgilere göre aşağıdaki soruları yanıtlayınız.

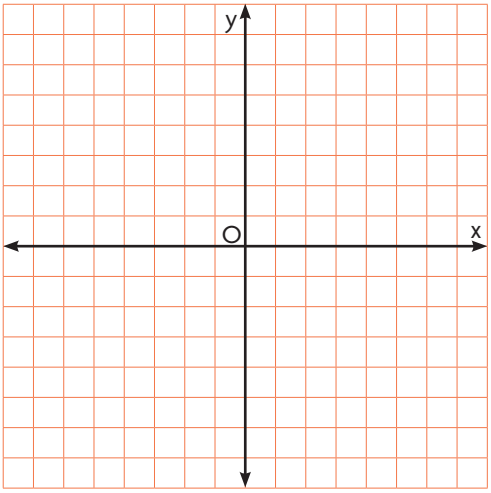
a) Konuşulan dakika sayısı ile aylık toplam ücret arasındaki ilişkiyi inceleyiniz. Bu senaryoda hangi değişken bağımsız, hangi değişken bağımlıdır? Açıklayınız.

b) Aşağıdaki tabloyu doldurunuz. Konuşulan dakika sayısına (x) göre aylık toplam ücreti (y) hesaplayınız.

Konuşulan dakika (x)	0	10	30	60
Toplam ücret (y) TL				

c) Tablodaki verilere göre, toplam ücret dakikaya bağlı olarak nasıl değişmektedir? Kısa bir cümleyle açıklayınız.

ç) Tabloya göre elde edilen (x, y) sıralı ikilisini aşağıdaki dik koordinat sisteminde gösteriniz.



d) Konuşulan dakika sayısı (x) ile aylık toplam ücret (y) arasındaki doğrusal ilişkiyi $y = mx + n$ cebirsel ifadesi şeklinde yazınız.

e) Elde ettiğiniz doğrusal ilişkinin eğimini bulunuz.

f) Eğimine bakarak bir doğrunun artan mı azalan mı olduğunu belirleyebilir misiniz? Kısa bir cümle ile açıklayınız.

GERİ BİLDİRİM

Bu geri bildirim sayesinde kendi cevabınızı kontrol edebilir, hatalarınızı düzelterek öğrenmenizi pekiştirebilirsiniz.

KONTROL NOKTASI

ÇÖZÜM 1.

a)

- **Bağımsız değişken (x): Ay sayısı**
- **Bağımlı değişken (y):** Toplam ödeme miktarı (TL)

Spor salonu her üyeden kayıt sırasında 1000 TL sabit ücret, her ay için de 1500 TL talep etmektedir.Bu durumda toplam ödeme şu şekilde ifade edilir:

$y = 1500x + 1000$

b) Toplam ödeme miktarı, ay sayısına göre her defasında 1500 TL artmaktadır. Bu artış oranı sabit olduğundan değişim düzenli ve doğrusal bir biçimdedir.

- Elde edilen denklem $y = a \cdot x + b$ biçimindedir. Burada $a = 1500$ (eğim) ve $b = 1000$ (sabit terim)'dir.

Bu ilişki doğrusal bir ilişkidir. Çünkü değişim oranı (eğim) sabittir ve toplam ödeme, ay sayısına bağlı olarak düzenli bir biçimde artmaktadır.

ÇÖZÜM 2.

Verilenler:

- Aylık sabit ücret = 100 TL
- Konuşulan her dakika ücreti = 0,5 TL

Toplam ücret y, konuşulan dakika sayısı x ile ilişkilidir.

a) Bağımsız ve bağımlı değişkenler

- **Bağımsız değişken (x):** Konuşulan dakika sayısı
- Bir ayda kaç dakika konuşacağımızı bizi seçtiğimiz için konuşulan dakika sayısı bağımsız değişkendir.
- **Bağımlı değişken (y):** Aylık toplam ücret
- Toplam ücret, konuşulan dakika sayısına bağlı olarak değişiyor. Bu değişkeni doğrudan seçemezsiniz, x in değerine göre belirleniyor. Bu yüzden aylık toplam ücret bağımlı değişkendir.

Bağımsız değişken, değeri önceden belirlenebilen veya kontrol edilebilen değişkendir. Bağımlı değişken ise, bağımsız değişkende meydana gelen değişimlere bağlı olarak değeri değişen değişkendir.

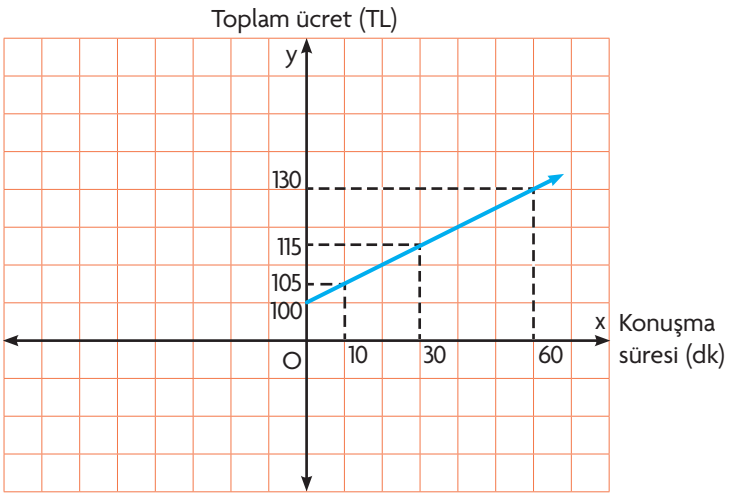
b)

Konuşulan dakika (x)	0	10	30	60
Toplam ücret (y) TL	100	105	115	130

• Dakika sayısı arttıkça toplam ücret de artmaktadır.

c) Toplam ücret her 10 dk'da bir 5 TL artmaktadır. Bu durumda toplam ücret dakikaya bağlı olarak doğrusal bir şekilde artmaktadır.

ç) Dik koordinat sisteminde x ekseni: konuşulan dakika, y ekseni ise toplam ücreti temsil etmektedir. Buna göre bulunan noktaları: (0,100), (10,105), (30,115), (60,130) işaretleyelim. Noktaları birleştirdiğimizde aşağıdaki doğruyu elde ederiz. Dikkat ederseniz bu noktalar doğrusaldır.



d) Cebirsel ifade

$$y = 0{,}5x + 100$$

• **m = 0,5** → eğim (dakika başına ödenen ücret artışı)
• **n = 100** → y eksenindeki başlangıç noktası (sabit aylık ücret) göstermektedir.

e) Eğim ve anlamı

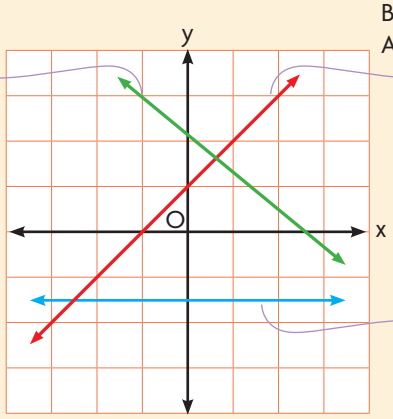
• Eğim (m) = 0,5

Eğim, konuşulan her dakika için toplam ücrete 0,5 TL eklendiğini gösterir.

f) Eğimin işareti ve grafiğin yönü

- Eğimin işareti pozitif (m > 0)
- Pozitif eğim grafiğin **artan** bir fonksiyona ait olduğunu göstermektedir. Örneğin konuşma süresi arttıkça ödenen toplam ücret de artar.
- Eğer eğim negatif (m < 0) olsaydı, grafik **azalan** bir fonksiyona ait olurdu ve konuşma süresi arttıkça ödenen toplam ücret düşerdi.

Azalan bir doğru grafiği olduğu için eğim 0'dan küçüktür.



Bu doğrunun eğimi 0'dan büyüktür. Artan bir doğru grafiğidir.

Doğru x eksenine paraleldir. Bu yüzden eğimi 0'dır. Eğim sıfır olduğundan, bağımsız değişkendeki artışlara karşılık bağımlı değişkenin değeri değişmez, sabit kalır.

İLİŞKİLENDİRİYORUM

GERÇEK SAYILARDA TANIMLI DOĞRUSAL FONKSİYONLAR VE NİTEL ÖZELLİKLERİ

Amaç: Bu bölümde yeni öğreneceğiniz temayı; zihninizde var olan bilgileriniz, yaşantılarınız ve diğer derslerde öğrendiklerinizle ilişkilendirmenizi bekliyoruz.

Fonksiyonlar, matematiksel düşüncenin temel taşlarından biridir ve birçok bilim dalında önemli bir araç olarak kullanılır. Matematikte fonksiyon kavramı, değişkenler arasındaki ilişkileri düzenli bir biçimde ifade etmemizi sağlar.

Günümüzde fonksiyonlar, sadece matematikte değil; mühendislik, fizik, ekonomi ve bilgisayar bilimi gibi pek çok alanda uygulanmaktadır. Örneğin; mühendisler sistemlerin davranışını modellemek, ekonomistler piyasa analizleri yapmak, bilgisayar bilimciler algoritmalar geliştirmek için fonksiyonlardan yararlanır.

UYGULAYARAK ÖĞRENİYORUM

Amaç: Bu bölümde bilgilerinizi etkinlikler ve uygulamalarla pekiştirmenizi, öğrenmeyi daha kalıcı hâle getirmenizi amaçlıyoruz.

Etkinliklerde verilen adımları dikkatle uygulayınız. Çalışmanızı dikkatli ve düzenli bir şekilde yapınız.

f(x) = x ŞEKLİNDE TANIMLI DOĞRUSAL REFERANS FONKSİYON

Gerçek sayılar kümesinde tanımlı f(x) = x fonksiyonu, doğrusal fonksiyonların temel referans fonksiyonu olarak adlandırılır. Diğer doğrusal fonksiyonların cebirsel temsilleri, grafiksel gösterimleri ve nitel özellikleri (tanım kümesi, görüntü kümesi, işareti, artanlığı–azalanlığı, maksimum–minimum noktaları, sıfırı ve bire birliği), bu referans fonksiyon üzerinde gerçekleştirilen dönüşümler ve çıkarımlar yoluyla elde edilebilir.

ETKİNLİK 1.

f(x) = x Doğrusal Referans Fonksiyonunu Keşfediyorum

1. Tablo 1'de bağımsız değişken (x) in aldığı bazı değerlere karşılık gelen bağımlı değişken (f(x)) değerlerinden bir kısmı verilmiştir.

Buna göre aşağıdaki tabloda x değerlerini f(x) = x olacak şekilde bulduğunuz (x, f(x)) noktalarını aşağıda boş bırakılan yerlere yazınız.

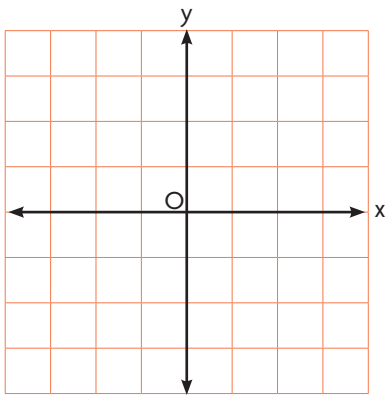
x	f(x)
–2	–2
–1	–1
0	0
1	1
2	2

Tablo 1

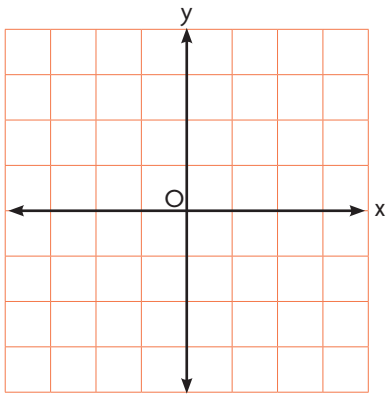
(x, f(x))

(–2, –2)

2. (x, f(x)) noktalarını dik koordinat düzleminde gösteriniz.



3. Dik koordinat düzleminde, işaretlediğiniz noktaları birleştirerek grafiği çiziniz. Elde ettiğiniz şeklin doğrusal olup olmadığını yazınız.



4. Çizdiğiniz grafiğin eğimini dikkate alarak fonksiyonun artan, azalan ya da sabit olma durumunu nasıl belirlediğinizi açıklayınız.

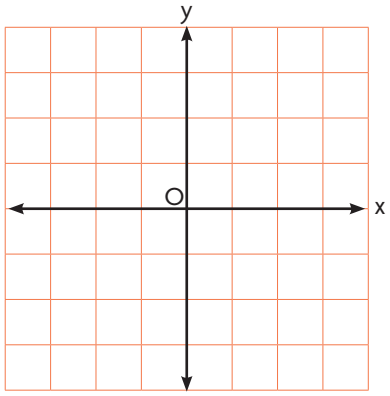
5. Bağımsız değişkenin hangi değeri için bağımlı değişkenin sıfıra eşit olduğunu bulunuz.

6. Bağımlı değişken; bağımsız değişkenin hangi değerleri için pozitif, hangi değerleri için negatif olur? Bulunuz.

7. Bağımsız değişkenin aldığı değerler artarken bağımlı değişkenin aldığı değerlerin nasıl değiştiğini belirleyiniz. Bu durumun eğimle bir ilişkisi var mı? Açıklayınız.

8. Bağımsız değişkenin aldığı herhangi iki farklı değer için f fonksiyonunun (bağımlı değişkenin) aldığı değerler birbirinden farklı mıdır? Bu durumu bağımsız değişkenin alabileceği tüm değerler için değerlendiriniz.

9. Tüm gerçek sayılar düşünüldüğünde f fonksiyonunun grafiğini çiziniz. Bu grafiğe bakarak bağımsız değişkenlerin ve bağımlı değişkenlerin ait olduğu kümeleri ifade ediniz.



NOT

Bir fonksiyonda bağımsız değişkenin alabileceği tüm değerler, fonksiyonun **tanım kümesi** olarak ifade edilir. Bağımlı değişkenin alabileceği tüm değerler ise, **görüntü kümesi** olarak adlandırılır.

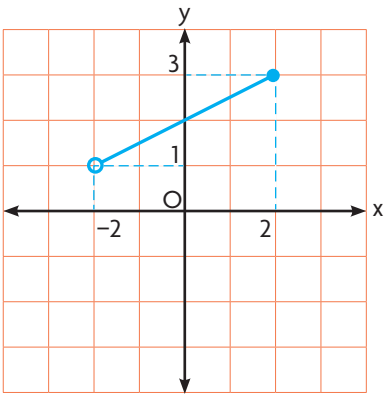
A kümesinden B kümesine tanımlı bir f fonksiyonu $f: A \rightarrow B$ ile gösterilir.

A kümesi tanım kümesi, B kümesi görüntü kümesi olarak adlandırılır.

$y = f(x)$ veya $f: x \rightarrow y$ veya $(x,y) \in f$ şeklinde gösterilir.

ÖRNEK

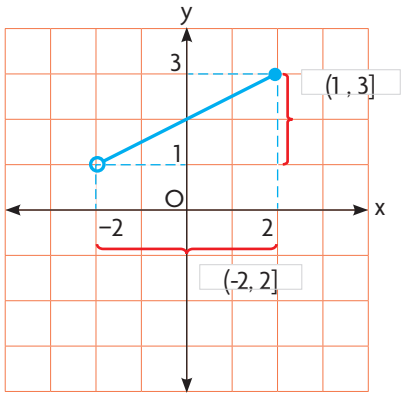
Aşağıda dik koordinat düzleminde gerçek sayıların bir alt kümesinde tanımlı f(x) doğrusal fonksiyonun grafiği verilmiştir.



Buna göre f doğrusal fonksiyonunun tanım ve görüntü kümelerini bulunuz.

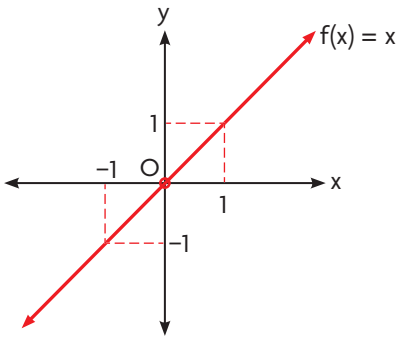
ÇÖZÜM

f doğrusal fonksiyonun tanım kümesi : (-2, 2] ve görüntü kümesi : (1, 3].

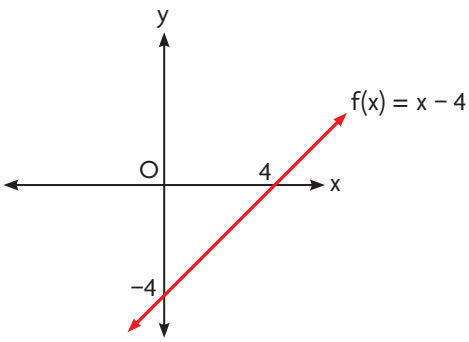


NOT

Bir fonksiyonda f(x) = 0 eşitliğini sağlayan x değerine **fonksiyonun sıfırı** denir.
Aşağıda verilen grafikte, x = 0 için f(0) = 0 olduğu görülmektedir. Dolayısıyla f(x) = x fonksiyonunun sıfırı 0 olarak belirlenir.



Örneğin; f(x) = x − 4 fonksiyonunun sıfırı x = 4 tür. Fonksiyonun grafik temsili aşağıda gösterilmiştir.

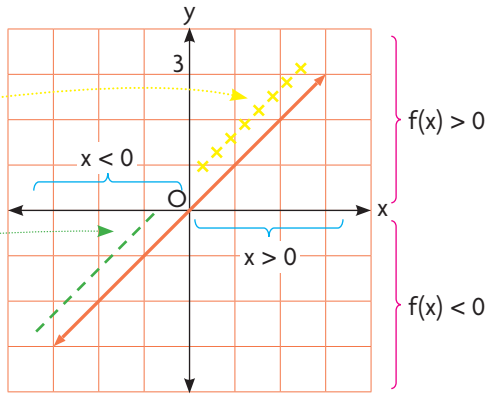


• Aşağıdaki grafiği incelediğinizde:

x > 0 iken f(x) pozitif değerler almakta,

x < 0 iken f(x) negatif değerler almaktadır.

x	x < 0	0	x > 0
f(x)	− f(x) < 0		+ f(x) > 0



• Bir fonksiyonda belli bir aralıkta bağımsız x değişkeninin aldığı değerler artarken bağımlı y değişkeninin aldığı değerler de artıyorsa fonksiyon bu aralıkta **artandır**.

• Bir fonksiyonda belli bir aralıkta bağımsız x değişkeninin aldığı değerler artarken bağımlı y değişkeninin aldığı değerler azalıyorsa fonksiyon bu aralıkta **azalandır**.

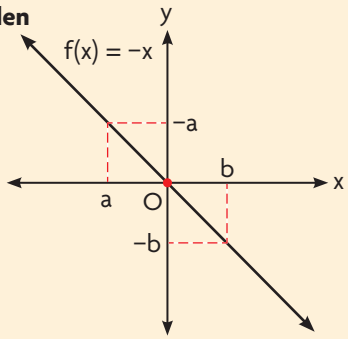
$\forall a, b \in \mathbb{R}$ ve $a < b$ iken, $f(a) < f(b)$ oluyorsa f gerçek sayılarda artandır.

$\forall a, b \in \mathbb{R}$ ve $a < b$ iken, $f(a) > f(b)$ oluyorsa f gerçek sayılarda azalandır.

Yanda grafik temsili verilen gerçek sayılarda tanımlı bir f(x) = −x fonksiyonu için aşağıda verilen önermelerde boş bırakılan yerlere ARTAN / AZALAN ifadelerinden uygun olanı yazınız

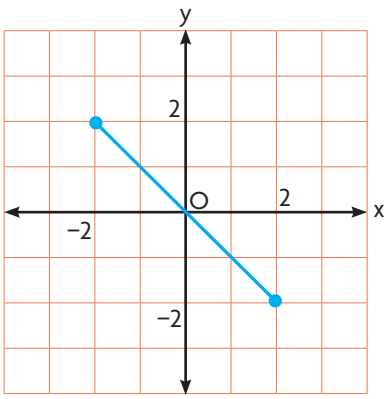
• $\forall a, b \in \mathbb{R}$ $a < b$ iken $f(a) > f(b) \Leftrightarrow$ f _____ dır.

• f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x$ _____ fonksiyondur.



ÖRNEK

Yanda dik koordinat düzleminde gerçek sayıların bir alt kümesinde tanımlı f(x) doğrusal fonksiyonunun grafiği verilmiştir.



Buna göre aşağıdaki soruları yanıtlayınız.

a) f(x) fonksiyonunun tanım ve görüntü kümelerini yazınız.

b) Bağımlı değişkenin alabileceği en küçük değeri bulunuz.

c) Bağımlı değişkenin alabileceği en büyük değeri bulunuz.

ÇÖZÜM

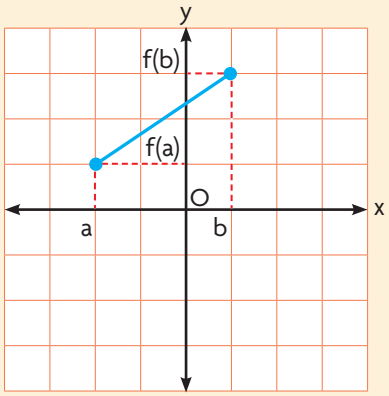
a) f doğrusal fonksiyonunun tanım kümesi [−2, 2] ve görüntü kümesi [−2, 2] dir.

b) Bağımlı değişkenin alabileceği en küçük değer −2'dir.

c) Bağımlı değişkenin alabileceği en büyük değer 2'dir.

a, b ∈ ℝ ve f fonksiyonu [a, b] nda tanımlı olsun:

- ∀x ∈ [a, b] için f(x) ≤ f(b) şartını sağlayan f(b) değerine f fonksiyonunun **maksimum değeri** denir. Bu değeri aldığı x = b noktasına f fonksiyonunun **maksimum noktası** denir.
- ∀x ∈ [a, b] için f(x) ≥ f(a) şartını sağlayan f(a) değerine f fonksiyonunun **minimum değeri** denir. bu değeri aldığı x = a noktasına f fonksiyonunun **minimum noktası** denir.



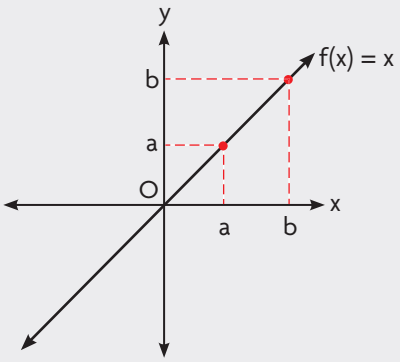
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ doğrusal referans fonksiyonu için maksimum noktası ve minimum noktaları var mıdır ?

HATIRLATMA

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ doğrusal referans fonksiyonunda

maksimum noktası ve **minimum noktası yoktur**.

Doğrusal referans fonksiyonunun tanım ve görüntü kümesi bütün gerçek sayılar olduğundan hem tanım hem de görüntü kümesi sonsuz elemanlıdır. Bu nedenle en büyük ya da en küçük nokta belirlenemez..



NOT

Bir fonksiyonun **tanım kümesindeki her bir** x değerine **farklı** f(x) değerleri karşılık geliyorsa, bu fonksiyon **bire bir** fonksiyon olarak adlandırılır.

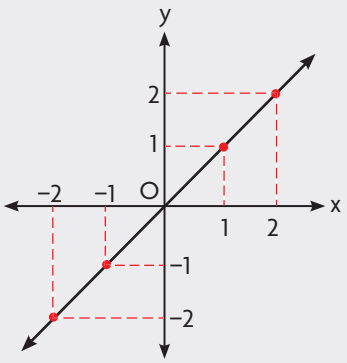
Benzer biçimde, **görüntü kümesindeki her bir** f(x) değerine tanım kümesinde **yalnızca bir** x değeri karşılık geliyorsa, fonksiyon yine bire birdir.

Bu önermeyi matematiğin sembolik diliyle şöyle ifade edebiliriz:

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$

ya da

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$



ÖRNEK

Gerçek sayılarda tanımlı f doğrusal referans fonksiyon olmak üzere,

f (p) = f (−1) ve f (q) = f (4) eşitlikleri veriliyor.

Buna göre f (p + q) değeri kaçtır?

ÇÖZÜM

f doğrusal referans fonksiyonu olduğu için bire bir fonksiyondur. Burada görüntüler aynı olduğundan bu fonksiyonun bağımsız değişkenleri de aynı olmalıdır.

f (p) = f (−1) ise p = −1 olur. f(q) = f(4) ise q = 4 olur.

Buna göre f (−1 + 4) = f (3) sorulmaktadır. Bu durumda f(3) = 3'tür.

SIRA SİZDE 1.

Gerçek sayılarda tanımlı f(x) doğrusal referans fonksiyonun cebirsel temsilini ve nitel özelliklerini içeren tabloda boş bırakılan yerleri uygun şekilde doldurunuz.

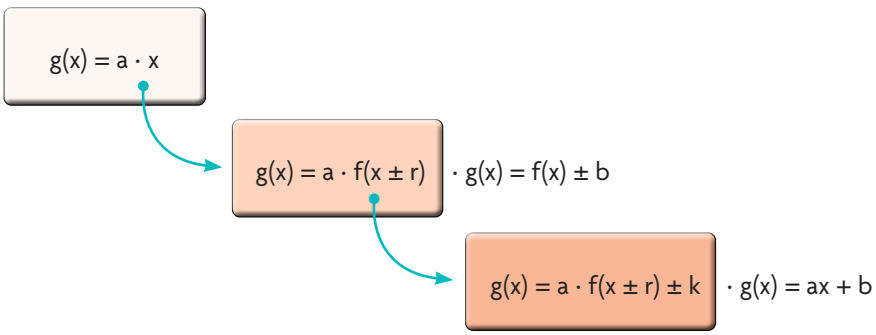
Fonksiyonun Cebirsel Temsili	Tanım Kümesi	Görüntü Kümesi	İşareti		Sıfırı	Artanlığı - Azalanlığı	Maksimum Değeri	Minimum Değeri	Bire birliği
			Pozitif değer aldığı aralık	Negatif değer aldığı aralık					
f(x) =									

GERÇEK SAYILARDA g(x) = a·f(x ± r) ± k ŞEKLİNDE TANIMLI DOĞRUSAL FONKSİYONLAR

a, r, k ∈ ℝ ve a ≠ 0 olmak üzere, gerçek sayılar kümesinde, f(x) = x doğrusal referans fonksiyonundan türetilen ve

$$g(x) = a \cdot f(x \pm r) \pm k$$

biçiminde tanımlanan fonksiyonlara doğrusal fonksiyon denir. Doğrusal fonksiyonların grafikleri, düzlemde bir doğru olarak temsil edilir. Her doğrusal fonksiyon, f(x) = x doğrusal referans fonksiyonuna uygulanacak yatay kaydırma, dikey kaydırma ve eğim değişikliği işlemleri ile elde edilebilir.



GERÇEK SAYILARDA g(x) = ax ŞEKLİNDE TANIMLI DOĞRUSAL FONKSİYONLAR

f(x) = x ve g(x) = a ·x (a ∈ ℝ ve a ≠ 0) olmak üzere, her x ∈ ℝ için g fonksiyonunun aldığı değerler, f fonksiyonunun aldığı değerlerin a katıdır.

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = a \cdot x$, $a \in \mathbb{R}$

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = a \cdot x$ fonksiyonunun grafiğini

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = x$ doğrusal referans fonksiyon grafiğinden yararlanarak nasıl elde edebileceğiniz ile ilgili fikirlerinizi yazınız.

ÖRNEK

Gerçek sayılarda tanımlı $f(x) = x$, $g(x) = 3x$, $h(x) = -x$, $t(x) = \frac{1}{3}x$ fonksiyonları veriliyor.

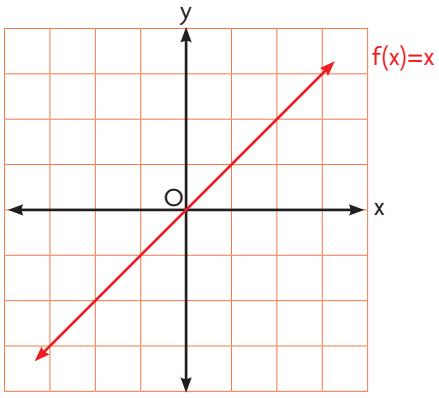
a) Yukarıda verilen fonksiyonlarının farklı x bağımsız değişkenleri için görüntülerini tablodaki boşluklara yazınız.

Fonksiyon	x=−3	x=−1	x=0	x=1	x=3
f(x) = x		−1			
g(x) = 3x				3	
h(x) = -x					−3
$t(x) = \frac{1}{3}x$	$\frac{1}{3} \cdot (-3) = -1$				

Yukarıdaki tabloda, gerçek sayılarda tanımlı g(x) = ax doğrusal fonksiyonuna ait bazı örnekler verilmiştir. Tablodaki farklı x değerleri için g(x), h(x), t(x), f(x) değerlerini inceleyiniz. Bu örneklerden yola çıkarak, g(x) =ax fonksiyonunun bire bir (1-1) bir fonksiyon olup olmadığını gerekçesiyle birlikte açıklayınız.

b) Aşağıdaki tabloyu doldurarak f, g, h ve t fonksiyonlarının grafiklerini birim karelerle birimlendirilmiş aynı dik koordinat sisteminde çiziniz.

Fonksiyon	Fonksiyonun sıfırı	y eksenini kestiği nokta	Fonksiyonu temsil eden doğrunun eğimi
$f(x) = x$			
$g(x) = 3x$			
$h(x) = -x$			
$t(x) = \frac{1}{3}x$			



Yukarıdaki tabloda, gerçek sayılarda tanımlı g(x)= ax doğrusal fonksiyonuna ait bazı örnekler verilmiştir. Tablodaki değerleri ve fonksiyonlara ait çizdiğiniz grafik temsillerini inceleyiniz ve aşağıdaki cümlelerdeki boşlukları uygun kelimelerle tamamlayınız.

"keser, kesmez, yalnızca orijinde keser, eğimi, yönü, yaklaşır, uzaklaşır, paralel olur."

1. g(x) = ax fonksiyonu **x eksenini ve y eksenini** [ ] .

2. Fonksiyondaki a katsayısı, doğrunun [ ] belirler.

3. |a| sayısı arttıkça fonksiyon grafiği **y eksenine** [ ] (yaklaşır / uzaklaşır / paralel olur).

4. a < 0 olmak üzere, g(x) = ax fonksiyonu [ ] aralığında pozitif, [ ] aralığında negatif tanımlıdır.

5. a > 0 olmak üzere , g(x) = ax fonksiyonu [ ] aralığında pozitif , [ ] aralığında negatif tanımlıdır.

c) Aşağıda verilen tabloyu doldurunuz.

Nitel Özellik \ Fonksiyon		f(x) = x	g(x) = 3x	h(x) = −x	$t(x)=\frac{1}{3}x$
Tanım Kümesi		$\mathbb{R}$		$\mathbb{R}$	
Görüntü Kümesi		$\mathbb{R}$		$\mathbb{R}$	
Sıfırı		0		0	
İşareti	**Pozitif olduğu aralık**	$(0, \infty)$		$(-\infty, 0)$	
	Negatif olduğu aralık	$(-\infty, 0)$		$(0, \infty)$	
Artan - Azalan		Artan		Azalan	
Maksimum Noktası		Yok		Yok	
Minimum Noktası		Yok		Yok	
Bire birlik		Bire bir		Bire bir	

d) Aşağıda verilen boşlukları doldurunuz.

Gerçek sayılarda tanımlı g(x) = ax fonksiyonu için

I. a ☐ 0 ise fonksiyon artandır.

II. a ☐ 0 ise fonksiyon azalandır.

ÇÖZÜM

a)

Fonksiyon	x = −3	x = −1	x = 0	x = 1	x = 3
f(x) = x	-3	−1	0	1	3
g(x) = 3x	−9	−3	0	3	9
h(x) = -x	3	−1	0	−1	−3
$t(x)=\frac{1}{3}x$	−1	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	1

Tablodaki değerler incelendiğinde, her bir x değeri için yalnızca bir tane g (x), h(x), f(x), t(x) değeri elde edildiği görülmektedir. Örneğin:

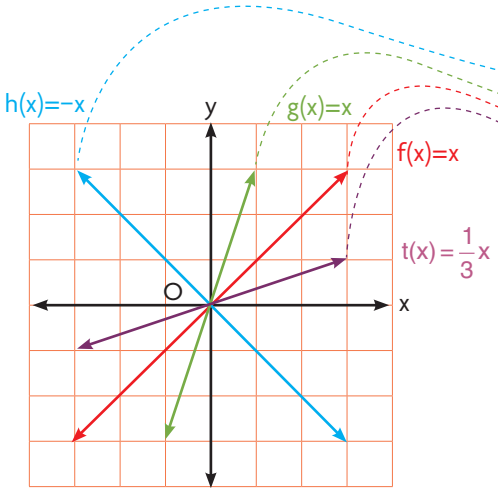
- a = 3 için x = 1 ise g (1) = 3 , x = −1 ise g (−1) = −3
- a = −1 için x = 1 ise h (1) = −1 , x= 0 ise h (0) = 0

Her iki durumda da $x_1 \neq x_2$ ise $g(x_1) \neq g(x_2)$ olmaktadır.

Bu nedenle, g(x) = ax **doğrusal fonksiyonu** (a ≠0) **bire birdir**.

b)

Fonksiyon	Fonksiyonun sıfırı	y eksenini kestiği nokta	Fonksiyonu temsil eden doğrunun eğimi
f(x) = x	0	0	1
g(x) = 3x	0	0	3
h(x) = -x	0	0	-1
$t(x)=\frac{1}{3}x$	0	0	$\frac{1}{3}$



Tablodaki değerlere göre, a katsayısı değiştikçe doğrunun eğimi de değişir. Fonksiyonların grafik temsillerine baktığınızda, a katsayısı pozitif olduğunda doğru y ekseninin sağına doğru yatık, negatif olduğunda y ekseninin soluna doğru yatık görülür. |a| değeri büyüdükçe grafik y eksenine yaklaşır, |a| küçüldükçe x eksenine yaklaşır. Fonksiyonun sabit terimi olmadığı için her durumda doğrular orijinden geçmektedir.

1. g(x) = ax fonksiyonu **x eksenini ve y eksenini yalnızca orijinde keser.**

Çünkü g(x)= 0 olduğunda ax = 0 olur ve bu da yalnızca x = 0 noktasında gerçekleşir. Yani fonksiyon hem x hem y eksenini sadece **(0,0)** noktasında keser.

2. Fonksiyondaki a katsayısı, doğrunun eğimini belirler.

- a > 0 olduğunda fonksiyon **artan**,
- a < 0 olduğunda fonksiyon **azalan** bir doğrudur.

3. |a| sayısı arttıkça fonksiyon grafiği **y eksenine yaklaşır (daha dik olur).**

Çünkü eğim büyüdükçe doğru, x eksenine göre daha dik hale gelir ve görsel olarak y eksenine yaklaşmış gibi görünür.

4.

a > 0

x		0	
g(x)		−	+

x < 0 için g(x) negatif tanımlı olduğu aralık

x > 0 için g(x) pozitif tanımlı olduğu aralık

5.

a < 0

x		0	
g(x)		+	−

x < 0 için g(x) pozitif tanımlı olduğu aralık

x > 0 için g(x) negatif tanımlı olduğu aralık

c)

Nitel Özellik \ Fonksiyon		$f(x) = x$	$g(x) = 3x$	$h(x) = -x$	$t(x) = \frac{1}{3}x$
Tanım Kümesi		$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Görüntü Kümesi		$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Sıfırı		0	0	0	0
İşareti	**Pozitif olduğu aralık**	$(0, \infty)$	$(0, \infty)$	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
	Negatif olduğu aralık	$(-\infty, 0)$	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$	$(-\infty, 0)$
Artan - Azalan		Artan	Artan	Azalan	Artan
Maksimum Noktası		Yok	Yok	Yok	Yok
Minimum Noktası		Yok	Yok	Yok	Yok
Bire birlik		Bire bir	Bire bir	Bire bir	Bire bir

d) Gerçek sayılarda tanımlı $g(x) = ax$ fonksiyonu için

I. a $(>)$ 0 ise fonksiyon artandır.

II. a $(<)$ 0 ise fonksiyon azalandır.

ETKİNLİK 2.

Elektrikli Araç Şarj Süresi ve Menzil Arasındaki Doğrusal İlişki

Bir elektrikli aracın şarj süresi (saat) ile tam şarj sonrası gidebileceği mesafe (km) arasında doğrusal bir ilişki vardır. Bu araç, ev tipi priz ile 8 saatte tam şarj olmaktadır ve tam şarjla en fazla 360 km yol gidebilmektedir. Araç 4 saat şarj edildiğinde 180 km yol gidebilmektedir.

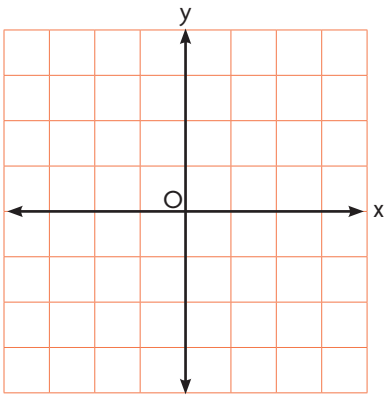
Buna göre aşağıdaki soruları yanıtlayınız.

a) Aracın x saat şarj edilmesi durumunda gidebileceği mesafeyi belirten fonksiyonunun cebirsel temsilini yazınız.

b) Araç 6 saat şarj edilirse kaç km yol gidebilir?

c) Aracın x saat şarj edilmesi durumunda gidebileceği mesafenin fonksiyonunun tanım kümesini ve görüntü kümesini belirtiniz.

ç) Aracın gidebileceği mesafeye karşılık gelen fonksiyonun grafiğini f(x) = x doğrusal referans fonksiyonundan yararlanarak aşağıdaki dik koordinat sisteminde çiziniz.



d) Fonksiyonun minimum ve maksimum değerlerini belirleyiniz ve bu değerlerin etkinlik senaryosunda ne anlama geldiğini açıklayınız.

ÇÖZÜM

a) (0,0) , (4,180) ve (8,360) şarj süresi ile gidilen menzil arasında doğrusal bir ilişki vardır. Bu durumda doğrusal fonksiyonumuz g(x) = ax doğrusal fonksiyonu olur.

X (saat)	0	4	8
Y (km) = g(x)	0	180	360

$$a = \frac{360-180}{8-4}$$

$$a = \frac{180}{4} = 45$$

Aracın x saat şarj edilmesi durumunda gidebileceği mesafenin fonksiyonunun cebirsel temsili : $g(x) = 45 \cdot x$

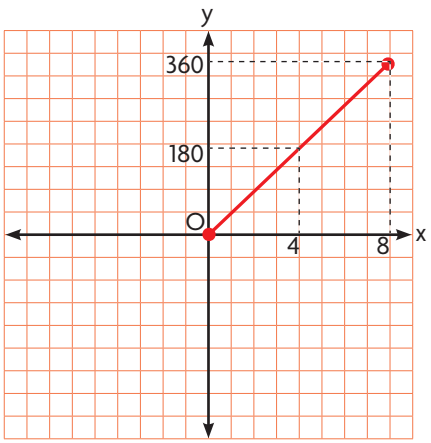
b) $x=6, \quad g(6) = 45 \cdot 6$

$g(6) = 180$

c) Aracın x saat şarj edilmesi durumunda gidebileceği mesafenin fonksiyonunun tanım kümesi T.K ve görüntü kümesini G.K belirtilirse;

T.K = [0, 8] ve G.K = [0, 360] olur.

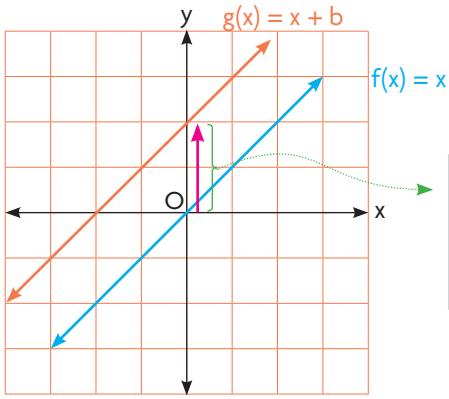
ç)



d) **Minimum değer:** g(0) = 0 dır. Bu durum da araç hiç şarj edilmemiştir ve ilerleyemez.
Maksimum değer: g (8)=360 dır. Araç 8 saat şarj edildiğinde tam şarj olur ve **en fazla 360 km** yol gidebilir.

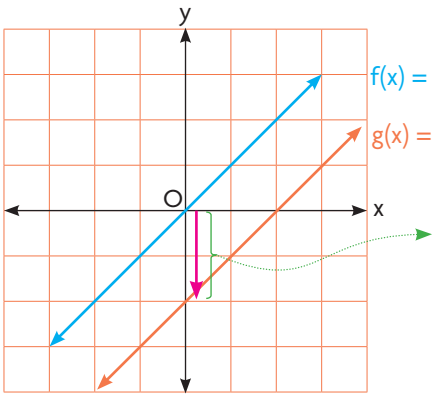
GERÇEK SAYILARDA g(x) = x + b ve g(x) = f(x + b) ŞEKLİNDE TANIMLI DOĞRUSAL FONKSİYONLAR

- b > 0 için f(x)=x doğrusal referans fonksiyonun grafiğinin y ekseni boyunca pozitif yönde b birim ötelenmesi ile g(x) = x + b fonksiyonunun grafiği elde edilir.



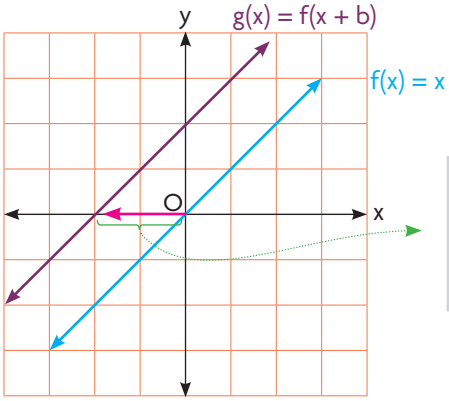
b birim y ekseni boyunca pozitif yönde ötelenmiştir. Fonksiyonun eğimi değişmemiştir. Ancak fonksiyonun sıfırı değişir ve fonksiyonun grafik temsili y eksenini farklı bir noktada keser.

- b < 0 için f(x)=x doğrusal referans fonksiyonun grafiğinin y ekseni boyunca negatif yönde b birim ötelenmesi ile g(x) = x + b fonksiyonunun grafiği elde edilir.



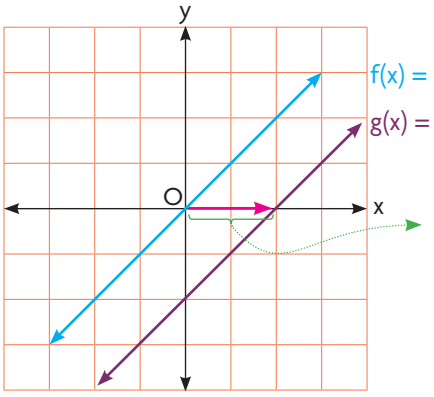
b birim y ekseni boyunca negatif yönde ötelenmiştir. Fonksiyonun eğimi değişmemiştir. Ancak fonksiyonun sıfırı değişir ve fonksiyonun grafik temsili y eksenini farklı bir noktada keser.

- b > 0 için f(x)=x doğrusal referans fonksiyonun grafiğinin x ekseni boyunca negatif yönde (sola) b birim ötelenmesi ile g(x) = f(x + b) fonksiyonu elde edilir.



b birim x ekseni boyunda negatif yönde ötelenmiştir. Fonksiyonun eğimi değişmemiştir. Ancak fonksiyonun sıfır değeri değişir ve fonksiyonun grafik temsili y eksenini keser.

- b < 0 için f(x) = x doğrusal referans fonksiyonunun grafiğinin x ekseni boyunca pozitif yönde (sağa) b birim ötelenmesi ile g(x) = f(x + b) fonksiyonunun grafiği elde edilir.



b birim x ekseni boyunda pozitif yönde ötelenmiştir. Fonksiyonun eğimi değişmemiştir. Ancak fonksiyonun sıfır değeri değişir ve fonksiyonun grafik temsili y eksenini keser.

ÖRNEK

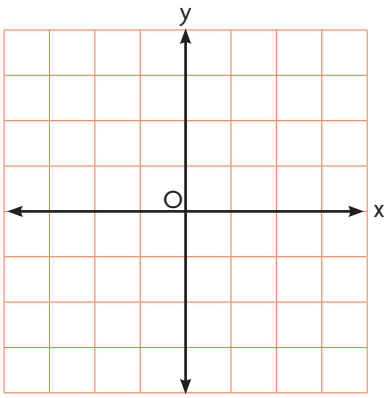
Gerçek sayılarda tanımlı $f(x) = x$, $g(x) = x+2$, $h(x) = x-2$, $t(x) = x + \frac{1}{3}$, $k(x) = x - \frac{1}{3}$ fonksiyonları veriliyor.

a) Aşağıda verilen tabloyu doldurunuz.

Fonksiyon	x=−3	x=−1	x=0	x=1	x=3
$f(x) = x$					
$g(x) = x+2$					
$h(x) = x-2$					
$t(x) = x + \frac{1}{3}$					
$k(x) = x - \frac{1}{3}$					

b) Aşağıda tabloyu doldurarak f, g, h, t ve k fonksiyonlarının grafiklerini birim karelerle ifade edilen aynı dik koordinat sisteminde çiziniz

Fonksiyon	Fonksiyonun sıfırı	y eksenini kestiği nokta	Fonksiyonu temsil eden doğrunun eğimi
$f(x) = x$			
$g(x) = x+2$			
$h(x) = x-2$			
$t(x) = x + \frac{1}{3}$			
$k(x) = x - \frac{1}{3}$			



c) Aşağıda verilen tabloyu doldurunuz.

Nitel Özellik \ Fonksiyon		f(x) = x	g(x) = x+2	$t(x)=x+\frac{1}{3}$	$k(x)=x-\frac{1}{3}$	h(x) = x–2
Tanım Kümesi		$\mathbb{R}$		$\mathbb{R}$		
Görüntü Kümesi		$\mathbb{R}$		$\mathbb{R}$		
Sıfırı		0		$-\frac{1}{3}$		
İşareti	Pozitif olduğu aralık	$(0, \infty)$		$(-\infty, -\frac{1}{3})$		
	Negatif olduğu aralık	$(-\infty, 0)$		$(\frac{1}{3}, \infty)$		
Artan - Azalan		Artan		Artan		
Maksimum Noktası		Yok		Yok		
Minimum Noktası		Yok		Yok		
Bire birlik		Bire bir		Bire bir		

ÇÖZÜM

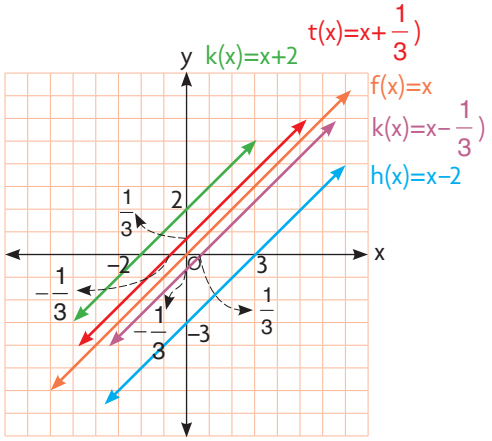
Gerçek sayılarda tanımlı f(x) = x, g(x) = x+2, h(x) = x-2, $t(x)=x+\frac{1}{3}$, $k(x)=x-\frac{1}{3}$ fonksiyonları veriliyor.

a)

Fonksiyon	x=–3	x=–1	x=0	x=1	x=3
f(x) = x	–3	–1	0	1	3
g(x) = x+2	–3 + 2 = –1	1	2	3	5
h(x) = x–2	–5	–3	–2	–1	1
$t(x)=x+\frac{1}{3}$	$-\frac{8}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{10}{3}$
$k(x)=x-\frac{1}{3}$	$-\frac{10}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{8}{3}$

b)

Fonksiyon	Fonksiyonun sıfırı	y eksenini kestiği nokta	Fonksiyonu temsil eden doğrunun eğimi
$f(x) = x$	0	0	1
$g(x) = x+2$	−2	2	1
$h(x) = x-2$	2	−2	1
$t(x) = x+\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1
$k(x) = x-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1



c) Aşağıda verilen tabloyu doldurunuz.

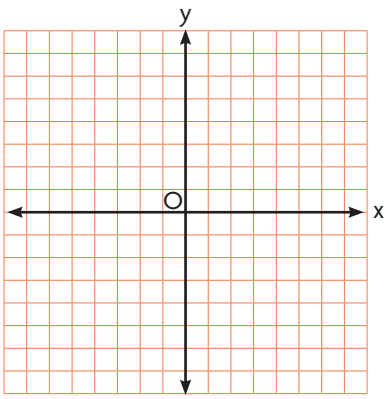
Nitel Özellik \ Fonksiyon		$f(x) = x$	$g(x) = x+2$	$t(x) = x+\frac{1}{3}$	$k(x) = x-\frac{1}{3}$	$h(x) = x-2$
Tanım Kümesi		$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Görüntü Kümesi		$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Sıfırı		0	−2	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	2
İşareti	Pozitif olduğu aralık	$(0, \infty)$	$(-2, \infty)$	$(-\infty, -\frac{1}{3})$	$(\frac{1}{3}, \infty)$	$(2, \infty)$
	Negatif olduğu aralık	$(-\infty, 0)$	$(-\infty, -2)$	$(-\frac{1}{3}, \infty)$	$(-\infty, \frac{1}{3})$	$(-\infty, 2)$
Artan - Azalan		Artan	Artan	Artan	Artan	Artan
Maksimum Noktası		Yok	Yok	Yok	Yok	Yok
Minimum Noktası		Yok	Yok	Yok	Yok	Yok
Bire birlik		Bire bir	Bire bir	Bire bir	Bire bir	Bire bir

ÖRNEK

$h:[-2,3] \to \mathbb{R},\ h(x) = x + 3 \quad g:(-4,6] \to \mathbb{R},\ g(x) = x - 2$

a) $\dfrac{h(2)+g(-1)}{g(4)}$ **işleminin sonucunu bulunuz.**

b) h ve g fonksiyonlarının grafiklerini aynı dik koordinat sisteminde çiziniz.



c) h ve g fonksiyonlarının maksimum ve minimum noktalarını bulunuz.

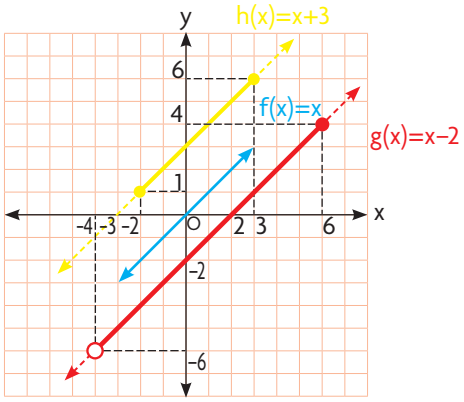
ÇÖZÜM

$h:[-2,3] \to \mathbb{R},\ h(x) = x + 3 \quad g:(-4,6] \to \mathbb{R},\ g(x) = x - 2$

a) $h(2) = 2 + 3 = 5$ ve $g(-1) = -1 - 2 = -3$ $g(4) = 4 - 2 = 2$ bulunan değerler istenen ifadede yerine yazılırsa;

$$\frac{h(2)+g(-1)}{g(4)} = \frac{5-3}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

b) h ve g fonksiyonlarının grafiklerini birim karelerden oluşan aynı dik koordinat sisteminde çizerken; öncelikle f(x) = x referans fonksiyonunu çiziniz. Bu doğrusal referans fonksiyonunu çizdikten sonra h(x) fonksiyonu için f (x) = x referans fonksiyonunu y ekseninde pozitif yönde (yukarı) 5 birim öteleyiniz. Fonksiyonu ötelerken fonksiyonun eğiminin yine f(x) = x fonksiyonun eğimiyle aynı olması gerektiğine dikkat ediniz. Benzer şekilde f(x) = x referans fonksiyonunu 2 birim y ekseni boyunca negatif yönde (aşağı) öteleyiniz. Bu öteleme sonucu oluşan g(x) fonksiyonunda eğimi f(x)=x ile aynıdır.



c)

h fonksiyonunun minimum değeri x = −2 noktasında h(−2) = 1 dir. Maksimum değeri x= 3 noktasında h(3) = 6 dır.

g fonksiyonunun minimum değeri x = −4 noktasında g(−4) = −6 dır. Maksimum değeri x = 6 noktasında g(6) = 4 tür.

GERÇEK SAYILARDA g(x) = ax +b ŞEKLİNDE TANIMLI DOĞRUSAL FONKSİYONLAR

Bu bölüme kadar g (x) = ax fonksiyonunda eğimin grafiği nasıl etkilediğini, g(x) = x + b ve g(x) = f (x + b) fonksiyonunda ise y eksenine göre ötelemenin fonksiyonu nasıl değiştirdiğini gördünüz. Şimdi bu iki durumu birleştiren g(x) = ax + b biçimindeki fonksiyonları inceleyelim. Bu fonksiyonlarda a katsayısı grafiğin eğimini, b katsayısı grafiğin y eksenini kestiği noktayı belirler.

g: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, **g(x) = a·x + b fonksiyonunun grafik temsilini** f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, **f(x) = x doğrusal referans fonksiyonunun grafik temsilinden yararlanarak nasıl elde edebileceğiniz ile ilgili fikirlerinizi yazınız.**

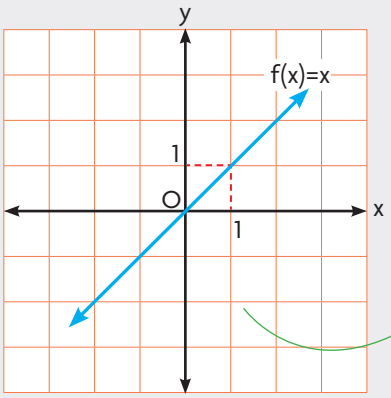
NOT

a ve b birer gerçek sayı ve $a \neq 0$ olmak üzere, gerçek sayılarda tanımlı $g(x) = ax + b$ biçimindeki doğrusal fonksiyon aşağıdaki adımlar izlenerek oluşturulur:

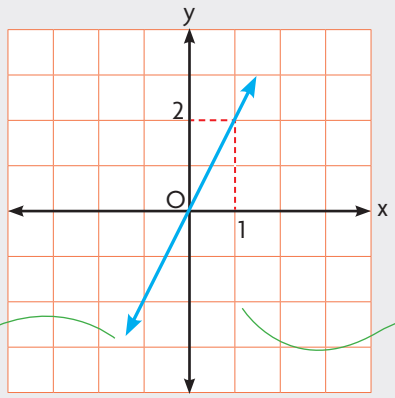
* Başlangıç olarak $f(x) = x$ fonksiyonunun grafiği çizilir.
* $f(x)$ in tanım aralığındaki her x değeri a sayısı ile çarpılarak $h(x) = ax$ fonksiyonunun grafiği elde edilir.
* Eğer $b > 0$ ise, $h(x)$ fonksiyonunun grafiği pozitif yönde b birim ötelenir. Eğer $b < 0$ ise, $h(x)$ fonksiyonunun grafiği negatif yönde $|b|$ birim ötelenir.

Bu işlemlerin sonunda elde edilen grafik, $g(x) = ax + b$ doğrusal fonksiyonunun grafiğidir.

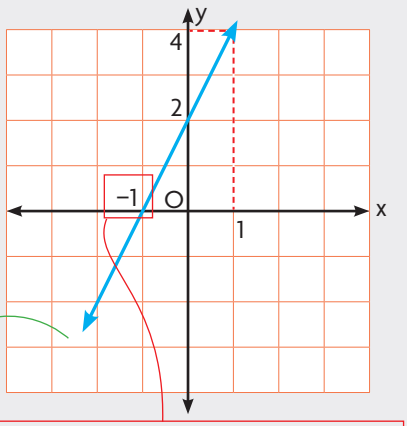
Örnek: g gerçek sayılarda tanımlı $g(x) = 2x + 2$ doğrusal fonksiyonunun grafiği $f(x) = x$ referans fonksiyonun grafik temsiline göre yukarıdaki adımlar takip edilerek çizilirse:



$f(x) = x$ referans fonksiyonunun grafiği çizilir.



$f(x) = x$ fonksiyonunu 2 kat genişleterek $g(x) = 2f(x)$ fonksiyonunun grafiği elde edilir.



$g(x) = 2f(x)$ doğrusal fonksiyonu y ekseninde pozitif yönde (yukarı) 2 birim ötelenirse $g(x) = 2f(x) + 2 = 2x + 2$ doğrusal fonksiyonunun grafiği elde edilir.

x eksenini kesen -1 noktası fonksiyonun sıfırıdır.

ÖRNEK

Gerçek sayılarda tanımlı $f(x) = x$, $g(x) = -3x + 5$, $h(x) = \frac{1}{5}x + 3$, $t(x) = 2x + 1$ fonksiyonları veriliyor.

a) f, g , h ve t fonksiyonları için verilen tabloyu doldurunuz.

Fonksiyon	x = −2	x = 0	x = 3	x = 5
$f(x) = x$	$f(-2) = -2$			
$g(x) = -3x + 5$				
$h(x) = \frac{1}{5}x + 3$				
$t(x) = 2x + 1$				

b) Aşağıdaki tabloyu doldurarak f, g, h ve t fonksiyonlarının grafiklerini aynı dik koordinat sisteminde çiziniz.

Fonksiyon	Fonksiyonun sıfırı	y eksenini kestiği nokta	Fonksiyonu temsil eden doğrunun eğimi
$f(x) = x$	0	0	1
$g(x) = -3x+5$			
$h(x) = \frac{1}{5}x + 3$			
$t(x) = 2x+1$			

c) Aşağıda verilen tabloyu doldurunuz.

Nitel Özellik \ Fonksiyon		$f(x) = x$	$g(x) = 3x+5$	$h(x) = \frac{1}{5}x + 3$	$t(x) = 2x+1$
Tanım Kümesi		$\mathbb{R}$		$\mathbb{R}$	
Görüntü Kümesi		$\mathbb{R}$		$\mathbb{R}$	
Sıfırı		0		–15	
İşareti	Pozitif olduğu aralık	(0, ∞)		(–15, ∞)	
	Negatif olduğu aralık	(–∞, 0)		(–∞, –15)	
Artan - Azalan		Artan		Artan	
Maksimum Noktası		Yok		Yok	
Minimum Noktası		Yok		Yok	
Bire birlik		Bire bir		Bire bir	

ÇÖZÜM

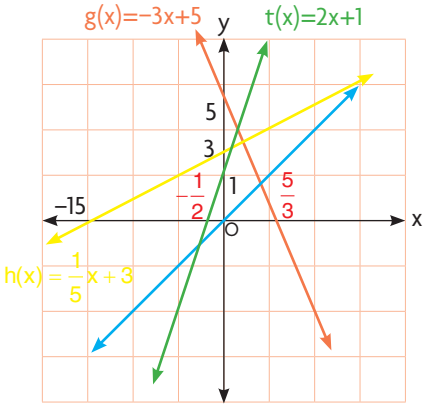
Gerçek sayılarda tanımlı $f(x) = x$, $g(x) = -3x + 5$, $h(x) = \frac{1}{5}x + 3$, $t(x) = 2x + 1$ fonksiyonları veriliyor.

a)

Fonksiyon	x=–2	x=0	x=3	x=5
$f(x) = x$	$f(-2) = -2$	0	3	5
$g(x) = -3x+5$	$-3 \cdot (-2) + 5 = 11$	5	14	20
$h(x) = \frac{1}{5}x + 3$	$\frac{1}{5} \cdot 2 + 3 = \frac{2}{5} + 3 = \frac{17}{5}$	3	$\frac{28}{5}$	4
$t(x) = 2x+1$	$2 \cdot 2 + 1 = 5$	1	7	11

b)

Fonksiyon	Fonksiyonun sıfırı	y eksenini kestiği nokta	Fonksiyonu temsil eden doğrunun eğimi
$f(x) = x$	0	0	1
$g(x) = -3x+5$	$\frac{5}{3}$	5	−3
$h(x) = \frac{1}{5}x + 3$	−15	3	$\frac{1}{5}$
$t(x) = 2x+1$	$-\frac{1}{2}$	1	2



c)

Nitel Özellik \ Fonksiyon		f(x) = x	g(x) = 3x+5	$h(x) = \frac{1}{5}x + 3$	t(x) = 2x+1
Tanım Kümesi		$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Görüntü Kümesi		$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Sıfırı		0	$\frac{5}{3}$	−15	$-\frac{1}{2}$
İşareti	**Pozitif olduğu aralık**	$(0, \infty)$	$(\frac{5}{3}, \infty)$	$(-15, \infty)$	$(-\frac{1}{2}, \infty)$
	Negatif olduğu aralık	$(-\infty, 0)$	$(-\infty, \frac{5}{3})$	$(-\infty, -15)$	$(-\infty, -\frac{1}{2})$
Artan - Azalan		Artan	Azalan	Artan	Artan
Maksimum Noktası		Yok	Yok	Yok	Yok
Minimum Noktası		Yok	Yok	Yok	Yok
Bire birlik		Bire bir	Bire bir	Bire bir	Bire bir

SIRA SİZDE 2.

f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f(x) = 4x − 20 fonksiyonu veriliyor.

Buna göre aşağıdaki ifadelerden doğru olanların başına (D) yanlış olanların başına (Y) yazınız.

a) ☐ f fonksiyonun sıfırı x = 5'tir.

b) ☐ f'nin eğimi 4'tür.

c) ☐ f, y eksenini (0, 20) noktasında keser.

d) ☐ f, x eksenini (5, 0) noktasında keser.

e) ☐ f, x < 5 için azalan fonksiyondur.

f) ☐ f, x > 5 için f(x) > 0 dır.

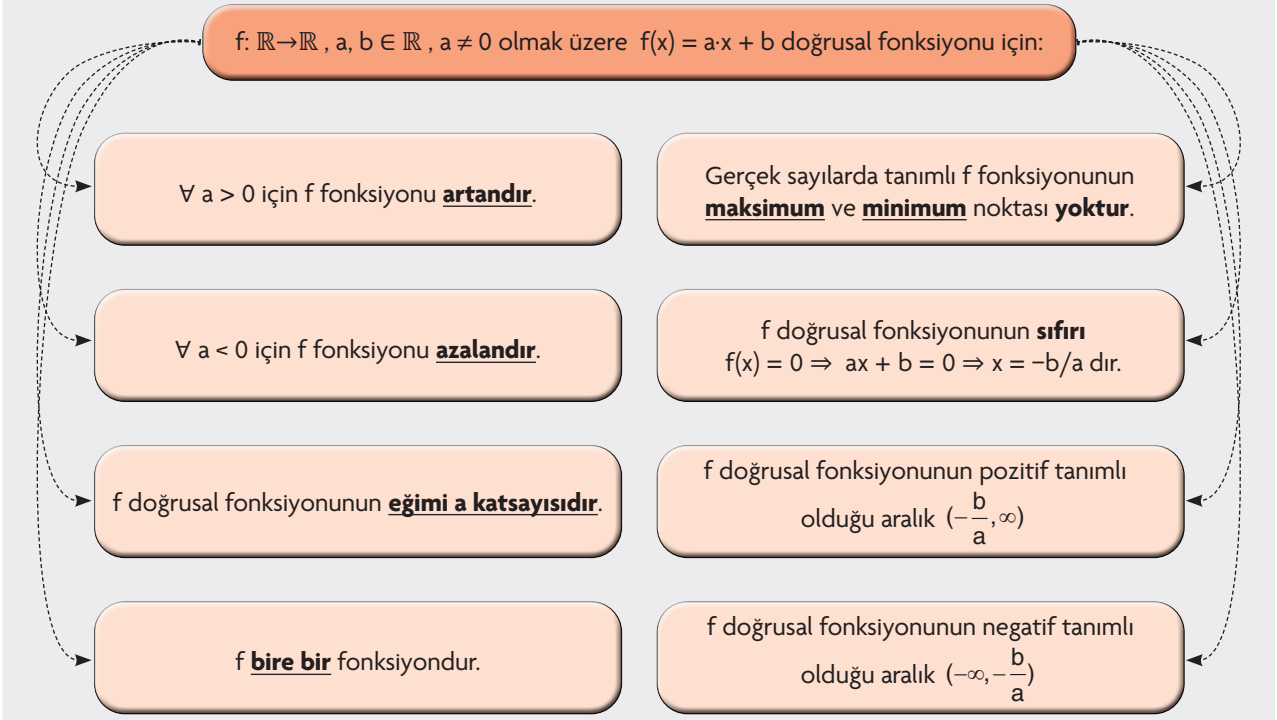
g) ☐ f, bire bir fonksiyondur.

SIRA SİZDE 3.

Gerçek sayılar kümesinde tanımlı f doğrusal fonksiyonu için, a < 0 olduğu her durumda f fonksiyonu azalandır.

Bu ifadeyi matematiğin sembolik diliyle ifade ediniz.

NOT



GERÇEK SAYILARDA a ∈ ℝ **OLMAK ÜZERE** g(x) = a **ŞEKLİNDE TANIMLI DOĞRUSAL FONKSİYONLAR**

a, b ∈ ℝ olmak üzere, gerçek sayılar kümesinde g(x) = ax + b biçiminde tanımlanan fonksiyonlara **doğrusal fonksiyon** denir.

Doğrusal fonksiyonların grafikleri düzlemde bir doğru olarak temsil edilir. Her doğrusal fonksiyon, f(x) = x doğrusal referans fonksiyonundan elde edilebilir. Grafiğin konumu ve eğimi değiştirilerek farklı doğrusal fonksiyonlar oluşturulabilir.

NOT

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x) = a \cdot x + b$ doğrusal fonksiyonunun eğimi a değerine eşittir.

$a > 0 \Leftrightarrow$ f artandır.

$a < 0 \Leftrightarrow$ f azalan.

$a = 0 \Leftrightarrow$?

$a = 0$ olursa , $f(x) = b$ olan sabit fonksiyonu elde ederiz. Sabit fonksiyon özel bir doğrusal fonksiyon olup eğimi sıfırdır.

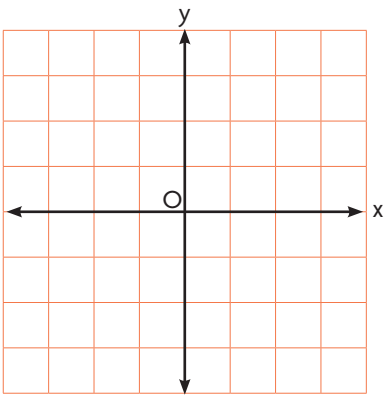
ÖRNEK

Gerçek sayılarda tanımlı $f(x) = 6$, $g(x) = 2$ ve $h(x) = -2$ fonksiyonları verilmiştir.

a) Her bir fonksiyonun, tabloda belirtilen x değerlerine karşılık gelen görüntüleri hesaplayarak ilgili boşluklara yazınız.

Fonksiyon	x = 5	x = −1	x = 8
f(x) = 4	f(5) = 4		
g(x) = 2			
h(x) = −2			

b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 4$ ve $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 2$ ve $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $h(x) = -2$ **şeklinde tanımlı f , g ve h doğrusal fonksiyonlarının grafiklerini aynı dik koordinat sistemi üzerinde çiziniz.**



c) Gerçek sayılarda tanımlı f, g ve h doğrusal fonksiyonlarına ait grafiklerin eğimleri ile ilgili ne söylenebilir?

ç) Gerçek sayılarda tanımlı f, g ve h doğrusal fonksiyonlarının nitel özellikleriyle ilgili aşağıda verilen tabloyu doldurunuz.

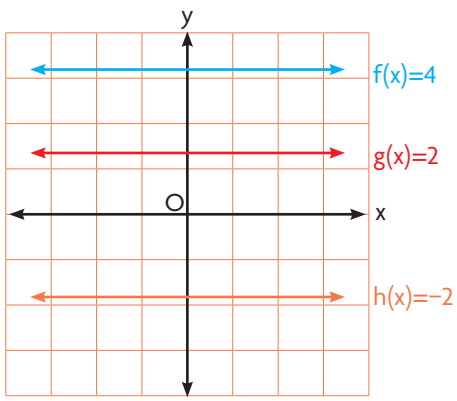
Fonksiyonun Cebirsel Temsili	Tanım Kümesi	Görüntü Kümesi	İşareti		Sıfırı	Artanlığı- Azalanlığı	Maksimum Değeri	Minimum Değeri	Bire birliği
			Pozitif değer aldığı aralık	Negatif değer aldığı aralık					
f(x) =									
g(x) =									
h(x) =									

ÇÖZÜM

a) Her bir fonksiyonun, tabloda belirtilen x değerleri için aldığı fonksiyon değerleri aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Fonksiyon	x=5	x=−1	x=8
f(x) = 4	f(5) = 4	4	4
g(x) = 2	2	2	2
h(x) = −2	−2	−2	−2

b) f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, f(x) = 4 ve g: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, g(x) = 2 ve h : $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ h(x) = −2 şeklinde tanımlı f , g ve h doğrusal fonksiyonlarının grafikleri aynı dik koordinat sisteminde aşağıda gösterilmiştir.



c) Gerçek sayılarda tanımlı f, g ve h doğrusal fonksiyonlarına ait grafiklerin eğimleri sıfırdır. Çünkü fonksiyonların grafik temsilleri x eksenine paraleldir.

ç)

Fonksiyonun Cebirsel Temsili	Tanım Kümesi	Görüntü Kümesi	İşareti		Sıfırı	Artanlığı- Azalanlığı	Maksimum Değeri	Minimum Değeri	Bire birliği
			Pozitif değer aldığı aralık	Negatif değer aldığı aralık					
f(x) = 4	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	Yok	Yok	ne artan ne azalandır.	Yok	Yok	bire bir değildir
g(x) = 2	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	Yok	Yok	ne artan ne azalandır.	Yok	Yok	bire bir değildir
h(x) = –2	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	Yok	$\mathbb{R}$	Yok	ne artan ne azalandır.	Yok	Yok	bire bir değildir

Yukarıdaki tabloyu da dikkate alarak, gerçek sayılarda tanımlı sabit fonksiyonların nitel özellikleriyle ilgili nasıl bir çıkarımda bulunabileceğinizi yazınız.

_____

_____

NOT

f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, a, b $\in \mathbb{R}$ olmak üzere f(x) = ax + b doğrusal fonksiyonunda a = 0 için f(x) = b fonksiyonuna **sabit fonksiyon** denir.

* Sabit fonksiyon bir doğrusal fonksiyondur.
* Sabit fonksiyonlar bire bir değildir.
* Sabit fonksiyonların eğimi sıfırdır.
* Sabit fonksiyonlar ne artan ne azalandır.
* f (x) = b sabit fonksiyonu için,

  b > 0 ise f fonksiyonu pozitiftir.

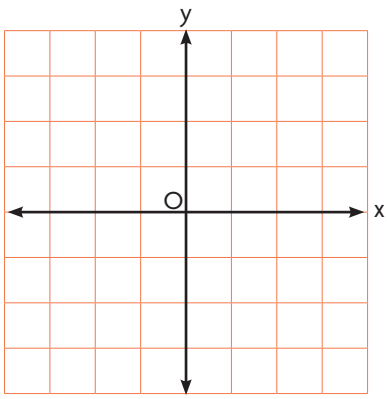
  b < 0 ise f fonksiyonu negatiftir.

SIRA SİZDE 4.

Gerçek sayılarda tanımlı f fonksiyonu sabit fonksiyon olduğuna göre, $\frac{f(5)+f(-1)}{f(2)}$ **ifadesinin değeri kaçtır?**

SIRA SİZDE 5.

Gerçek sayılarda tanımlı $f(x) = 3$, $g(x) = -6$ ve $h(x) = 1/2$ **fonksiyonlarının grafiklerini verilen dik koordinat siteminde çiziniz.**



SIRA SİZDE 6.

Aşağıda verilen f, g, h ,k ve r fonksiyonlarına ait nitel özellikleri tabloda boş bırakılan yerlere doldurunuz.

Fonksiyonun Cebirsel Temsili	Tanım Kümesi	Görüntü Kümesi	İşareti		Sıfırı	Artan- Azalan Olma Durumu	Maksimum Değeri	Minimum Değeri	Bire Bir Olma Durumu
			Pozitif değer aldığı aralık	Negatif değer aldığı aralık					
$f(x) = x$					0	Artan	Yok	Yok	
$g(x) = 2(x + 1) - 2$									
$h(x) = -\frac{1}{4}x + 1$									
$k(x) = 3(x - 1) + 2$									
$r(x) = 0(x + 2) - 1$									

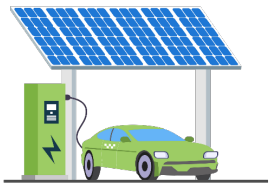
GERÇEK SAYILARDA TANIMLI FONKSİYONLARIN PARÇALI GÖSTERİMİ

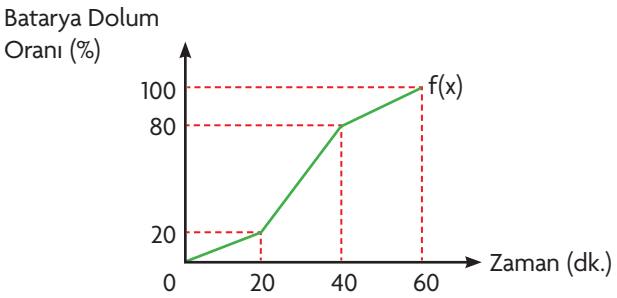
Gerçek yaşamda bir olay, farklı koşullarda farklı kurallara göre işleyebilir. Bu tür durumları parçalı fonksiyonlar yardımıyla ifade ederiz.

Tanım kümesinin farklı alt kümelerinde farklı cebirsel temsillerle ifade edilen fonksiyonlara **parçalı fonksiyon** denir. Bu yüzden, her parça belirli bir aralıkta geçerli olan cebirsel temsili gösterir.

Örneğin; bir otoparkta, ilk 1 saat için 10 TL, sonraki her saat için 5 TL alınmaktadır. Bu durumda, toplam ücret her zaman aynı oranda artmadığı için, bu durumu tek bir kuralla göstermek mümkün değildir. Farklı saat aralıkları için farklı ücret kuralları olduğundan, bu ilişki parçalı bir fonksiyon ile ifade edilir.

Aşağıda, bir elektrikli aracın bataryasının zamana göre dolumunu gösteren bir grafik verilmiştir. Sizce bu grafiğe ait f fonksiyonu tek bir cebirsel temsil ile ifade edilebilir mi?





NOT

Gerçel sayılarda tanımlı f parçalı fonksiyonu aşağıdaki gibi gösterilir.

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} g(x), & x < a \\ h(x), & x \geq a \end{cases}$$

Parçalı fonksiyonlar iki ya da daha fazla parçadan oluşabilir. Fonksiyonunun parçalarının ortak sınırı olan x = a noktasına **kritik nokta** denir.

ÖRNEK

f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere

$$f(x) = \begin{cases} 5x-2, & x < 3 \\ 4x+3, & x \geq 3 \end{cases}$$

a) f fonksiyonunun kritik noktasını yazınız.

b) Aşağıda verilen fonksiyon değerlerini bulunuz.

f(0) =

f(1) =

f(3) =

f(4) =

ÇÖZÜM

f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere

$$f(x) = \begin{cases} 5x - 2, & x < 3 \\ 4x + 3, & x \geq 3 \end{cases}$$

a) Bu fonksiyonun kritik noktası x = 3 tür. Fonksiyonu tanımlayan cebirsel kural sınır değeri 3' ün sağ ve solunda farklılaşır.

b) Tanım kümesinin her bir elemanı incelenirken, kritik nokta dikkate alınarak o aralığa uygun cebirsel ifade kullanılır.

$0 < 3$ $\quad f(0) =$ $f(0) = 5\cdot0-2 = -2$

$1 < 3$ $\quad f(1) =$ $f(1) = 5\cdot1-2 = 3$

$3 \leq 3$ $\quad f(3) =$ $f(3) = 4\cdot3 + 3 = 15$

$3 \leq 4$ $\quad f(4) =$ $f(4) = 4\cdot4+3 = 19$

ÖRNEK

Bir internet servis sağlayıcısının aylık ücreti 80 TL'dir. Bu ücret, müşterilerin ayda 50 GB'a kadar internet kullanmasını sağlar. 50 GB'ı aşan kullanımda, müşterilerden her ekstra 1 GB internet için 2 TL ek ücret alınır. Toplam internet kullanımı bir ayda en fazla 70 GB ile sınırlıdır.

Buna göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) Müşteri, 0–50 GB (50 GB dahil) arasında internet kullanıyorsa, ödeyeceği toplam ücreti cebirsel olarak ifade ediniz.

b) Müşteri, 50 GB'dan fazla internet kullanıyorsa, ödeyeceği toplam ücreti cebirsel olarak ifade ediniz.

c) Müşterinin internet kullanımına göre ödeyeceği tutarı tek bir fonksiyon ile ifade edebilir miydiniz? Açıklayınız.

ç) 60 GB internet kullanan bir müşteri toplam ne kadar fatura öder?

ÇÖZÜM

a) Müşteri, 0–50 GB (50 GB dahil) arasında internet kullanıyorsa, ödeyeceği toplam ücret cebirsel olarak $g(x) = 80$

b) Müşteri, 50 GB'dan fazla internet kullanıyorsa, ödeyeceği toplam ücret cebirsel olarak
$h(x) = 80 + 2(x - 50)$ (x kullanılan internet miktarı)

c) Müşteri, 50 GB'a kadar olan kullanım için 80 TL ödemektedir. Ancak, 50 GB'ı aştıktan sonra her 1 GB için ek olarak 2 TL ödemesi gerekmektedir. Bu nedenle, ödeme tutarı **tüm aralıklar için aynı kuralı izlememekte**, kullanım miktarına bağlı olarak **değişmektedir**.

$$f(x) = \begin{cases} 80, & 0 \le x \le 50 \\ 80 + 2(x - 50), & x > 50 \end{cases}$$

ç) 60 GB internet kullanımı 50 GB'ı geçtiği için fonksiyonun $f(x) = 80 + 2(x - 50)$ cebirsel temsili kullanılır.
$f(60) = 80 + 2(60 - 50) = 80 + 20 = 100$. Bu durumda 60 GB internet kullanan bir müşteri 100 TL ödeyecektir.

GERİ BİLDİRİM

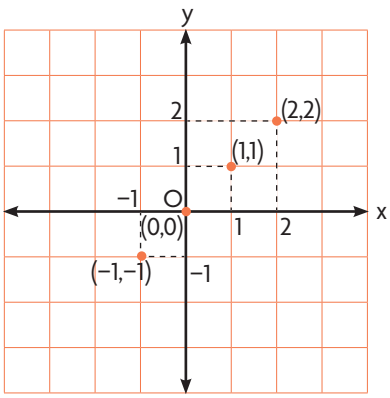
Bu geribildirim sayesinde kendi cevabınızı kontrol edebilir, hatalarınızı düzelterek öğrenmenizi pekiştirebilirsiniz.

ETKİNLİK 1.

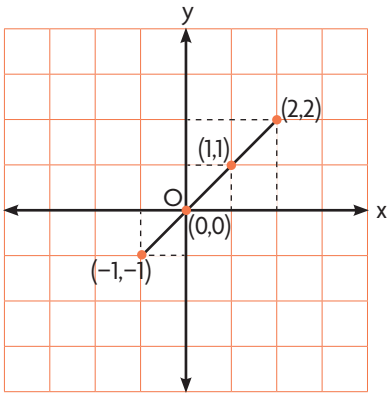
ÇÖZÜM

1. (-1,-1)
(0, 0)
(1, 1)
(2, 2)

2.



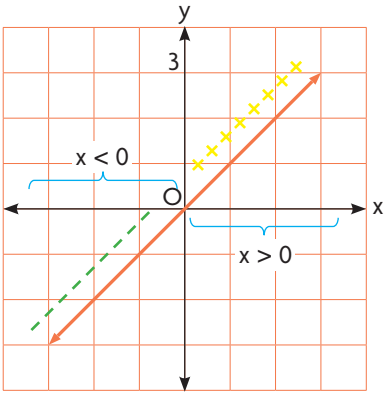
3.



4. Doğrusal referans fonksiyonu artandır.

5. Bağımsız değişken x=0 için bağımlı değişken y=0 dır.

6.



Bağımsız değişken x > 0 değerleri için bağımlı değişken y > 0 olur.

x < 0 değerleri için y < 0 olur.

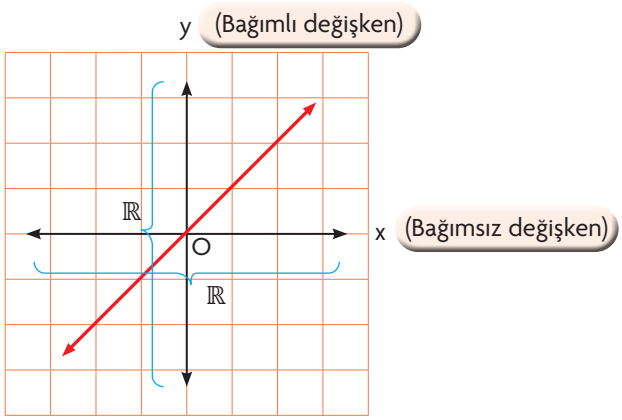
7. Bağımsız değişkenin aldığı değerler arttıkça, fonksiyonun aldığı değerlerin de arttığı görülmektedir. Bağımsız değişken ile bağımlı değişken arasındaki ilişki doğrusal olduğundan, bu durum fonksiyonun eğimiyle ilişkilidir. Eğimin pozitif olması, f(x) = x cebirsel ifadesinin artan bir fonksiyon olduğunu göstermektedir.

8. Bağımsız değişkenin aldığı herhangi iki farklı değer için f fonksiyonunun aldığı değerler birbirinden farklıdır. Aşağıdaki tabloyu detaylı bir şekilde inceleyiniz.

x	f(x)
–2	–2
$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$
–1	–1
0	0
1	1
$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$
2	2
100	100

Tabloda da görüldüğü üzere bağımsız her bir değişkene karşılık f(x) fonksiyonun farklı bir değeri vardır.

9.



Bağımsız değişken kümesi : ℝ

Bağımlı değişken kümesi : ℝ

SIRA SİZDE 1.
ÇÖZÜM

Fonksiyonun Cebirsel Temsili	Tanım Kümesi	Görüntü Kümesi	İşareti		Sıfırı	Artan- Azalan Olma Durumu	Maksimum Değeri	Minimum Değeri	Bire Bir Olma Durumu
			Pozitif değer aldığı aralık	Negatif değer aldığı aralık					
f(x) = x	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	(0, ∞)	(-∞, 0)	0	Artan	Yok	Yok	Birebir

SIRA SİZDE 2.
ÇÖZÜM

c) D

d) D

e) Y (x = 0 yazılırsa y eksenini kestiği nokta −20 olur.)

f) D (4x−20 = 0 ise x = 5 olur.)

g) Y (f, x < 5 için negatif tanımlıdır. Fonksiyonun negatif tanımlı olması ile azalan olması farklı kavramlardır.)

h) D

i) D

SIRA SİZDE 3.
ÇÖZÜM

Önerme

f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, a, b ∈ R , a ≠ 0 olmak üzere f(x) = a·x + b doğrusal fonksiyonu için:

∀ a < 0 için f fonksiyonu azalandır.

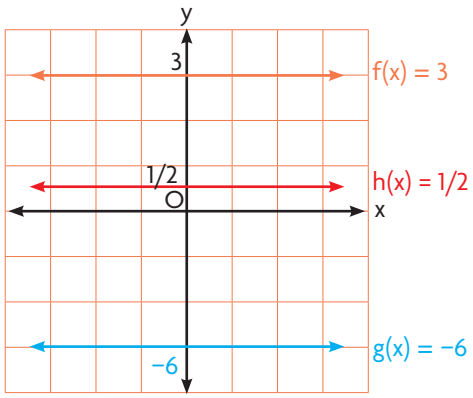
∀ x_1, $x_2 \in \mathbb{R}$ → $x_1 > x_2$ iken $f(x_1) > f(x_2)$

SIRA SİZDE 4.
ÇÖZÜM

f(x) = a olsun, f(5) = a, f(−1) = a ve f(2) = a olur.

Buna göre, $\frac{f(5)+f(-1)}{f(2)} = \frac{a+a}{a} = \frac{2a}{a}$ → = 2 olur.

SIRA SİZDE 5.
ÇÖZÜM



SIRA SİZDE 6.
ÇÖZÜM

Fonksiyonun Cebirsel Temsili	Tanım Kümesi	Görüntü Kümesi	İşareti		Sıfırı	Artanlığı- Azalanlığı	Maksimum Değeri	Minimum Değeri	Bire birliği
			Pozitif değer aldığı aralık	Negatif değer aldığı aralık					
$f(x) = x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$(0, \infty)$	$(-\infty, 0)$	0	Artan	Yok	Yok	Bire birdir.
$g(x) = 2(x+1) - 2$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$(0, \infty)$	$(-\infty, 0)$	0	Artan	Yok	Yok	Bire birdir.
$h(x) = -\frac{1}{4}x + 1$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$(4, \infty)$	$(-\infty, 4)$	4	Azalan	Yok	Yok	Bire birdir.
$k(x) = 3(x - 1) + 2$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$(\frac{1}{3}, \infty)$	$(-\infty, \frac{1}{3})$	1/3	Artan	Yok	Yok	Bire birdir.
$r(x) = 0(x+2) - 1$	$\mathbb{R}$	−1	Yok	$\mathbb{R}$	Yok	Sabit	Yok	Yok	Bire bir değidir.

DEĞERLENDİRİYORUM

Amaç: Bu bölümde, öğrendiklerinizi gözden geçirmenizi, kendi öğrenme sürecinizi değerlendirmenizi ve eksiklerinizi fark etmenizi amaçlıyoruz.

Soruları dikkatle yanıtlayınız. Cevaplarınızı geri bildirimlerle karşılaştırarak eksik gördüğünüz noktaları tekrar ediniz.

SORULAR

1. Bir aracın deposu tam dolu iken 50 litre yakıt bulunmaktadır. Araç her 20 km'de 3 litre yakıt harcamaktadır. Aracın aldığı yol (km cinsinden) x ile depoda kalan yakıt miktarı (litre) g(x) arasında doğrusal bir ilişki vardır.

Buna göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) Aracın aldığı yol x ile depoda kalan yakıt miktarı g(x) arasındaki ilişkiyi cebirsel olarak ifade ediniz.

b) Depodaki yakıt ile aracın gidebileceği yol değerleri tanım kümesi, depoda kalan yakıt miktarları ise görüntü kümesini ifade etmektedir.

Buna göre fonksiyonun tanım kümesini ve görüntü kümesini belirleyiniz.

c) Araç 100 km yol aldığında depoda kaç litre yakıt kalır?

ç) Depoda 20 litre yakıt kaldığında araç kaç km yol almıştır?

d) Fonksiyonun eğiminin ve sabit teriminin bu senaryodaki anlamını açıklayınız.

e) Elde ettiğiniz fonksiyonu dik koordinat düzleminde gösteriniz.

2. Gerçek sayılarda tanımlanan azalan bir y = f(x) fonksiyonunda,

- f(5) = 12
- f(3m – 4) = 4

olduğuna göre m'nin alabileceği en küçük tam sayı değeri kaçtır?

3. Gerçek sayılar kümesi üzerinde tanımlı f fonksiyonu

f(x) = 3x + 2

biçiminde veriliyor.

Buna göre,

I. f(x) + 4 fonksiyonunun sıfırı – 2'dir.

II. f(x) + 2 fonksiyonunu temsil eden doğrunun eğimi ile f(x) - 6 fonksiyonunu temsil eden doğrunun eğimi aynıdır.

III. f(x) + 7 fonksiyonu artandır.

ifadelerinden hangileri doğrudur? Açıklayınız.

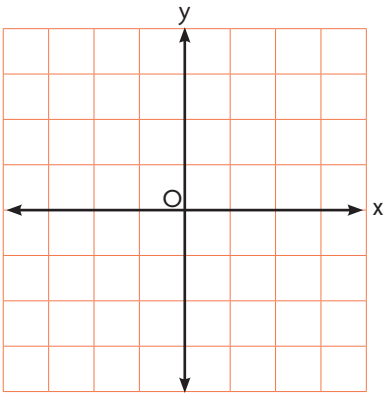
4. Bir bisiklet yarışında iki sporcu, başlangıç çizgisinden aynı anda yarışa başlamaktadır.. Her iki sporcu da yarışın ilk 10 saniyesinde sabit ivme ile hızlanmaktadır. İvme, bisikletin hızının zamana göre değişme miktarını göstermektedir. Sporcuların zamana (saniye) bağlı süratlerini (m/s) gösteren fonksiyonlar sırasıyla f ve g olmak üzere:

$f : [0, 10] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 0{,}8 \cdot x$

$g : [0, 10] \to \mathbb{R}, \quad g(x) = 1{,}2 \cdot x$

şeklinde tanımlanmıştır.

a) Tanımlı oldukları aralıklarda f ve g fonksiyonlarının grafiklerini aynı dik koordinat düzleminde çiziniz.



b) Grafiklerin eğimlerini karşılaştırarak hangi sporcunun ivmesinin daha büyük olduğunu açıklayınız.

c) Her iki sporcunun 10 saniye sonunda ulaştıkları hızları bulunuz. Bu hız değerlerinin, grafiklerin maksimum değerleriyle ilişkisini açıklayınız.

5. Görsel de verilen bir rüzgâr türbininin elektrik üretim verimliliği, esen rüzgârın hızıyla (m/s) doğrusal olarak değişmektedir:



- Rüzgâr hızı **0 – 3 m/s** arasında türbin çalışmaz, verimlilik **0'dır**.
- Rüzgâr hızı **3 – 12 m/s** arasında arttıkça türbinin verimliliği **doğrusal olarak artar**.
- Rüzgâr hızı **12 m/s ve üzeri** olduğunda türbin güvenlik nedeniyle sabit hızda çalışır ve verimlilik 100 (**%100**) olarak kalır.

Buna göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) Türbinin verimliliğini f(x) rüzgâr hızına (x) bağlı olarak ifade eden parçalı fonksiyonun cebirsel temsilini yazınız.

b) Türbinin verimliliğini aşağıdaki verilen rüzgâr hızları için bulunuz.

- x = 2 m/s
- x= 7 m/s
- x = 14 m/s

c) Fonksiyonun tanım kümesini ve görüntü kümesini belirleyiniz.

ç) Fonksiyonun hangi aralıklarda azalan/ artan ve sabit olduğunu belirtiniz.

GERİ BİLDİRİM

Bu geri bildirim sayesinde kendi cevabınızı kontrol edebilir, hatalarınızı düzelterek öğrenmenizi pekiştirebilirsiniz.

ÇÖZÜM 1.

Depoda tam doluyken 50 l yakıt var ve araç her 20 km'de 3 l yakıt harcıyor. Gidilen mesafe x km ile depoda kalan yakıt g(x) arasında doğrusal bir ilişki vardır.

a) Her 1 km için harcanan yakıt:

$$\frac{3}{20} = 0{,}15 \text{ L / km}$$

Depodaki yakıt, başta 50 l iken araç gittikçe yakıt miktarı azalır. Buna göre x kilometre, g(x) depoda kalan benzin miktarının litre cinsinden değeri g(x) = 50 - 0,15x fonksiyonunun cebirsel temsili ile hesaplanır.

b) Tanım kümesi ve görüntü kümesi

Tüm benzin bitene kadar gidilebilen maksimum mesafe:

$$50 - 0{,}15x = 0$$
$$50 = 0{,}15x$$
$$x = \frac{1000}{3} \text{ km olur.}$$

Aracın alabileceği yol (x) 0 ile 1000/3 km arasındadır. Dolayısıyla

Tanım Kümesi: $\left[0, \frac{1000}{3}\right]$

Depodaki yakıt miktarı 0 ile 50 arasında değişir: Görüntü kümesi : [0, 50]

c) x = 100 km iken depoda kalan benzin miktarı g(100) = 50 - 0,15 · 100 = 50 - 15 = 35 L olur.

ç) Depoda 20 L kaldığında aracın kaç kilometre yol aldığını 20 = 50 - 0,15x cebirsel eşitliği ile bulabilirsiniz.

$$200 = 50 - 0{,}15x \text{ ise } 0{,}15x = 30$$
$$x = \frac{30}{0{,}15} = 200 \text{ km olur.}$$

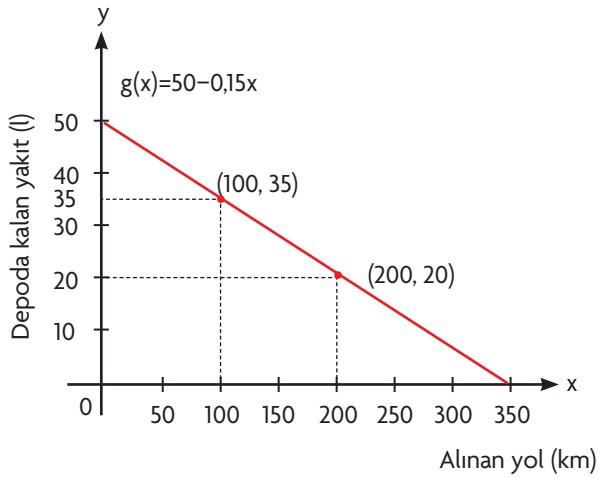
d) Eğim ve sabit terimin anlamı

Fonksiyondaki sabit terim (50), aracın henüz hiç yol almadığı durumda (x=0) depoda bulunan yakıt miktarını gösterir. Yani başlangıçta depoda 50 litre yakıt vardır.

Fonksiyonun eğimi (-0,15) ise aracın her 1 kilometrede 0,15 litre yakıt harcadığını ifade eder. Eğim değerinin negatif olması, yol arttıkça depodaki yakıt miktarının azaldığına işaret eder.

Başka bir deyişle, "araç her 20 kilometrede 3 litre yakıt tüketmektedir" ifadesiyle aynı anlama gelir.

e) x ekseninde aracın aldığı yol (km), y ekseninde depoda kalan yakıt miktarı (l) olmak üzere doğrusal fonksiyonun dik koordinat düzleminde grafik temsili aşağıda verilmiştir.



- (0, 50) — başlangıç yakıtı
- (100, 35) — 100 km sonra 35 l
- (200, 20) — 200 km sonra 20 l

Başlangıçta, hiç yol alınmadığında (0, 50) noktasında araç deposunda 50 litre yakıt bulunur. Araç 100 km yol aldığında (100, 35) noktasına gelir ve depoda 35 litre yakıt kalır. 200 km yol sonunda (200, 20) noktasında ise depoda 20 litre yakıt kalır.

Son olarak, yaklaşık 333 km (x = 1000/3) yol alındığında, depodaki yakıt tamamen biter ve grafik y = 0 noktasına ulaşır.

ÇÖZÜM 2.

f fonksiyonu azalan bu nedenle $5 < 3m - 4$ olur.

$5 < 3m - 4$

$= 5 + 4 < 3m$

$= 9 < 3m$

$= 3 < m$

Bu durumda m' nin alabileceği en küçük tam sayı değeri 4 olur.

ÇÖZÜM 3.

Gerçek sayılar kümesi üzerinde tanımlı f fonksiyonu

$f(x) = 3x + 2$

biçiminde veriliyor.

Buna göre verilen her ifadeyi sırası ile inceleyiniz.

I. f(x) + 4 fonksiyonunun sıfırı -2'dir. g(x) = f(x) + 4 olsun. Fonksiyonun sıfırı g(x) = 0 olmalıdır. 3x + 2 + 4 = 0 ise 3x + 6 = 0 olur. Bu durumda 3x = -6 ve x = -2 olur. Yani I. ifade doğrudur.

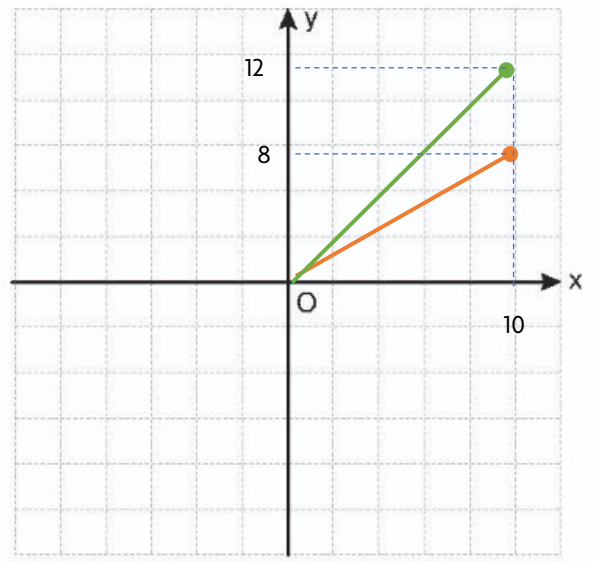
II. f(x) + 2 fonksiyonunu temsil eden doğrunun eğimi ile f(x) -6 fonksiyonunu temsil eden doğrunun eğimi aynıdır. Bu ifade de doğrudur çünkü fonksiyonu y ekseninde pozitif yönde 2 birim yukarı yönde ötelemek ile fonksiyonu y ekseninde negatif yönde 2 birim aşağı ötelemek fonksiyonun eğimini değiştirmez.

III. f(x) + 7 fonksiyonu artandır. Doğru bir ifadedir çünkü g(x) = f(x) + 7 olsun, buna göre g(x) = 3x + 2 + 7 = 3x + 9 olur. Yani fonksiyonun eğimi 3 > 0 olduğundan artandır.

Verilen ifadelerin hepsi doğrudur.

ÇÖZÜM 4.

a) f ve g fonksiyonlarının grafik temsilleri aynı dik koordinat düzlemde aşağıdaki gibidir.



Koordinat düzleminde; x ekseninde zaman (s),
y ekseninde hız (m/s) gösterilmektedir.

Grafikte her iki doğru orijinden başlamaktadır fakat eğimleri farklıdır. Eğimi daha büyük olan doğru (g), zamana göre hızını daha fazla artırır; bu nedenle t = 10 noktasına geldiğinde daha yüksek bir hız değeri (12 m/s) elde edilir. Eğer tanım kümesi genişletilseydi (ör. t > 10), bu doğrular için daha büyük hız değerleri de elde edilebilirdi. Ancak verilen bilgiler yalnızca ilk 10 saniyeyi kapsadığından maksimum hızları t = 10'da bulunur.

b) İvme, bir cismin hızının zamana göre değişme miktarını gösterir. f için ivme $a_f = 0{,}8\ m/s^2$, g için $a_g = 1{,}2\ m/s^2$.

Bu durumda, g fonksiyonunun eğimi daha büyüktür. Bu durumda ikinci sporcunun ivmesi daha büyük olduğu için, daha kısa sürede hızını daha fazla artırır, yani daha güçlü ve hızlı bir şekilde hızlanır.

c) Fonksiyonlar f (t) = 0.8t ve g (t) = 1,2t verildiğine göre t = 10 için:

f(10) = 0,8.10 = 8 m/s , g(10) = 1,2 • 10 = 12 m/s

Yani 10. saniye sonunda birinci sporcu 8 m/s, ikinci sporcu 12 m/s hızındadır.

Bu hızların, grafiklerin maksimum değerleriyle ilişkisi aşağıda detaylı bir şekilde açıklanmıştır.

Fonksiyonlar yalnızca $t \in [0, 10]$ aralığında tanımlıdır. Bir fonksiyonun maksimumu, tanım kümesi içindeki en büyük y (hız) değeridir.

Her iki fonksiyon doğrusal ve pozitif eğimli (eğimler 0,8 ve 1,2) olduğundan, zaman arttıkça hız sürekli artar. Bu yüzden en büyük hız tanım kümesinin sağ ucu olan t = 10 noktasında elde edilir. Buna göre f fonksiyonunun grafiğinin maksimum değeri f (10) = 8 m/ s, g fonksiyonunun maksimum değeri g (10) = 12 m/s'tir. Yani 10. saniyede ulaşılan hızlar, aynı zamanda grafiklerin bu tanım aralığındaki maksimumlarıdır.

ÇÖZÜM 5.

a) Rüzgâr hızı x (m/s) iken türbinin verimliliğini f(%) ile gösterilirse parçalı fonksiyon şöyle yazılır:

- $x \le 3$: Rüzgâr zayıf; türbin dönmüyor ve verim %0
- $3 < x < 12$: Rüzgâr güçlendikçe verim doğrusal olarak artar. Bu durumda her 1 m/s rüzgâr hızı artışında verimi yani doğrunun eğimi: $\frac{100-0}{12-3} = \frac{100}{9}$
- $x \ge 12$: Güvenlik/denetim nedeniyle türbin sabit çalışır; verim %100'de sabit kalır.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x \le 3 \\ \frac{100}{9} \cdot (x-3), & 3 < x < 12 \\ 100, & x \ge 12 \end{cases}$$

b) Verimlilikleri hesaplayalım

• x = 2 m/s için: 2, ilk aralıktadır ($x \le 3$) $\rightarrow f(2) = 0$

Rüzgâr çok zayıf, türbin çalışmıyor.

• x = 7 m/s çin: 7, doğrusal artış aralığında ($3 < x < 12$) $f(7) = \frac{100}{9}(7-3)$

$$= \frac{100}{9} \cdot 4 = \frac{400}{9}$$

Yaklaşık % **44,4** verim.

• x = 14 m/s için: $14 \ge 12$ $f(14) = 100$

Türbin güvenlik nedeniyle sabit hızda çalışıyor ve verim %100.

c) Fonksiyonun tanım kümesi ve görüntü kümesi

Tanım kümesi: Gerçekçi fiziksel modelde rüzgâr hızı negatif olamayacağından:

T.K = $[0, \infty)$ olur.

Görüntü kümesi: Verimlilik % 0 ile % 100 arasında ve uç değerler dahil olduğundan:

G.K = [0, 100] olur.

ç) [0, 3]aralığında: f (x) = 0 sabit yani fonksiyon bu aralıkta **ne artan ne azalan** (sabit).

• (3-12) aralığında: $f(x) = \frac{100}{9}(x-3)$ doğrusal ve eğimi pozitif (100/9 > 0) fonksiyon bu aralıkta **artandır**.

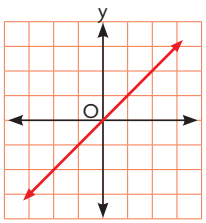
• [12, ∞)aralığında: f(x) = 100 sabit yani fonksiyon bu aralıkta **ne artan ne azalan** (sabit).

ÖĞRENDİKLERİM

Amaç: Bu bölümde, öğrendiklerinizi özetlemenizi, günlük hayatta ve farklı derslerde kullanabileceğiniz bilgileri belirlemenizi amaçlıyoruz.

Verilen bilgileri dikkatle okuyunuz. Temanın temel kavramlarını, önemli noktalarını ve bağlantılarını gözden geçirerek öğrenmenizi pekiştiriniz.

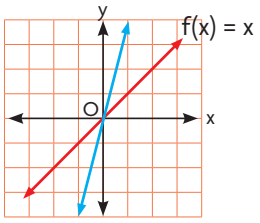
GERÇEK SAYILARDA TANIMLI DOĞRUSAL FONKSİYON KİMLİK KARTI



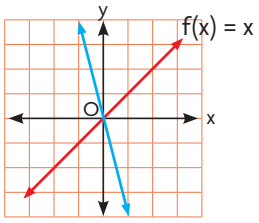
• (0, ∞) bu aralıkta fonksiyon pozitif f(x) > 0

• (−∞, 0) aralıkta fonksiyon işareti negatif f(x) < 0 dır.

g(x) = a · f(x) fonksiyon grafiği, y = g(x) fonksiyon grafiğinin dikey yönde (y ekseni boyunca) a katı kadar genişlemesiyle oluşan grafiktir.



g(x) = 3x



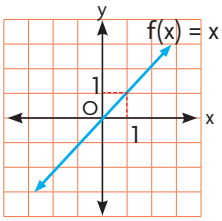
g(x) = −3x

* Başlangıç olarak f(x) = x fonksiyonunun grafiği çizilir.

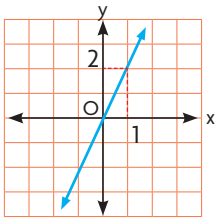
* f(x)'in tanım aralığındaki her x değeri a sayısı ile çarpılarak h(x) = ax fonksiyonunun grafiği elde edilir.

* Eğer b > 0 ise, h(x) fonksiyonunun grafiği pozitif yönde b birim ötelenir.

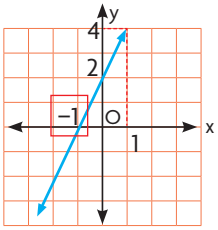
* Eğer b < 0 ise, h(x) fonksiyonunun grafiği negatif yönde b birim ötelenir.



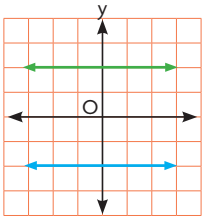
f(x) = x



h(x) = 2f(x) = 2x



g(x) = 2f(x) + 2 = 2x + 2



• g: ℝ → ℝ, a ∈ ℝ olmak üzere g(x) = a doğrusal fonksiyonu **sabit fonksiyon**dur.

• Sabit fonksiyonlar bire bir değildir.

• Sabit fonksiyonların eğimi sıfırdır.

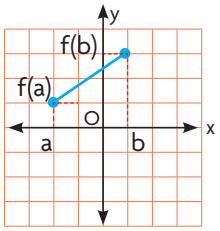
• Sabit fonksiyonlar ne artan ne azalandır.

Tanım Kümesi, bağımsız değişkenler kümesi

Görüntü Kümesi, bağımlı değişkenler kümesi

f(x) = x, g(x) = ax ve g(x) = ax + b fonksiyonları için;

- Tanım Kümesi: ℝ
- Görüntü Kümesi: ℝ
- **Bire bir** fonksiyonlardır.
- **Fonksiyon sıfıra eşitlenerek fonksiyonların sıfır noktası bulunur.**
  - f(x) = x doğrusal referans fonksiyonu ile g(x) = ax doğrusal fonksiyonlarının sıfırı 0'dır.
  - g(x) = ax + b doğrusal fonksiyonun sıfır $x = -\frac{b}{a}$ noktasıdır.
- Gerçek sayılarda tanımlı fonksiyonların **maksimum** ve **minimum** noktası **yoktur**. Ancak bu durum fonksiyonun tanım kümesine göre **DEĞİŞİR:**



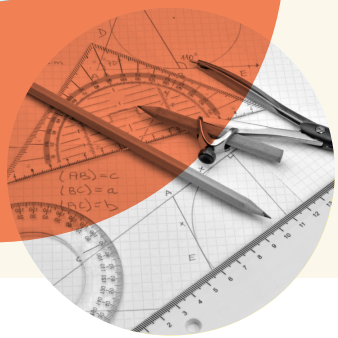
[a , b] 'nda tanımlı f fonksiyonunda maksimum değer f(b), maksimum nokta (b, f(b)) dir, minimum değer f(a), minimum nokta (a, f(a)) dır.

- a katsayısının işaretine göre fonksiyon artan ya da azalan olur.

a > 0 ise eğim pozitif ve fonksiyon artan,

a < 0 ise eğim negatiftir ve fonksiyon azalandır.

Daha fazlası için karekodu okutunuz.



MUTLAK DEĞER FONKSİYONU

BAŞLARKEN

Sevgili öğrencimiz, bu çalışma kartında sizlerin bireysel öğrenme yolculuğunuza destek sunmak amaçlanmaktadır. Çalışmalarınızı yürütürken "Hazırlanıyorum", "İlişkilendiriyorum", "Uygulayarak Öğreniyorum", "Değerlendiriyorum" ve "Öğrendiklerim" bölümlerini sırası ile yapmanızı; her bölüm ve etkinlik sonundaki geri bildirimleri alarak ilerlemenizi; "Öğrendiklerim" bölümünde öğrenme sürecinizi gözden geçirmenizi bekliyoruz.

Bu çalışma kartında mutlak değer fonksiyonlarını inceleyebilmek için doğrusal fonksiyonlara bağlı olarak analojik çıkarımlarda bulunup aşağıdaki soruları yanıtlayabileceksiniz.

- Mutlak değer fonksiyonlarının grafikleri nasıl yorumlanır?
- Mutlak değer fonksiyonlarının görüntü kümesine yönelik hangi çıkarımlar yapılabilir?
- $f(x) = \pm |ax \pm b| \pm c$ biçimindeki bir fonksiyonda a, b ve c katsayılarının değişimi grafiği nasıl etkiler?

HAZIRLANIYORUM

Amaç: Bu bölümde ön bilgilerinizi hatırlamanızı ve temaya hazırlıklı hâle gelmenizi amaçlıyoruz.

Aşağıda yer alan ifadeler, bu temada tamamlanması hedeflenen öğrenme çıktısını ele almadan önce sahip olmanız gereken bazı temel becerileri içermektedir. Lütfen her bir ifadeyi dikkatlice okuyunuz. Kendi düşüncenize uygun olana tik işareti (✓) koyunuz, uygun olmayanı boş bırakınız.

SORULAR	ÖN ÖĞRENME KONTROL LİSTESİ	✓
1	İki çokluk arasında doğru orantı ifade eden fonksiyonu temsil edebilirim.	☐
2	Doğrusal ilişkiyi gösteren bir fonksiyonun artan ve azalan aralıklarını belirleyebilirim.	☐
3	Dik koordinat sisteminde bir fonksiyona ait sıralı ikilileri konumlandırabilirim.	☐
4	Dik koordinat sisteminde verilen doğrusal fonksiyon grafiklerinin birbirine göre konumlarını doğruların eğimlerine göre yorumlayabilirim.	☐

"Ön Öğrenme Kontrol Listesi"ni doldurduktan sonra aşağıda verilen "Kontrol Noktası" sorularını çözünüz ve cevaplarınızı kontrol ediniz.

KONTROL NOKTASI

Aşağıdaki soruları dikkatle inceleyiniz. Yanıtlarınız üzerinde düşünerek yeni öğrenmeleriniz için zemin oluşturunuz.

SORU 1. Sabit hızla hareket eden bir otomobil, 3 saatte 180 km mesafe almaktadır.

Buna göre aşağıdaki soruları cevaplandırınız.

a) Aracın aldığı yolu t (saat) cinsinden gösteren fonksiyonu belirleyiniz.

b) Bu fonksiyon yardımıyla aracın 5 saatte kaç kilometre yol alacağını bulunuz.

c) Zaman arttıkça aracın aldığı yol miktarı nasıl değişir? Bu değişimin doğrusal bir ilişki olup olmadığını açıklayınız.

SORU 2.

Aşağıda f(x) ve g(x) doğrusal fonksiyonları

- $f(x) = 2x + 1$
- $g(x) = -x + 4$

şeklinde verilmiştir.

Buna göre aşağıdaki soruları cevaplandırınız.

a) Her iki fonksiyon için $x = -1, 0, 1, 2$ değerlerine karşılık gelen sıralı ikilileri bulunuz.

b) Bulduğunuz sıralı ikilileri kullanarak her iki fonksiyonun grafiğini aynı dik koordinat sisteminde çiziniz.

c) Grafikleri karşılaştırarak bu iki doğrunun birbirine göre konumunu ve eğimlerini yorumlayınız.

GERİ BİLDİRİM

Bu geri bildirim sayesinde kendi cevabınızı kontrol edebilir, hatalarınızı düzelterek öğrenmenizi pekiştirebilirsiniz.

Doğru orantılı iki çokluk arasındaki ilişkiyi fonksiyon olarak ifade edebilir; doğrusal ilişkili iki değişkenin birbirine bağlı değişimlerini, artış veya azalışlarını ifade edebilirim.

ÇÖZÜM 1.

a) Araç 3 saatte 180 km gidiyorsa saatteki hızı $\text{Hız} = \frac{180\,\text{km}}{3\,\text{saat}} = 60\,\text{km / saat}$ olur.

Araç her saat 60 km gidiyor. O hâlde aracın aldığı aldığı yol t saate bağlı olduğuna göre fonksiyon $f(t) = 60t$ şeklinde ifade edilir.

b) Aracın 5 saatte alacağı yolu bulmak için fonksiyonda $t = 5$ yerine yazılır. $f(5) = 60 \cdot 5 = 300$ km olarak bulunur.

c) Zaman arttıkça alınan yol da doğru orantılı olarak artar. Bundan dolayı fonksiyon $f(t) = 60t$ şeklinde bir doğrusal fonksiyondur.

Bu fonksiyon, zaman her bir birim arttığında gidilen yolun da sabit bir oranda arttığını gösterir. Dolayısıyla zaman iki katına çıktığında alınan yol da iki katına çıkar. Bu durum, değişkenler arasında doğrusal bir ilişki bulunduğunu gösterir.

ÇÖZÜM 2.

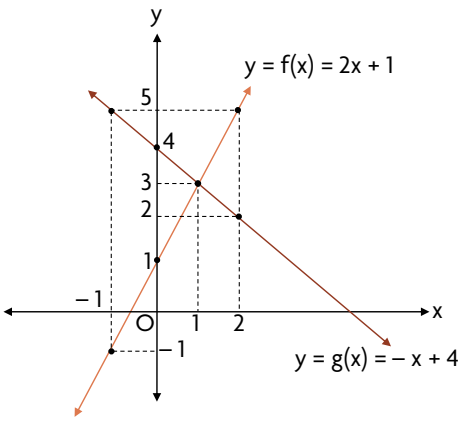
Dik koordinat sistemini çizebilir, sıralı ikilileri bu sistemde gösterebilirim. Dik koordinat sisteminde verilen doğrusal fonksiyon grafiklerinin birbirine göre konumlarını doğruların eğimlerine göre yorumlayabilirim.

a) Noktaların bulunması:

x	– 1	0	1	2	
f(x) = 2x + 1	– 1	1	3	5	→ (– 1, – 1), (0, 1), (1, 3), (2, 5)
g(x) = – x + 4	5	4	3	2	→ (– 1, 5), (0, 4), (1, 3), (2, 2)

b) Grafiklerin çizilmesi:

f(x) ve g(x) fonksiyonları için elde ettiğimiz sıralı ikilileri dik koordinat sistemine yerleştirerek ardından bu noktalardan geçen doğruları çizelim.



c) Grafik yorumu:

Denklemi y = mx + n formatında olan doğruların eğimi m'dir.

Buradan hareketle y = f(x) doğrusunun eğimi 2 ve y = g(x) doğrusunun eğimi – 1'dir. Eğimleri farklı olan bu doğrular tek noktada kesişirler.

İLİŞKİLENDİRİYORUM

Amaç: Bu bölümde ele alacağınız içerikleri; zihninizde var olan bilgileriniz, yaşantılarınız ve diğer derslerde öğrendiklerinizle ilişkilendirmenizi bekliyoruz.

Etkinlikte verilen adımları dikkatle uygulayınız.

Bir sınıfta öğretmen ile öğrencileri arasında geçen bir diyaloğu birlikte inceleyelim.



"Arkadaşlar; şimdi size iki arkadaşın, Ali ve Kemal'in, hikâyesini anlatacağım. Ali ve Kemal'in evi, sayı doğrusu üzerindeki 0 noktasındadır. Okul çıkışı Ali, kitap almak için evden sayı doğrusu üzerinde + 5'e kadar yürüyor. Kemal ise arkadaşından bir defter almak için – 5'e kadar yürüyor."

"Sizce daha fazla yolu kim yürümüştür: Ali mi fazla, Kemal mi yoksa ikisi de eşit uzunluktaki yolu mu yürümüştür? Açıklayınız."

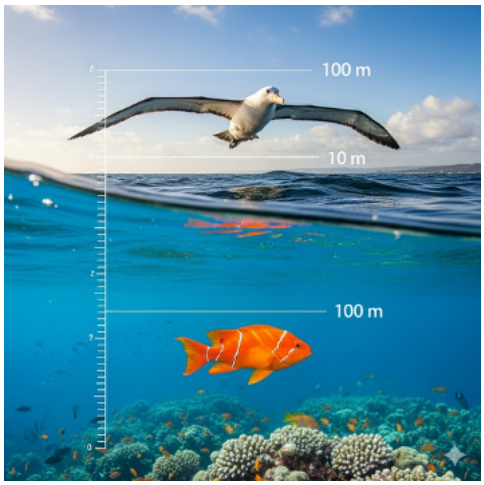
- Yürünen yol veya mesafe negatif değer alabilir mi?

Örneğin, ben bugün –2 kilometre yürüdüm diyen birini hiç duydunuz mu? Tabii ki hayır değil mi?

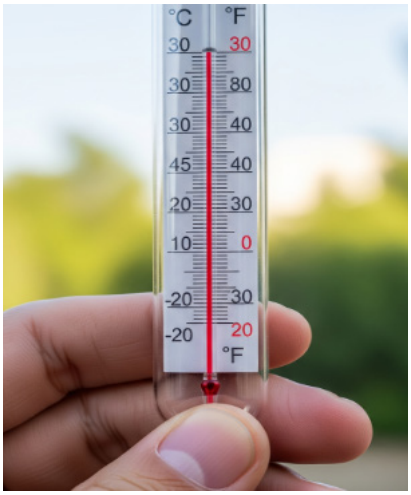
- Mesafe ya da uzaklık, bir yönle ilişkili olarak tanımlansa da miktar olarak her zaman pozitiftir.

Öyleyse, Ali doğuya doğru 5 birim ilerlemiş, Kemal batıya doğru 5 birim gitmiştir. Yönleri farklı olsa da her ikisinin de başlangıç noktalarına dolayısıyla evlerine olan uzaklığı 5 birimdir.

- İşte tam olarak bu nokta da uzaklık bizim için anahtar kavramdır.
- Bir kuş, deniz seviyesinden (0 noktası) 100 metre yüksektedir. Bir balık ise deniz seviyesinin 100 metre altındadır. İkisinin de deniz seviyesine olan uzaklığı aynıdır.



- Bir termometre düşünün. Hava sıcaklığı 0'ın üzerinde 20 derece de olsa 0'ın altında 20 derece de olsa her iki durumda da sıcaklığın 0'a olan uzaklığı 20 derecedir.



- Görüldüğü üzere matematikte ve günlük yaşamda çoğu zaman bir sayının pozitif ya da negatif yönlü olmasıyla değil onun büyüklüğüyle ya da başlangıç noktasına olan uzaklığıyla ilgileniriz. Matematikte bu "uzaklık" düşüncesini her defasında "bir sayının sıfıra olan uzaklığı" diye yazmak yerine, bunu tek bir kavramla gösterecek özel bir araca ihtiyaç duyarız.

- Matematik, bize hem pratiklik ve hem de kesinlik sunar.

Örneğin, – 7 sayısının sadece büyüklüğünü (7'yi) veya + 15 sayısının sadece büyüklüğünü (15'i) almamızı sağlayan bir işleme ihtiyaç duyarız. Bu işlem, sayının önündeki işareti dikkate almadan onun saf büyüklüğünü, yani sıfıra olan uzaklığını verir.

- İşte bu noktada, bir sayının başlangıç noktasına uzaklığını gösteren bu kavrama **MUTLAK DEĞER** adı verilir.

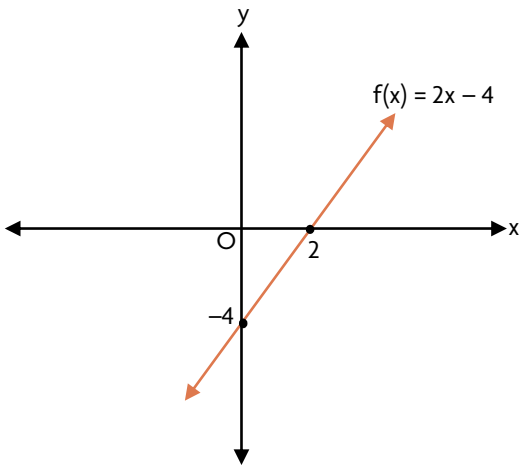
UYGULAYARAK ÖĞRENİYORUM

GERÇEK SAYILARDA TANIMLI MUTLAK DEĞER FONKSİYONLARI VE NİTEL ÖZELLİKLERİ

Amaç: Bu bölümde bilgilerinizi etkinlikler ve uygulamalarla pekiştirmenizi, öğrenmeyi daha kalıcı hâle getirmenizi amaçlıyoruz.

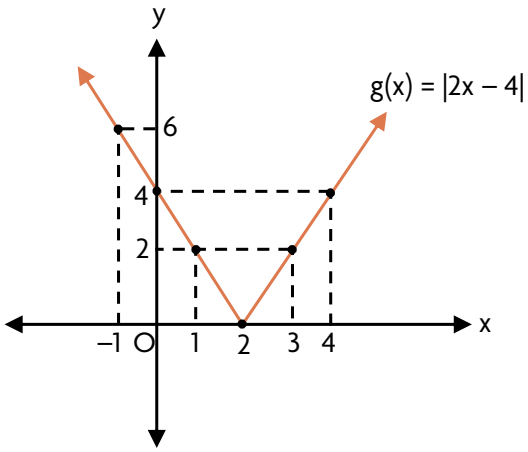
Etkinlik ve örneklerde verilen adımları dikkatle uygulayınız. Çalışmanızı dikkatli ve düzenli bir şekilde yapınız.

- İlk olarak $f(x) = 2x - 4$ fonksiyonunun grafiğini dik koordinat sisteminde gösterelim.



x	y	Koordinat
0	– 4	(0, – 4)
2	0	(2, 0)

- Şimdide $g(x) = |2x - 4|$ fonksiyonunun grafiğini dik koordinat sisteminde gösterelim. Bunu daha rahat çizebilmek için aşağıdaki tablodan yararlanalım.

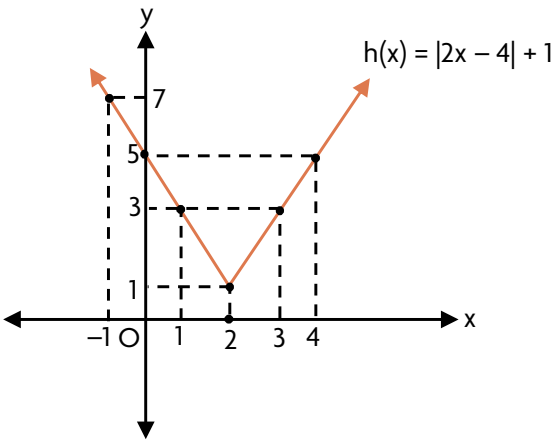


x	y	Koordinat
– 1	6	(– 1, 6)
0	4	(0, 4)
1	2	(1, 2)
2	0	(2, 0)
3	2	(3, 2)
4	4	(4, 4)

Bu yapılan işlemlerde $f(x) = 2x - 4$ ile $g(x) = |2x - 4|$ fonksiyonlarının grafiklerinde dikkatinizi çeken bir ilişki var mı?

Dikkatli inceleyecek olursanız $g(x)$ fonksiyonu mutlak değerli bir fonksiyondur. Dolayısıyla $f(x) < 0$ olan bölgede mutlak değer nedeniyle sonuçlar pozitife dönüşmektedir. O hâlde, bir fonksiyonun mutlak değeri alındığında o fonksiyonun x ekseninin altında kalan kısımlarının x eksenine göre yansıması alınır.

- Son olarak h(x) = |2x – 4| + 1 fonksiyonunun grafiğini dik koordinat sisteminde gösterelim. Bunu daha rahat çizebilmek için aşağıdaki tablodan yararlanalım.



x	y	Koordinat
– 1	7	(– 1, 7)
0	5	(0, 5)
1	3	(1, 3)
2	1	(2, 1)
3	3	(3, 3)
4	5	(4, 5)

ÖRNEK

MEBİ; Millî Eğitim Bakanlığı tarafından geliştirilen yenilikçi ve dijital bir öğrenme platformudur.

MEBİ uygulamasında bir öğrencinin haziran ayına ait kullanım süreleri incelenmiş ve farklı günlerde ölçülen süreler tabloya kaydedilmiştir. Bu verilere göre öğrencinin

- Aylık ortalama kullanım süresi 65 dakikadır.
- Günlük kullanım süresinin aylık ortalama kullanım süresinden sapma miktarının en fazla 7 dakika olduğu belirlenmiştir.

Günler	Kullanım Süresi (dk.)	Günlük Kullanım Süresi ile Aylık Ortalama Kullanım Süresi Arasındaki Fark	Sapma Miktarı (dk.)
1	61	61 – 65 = – 4	4
2	72	72 – 65 = 7	7
3	64	64 – 65 = – 1	1
4	70	70 – 65 = 5	5
5	65	65 – 65 = 0	0

Buna göre aşağıdaki soruları cevaplandırınız.

a) Ölçülen sürelere (dk.) bağlı sapma miktarını (dk.) veren fonksiyon f olsun. Bu fonksiyonu parçalı fonksiyon biçiminde ifade ediniz.

b) Parçalı fonksiyondan yararlanarak f fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

ÇÖZÜM

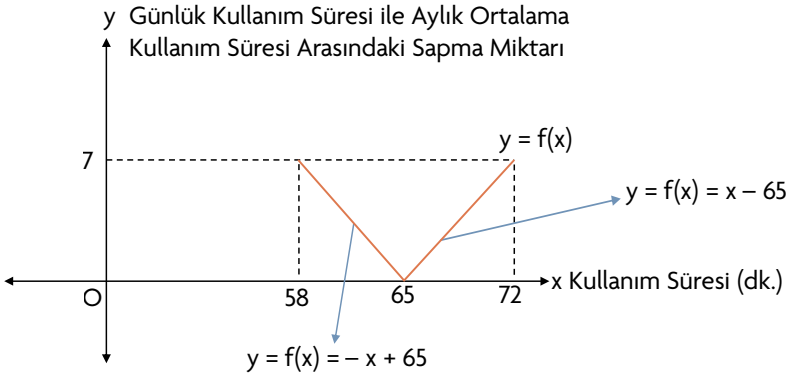
a) Ölçülen kullanım süreleri, f fonksiyonunun tanım kümesini temsil eder. x in alabileceği en küçük değer 65 – 7 = 58, en büyük değer 65 + 7 = 72 olduğundan fonksiyonun tanım kümesi [58, 72] olur. Sapma miktarının alabileceği değerler, f fonksiyonunun görüntü kümesini temsil eder. Sapma miktarı en fazla 7 dk olduğundan fonksiyonun görüntü kümesi [0, 7] olur. Sapma miktarı, ölçülen ve ortalama kullanım süreleri arasındaki farkın mutlak değeri alınarak elde edilmiştir. Buradan f fonksiyonunun cebirsel temsili f: [58, 72] → [0, 7], f(x) = |x – 65| olarak bulunur.

$x \in [58, 65)$ için $f(x) = -x + 65$

$x \in [65, 72]$ için $f(x) = x - 65$ olduğundan f fonksiyonunun parçalı gösterimi aşağıdaki gibi olur.

$$f(x) = \begin{cases} -x + 65, & 58 \le x < 65 \\ x - 65, & 65 \le x \le 72 \end{cases}$$

b) f fonksiyonunun grafiği aşağıdaki gibi çizilir.



ÖRNEK

Gerçek sayılar kümesinde tanımlı f(x) = 1 – x ve g(x) = |f(x)| – 4 şeklinde fonksiyonlar verilmektedir.

g(x) fonksiyonuna göre aşağıdaki soruları cevaplandırınız.

a) Sıfırlarını bulunuz.

b) Görüntü kümesini bulunuz.

c) Artan veya azalan olduğu aralıkları bulunuz.

d) Minimum ve maksimum değerlerini bulunuz.

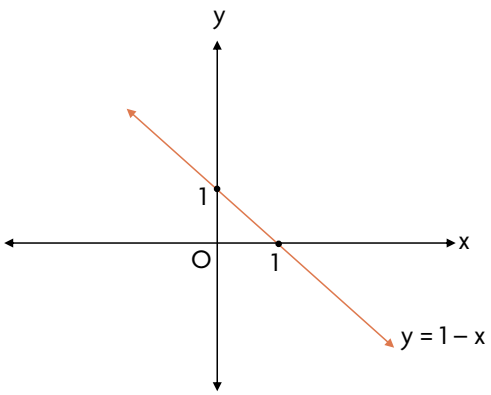
e) Bire birliğini inceleyiniz.

ÇÖZÜM

g fonksiyonunun grafiğini çizerek sorulan soruları daha rahat yorumlayabiliriz. Adım adım g fonksiyonunun grafiğini çizelim.

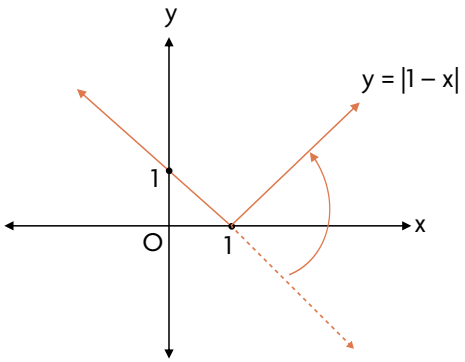
f(x) = 1 – x ve g(x) = |f(x)| – 4 olduğundan g(x) = |1 – x| – 4 olacaktır.

- Grafiği çizerken önce y = 1 – x grafiğini oluşturalım.

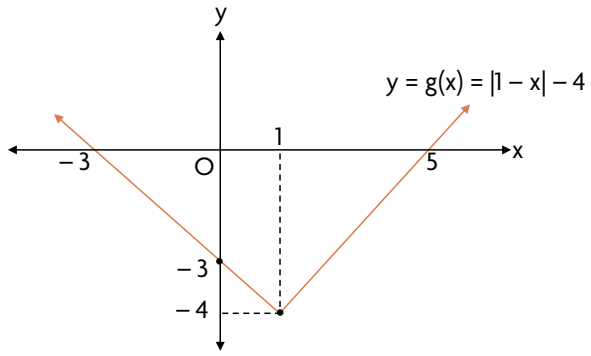


x	y	Koordinat
0	1	(0, 1)
1	0	(1, 0)

- y = 1 – x grafiğinin negatif değer aldığı kısmın x eksenine göre yansıması alınarak y = |1 – x| in grafiği elde edilir.



- y = |1 – x| grafiğinin y ekseni boyunca negatif yönde 4 birim ötelenmesiyle g(x) = |1 – x| – 4 grafiği elde edilir.



Şimdi grafik temsilinden hareketle

a) Sıfırları yani x eksenini kestiği noktaların apsis değerleri x = – 3 ve x = 5'tir.

b) Görüntü kümesi: [– 4, ∞)

c) Azalan olduğu aralık: (– ∞, 1), Artan olduğu aralık: [1, ∞)

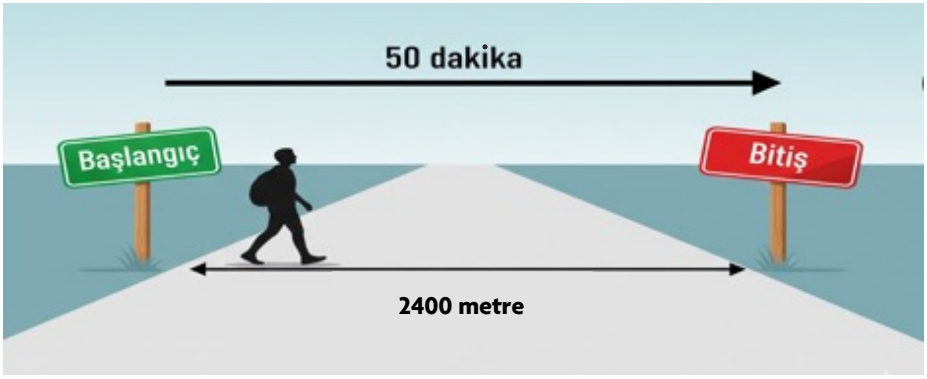
d) Minimum noktası (1, – 4) buradan da minimum değeri – 4'tür. Maksimum noktası yoktur.

e) Fonksiyonumuz bire bir değildir. Tanım aralığında bulunan birbirinden farklı birden fazla değer aynı görüntüye sahiptir. Örneğin f(– 3) = f(5) = 0'dır.

SIRA SİZDE 1.

Her sabah yürüyüş yapan bir kişi; 2400 metrelik bir parkurda başlangıç noktasından sabit hızla bitiş tabelasına yürümekte, hiç durmadan aynı hızla geri dönmektedir.

Başlangıçtan bitiş tabelasına 50 dakikada ulaştığına göre toplam 100 dakika süren bu yürüyüşte kişinin zamana (dk.) bağlı olarak bitiş tabelasına olan uzaklığını (m) veren fonksiyon f olsun.



Buna göre f fonksiyonunun cebirsel temsilini yazınız.

SIRA SİZDE 2.

Gerçek sayılar kümesinde tanımlı $f(x) = 4 - 2x$ ve $g(x) = |f(x)| + 1$ fonksiyonları verilmektedir.

g(x) fonksiyonuna göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) Görüntü kümesini bulunuz.

b) Artan veya azalan olduğu aralıkları bulunuz.

c) Minimum ve maksimum değerlerini bulunuz.

GERİ BİLDİRİM

Bu geri bildirim sayesinde kendi cevabınızı kontrol edebilir, hatalarınızı düzelterek öğrenmenizi pekiştirebilirsiniz.

SIRA SİZDE 1.

ÇÖZÜM

Sabit hızla 2400 metrelik mesafeyi 50 dakikada tamamlayan bir hareketlinin ilk olarak hızını bulalım.

Yol = hız x zaman denkleminden yararlanarak hareketlinin hızını bulalım.

$2400 = v \cdot 50 \Rightarrow v = 48$ m/dk. olur.

Zaman aralıklarını belirleyelim.

- $0 \le t \le 50$ aralığında kişi, başlangıç noktasından bitiş noktasına doğru ilerler. Bu süreçte bitiş noktasına olan uzaklık azalır.
- $50 < t \le 100$ aralığında kişi, bitiş noktasına ulaştıktan sonra geri dönmeye başlar. Bu nedenle bitiş noktasına olan uzaklık artar, çünkü kişi bitişten uzaklaşıp başlangıç noktasına doğru hareket eder.

Şimdi her iki aralık için doğrusal denklemi kuralım.

- $0 \le t \le 50$ (gidiş): Başlangıçtaki uzaklık 2400 metre, her dakika sonunda uzaklık 48 metre azalmaktadır.

  $f(t) = 2400 - v \cdot t = 2400 - 48 \cdot t$ olur.
- $50 < t \le 100$ (dönüş): Dönüş boyunca her dakika sonunda uzaklık 48 metre artmaktadır.

  $f(t) = v \cdot (t - 50) = 48 \cdot (t - 50) = 48t - 2400$ olur.

Şimdi bulduğumuz fonksiyonlardan yararlanarak parçalı fonksiyonu oluşturalım.

$$f(t) = \begin{cases} 2400 - 48t, & 0 \le t \le 50 \\ 48t - 2400, & 50 < t \le 100 \end{cases}$$

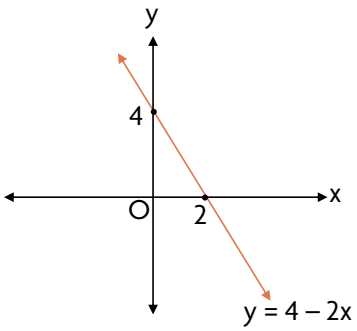
SIRA SİZDE 2.

ÇÖZÜM

g fonksiyonunun grafiğini çizerek soruları daha rahat yorumlayabiliriz. Adım adım g fonksiyonunun grafiğini çizelim.

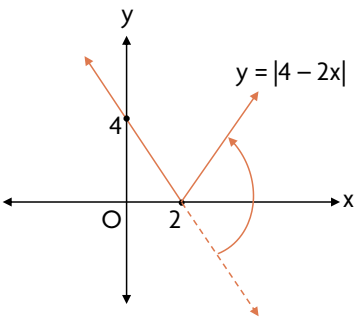
f(x) = 4 – 2x ve g(x) = |f(x)| + 1 olduğundan g(x) = |4 – 2x| + 1 olacaktır.

- Grafiği çizerken önce y = 4 – 2x grafiğini oluşturalım.

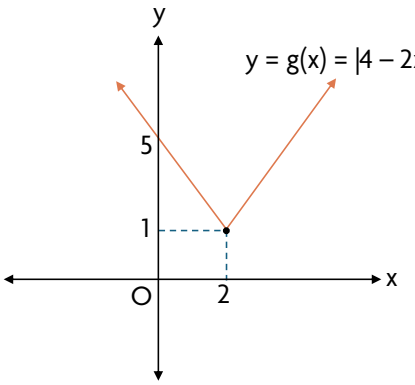


x	y	Koordinat
0	4	(0, 4)
2	0	(2, 0)

- y = 4 – 2x grafiğinin negatif değer aldığı kısmın x eksenine göre yansıması alınarak y = |4 – 2x| fonksiyonunun grafiği elde edilir.



- y = |4 – 2x| grafiğinin y ekseni boyunca pozitif yönde 1 birim ötelenmesiyle g(x) = |4 – 2x| + 1 grafiği elde edilir.



Şimdi grafik temsilinden hareketle

a) Görüntü kümesi: [1, ∞)

b) Azalan olduğu aralık: (– ∞, 2), Artan olduğu aralık: [2, ∞)

c) Minimum noktası (2, 1) buradan da minimum değeri 1'dir. Maksimum noktası yoktur.

DEĞERLENDİRİYORUM

Amaç: Bu bölümde öğrendiklerinizi gözden geçirmenizi, kendi öğrenme sürecinizi değerlendirmenizi ve eksiklerinizi fark etmenizi amaçlıyoruz.

Soruları dikkatle yanıtlayınız. Cevaplarınızı geri bildirimlerle karşılaştırarak eksik gördüğünüz noktaları tekrar ediniz.

SORULAR

1. Gerçek sayılarda $f(x) = x - 2$ ve $g(x) = |f(x)| - 4$ şeklinde tanımlı fonksiyonlar verilmektedir.

Buna göre g(x) fonksiyonunun sıfırlarını bulunuz.

2. Gerçek sayılarda $f(x) = 3 - x$ ve $g(x) = |f(x)| - 1$ şeklinde tanımlı fonksiyonlar verilmektedir.

Buna göre g(x) fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

3. Gerçek sayılarda tanımlı $f(x) = |x + 1| - 4$ fonksiyonu verilmektedir.

Buna göre f fonksiyonunun nitel özelliklerine göre aşağıda verilen tabloda bulunan boşlukları doldurunuz.

Fonksiyonun Nitel Özellikleri	$f(x) = \|x + 1\| - 4$
Tanım Kümesi	
Görüntü Kümesi	
Maksimum Noktası	
Minimum Noktası	
Bire Birliği	
Artan Olduğu Aralık	
Azalan Olduğu Aralık	

4. Bir otoparkta park ücreti aşağıdaki kurallara göre belirlenmektedir.

- İlk 1 saat için sabit olarak 20 TL alınmaktadır.
- 1 saati aşan süreler için her ek saat başına 10 TL ücret alınır. Bu uygulama en fazla 5 saate kadar geçerlidir.
- 5 saatten daha uzun süre park edilirse sabit olarak 60 TL ücret alınır.

Bu durumda otopark ücretini x saatlik park süresine bağlı olarak parçalı bir fonksiyon ile gösteriniz.

5. Bir okulun bahçesine öğrenciler tarafından her gün fidan dikilmektedir. Başlangıçta dikilen fidan sayısı x tir.

- 1. gün dikilen fidan sayısı, başlangıçta dikilen fidanların sayısının 2 katından 4 eksiktir.
- 2. gün dikilen fidan sayısı, 1. gün dikilen fidanların sayısının mutlak değerine eşittir.
- 3. gün dikilen fidan sayısı, 2. gün dikilen fidan sayısının 5 fazlası kadardır.

Buna göre 1, 2 ve 3. günler için dikilen fidan sayısını veren fonksiyonların cebirsel temsillerini yazınız.

GERİ BİLDİRİM

Bu geri bildirim sayesinde kendi cevabınızı kontrol edebilir, hatalarınızı düzelterek öğrenmenizi pekiştirebilirsiniz.

ÇÖZÜM 1.

$f(x) = x - 2$ ve $g(x) = |f(x)| - 4$ olduğundan

$g(x) = |x - 2| - 4$ olur. Buradan da g fonksiyonunun sıfırlarını bulabilmek için grafikten veya denklem çözümünden yararlanabiliriz. Denklem çözümünden yararlanacak olursak

$g(x) = |x - 2| - 4 = 0$ denklemini sağlayan x değerlerini bulalım.

$$|x - 2| - 4 = 0$$
$$|x - 2| = 4$$

$x - 2 = 4$ ⟹ $x = 6$

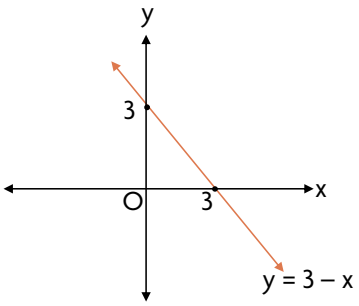
$x - 2 = -4$ ⟹ $x = -2$

Buradan da g fonksiyonunun sıfırları $x = 6$ ve $x = -2$ olarak bulunur.

ÇÖZÜM 2.

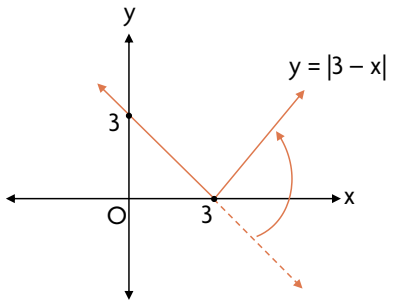
$g(x) = |3 - x| - 1$ şeklinde tanımlı fonksiyonun grafiğini adım adım bulalım.

- Grafiği çizerken önce $y = 3 - x$ grafiğini oluşturalım.

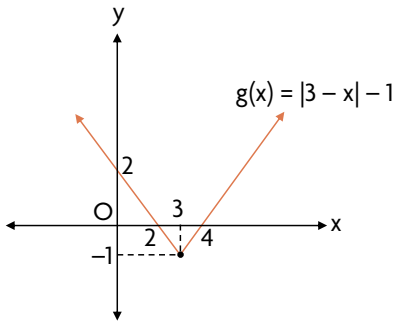


x	y	Koordinat
0	3	(0, 3)
3	0	(3, 0)

- y = 3 – x grafiğinin negatif değer aldığı kısmın x eksenine göre yansıması alınarak y = |3 – x| in fonksiyonunun grafiği elde edilir.

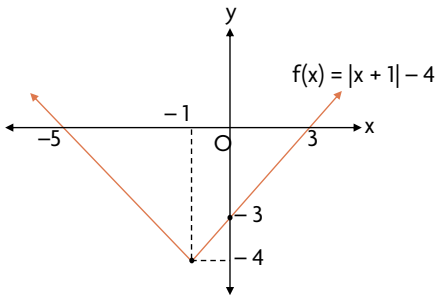


- y = |3 – x| grafiğinin y ekseni boyunca negatif yönde 1 birim ötelenmesiyle g(x) = |3 – x| – 1 grafiği elde edilir.



ÇÖZÜM 3.

Öncelikle f(x) = |x + 1| – 4 grafiğini elde edelim. Ardından bu grafikten yararlanarak tabloda bulunan boşlukları dolduralım.



Fonksiyonun Nitel Özellikleri	f(x) = |x + 1| – 4
Tanım Kümesi	$\mathbb{R}$
Görüntü Kümesi	[– 4, ∞)
Maksimum Noktası	yok
Minimum Noktası	(– 1, – 4)
Bire Birliği	Bire bir değil
Artan Olduğu Aralık	[– 1, ∞)
Azalan Olduğu Aralık	(– ∞, – 1)

ÇÖZÜM 4.

- Eğer park süresi $0 \le x \le 1$ ise $f(x) = 20$ olur.
- 1 saati geçtikten sonra her saat için 10 TL eklenmektedir. Başlangıçta 20 TL vardı, ek süre $(x - 1)$ saattir. $f(x) = 20 + 10 \cdot (x - 1)$, $1 < x \le 5$ olur.
- Eğer park süresi 5 saati aşarsa ücret sabitlenmektedir. Bu durumda $x > 5$ iken $f(x) = 60$ şeklinde olur.

$$f(x) = \begin{cases} 20, & 0 \le x \le 1 \\ 20 + 10 \cdot (x - 1), & 1 < x \le 5 \\ 60, & x > 5 \end{cases}$$

ÇÖZÜM 5.

1. gün dikilen fidan sayısını veren fonksiyon f olmak üzere:
$f: (2, \infty) \to (0, \infty)$, $f(x) = 2x - 4$

2. gün dikilen fidan sayısını veren fonksiyon g olmak üzere:
$g: (0, \infty) \to [0, \infty)$, $g(x) = |2x - 4|$

3. gün dikilen fidan sayısını veren fonksiyon h olmak üzere:
$h: [0, \infty) \to [5, \infty)$, $h(x) = |2x - 4| + 5$

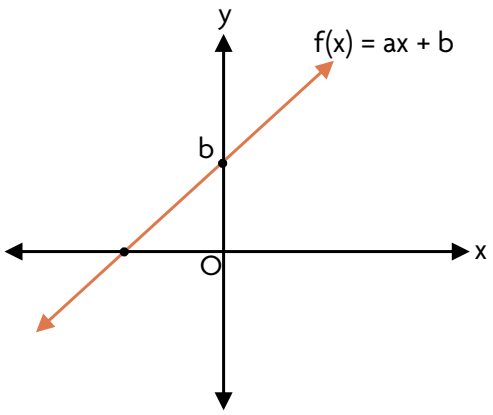
ÖĞRENDİKLERİM

Amaç: Bu bölümde öğrendiklerinizi özetlemenizi, günlük hayatta ve farklı derslerde kullanabileceğiniz bilgileri belirlemenizi amaçlıyoruz.

Aşağıda boş bırakılan yerleri uygun ifadeler ile doldurunuz. Anahtar kavramları ve önemli bilgileri kendi cümlelerinizle yazınız.

a, b, c ∈ $\mathbb{R}^+$ olmak üzere gerçek sayılarda f(x) = ax + b, g(x) = |ax + b| ve h(x) = = |ax + b| + c şeklinde tanımlı fonksiyonların grafik temsilleri ve bu temsiller arasındaki ilişkileri gösteriniz.

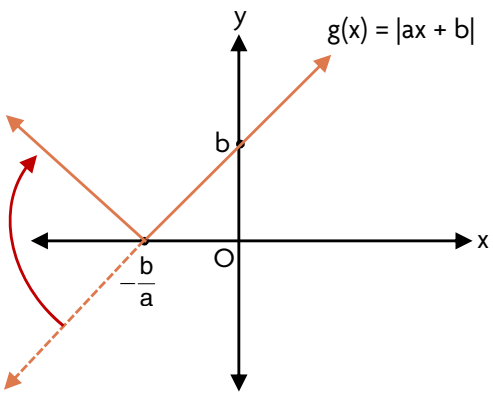
- İlk olarak f(x) = ax + b fonksiyonunun grafiğini koordinat düzleminde gösteriniz.



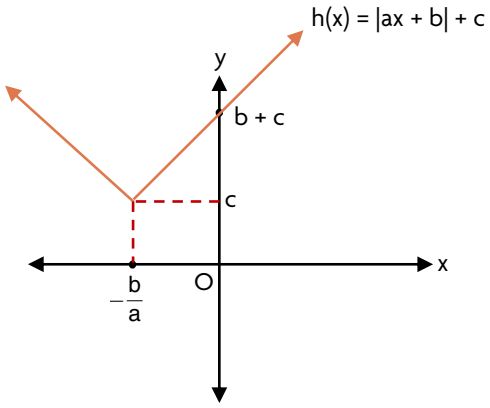
x	y	Koordinat
0	b	(0, b)
...	0	(..., 0)

- f(x) = ax + b fonksiyonunun grafiğinden hareketle g(x) = |ax + b| doğrusunun grafiğini elde etmek için

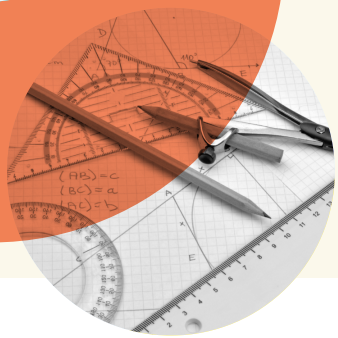
  f(x) = ax + b doğrusunun ... ekseninin altındaki kısmını, ... eksenine göre yansımasını alarak üst tarafa taşırsanız negatif y değerlerini pozitife dönüştürmüş olursunuz. Böylece g(x) = |ax + b| fonksiyonunun grafiğini elde etmiş olursunuz.



- g(x) = |ax + b| fonksiyonunun grafiğinden hareketle h(x) = |ax + b| + c doğrusunun grafiğini elde etmek için g(x) = |ax + b| grafiğini ... birim y ekseni boyunca kaydırarak h(x) = |ax + b| + c fonksiyonunu elde edebilirsiniz.
  Eğer c pozitifse grafiği c birim ..... , c negatifse |c| birim ..... doğru ötelemelisiniz.



Daha fazlası için karekodu okutunuz.



DENKLEM VE EŞİTSİZLİKLER

BAŞLARKEN

Sevgili öğrencimiz bu çalışma kartında bireysel öğrenme yolculuğunuza destek sunmak amaçlanmaktadır. Çalışmalarınızı yürütürken "Hazırlanıyorum", "İlişkilendiriyorum", "Uygulayarak Öğreniyorum", "Değerlendiriyorum" bölümlerini sırası ile yapmanızı; her bölüm ve etkinlik sonundaki geri bildirimleri alarak ilerlemenizi; "Öğrendiklerim" bölümünde öğrenme sürecinizi gözden geçirmenizi bekliyoruz.

- Günlük yaşamda karşılaşılan tüm olayların doğası gereği doğrusal ilişkiler üzerine kurulu olduğu ileri sürülebilir mi?
- Bir ilişkinin fonksiyon olarak adlandırılabilmesi için sağlaması gereken ön koşullar nelerdir?
- Gerçek sayılarda tanımlı fonksiyonların grafik ve cebirsel temsilleri ile nitel özellikleri hakkında nasıl bir yargıda bulunulabilir?

HAZIRLANIYORUM

Amaç: Bu bölümde ön bilgilerinizi hatırlamanızı ve konuya hazırlıklı hâle gelmenizi amaçlıyoruz.

Aşağıda yer alan ifadeler, bu temada tamamlanması hedeflenen öğrenme çıktısını ele almadan önce sahip olmanız gereken bazı temel becerileri içermektedir. Lütfen her bir ifadeyi dikkatlice okuyunuz.

- Eğer ifadedeki bilgiye hâkim olduğunuzu düşünüyorsanız kutucuğu işaretleyiniz.
- Eğer konuyu henüz tam olarak bilmediğinizi ya da hatırlamadığınızı düşünüyorsanız kutucuğu boş bırakınız.

Bu çalışmanın amacı notla değerlendirmek değil yalnızca hangi temaya ne ölçüde hazır olduğunuzu belirlemektir.

SORULAR	ÖN ÖĞRENME KONTROL LİSTESİ	
1	Birinci dereceden bir bilinmeyenli bir denklemin kökünü bulabilirim.	
2	Verilen bir doğrusal fonksiyonun tanım kümesini ve görüntü kümesini belirleyebilirim.	
3	Verilen bir doğrusal fonksiyonun maksimum ve minimum değerlerini belirleyebilirim.	
4	Verilen bir doğrusal fonksiyonun sıfırlarını belirleyebilirim.	
5	Verilen bir doğrusal fonksiyonun y eksenini kestiği değeri belirleyebilirim.	
6	Verilen bir doğrusal fonksiyonun grafiğini dik koordinat sisteminde çizebilirim.	
7	Bir gerçek yaşam problemini cebirsel dille ifade edebilirim.	

"Ön Öğrenme Kontrol Listesi"ni doldurduktan sonra aşağıda verilen "Kontrol Noktası" sorularını çözünüz ve cevaplarınızı kontrol ediniz.

KONTROL NOKTASI

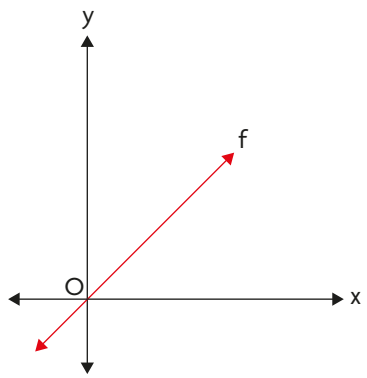
SORU 1.

Bir otoparkta giriş ücreti 50 TL'dir. Bunun üzerine, geçen her saat için x TL eklenmektedir. Ahmet aracını bu otoparka 4 saaliğine park etmiştir. Ahmet'in ödediği toplam ücret, Burcu'nun abonelik indirimi sayesinde ödediği 150 TL'nin x TL eksiğine eşittir.

Buna göre, otoparkın saatlik ücreti (x) kaç TL'dir? İşlem adımlarını göstererek hesaplayınız.

SORU 2.

Aşağıdaki dik koordinat düzleminde f(x) = ax (a > 0) doğrusal fonksiyonunun grafiği verilmiştir.



Buna göre bu fonksiyonun tanım ve görüntü kümesini bulunuz.

SORU 3.

f(x) = 3x – 5 fonksiyonu [1, 4] kapalı aralığında tanımlı olsun.

Buna göre aşağıdaki ifadelerde boş bırakılan yerleri uygun şekilde doldurunuz.

I. f fonksiyonunun maksimum değeri ..... bulunur.

II. f fonksiyonunun maksimum noktası ..... olur.

III. f fonksiyonunun minimum değeri ..... bulunur.

IV. f fonksiyonunun minimum noktası ..... olur.

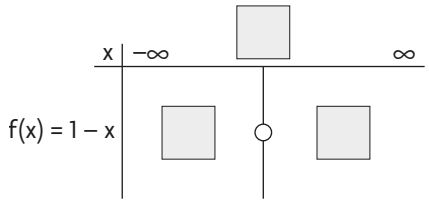
SORU 4.

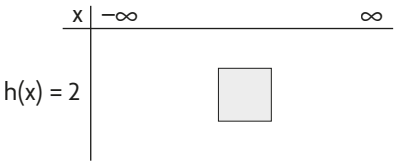
Aşağıdaki tabloda verilen ifadeler için 'Doğru', 'Yanlış' ve 'Bilmiyorum' seçeneklerinden uygun olanı işaretleyiniz.

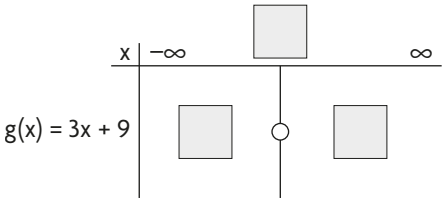
İfadeler	Doğru	Yanlış	Bilmiyorum
f(x) = –3x doğrusal fonksiyonunun sıfırı 0'dır.			
f(x) = 4 – 2x doğrusal fonksiyonunu temsil eden grafiğin y eksenini kestiği nokta (0, –2) noktasıdır.			
f(x) = x + 2 doğrusal fonksiyonunun sıfırı 2'dir.			
f(x) = 3x + 6 doğrusal fonksiyonunu temsil eden grafiğin y eksenini kestiği nokta (0, 6) noktasıdır.			

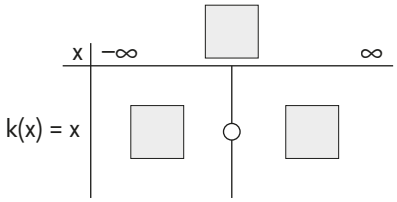
SORU 5.

Aşağıda verilen işaret tablolarında yer alan gri kutucukları, verilen doğrusal fonksiyonun kökü (sıfırı) ve bu köke göre fonksiyonun işaretini dikkate alarak uygun şekilde doldurunuz.







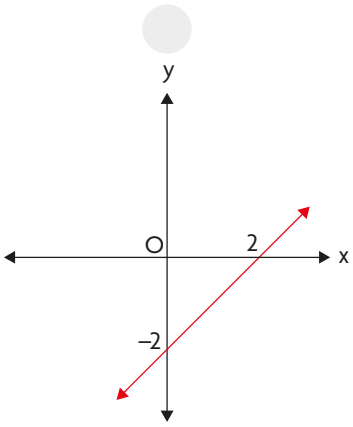


SORU 6.

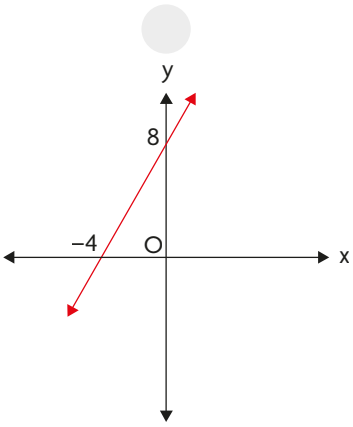
Aşağıdaki dik koordinat sistemlerinde f, g ve h fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir.

Buna göre verilen fonksiyonların cebirsel temsilleri ile grafikleri eşleştiriniz.

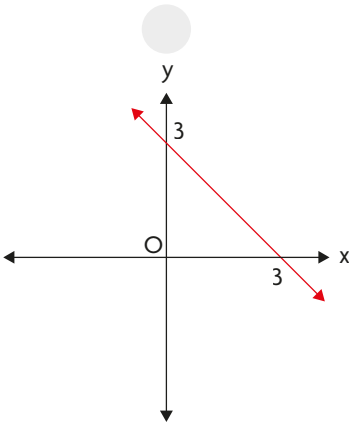
A $h(x) = 3 - x$



B $f(x) = x - 2$



C $g(x) = 2x + 8$



SORU 7.

Bir şehir parkındaki havuzun bakım çalışmaları nedeniyle boşaltılmasına karar verilmiştir. Havuzdaki suyun yüksekliği başlangıçta 1200 cm'dir. Su seviyesi, her saniyede sabit hızla 15 cm azalmaktadır.

Buna göre, havuzdaki suyun yüksekliğinin (cm) zamana (sn.) bağlı değişimini gösteren fonksiyonun cebirsel olarak ifadesi aşağıdakilerden hangisidir?

$f(x) = 120 + 15x$

$f(x) = 1200 - 15x$

$f(x) = 1200+30x$

$f(x) = 2400 - 30x$

$f(x) = 2400 + 30x$

GERİ BİLDİRİM

Bu geri bildirim sayesinde kendi cevabınızı kontrol edebilir, hatalarınızı düzelterek öğrenmenizi pekiştirebilirsiniz.

KONTROL NOKTASI

ÇÖZÜM 1.

Burcu'nun ödediği ücret 150 TL ve Ahmet'in ödediği ücret (150 – x) TL olarak verilmiş.

Diğer yandan Ahmet, 1 saat için x TL ücret öderse

4 saat için 4x TL ücret öder.

Ahmet'in ödediği ücret = Giriş ücreti + 4 saat için ödenen ücret

= (50 + 4x) TL bulunur.

$50 + 4x = 150 - x$

$5x = 100$

$x = 20$ TL (Otoparkın saatlik ücreti 20 TL'dir.)

ÇÖZÜM 2.

f(x) = ax (a > 0) fonksiyonunun tanım ve görüntü kümesi bulunurken g(x) = x doğrusal referans fonksiyonunun tanım ve görüntü kümesinden yararlanılır.

Soruda, g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, g(x) = x şeklinde tanımlı referans fonksiyonun tanım kümesindeki her x değerini a katı ile eşleyen f fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre f fonksiyonunun en geniş tanım kümesi gerçek sayılardır.

f fonksiyonu her gerçek sayıyı a katı ile eşlediği için f fonksiyonunun görüntü kümesi de gerçek sayılardır.

Buradan f fonksiyonu

f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

biçiminde tanımlanır.

HATIRLATMA

Bir fonksiyonda, bağımsız değişkenin alabileceği tüm değerlerin oluşturduğu küme **tanım kümesi** olarak adlandırılır. Bağımlı değişkenin alabileceği tüm değerlerin oluşturduğu küme ise **görüntü kümesi** olarak adlandırılır.

Cebirsel temsili g(x) = x olan doğrusal referans fonksiyonunda, x tüm gerçek sayı değerlerini alabilir.

Bu nedenle g fonksiyonunun en geniş tanım kümesi $\mathbb{R}$ dir.

g fonksiyonu, her gerçek sayıyı kendisi ile eşlediği için görüntü kümesi de $\mathbb{R}$ dir.

Dolayısıyla doğrusal referans fonksiyonu

g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

biçiminde tanımlanabilir.

ÇÖZÜM 3.

f(x) = 3x – 5 fonksiyonu tanımlı olduğu [1, 4] nda incelendiğinde;

- f(1) = 3 · 1 – 5 = –2 olur ve fonksiyonun minimum değeri –2, minimum noktası (1, – 2) bulunur.
- f(4) = 3 · 4 – 5 = 7 olur ve fonksiyonun maksimum değeri 7, maksimum noktası (4, 7) olarak bulunur.

a ve b gerçek sayılar olmak üzere, f fonksiyonu [a, b] nda tanımlı olsun.

$\forall x \in [a, b]$ için $f(x) \leq f(m)$ şartını sağlayan f(m) değerine f fonksiyonunun **maksimum değeri**, bu değeri aldığı x = m noktasına f fonksiyonunun **maksimum noktası** denir.

$\forall x \in [a, b]$ için $f(x) \geq f(n)$ şartını sağlayan f(n) değerine f fonksiyonunun **minimum değeri**, bu değeri aldığı x = n noktasına f fonksiyonunun **minimum noktası** denir.

ÇÖZÜM 4.

a) $f(x) = -3x$ fonksiyonunun sıfırı 0'dır. **(Doğrudur)**

$-3x = 0$ ise $x = 0$ bulunur. Bu durumda fonksiyonun sıfırı, 0'dır.

b) $f(x) = 4 - 2x$ doğrusal fonksiyonunu temsil eden grafiğin y eksenini kestiği nokta $(0, -2)$ noktasıdır. **(Yanlış)**

$x = 0$ için $f(0) = 4 - 2 \cdot 0 = 4$ bulunur. Buna göre grafiğin y eksenini kestiği nokta $(0, 4)$ olmalıdır.

c) $f(x) = x + 2$ doğrusal fonksiyonunun sıfırı 2'dir. **(Yanlış)**

$x + 2 = 0$ ise $x = -2$ bulunur. Bu durumda fonksiyonun sıfırı, -2'dir.

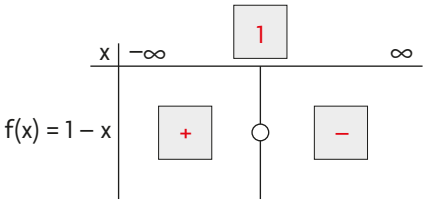
d) $f(x) = 3x + 6$ doğrusal fonksiyonunu temsil eden grafiğin y eksenini kestiği nokta $(0, 6)$ noktasıdır. **(Doğrudur)**

$x = 0$ için $f(0) = 3 \cdot 0 + 6 = 6$ bulunur. Buna göre grafiğin y eksenini kestiği nokta $(0, 6)$ bulunur.

f fonksiyonunda $f(x) = 0$ eşitliğini sağlayan x değerine f fonksiyonunun sıfırı denir.

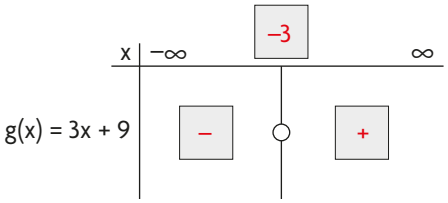
f fonksiyonunu temsil eden grafiğin y eksenini kestiği noktayı bulmak için x yerine 0 yazılır.

ÇÖZÜM 5.



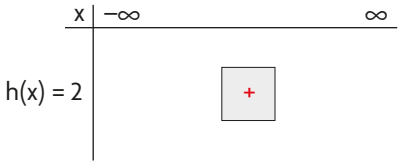
$1 - x = 0$ ise $x = 1$ bulunur.

Bu durumda f fonksiyonunun sıfırı 1'dir.

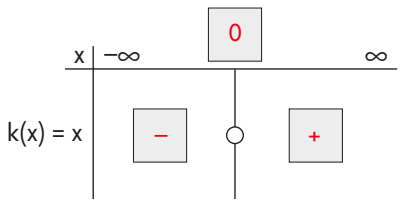


$3x + 9 = 0$ ise $x = -3$ bulunur.

Bu durumda f fonksiyonunun sıfırı -3'tür.



$\forall x \in \mathbb{R}$ için $h(x) = 2$ olduğundan $h(x) = 0$ eşitliğini sağlayan x değeri bulunamaz. Fonksiyonun sıfırı yoktur. $2 > 0$ olduğundan tablonun işareti pozitif (+) olur.



$k(x) = 0$ ise $x = 0$ bulunur. Bu durumda k fonksiyonunun sıfırı 0'dır.

ÇÖZÜM 6.

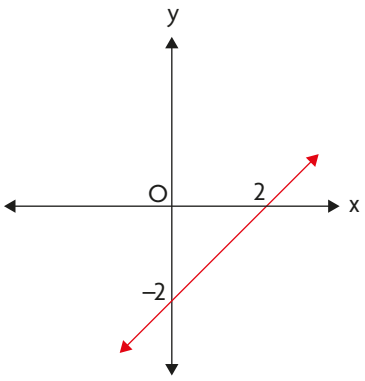
B $f(x) = x - 2$

$x = 0$ ise $f(0) = 0 - 2 = -2$ bulunur. f fonksiyonunun grafiğinin y eksenini kestiği nokta $(0, -2)$ noktasıdır.

$f(x) = 0$ ise $x - 2 = 0$ ve $x = 2$ bulunur. f fonksiyonunun grafiğinin x eksenini kestiği nokta $(2, 0)$ noktasıdır.

Buna göre f fonksiyonunun grafiği aşağıdaki gibidir.

B



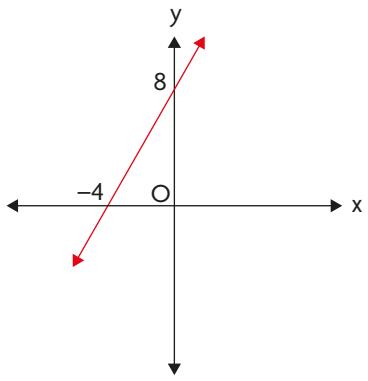
C $g(x) = 2x + 8$

$x = 0$ ise $g(0) = 2 \cdot 0 + 8 = 8$ bulunur. g fonksiyonunun grafiği y eksenini $(0, 8)$ noktasında keser.

$g(x) = 0$ ise $2x + 8 = 0$, $x = -4$ bulunur. g fonksiyonunun grafiği x eksenini $(-4, 0)$ noktasında keser.

Buna göre g fonksiyonunun grafiği aşağıdaki gibidir.

C



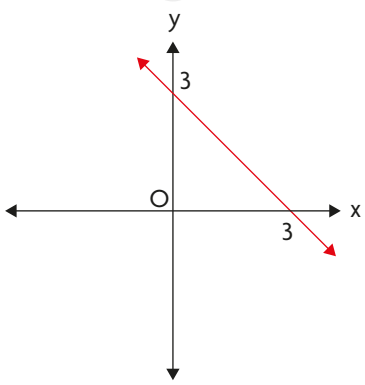
A $h(x) = 3 - x$

$x = 0$ ise $h(0) = 3 - 0 = 3$ bulunur. h fonksiyonunun grafiği y eksenini $(0, 3)$ noktasında keser.

$h(x) = 0$ ise $3 - x = 0$ ve $x = 3$ bulunur. h fonksiyonunun grafiği x eksenini $(3, 0)$ noktasında keser.

Buna göre h fonksiyonunun grafiği aşağıdaki gibidir.

A



ÇÖZÜM 7.

Saniye cinsinden geçen zamana x diyelim. Her saniyede suyun yüksekliği 15 cm azalıyorsa, x saniyede $(15x)$ cm azalır.

Başlangıçtaki su yüksekliği 1200 cm olduğuna göre x saniyede suyun yüksekliği $(1200 - 15x)$ cm olur.

Bu değişimi gösteren fonksiyonun cebirsel temsili $f(x) = 1200 - 15x$ şeklindedir.

$f(x) = 1200 - 15x$

İLİŞKİLENDİRİYORUM

Amaç: Bu bölümde yeni öğreneceğiniz konuyu; zihninizde var olan bilgileriniz, yaşantılarınız ve diğer derslerde öğrendiklerinizle ilişkilendirmenizi bekliyoruz.

Aşağıda bir eve ait su deposunun görseli verilmiştir. Depo tamamen boşken sabit hızla akan su ile doldurulmaya başlandıktan 3 saat sonra depoda 1200 L su olduğu ölçülmüştür.



Buna göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

1) **10 saatin sonunda depoda kaç litre su birikir?**

2) **Deponun hacmi 8000 L olduğuna göre, depo tamamen boşken kaç saatte dolar?**

3) **Hangi saat aralığında depodaki su miktarı 2000 L ile 2800 L arasında olur?**

4) **Depodaki su miktarı ile geçen süre arasındaki ilişkiyi doğrusal bir fonksiyon biçiminde ifade ediniz.**

GERİ BİLDİRİM

Bu geri bildirim sayesinde kendi cevabınızı kontrol edebilir, hatalarınızı düzelterek öğrenmenizi pekiştirebilirsiniz.

1) 3 saatin sonunda depoda 1200 L su olduğuna göre, 1 saatte depoda biriken su miktarı $\frac{1200}{3} = 400$ L olur.
Bu durumda 10. saatin sonunda depoda $400 \cdot 10 = 4000$ L su birikir.

2) Depoda 1 saatte biriken su miktarı 400 L ve deponun toplam hacmi 8000 L olduğuna göre $\frac{8000}{400} = 20$ olduğundan boş depo 20 saatte tamamen dolar.

3) Bir saatte depoda 400 L su biriktiğine göre depoda t saat sonunda biriken su miktarı $400 \cdot t$ L olacaktır.
O hâlde, depodaki su miktarının hangi saat aralığında 2000 L ile 2800 L arasında olduğunu bulmak için aşağıdaki işlemler yapılır:

$$2000 \le 400 \cdot t \le 2800 \Rightarrow \frac{2000}{400} \le \frac{400 \cdot t}{400} \le \frac{2800}{400} \Rightarrow 5 \le t \le 7$$

5 ve 7. saatler arasında depodaki su miktarı istenen değerler arasındadır.

4) Zamana (sa.) bağlı olarak depoda biriken su miktarını (litre) gösteren fonksiyon f olmak üzere, uygun aralıkta tanımlı f fonksiyonunun cebirsel temsili $f(t) = 400t$ şeklindedir ve doğrusal ilişki içeren problemlerin çözümünde doğrusal fonksiyonlar yardımıyla elde edilen denklem ve eşitsizlikler kullanılır.

Depodaki su miktarının zamana bağlı olarak **doğrusal bir fonksiyonla** ifade edilebildiğini gördünüz. Su deposunun her saatte eşit miktarda dolması, **değişkenler arasındaki sabit oranlı ilişkiyi** ortaya koyar. Bu ilişkiyi $f(t)=400t$ biçiminde tanımlayarak, herhangi bir zamanda depoda bulunan su miktarını hem **cebirsel** hem de **grafiksel** yollarla da belirleyebilirsiniz.

Gerçek yaşamda, bu tür doğrusal modeller; **yakıt tüketimi, üretim miktarı, maliyet hesaplamaları veya araç hızı** gibi birçok süreçte karşımıza çıkar. Bu nedenle doğrusal fonksiyonlar, değişkenler arasındaki **orantılı ilişkileri temsil etme** ve **yorumlama** açısından oldukça kullanışlıdır.

Günlük yaşamda karşılaştığınız buna benzer durumları sayısal verilerle ilişkilendirip **doğrusal modeller** aracılığıyla anlamlandırabilirsiniz.

UYGULAYARAK ÖĞRENİYORUM

Amaç: Bu bölümde bilgilerinizi etkinlikler ve uygulamalarla pekiştirmenizi, öğrenmeyi daha kalıcı hâle getirmenizi amaçlıyoruz.

Bu bölümde yer alan uygulama ve etkinliklerde verilen yönlendirmelere dikkat ederek adım adım ilerleyiniz. Çözümlü örnekleri dikkatle inceleyiniz; yanlarında yer alan açıklama, hatırlatma ve yönlendirmelere özen göstererek uygulamaları gerçekleştiriniz.

Sıra sizde sorularının geri bildirimleri bölüm sonunda bulunmaktadır.

DOĞRUSAL FONKSİYONLARLA İFADE EDİLEBİLEN DENKLEM VE EŞİTSİZLİKLER İÇEREN PROBLEMLER

ÖRNEK

Dikildiğinde boyu 24 cm olan bir bitkinin boyu, ayda 5 cm uzamaktadır.

Buna göre

a) Bitkinin zamana (ay) bağlı boyunu (cm) ifade eden fonksiyonun cebirsel temsilini oluşturunuz.

Bitki 1 ayda 5 cm uzamaktadır. Öyleyse bitki x ayda 5x cm uzar. Başlangıçta boyu 24 cm olduğuna göre x ay sonunda boyu (24 + 5x) cm uzunluğa ulaşır.

Bitkinin zamana (ay) bağlı boyunu (cm) ifade eden f fonksiyonunun cebirsel temsili $f(x) = 24 + 5x$ olur.

b) Bitkinin boyunun kaçıncı ayda 34 cm olduğunu veren denklemi oluşturunuz.

$f(x) = 24 + 5x$, $g(x) = 34$ $\Rightarrow$ $f(x) = g(x)$

$24 + 5x = 34$

$24 + 5x = 34$ ifadesi birinci dereceden bir bilinmeyenli bir denklemdir.

c) Bitkinin boyunun kaçıncı ayda 34 cm olduğunu veren denklemin kökünü bulunuz.

$24 + 5x = 34 \Rightarrow 5x - 10 = 0$ denklemi birinci dereceden olup bilinmeyeni x tir.

Denklemin kökü $5x - 10 = 0 \Rightarrow 5x = 10 \Rightarrow x = 2$ dir.

d) Bitkinin boyunun 34 cm den küçük olduğu, ay cinsinden zaman aralığını bulunuz.

$f(x) = 24 + 5x$, $g(x) = 34$ $\Rightarrow$ $f(x) < g(x)$

$24 + 5x < 34$

$5x < 10$

$x < 2$

Bitkinin boyu [0, 2) ında 34 cm'den küçüktür. Eşitsizliğin çözüm aralığı [0, 2) dır.

NOT

f ve g doğrusal fonksiyonlar olmak üzere $f(x) = g(x)$, $f(x) < g(x)$, $f(x) > g(x)$, $f(x) \leq g(x)$, $f(x) \geq g(x)$ benzeri ifadeler yardımıyla doğrusal ilişki içeren problemlerin çözümüne ulaşılabilir.

Gerçek sayılar kümesinde tanımlı $f(x) = ax + b$ ve $g(x) = cx + d$ doğrusal fonksiyonları için $a - c \neq 0$ olmak üzere,

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow ax + b = cx + d$$

biçimindeki eşitliğe **birinci dereceden bir bilinmeyenli denklem** denir.

$m, n \in \mathbb{R}$, $m \neq 0$ olmak üzere
$f(x) = g(x)$ denklemi
$ax + b = cx + d$ ¡ $(a - c)x + (b - d) = 0$
şeklinde yazılabilir. Buradan
$a - c = m$ ve $b - d = n$ olmak üzere,
$mx + n = 0$ denklemi elde edilir.

Birinci dereceden bir bilinmeyenli $mx + n = 0$ denklemini sağlayan x değerine denklemin kökü denir.

NOT

$f(x) < g(x)$, $f(x) > g(x)$, $f(x) \leq g(x)$, $f(x) \geq g(x)$ ifadelerine **birinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlik** denir.

Birinci dereceden bir bilinmeyenli bir eşitsizliği sağlayan değerlerin aralığına, **eşitsizliğin çözüm aralığı** denir.

SIRA SİZDE 1.

Bir mağaranın girişi, deniz seviyesinden 10 metre yüksekliktedir. Mağaradaki patikada ilerledikçe her 1 km mesafede yükseklik 4 m azalmaktadır. Mağaranın içindeki yürüyüş parkuru 9 km uzunluğundadır.

Aşağıdaki soruları bu duruma göre yanıtlayınız.

a) Bir sporcunun mağara girişinden itibaren yürüyüş parkurunun sonuna kadar yürüdüğü mesafeye (km) bağlı olarak deniz seviyesine göre yüksekliğini (m) ifade eden bir fonksiyon yazınız.

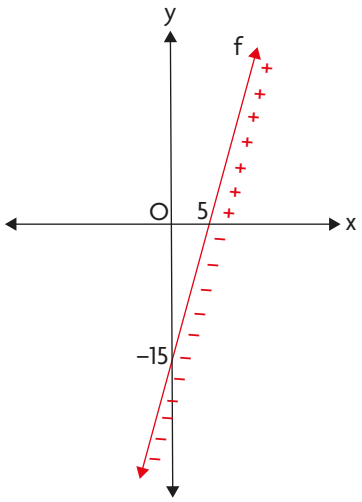
b) Sporcunun deniz seviyesinin 6 m altına indiği noktada kaç km yol aldığını bulmak için denklemi kurarak yürüyüş mesafesini belirleyiniz.

c) Sporcunun deniz seviyesinin üzerinde bulunduğu mesafe aralığını kilometre cinsinden bulunuz.

ÖRNEK

f(x) = 3x – 15 fonksiyonunun grafiğinden yararlanarak sıfırını, pozitif ve negatif değer aldığı aralıkları bulunuz.

f fonksiyonunun grafiğini çizmek için, g : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, g(x) = x şeklinde tanımlı g referans fonksiyonunun tanım aralığındaki değerleri 3 katı ile eşleyen fonksiyonun grafiği çizilip y ekseni boyunca negatif yönde 15 birim ötelenir.



f(x) = mx + n doğrusal fonksiyonunun sıfırı $-\frac{n}{m}$ dir.

f(x) = 3x – 15 fonksiyonunun sıfırı

$-\frac{(-15)}{3} = 5$'tir.

f fonksiyonun işaret tablosu;

x	$-\infty$		5		$+\infty$
f(x)		–	0	+	

f fonksiyonunun negatif değer aldığı en geniş aralık $(-\infty, 5)$

f fonksiyonunun pozitif değer aldığı en geniş aralık $(5, \infty)$

Birinci dereceden bir bilinmeyenli 3x – 15 = 0 denklemini sağlayan x değerini (denklemin kökünü) bulunuz.

3x – 15 = 0 ⇒ 3x = 15 ⇒ x = 5 bulunur.

Birinci dereceden bir bilinmeyenli 3x – 15 < 0 eşitsizliğinin çözüm aralığını bulunuz.

3x – 15 < 0 ⇒ 3x < 15

x < 5 bulunur.

Eşitsizliğin çözüm aralığı $(-\infty, 5)$ dır.

Birinci dereceden bir bilinmeyenli 3x – 15 > 0 eşitsizliğinin çözüm aralığını bulunuz.

3x – 15 > 0 ⇒ 3x > 15

x > 5 bulunur.

Eşitsizliğin çözüm aralığı $(5, \infty)$ dır.

Verilen örneği dikkatle inceleyiniz. Fonksiyonun grafiği ile denklem ve eşitsizlikler arasındaki ilişkiyi irdeleyiniz. Aşağıdaki sorular bu konuda size rehberlik edecektir:

- $y = f(x)$ fonksiyonunun sıfırını bulmak ile $f(x) = 0$ denklemini çözmek arasında nasıl bir ilişki vardır?
- Bir fonksiyonun sıfırını bulurken $f(x)$ değerini neden sıfıra eşitleriz?
- $f(x) > 0$ veya $f(x) < 0$ gibi ifadelerin grafiksel yorumu nasıl olabilir?
- $f(x) > 0$ eşitsizliğini çözmek, fonksiyon grafiğinde hangi bölgeleri bulmak demektir?
- $f(x) < 0$ eşitsizliğini çözmek ile fonksiyonun negatif değer aldığı aralığı bulmak arasında nasıl bir ilişki vardır?
- Bir doğrusal fonksiyonun pozitif ve negatif değer aldığı aralıkları belirlemek için nasıl bir yöntem tercih edilebilir?

Yukarıdaki soruları dikkate alarak, bir fonksiyonun grafiği ile bu fonksiyonun belirttiği denklem ve eşitsizlikler arasındaki ilişkiyle ilgili ulaştığınız genellemeyi aşağıdaki alana yazınız.

NOT

$m, n \in \mathbb{R}$, $m \neq 0$ olmak üzere $mx + n = 0$ denkleminin çözüm kümesi $\left\{-\frac{n}{m}\right\}$ dir.

f ve g gerçek sayılarda tanımlı doğrusal fonksiyonlar olsun.

$f(x) < g(x)$, $f(x) > g(x)$, $f(x) \leq g(x)$, $f(x) \geq g(x)$ eşitsizliklerinin çözüm aralıkları Tablo 1'de verilmiştir.

Tablo 1: *Birinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Eşitsizlikler ve Çözüm Aralıkları*

Eşitsizlik	Eşitsizliğin Düzenlenmiş Hali	$m > 0$ için Çözüm Aralığı	$m < 0$ için Çözüm Aralığı
$f(x) < g(x)$	$mx + n < 0$	$\left(-\infty, -\frac{n}{m}\right)$	$\left(-\frac{n}{m}, \infty\right)$
$f(x) \leq g(x)$	$mx + n \leq 0$	$\left(-\infty, -\frac{n}{m}\right]$	$\left[-\frac{n}{m}, \infty\right)$
$f(x) > g(x)$	$mx + n > 0$	$\left(-\frac{n}{m}, \infty\right)$	$\left(-\infty, -\frac{n}{m}\right)$
$f(x) \geq g(x)$	$mx + n \geq 0$	$\left[-\frac{n}{m}, \infty\right)$	$\left(-\infty, -\frac{n}{m}\right]$

SIRA SİZDE 2.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -4x - 12$ **olmak üzere** $f(x) \leq 0$ **eşitsizliğinin çözüm aralığını**

a) f fonksiyonunun cebirsel temsilinden yararlanarak bulunuz.

b) f fonksiyonunun grafiğinden yararlanarak bulunuz.

ÖRNEK

İki farklı elektrikli araç (E ve F) tam dolu batarya ile aynı anda yola çıkmıştır. Her iki araç da sabit hızla ilerlemekte ve aynı yol/hava koşullarına maruz kalmaktadır. Bataryalarda kalan enerji miktarı (kWh), geçen süreye (saat) bağlı olarak aşağıdaki doğrusal fonksiyonlarla modellenmektedir:

E aracı: $p(t) = 75 - 15t$

F aracı: $q(t) = 70 - 10t$

Araçların bir saatteki ortalama güç tüketimleri sırasıyla 15 kW ve 10 kW tır.

Buna göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) Başlangıçta her iki aracın bataryasında kaç kWh enerji bulunduğunu hesaplayınız.

b) Her bir aracın bataryasının kaç saat sonra tamamen boşaldığını bulunuz.

c) Araçların bataryalarında kalan enerji miktarının hangi anda eşit olduğunu bulunuz.

d) Araçların bataryalarında kalan enerji miktarı eşit olduğu anda her bir araçta kaç kWh enerji kaldığını bulunuz.

e) Verilen fonksiyonların grafiklerini aynı koordinat düzleminde çizerek enerji-zaman grafiğini oluşturunuz. Grafikte iki doğrunun kesişim noktasını işaretleyiniz ve bu noktayı yorumlayınız.

ÇÖZÜM

E aracı: $p(t) = 75 - 15t$

F aracı: $q(t) = 70 - 10t$

a) $t = 0$ anında E aracında: $p(0) = 75 - 15 \cdot 0 = 75$ kWh,

F aracında: $q(0) = 70 - 10 \cdot 0 = 70$ kWh enerji bulunmaktadır.

b) Bir aracın bataryası tamamen boşken enerji miktarı 0 kWh olur.
E aracının bataryasının tamamen boşalması için gereken süre, p fonksiyonu 0'a eşitlenerek bulunur.

$75 - 15t = 0$
$75 = 15t$
$t = 5$ saat olarak bulunur.

F aracının bataryasının tamamen boşalması için gereken süre, q fonksiyonunun değeri 0'a eşitlenerek bulunur.

$70 - 10t = 0$
$70 = 10t$
$t = 7$ saat olarak bulunur.

c) Araçların bataryalarında kalan enerji miktarlarının eşitlendiği zamanı bulabilmek için $p(t) = q(t)$ denklemi çözülür.

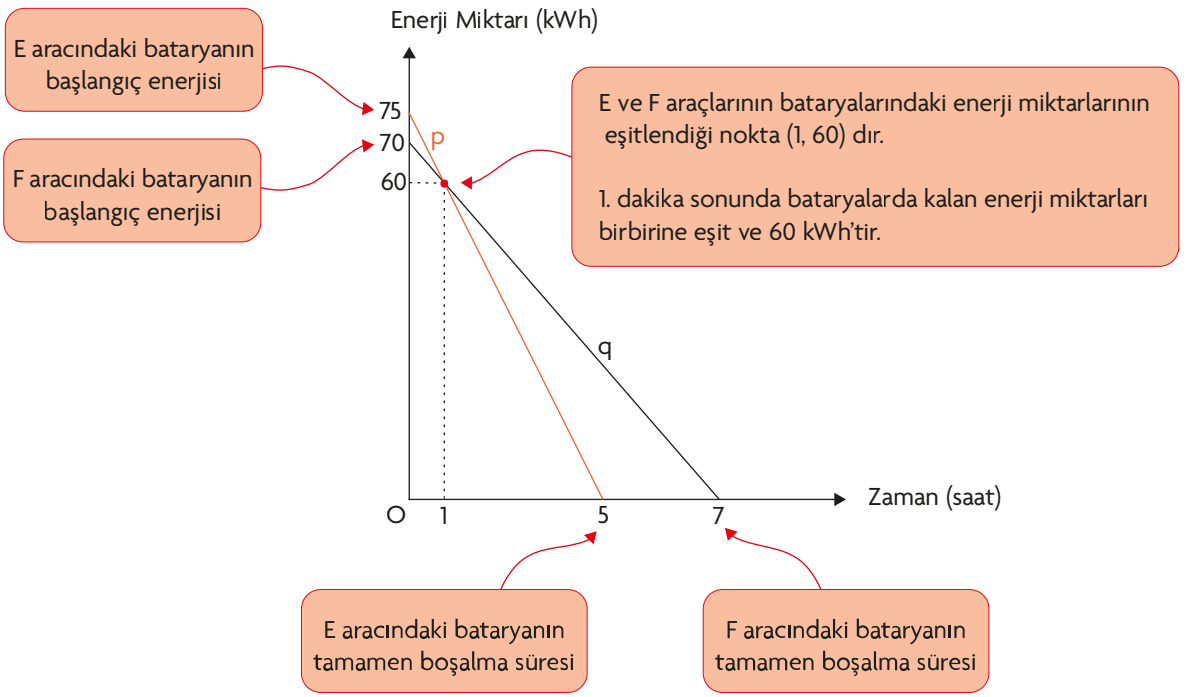
$75 - 15t = 70 - 10t$
$75 - 70 = 15t - 10t$
$5 = 5t$
$t = 1$ saat olarak bulunur.

d) 1. saatin sonunda araçların bataryalarında kalan enerji miktarları birbirine eşitlenir ve kalan enerji miktarı $p(1)$ veya $q(1)$ değeri hesaplanarak bulunur.

$p(1) = 75 - 15 \cdot 1 = 60$ kWh,
$q(1) = 70 - 10 \cdot 1 = 60$ kWh olur.

1. saatin sonunda her bir araçta 60 kWh enerji kalmıştır.

e) E aracı: $p(t) = 75 - 15t$
F aracı: $q(t) = 70 - 10t$



SIRA SİZDE 3.

Bir fabrikada sıvı yakıtla çalışan iki farklı üretim makinesi, depoları tamamen doluyken aynı anda çalıştırılıyor. Makinelerin ara vermeden çalışıp sabit hızla yakıt tükettiği biliniyor. Makinelerde kalan yakıt miktarının (litre), geçen süreye t (saat) bağlı olarak değişimi aşağıdaki doğrusal fonksiyonlarla modellenmektedir.

M makinesi: $u(t) = 60 - 12t$

N makinesi: $v(t) = 50 - 8t$

Makinelerin bir saat içinde tükettikleri ortalama yakıt miktarları sırasıyla 12 L/saat ve 8 L/saattir.

Buna göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) Başlangıçta her iki makinenin yakıt deposunda kaç litre yakıt bulunduğunu hesaplayınız.

b) Her bir makinenin yakıt deposunun kaç saat sonra tamamen boşaldığını bulunuz.

c) Makinelerin depolarında kalan yakıt miktarlarının hangi anda eşit olduğunu bulunuz.

d) Makinelerin depolarında kalan yakıt miktarları eşit olduğu anda makinelerin her birinde kaçar litre yakıt kalmıştır?

e) Verilen fonksiyonları aynı koordinat düzleminde çizerek yakıt-zaman grafiğini oluşturunuz. Grafikte iki doğrunun kesişim noktasını işaretleyiniz ve bu noktayı yorumlayınız.

ÖRNEK

Orman mühendisliği ve ekoloji çalışmalarında, ağaç yaşını doğrudan yıllık halkaları sayarak belirlemek, ağaç gövdesini kesmeyi gerektirir. Bunun yerine, ağacı kesmeden, "artım burgusu" adı verilen bir aletle gövdenin ince bir kısmından örnek alınabilir. Böylece yıllık halkalar sayılarak gerçek yaş belirlenebilir.

Orman mühendisleri tarafından, iki farklı bölgedeki çok sayıda aynı tür meşe ağacı üzerinde gövde çapı (cm) ve yaş (yıl) ile ilgili ölçümler yapılmış ve bu ölçümler kaydedilmiştir. Bu iki veri arasında aşağıdaki yaklaşık doğrusal ilişkiler belirlenmiştir:

- Verimli orman alanlarında yetişen meşe ağaçları: Yaş ≈ 3,4 · (gövde çapı) + 12
- Kurak bölgelerde yetişen meşe ağaçları: Yaş ≈ 2,8 · (gövde çapı) + 18

Buna göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) Yetiştiği yere göre gövde çapı x (cm) olan bir meşe ağacının yaşını y (yıl) cinsinden yaklaşık olarak veren iki ayrı doğrusal fonksiyonu yazınız.

b) Bir ormanlık alanda yapılan çalışmalarda bazı meşe ağaçlarının gövde çapları ölçülerek yaşları tahmin edilmiş ve bu veriler bir tabloya kaydedilmiştir. Aşağıdaki tabloda bu verilerden bazıları verilmiştir. Yukarıda verilen doğrusal ilişkilere göre tabloda boş bırakılan yerleri tamamlayınız.

Gövde Çapı (cm)	Verimli Alan (Yaş)	Kurak Alan (Yaş)
20		
	97	
		102

ÇÖZÜM

a) Verimli orman alanlarında yetişen meşe ağaçları: Yaş ≈ 3,4 · (gövde çapı) + 12 → $y = 3{,}4x + 12$

Kurak bölgelerde yetişen meşe ağaçları: Yaş ≈ 2,8 · (gövde çapı) + 18 → $y = 2{,}8x + 18$

b)

Gövde Çapı (cm)	Verimli Alan (Yaş)	Kurak Alan (Yaş)
20	$y = 3{,}4 \cdot 20 + 12 = 80$	$y = 2{,}8 \cdot 20 + 18 = 74$
25	$3{,}4x + 12 = 97$ $3{,}4x = 85$ $x = \frac{85}{3{,}4}$ $x = 25$	$y = 2{,}8 \cdot 25 + 18 = 88$
30	$y = 3{,}4 \cdot 30 + 12 = 114$	$2{,}8x + 18 = 102$ $2{,}8x = 84$ $x = \frac{84}{2{,}8}$ $x = 30$

ÖRNEK

Farklı iki model telefon kullanan Ali ve Ayşe'nin telefonlarının şarj ömürleriyle ilgili aşağıdaki bilgiler verilmiştir:

- Ali ve Ayşe telefonlarını sabah aynı anda şarjdan çıkarmıştır.
- Ali'nin telefonunun şarj doluluk oranı şarjdan çıkarıldığı anda %80, Ayşe'ninki ise %90'dır.
- 2 saat sonra her iki telefonun şarj doluluk oranı %60'ta eşitlenmiştir.
- Telefonların şarj tüketim hızlarının sabit olduğu varsayılacaktır.

Bu bilgilere göre aşağıdaki soruları yanıtlayınız:

a) Telefonlar şarjdan çıkarıldıktan sonra geçen zamana (saat) bağlı olarak şarj doluluk yüzdelerini veren fonksiyonların grafiklerini aynı koordinat düzleminde çiziniz.

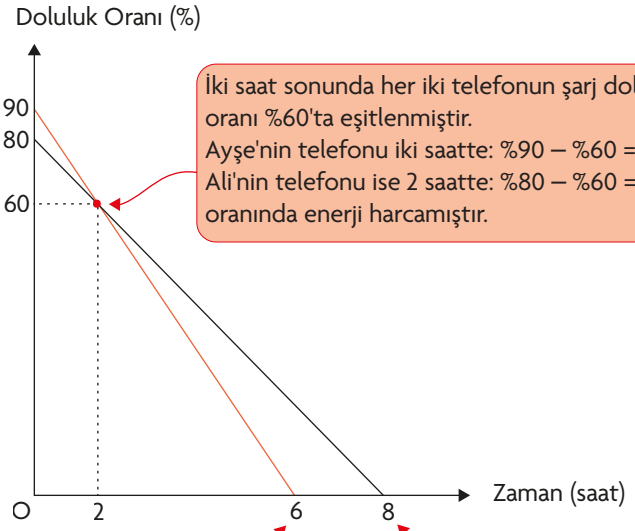
b) Grafiklere göre telefonların şarj ömürlerini karşılaştırınız.

c) Her bir telefon için şarj doluluk yüzdesinin zamana (saat) bağlı değişimini veren cebirsel fonksiyonları yazınız.

ÇÖZÜM

a) Ayşe'nin telefonunun şarj doluluk oranı şarjdan çıkarıldığı anda %90'dır.

Ali'nin telefonunun şarj doluluk oranı şarjdan çıkarıldığı anda %80'dir.



İki saat sonunda her iki telefonun şarj doluluk oranı %60'ta eşitlenmiştir.
Ayşe'nin telefonu iki saatte: %90 – %60 = %30,
Ali'nin telefonu ise 2 saatte: %80 – %60 = %20 oranında enerji harcamıştır.

Ayşe'nin telefonunun başlangıç anında şarj doluluk oranı %90'dır. Doluluk oranı her 2 saatte %30 azalacağından 6 saat sonunda şarjı bittiği için telefonu kapanır.

Ali'nin telefonunun başlangıç anında şarj doluluk oranı %80'dir. Doluluk oranı her 2 saatte %20 azalacağından 8 saat sonunda şarjı bittiği için telefonu kapanır.

b) Ayşe'nin telefonunun tam dolu olduğu varsayılırsa saatte %15 oranında şarj tükettiği için

$\frac{100}{15} = \frac{20}{3} = 6,\overline{6}$ saat sonunda şarjı tamamen tükenir.

Bu durumda Ayşe'nin telefonunun şarj ömrü $6,\overline{6}$ saat olur.

Ali'nin telefonunun tam dolu olduğu varsayılırsa saatte %10 oranında şarj tükettiği için

$\frac{100}{10}$ = 10 saat sonunda şarjı tamamen tükenir.

Bu durumda Ali'nin telefonunun şarj ömrü 10 saat olur.

Sonuç olarak, şarj ömürleri açısından karşılaştırıldığında Ali'nin telefonu daha verimlidir.

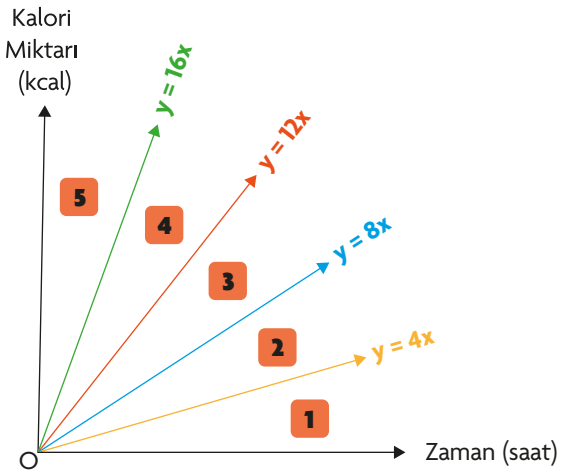
c) Ayşe'nin telefonu saatte %15 oranında şarj tüketmektedir. Dolayısıyla x saat sonunda %15x oranında şarjı azalır. Başlangıç anında %90 olan doluluk oranı x saat sonunda %(90–15x) olur.
Ayşe'nin telefonu için şarj doluluk yüzdesinin zamana bağlı değişimini veren fonksiyonun cebirsel temsili: $f(x) = 90 – 15x$ olarak yazılır.

Ali'nin telefonu saatte %10 oranında şarj tüketmektedir. Dolayısıyla x saat sonunda %10x oranında şarjı azalır. Başlangıç anında %80 olan doluluk oranı x saat sonunda %(80–10x) olur.
Ali'nin telefonu için şarj doluluk yüzdesinin zamana bağlı değişimini veren fonksiyonun cebirsel temsili: $g(x) = 80 – 10x$ olarak yazılır.

ÖRNEK

Bir spor salonunda, sporcuların koşu bandında geçirdikleri süre (dakika) ile yaktıkları kalori miktarı (kcal) arasındaki ilişki incelenmiş ve elde edilen verilerin, dik koordinat düzleminde gösterilen beş farklı antrenman kategorisinden biriyle uyumlu olduğu görülmüştür.

Örneğin, 3. kategorideki sporcular dakikada 8 ile 12 kcal arasında enerji harcamaktadır. Bu, y = 8x ve y = 12x doğruları arasında kalan bölgeyi ifade eder. Bu kategoride bulunan sporcunun x dakikada yaktığı kalori miktarı (8x , 12x) ndadır.



Aşağıdaki soruları verilen bağlama göre yanıtlayınız:

a) 4. kategoride yer alan bir sporcu koşu bandında 15 dakika koştuğunda yaktığı kalorinin hangi değer aralığında olduğunu bulunuz.

b) Toplam 160 kcal yakmış olan ve 2. kategoride yer alan bir sporcunun koştuğu sürenin hangi değer aralığında olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

a) Koşu bandında 15 dakika koşan bir sporcu 4. kategoride ise yakılan kalori miktarı y olmak üzere $12x < y < 16x$ olmalıdır.

$x = 15$ için $12 \cdot 15 < y < 16 \cdot 15 \Rightarrow 180 < y < 240$ bulunur.

Bu durumda 4. kategoride ve 15 dakika koşan bir sporcunun yakabileceği kalori (180 , 240) ndadır.

b) Toplam 160 kcal yakmış olan bir sporcu 2. kategoride ise koşu süresi x dakika ve yakılan kalori miktarı y olmak üzere $4x \leq y \leq 8x$ olmalıdır.

$y = 160$ kcal için $4x < 160 < 8x$ eşitsizliği sağlanmalıdır.

$4x < 160 \Rightarrow x < 40$ ve $160 < 8x \Rightarrow 20 < x$ olur.

Bu durumda toplam 160 kcal yakmış ve 2. kategoride yer alan bir sporcunun koşu süresi (20 , 40) ında olmalıdır.

ÖRNEK

Bir internet hizmet sağlayıcısı, üniversite öğrencilerine özel iki farklı internet hizmet paketi sunmaktadır. Paketlerin aylık sabit ücretleri ve kullanılan veri miktarına (GB) bağlı olarak uygulanan ek ücretler aşağıdaki tabloda verilmiştir:

Paket	Sabit Ücret (TL/ay)	GB başına ek ücret
Paket A	200 TL	+5 TL/GB
Paket B	150 TL	+7 TL/GB

Bu bilgilere göre aşağıdaki soruları yanıtlayınız:

a) x GB internet kullanımı için her iki paketin toplam aylık maliyetini veren fonksiyonları yazınız.

b) Hangi miktarda veri kullanıldığında (GB) iki paketin toplam maliyeti eşitlenir? Bu değeri cebirsel olarak bulunuz.

c) Hangi miktarda veri kullanımından itibaren Paket A, Paket B'ye göre daha ekonomik hâle geldiğini hesaplayınız.

ÇÖZÜM

a) x GB'lik internet kullanımı için toplam maliyet fonksiyonlarının cebirsel temsilleri;

Paket A'da: Sabit ücret (200 TL) + kullanılan her 1 GB veri için 5 TL
$A(x) = 200 + 5x$,

Paket B'de: Sabit ücret (150 TL) + kullanılan her 1 GB veri için 7 TL
$B(x) = 150 + 7x$ olarak yazılır.

b) $A(x) = B(x)$ denkleminden yararlanarak toplam ücretin birbirine eşit olduğu veri kullanım miktarını bulalım.

$$200 + 5x = 150 + 7x$$
$$200 - 150 = 7x - 5x$$
$$50 = 2x$$
$$x = 25 \text{ GB}$$

25 GB veri kullanımında iki pakette ödenecek toplam tutar birbirine eşittir.

c) Paket A'nın, Paket B'ye göre daha ekonomik olması için $A(x) < B(x)$ eşitsizliği sağlanmalıdır.

$$200 + 5x < 150 + 7x$$
$$200 - 150 < 7x - 5x$$
$$50 < 2x$$
$$x > 25 \text{ GB}$$

25 GB dan fazla olan veri kullanım miktarları için Paket A, Paket B'ye göre daha ekonomiktir.

MUTLAK DEĞERLİ DENKLEM VE EŞİTSİZLİK İÇEREN PROBLEMLER

ÖRNEK

pH bir çözeltinin asitlik derecesini gösteren bir ölçü birimidir. Sağlıklı bir insanın midesindeki asitlik derecesinin 0,5 pH sapmayla ortalama 2,5 pH olduğu bilinmektedir.

1.Problem: Sağlıklı bir insan midesinin pH derecesi hangi değerleri alabilir?

a) Mutlak değer fonksiyonlarını kullanarak yukarıdaki problem durumunu cebirsel temsillerle ifade edelim.

Sağlıklı bir insan midesinin pH derecesini x ile gösterelim. x in 2,5 sayısına uzaklığı en çok 0,5 olmalıdır. Bu durumda x in 2,5 sayısına uzaklığı $f(x) = |x - 2,5|$ ve $g(x) = 0,5$ olmak üzere problem durumunun cebirsel temsili $f(x) \le g(x)$ şeklindedir.

b) Problem çözümünü cebirsel temsil yardımıyla bulalım.

$|x - 2,5| \le 0,5$ eşitsizliğinin çözümü için f fonksiyonu, parçalı fonksiyon olarak yazılır.

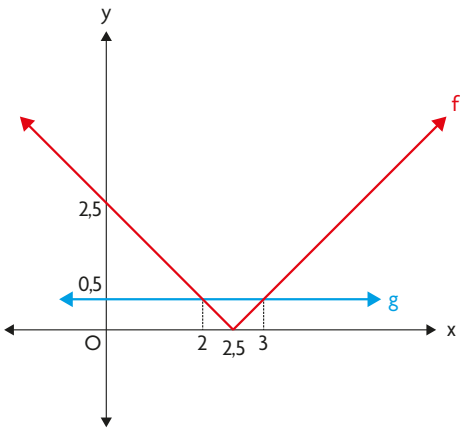
$$f(x) = \begin{cases} 2,5 - x, & x < 2,5 \\ x - 2,5, & x \ge 2,5 \end{cases}$$

Parçalı olarak yazılan cebirsel temsiller için ayrı ayrı eşitsizlikler çözüldüğünde $2,5 - x \le 0,5 \Rightarrow 2 \le x$ ve $x - 2,5 \le 0,5 \Rightarrow x \le 3$ bulunur.
İki eşitsizlik birlikte yazılarak x in alacağı değerlerin kümesi $2 \le x \le 3$ olur. Bulunan çözüm kümesi [2,3] olarak da gösterilebilir.

c) Mutlak değerli fonksiyonları kullanarak yukarıdaki problem durumunu grafik temsiliyle ifade edelim.

$f(x) = |x - 2,5|$ ve $g(x) = 0,5$ fonksiyonlarının grafiklerini aynı koordinat düzleminde çizelim. Öncelikle fonksiyonların grafiklerinin kesişim noktalarını bulalım.

$f(x) = g(x) \Rightarrow |x - 2,5| = 0,5 \Rightarrow 2,5 - x = 0,5$ ve $x - 2,5 = 0,5$ denklemlerinden kesişim noktalarının apsisleri $x = 2$ ve $x = 3$'tür.



d) Problem çözümünü grafik temsili yardımıyla bulalım.

$f(x) \le g(x)$ eşitsizliğinin çözümü için mavi renkli grafiğin kırmızı renkli grafikten daha büyük veya eşit değerler aldığı x değerleri $2 \le x \le 3$ olduğundan sağlıklı bir insan midesinin pH derecesi [2, 3] aralığındaki değerleri alabilir.

2.Problem: Sağlıksız bir insan midesinin pH derecesi hangi değerleri alabilir?

Mutlak değer içeren problemlerin çözümünde mutlak değer fonksiyonları yardımıyla elde edilen denklem ve eşitsizlikler kullanılır. f ve g doğrusal fonksiyonlar olmak üzere

$$|f(x)| = |g(x)|$$
$$|f(x)| < |g(x)|$$
$$|f(x)| \ge |g(x)|$$
$$|f(x)| > |g(x)|$$
$$|f(x)| \le |g(x)|$$

gibi ifadeler yardımıyla problem çözümüne ulaşılabilir.

$g(x) = k$ $(k \in \mathbb{R}, k \neq 0)$ şeklinde sabit fonksiyon olduğunda yukarıdaki denklem ve eşitsizlikler

$|f(x)| = k, |f(x)| \ge k, |f(x)| > k,$
$|f(x)| \le k$ ve $|f(x)| < k$

biçimine dönüşür.

Özel olarak $g(x) = 0$ olduğunda

$|f(x)| = 0, |f(x)| \ge 0, |f(x)| > 0,$
$|f(x)| \le 0$ ve $|f(x)| < 0$

biçimindeki denklem ve eşitsizlikler elde edilir.

Mutlak değerli fonksiyon içeren denklem ve eşitsizlikler, cebirsel veya grafiksel temsiller yardımıyla çözülebilir. Mutlak değerli fonksiyon aynı zamanda bir parçalı fonksiyon olması nedeniyle her bir parça için çözüm uygulanır.

f ve g fonksiyonlarının kesim noktalarının apsis değerleri, cebirsel çözümde elde edilen denklemin kökünü ifade eder.

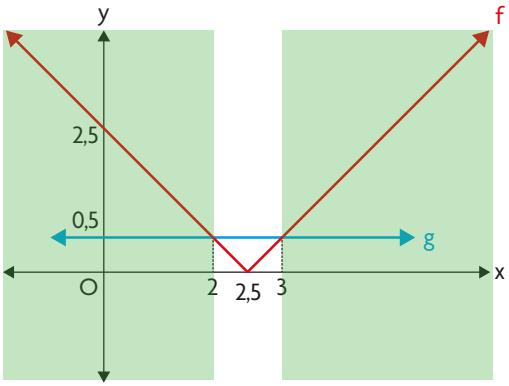
a) Mutlak değer fonksiyonlarını kullanarak yukarıdaki problem durumunu cebirsel temsillerle ifade edelim.

Sağlıksız bir insan midesinin pH derecesini x ile gösterelim. x in 2,5 sayısına uzaklığı 0,5'ten büyük olmalıdır. Bu durumda $f(x) = |x - 2,5|$ ve $g(x) = 0,5$ olmak üzere problem durumunun cebirsel temsili $f(x) > g(x)$ şeklindedir.

b) Problem çözümünü cebirsel temsil yardımıyla bulalım.

$f(x) > g(x) \Rightarrow |x - 2,5| > 0,5 \Rightarrow 2,5 - x > 0,5$ ve $x - 2,5 > 0,5$ eşitsizlikleri düzenlenirse $x < 2$ ve $x > 3$ bulunur. Bulunan çözüm kümesi $\mathbb{R} - [2,3]$ olarak da gösterilebilir. Dolayısıyla sağlıksız bir insan midesinin pH derecesi 2'den küçük veya 3'ten büyük olabilir.

c) Mutlak değerli fonksiyonları kullanarak yukarıdaki problem durumunu grafik temsiliyle ifade edelim.



d) Problem çözümünü grafik temsili yardımıyla bulalım.

$f(x) > g(x)$ eşitsizliğinin çözümü için kırmızı renkli grafiğin mavi renkli grafikten büyük olduğu x değerleri $x < 2$ veya $x > 3$ olduğundan sağlıksız bir insan midesinin pH derecesi 2'den küçük veya 3'ten büyük olabilir.

3.Problem: Sağlıklı bir insan midesinin pH derecesinin en küçük ve en büyük değeri kaçtır?

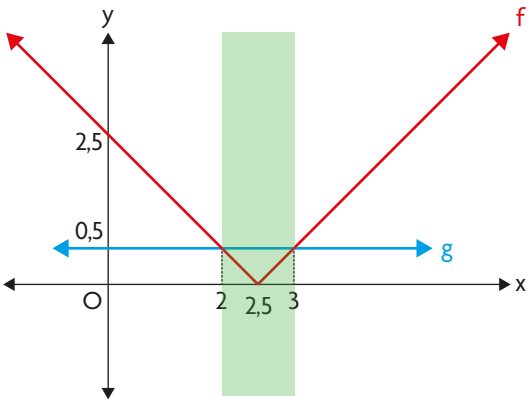
a) Mutlak değer fonksiyonlarını kullanarak yukarıdaki problem durumunu cebirsel temsillerle ifade edelim.

Sağlıklı bir insan midesinin pH derecesini x ile gösterirsek x in 2,5 sayısına uzaklığı 0,5 olmalıdır. Bu durumda $f(x) = |x - 2,5|$ ve $g(x) = 0,5$ olmak üzere problem durumunun cebirsel temsili $f(x) = g(x)$ şeklindedir.

b) Problem çözümünü cebirsel temsil yardımıyla bulalım.

$f(x) = g(x) \Rightarrow |x - 2,5| = 0,5 \Rightarrow 2,5 - x = 0,5$ ve $x - 2,5 = 0,5$ denklemlerinden $x = 2$ ve $x = 3$ buluruz.
Dolayısıyla sağlıklı bir insan midesinin pH derecesi en küçük 2, en büyük 3'tür.

c) Mutlak değerli fonksiyonları kullanarak yukarıdaki problem durumunu grafik temsiliyle ifade edelim.



d) Problem çözümünü grafik temsili yardımıyla bulalım.

$f(x) = g(x)$ eşitliğinin çözümü için mavi renkli ve kırmızı renkli grafiğin kesiştiği x değerleri $x = 2$ ve $x = 3$ olduğundan sağlıklı bir insan midesinin pH derecesi en küçük 2, en büyük 3'tür.

SIRA SİZDE 4.

BÜTÇE PLANLAMASI : Elektrik Faturası

Senaryo:

Bir işyerinin muhasebe bölümünde çalışıyor olduğunuzu düşününüz. Bu iş yerinin aylık elektrik fatura tutarı, bir önceki ayın elektrik fatura tutarının 200 TL eksiği ile 200 TL fazlası arasında değişmektedir. Nisan ayına ait elektrik faturası 2 400 TL olarak gelmiştir.

Görevleriniz:

1. **Mayıs ayına ait elektrik faturası tutarının alabileceği değerleri belirlemek.**

   Mutlak değer fonksiyonlarını kullanarak yukarıdaki problem durumunu cebirsel temsillerle ifade ederek mayıs ayına ait elektrik fatura tutarının TL cinsinden hangi değerleri alabileceğini bulunuz.

2. **Mart ayına ait elektrik faturası tutarını tahmin etmek.**

   Mart ayına ait fatura tutarı bilgisine ulaşılamamaktadır. Mutlak değer fonksiyonlarını kullanarak yukarıdaki problem durumunu cebirsel temsillerle ifade ederek mart ayına ait elektrik faturası tutarının alabileceği en küçük ve en büyük değeri bulunuz.

ÖRNEK

Alanı $(9x^2+24x+16)\ cm^2$ olan bir karenin çevre uzunluğu (16x – 4) cm olarak veriliyor.

Buna göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) Karenin bir kenar uzunluğunu mutlak değer fonksiyonlarının cebirsel temsilleri yardımıyla belirleyiniz.

Alanı $(9x^2+24x+16)\ cm^2$ olan karenin bir kenar uzunluğu $\sqrt{9x^2+24x+16}=\sqrt{(3x+4)^2}=|3x+4|$ cm olur.

Çevresi (16x – 4) cm olan karenin bir kenar uzunluğu $\frac{16x-4}{4}=\frac{4(4x-1)}{4}=(4x-1)$ cm olur.

Karenin kenar uzunluklarını veren cebirsel ifadeler birbirine eşitlendiğinde $|3x+4|=4x-1$ denklemi elde edilir. Elde edilen denklemin sol tarafı parçalı hâle getirilerek her cebirsel temsil için denklemler ayrı ayrı çözülür.

$3x+4=0\Rightarrow x=-\frac{4}{3}$ olmaküzere $x<-\frac{4}{3}$ için $-3x-4=4x-1\Rightarrow 7x=-3\Rightarrow x=-\frac{3}{7}$,

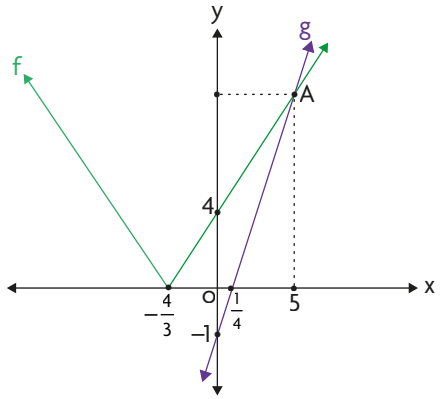
$x\geq-\frac{4}{3}\Rightarrow 3x+4=4x-1\Rightarrow x=5$ bulunur. Bulunan $x=-\frac{3}{7}$ değeri $x<-\frac{4}{3}$ şartını sağlamaz. Bu yüzden çözüm kümesine alınmaz. x = 5 değeri, $x\geq-\frac{4}{3}$ şartını sağlar. Buradan çözüm kümesi {5} olur. Karenin bir kenar uzunluğu

$4x-1=4\cdot5-1=19$ cm bulunur.

|f(x)| = g(x) biçimindeki mutlak değerli denklemler cebirsel temsillerle çözüldüğünde bu denklemlerin x için belirlenen aralığı sağlayıp sağlamadığı kontrol edilmelidir.

b) Bulduğunuz sonucu grafik temsilleriyle doğrulayınız.

f(x) = |3x + 4| ve g(x) = 4x – 1 fonksiyonlarının grafiklerini aynı koordinat düzleminde çizelim.



f(x) = g(x) denkleminin çözümü için yeşil renkli grafik ile mor renkli grafiğin kesiştiği A noktasının apsisine bakılır. A noktasının apsisi x = 5 olduğundan |3x + 4| = 4x – 1 denkleminin çözüm kümesi {5} olur. Cebirsel çözümdekine benzer şekilde bu denklemin bir tane kökü bulunmaktadır.

ÖRNEK

Sayı doğrusu üzerindeki bir sayının iki katının 6'ya olan uzaklığı, aynı sayının iki katının 4 eksiğinden büyüktür.

a) Bu koşulu sağlayan gerçek sayıları mutlak değer fonksiyonlarının cebirsel temsilleri yardımıyla belirleyiniz.

Sayı doğrusu üzerindeki bir sayıyı x ile gösterirsek, iki katının 6'ya olan uzaklığının cebirsel ifadesi f(x) = |2x – 6|, aynı sayının iki katının dört eksiğinin cebirsel ifadesi g(x) = 2x – 4 şeklinde olur.

Koşulu sağlayan x gerçek sayılarını bulabilmek için f(x) > g(x) eşitsizliğinin çözüm kümesini bulmalıyız.

|2x – 6| > 2x – 4 eşitsizliğinin sol tarafı parçalı hâle getirilerek her cebirsel temsil için eşitsizlikler ayrı ayrı çözülür.

|f(x)| ≥ g(x),
|f(x)| > g(x),
|f(x)| ≤ g(x),
|f(x)| < g(x),

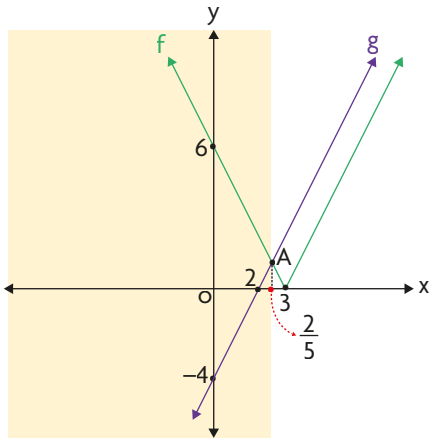
biçimindeki mutlak değerli eşitsizlikler cebirsel temsillerle çözüldüğünde bulunan aralık ile eşitsizliklerin x için belirlenen aralıklarının kesişim kümeleri çözüm kümesini verir.

2x – 6 = 0 ⇒ x = 3 olmak üzere

x < 3 için 6 – 2x > 2x – 4 ⇒ 10 > 4x ⇒ $\frac{5}{2}$ > x, x ≥ 3 için 2x – 6 > 2x – 4 ⇒ –6 > –4 bulunur ki bunun yanlış olduğu açıktır.

Bulunan x < $\frac{5}{2}$ ve x < 3 eşitsizliklerinin kesişim kümesinden çözüm kümesi $(-\infty, \frac{5}{2})$ olarak bulunur.

b) Bulduğunuz sonucu grafik temsilleriyle doğrulayınız.



f(x) = |2x – 6| ve g(x) = 2x – 4 fonksiyonlarının grafiklerini aynı koordinat düzleminde çizelim.
f(x) > g(x) eşitsizliğinin çözümü için yeşil renkli grafiğin mor renkli grafikten daha büyük değerler aldığı x aralıklarına bakılmalıdır.
Grafik incelendiğinde fonksiyonların grafiklerinin kesim noktası olan A noktasının apsis değeri olan $\frac{5}{2}$'den küçük olan x değerlerinin olduğu sarı bölgenin x ekseni ile kesişimi |2x – 6| > 2x – 4 eşitsizliğinin çözüm kümesini ifade eder.

SIRA SİZDE 5.

Alanı $(4x^2+8x+4)cm^2$ olan bir dikdörtgenin uzun kenarının uzunluğu kısa kenarının uzunluğunun 4 katıdır.

Verilenlere göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) Dikdörtgenin uzun kenarının uzunluğu en az 40 cm olduğuna göre x in alabileceği değerleri mutlak değer fonksiyonlarının cebirsel temsilleri yardımıyla belirleyiniz.

b) Dikdörtgenin çevresi (20x – 30) cm olduğuna göre x in alabileceği değerleri mutlak değer fonksiyonlarının cebirsel temsilleri yardımıyla belirleyiniz.

GERİ BİLDİRİM

Bu geri bildirim sayesinde kendi cevabınızı kontrol edebilir, hatalarınızı düzelterek öğrenmenizi pekiştirebilirsiniz.

SIRA SİZDE 1.

ÇÖZÜM

a) Fonksiyon oluşturma: Sporcunun mağara girişinden itibaren yürüyüş parkurunun sonuna kadar yürüdüğü mesafeye (km) bağlı olarak deniz seviyesine göre yüksekliğini (m) ifade eden fonksiyon f olsun. Uygun aralıkta tanımlı f fonksiyonu doğrusal bir fonksiyondur. Başlangıç anında yükseklik deniz seviyesinin 10 metre üstündedir. Her 1 km yürüyüşte yükseklik 4 metre azalmaktadır. x km yürüyüş sonrası yükseklik 4x metre azalır. f fonksiyonunun cebirsel temsili, $f(x)=10-4x$ olur.

b) Denklem analizi: $10-4x=-6 \Rightarrow -4x+16=0$ denklemi birinci dereceden olup bilinmeyeni x tir.

Denklemin kökü

$-4x+16=0$

$-4x=-16$

$x=4$ bulunur.

c) Mesafe aralığı:

$f(x)>0$ eşitsizliğini sağlayan değerler için sporcu deniz seviyesinden yüksek konumdadır.

Buradan $10-4x>0 \Rightarrow 10>4x \Rightarrow \frac{5}{2}>x$ bulunur.

Sporcunun deniz seviyesinden yüksek konumda olduğu mesafe aralığı kilometre cinsinden $\left[0,\frac{5}{2}\right)$ dır.

SIRA SİZDE 2.

ÇÖZÜM

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-4x-12$ olmak üzere $f(x)\le 0$ eşitsizliğinin çözüm aralığını

a) f fonksiyonunun cebirsel temsilinden yararlanarak bulalım.

$f(x)\le 0$ eşitsizliğinde $f(x)$ fonksiyonunun cebirsel temsilini yerine yazalım.

$-4x-12\le 0$

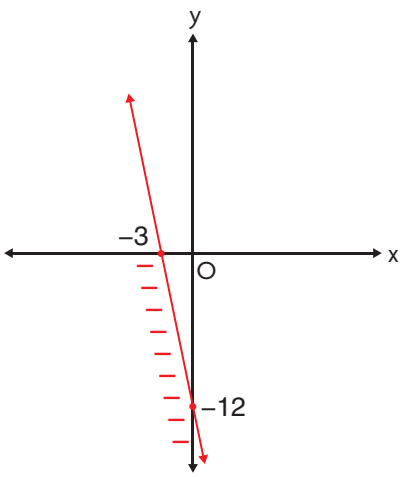
$-4x\le 12$

$x\ge -3$ (Dikkat! Eşitsizliğin her iki tarafı -4 ile bölünürken eşitsizlik yön değiştirir.)

bulunur. Buradan $f(x)\le 0$ eşitsizliğinin çözüm aralığı $[-3,\infty)$ olarak bulunur.

b) f fonksiyonunun grafiğinden yararlanarak bulalım.

$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x$ şeklinde tanımlı g referans fonksiyonunun tanım aralığındaki değerleri -4 katı ile eşleyen fonksiyonun grafiği y ekseni boyunca negatif yönde 12 birim ötelenerek f fonksiyonunun grafiği aşağıdaki gibi oluşturulur.



$f(x)=mx+n$ doğrusal fonksiyonunun sıfırı $-\frac{n}{m}$ dir.

$f(x)=-4x-12$ fonksiyonunun sıfırı $-\frac{(-12)}{-4}=-3$'tür.

Fonksiyonun İşaret Tablosu:

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
f(x)		+	0	–	

UYARI

$f(x)=-4x-12$ fonksiyonunda $m=-4<0$'dır.

Doğrunun eğimi negatif yani fonksiyon azalandır.

f fonksiyonunun negatif değer aldığı en geniş aralık $(-3,\infty)$ dır.

Buradan $f(x)\le 0$ eşitsizliğinin çözüm aralığı $[-3,\infty)$ olarak bulunur.

SIRA SİZDE 3.

ÇÖZÜM

M makinesi: $u(t)=60-12t$

N makinesi: $v(t)=50-8t$

a) Başlangıç Miktarı

t = 0 anında M makinesinde: $u(0)=60-12\cdot 0=60$ litre,

N makinesinde : $v(0)=50-8\cdot 0=50$ litre yakıt bulunmaktadır.

b) Deponun Tamamen Boşalma Süresi

Deponun tamamen boşalması kalan yakıt miktarının 0'a eşit olması demektir.

M makinesi için: $60-12t=0$

$60=12t$

$t=5$ saat

N makinesi için: $50-8t=0$

$50=8t$

$t=\frac{50}{8}=\frac{25}{4}=6,25$ saat olarak hesaplanır.

c). Kalan Yakıtların Eşitlendiği An

Makinelerde kalan yakıt miktarlarının eşit olduğu zamanı bulabilmek için u(t) = v(t) denkleminden yararlanılır.

$60 - 12t = 50 - 8t$

$60 - 50 = 12t - 8t$

$10 = 4t$

$t = 2{,}5$ saat olarak bulunur.

d) Kalan Yakıt Miktarı

2,5 saat sonunda makinelerin depolarında kalan yakıt miktarları birbirine eşittir ve kalan yakıt miktarı u(2,5) ya da v(2,5) değeri hesaplanarak bulunur.

$u(2{,}5) = 60 - 12 \cdot 2{,}5 = 30$ litre,

$v(2{,}5) = 50 - 8 \cdot 2{,}5 = 30$ litredir.

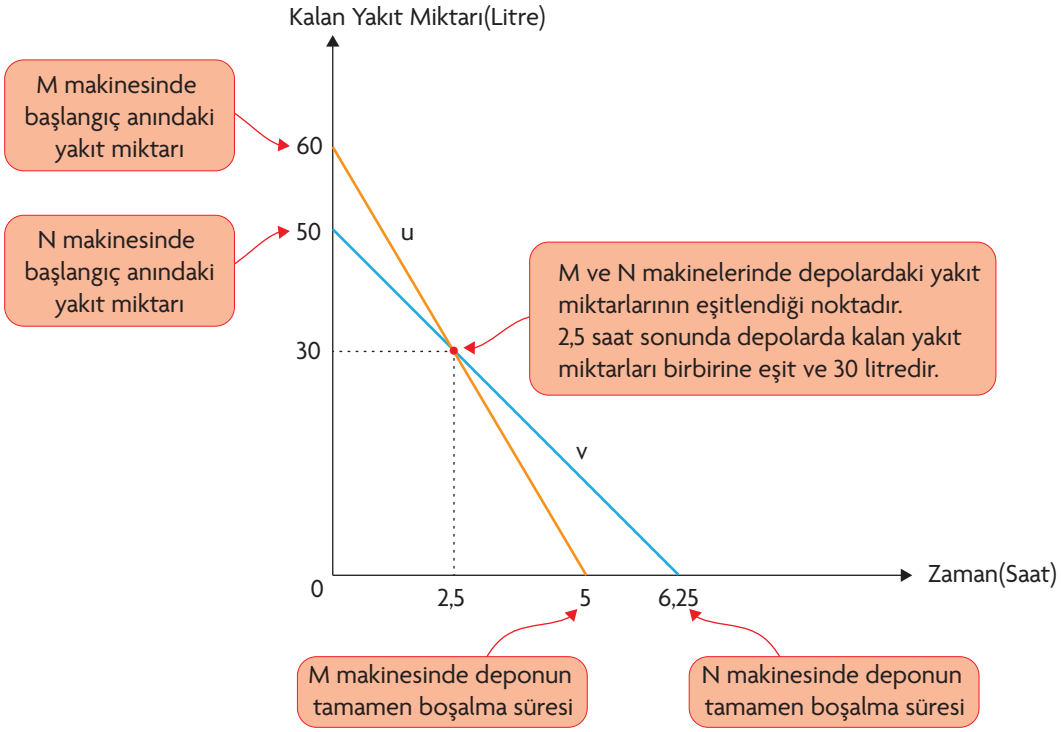
2,5 saat sonunda her bir depoda 30 litre yakıt kalmıştır.

e) Grafik Analizi

Verilen fonksiyonları aynı dik koordinat düzleminde çizerek kalan yakıt miktarı-zaman grafiğini oluşturalım. Grafikte iki doğrunun kesişim noktasını işaretleyerek bu noktanın ne anlama geldiğini açıklayalım.

M makinesi: u(t) = 60 – 12t

N makinesi: v(t) = 50 – 8t



SIRA SİZDE 4.

ÇÖZÜM

1. Mayıs ayına ait elektrik faturası tutarının alabileceği değerleri belirlemek.

Mayıs ayına ait fatura tutarı x TL olsun. x ile 2400 arasındaki farkın mutlak değeri

$f(x) = |x - 2400|$ ve $g(x) = 200$ olmak üzere problemin cebirsel temsili $|x - 2400| \leq 200$ şeklindedir. Bu eşitsizliğin çözümü için f fonksiyonu, parçalı fonksiyon olarak yazılır.

$$f(x) = \begin{cases} 2400 - x, & x < 2400 \\ x - 2400, & x \geq 2400 \end{cases}$$

Parçalı olarak yazılan cebirsel temsiller için ayrı ayrı eşitsizlikler çözüldüğünde

$2400 - x \leq 200 \Rightarrow 2200 \leq x$ ve $x - 2400 \leq 200 \Rightarrow x \leq 2600$ bulunur. İki eşitsizlik birlikte yazılarak x in alacağı değerlerin kümesi $2200 \leq x \leq 2600$ bulunur. Bulunan çözüm kümesi [2200,2600] olarak da gösterilebilir.

2. Mart ayına ait elektrik fatura tutarını tahmin etmek.

Mart ayına ait fatura tutarı x TL olsun. 2400 ile x arasındaki farkın mutlak değeri

$f(x) = |x - 2400|$ ve $g(x) = 200$ olmak üzere problemin cebirsel temsili $|2400 - x| = 200$ şeklindedir. Bu eşitsizliğin çözümü için f fonksiyonu, parçalı fonksiyon olarak yazılır.

$$f(x) = \begin{cases} x - 2400, & x < 2400 \\ 2400 - x, & x \geq 2400 \end{cases}$$

Parçalı olarak yazılan cebirsel temsiller için ayrı ayrı denklemler çözüldüğünde

$x - 2400 = 200 \Rightarrow x = 2600$ ve $2400 - x = 200 \Rightarrow x = 2200$ bulunur. Mart ayına ait elektrik faturası tutarı en az 2200 TL, en fazla 2600 TL dir.

SIRA SİZDE 5.

ÇÖZÜM

a) Dikdörtgenin kısa kenarının uzunluğuna a cm dersek uzun kenarının uzunluğu (4a) cm olur.

Bu durumda dikdörtgenin alanı $(4a^2)cm^2$ dir.

Bu alan ifadesi verilen ifadeye eşitlendiğinde;

$4a^2 = 4x^2 + 8x + 4 \Rightarrow 4a^2 = 4\left(x^2 + 2x + 1\right) \Rightarrow a^2 = x^2 + 2x + 1 \Rightarrow a = \sqrt{x^2 + 2x + 1} \Rightarrow a = |x + 1|$ olur.

Dikdörtgenin uzun kenarının uzunluğunun cebirsel ifadesi $f(x) = 4|x + 1|$ ve $g(x) = 40$ olmak üzere

$f(x) \geq g(x)$ eşitsizliği çözülmelidir. $4 \cdot |x + 1| \geq 40 \Rightarrow |x + 1| \geq 10$ eşitsizliğinin çözümü için f fonksiyonu, parçalı fonksiyon olarak yazılır.

$$f(x) = \begin{cases} -x - 1, & x < -1 \\ x + 1, & x \geq -1 \end{cases}$$

Parçalı olarak yazılan cebirsel temsiller için ayrı ayrı eşitsizlikler çözüldüğünde

$-x - 1 \geq 10 \Rightarrow -11 \geq x$ ve $x + 1 \geq 10 \Rightarrow x \geq 9$ bulunur.

Bulunan $x \leq -11$ ve $x < -1$ eşitsizliklerinin ortak çözümü $x \leq -11$' dir. $x \geq 9$ ve $x \geq -1$ eşitsizliklerinin ortak çözümünden $x \geq 9$'dur. Eşitsizliğin çözüm kümesi $(-\infty,-11] \cup [9,\infty)$ olarak bulunur.

b) Dikdörtgenin kısa kenarının uzunluğu a cm, uzun kenarının uzunluğu (4a) cm olduğundan çevre (10a) cm'dir. Bu çevre ifadesi verilen çevre ifadesine eşitlendiğinde $10a = 20x - 30 \Rightarrow 10a = 10(2x - 3) \Rightarrow a = 2x - 3$ olur.

Dikdörgenin kısa kenarının cebirsel ifadesi $f(x) = |x + 1|$ ve $g(x) = 2x - 3$ olmak üzere $f(x) = g(x)$ denklemi çözülmelidir. $|x + 1| = 2x - 3$ denkleminin çözümü için f fonksiyonu, parçalı fonksiyon olarak yazılır ve ayrı ayrı denklemler çözülür.

$$f(x)=\begin{cases}-x-1, & x<-1\\ x+1, & x\geq -1\end{cases}$$

$-x-1=2x-3 \Rightarrow 3x=2 \Rightarrow x=\frac{2}{3}$ ve $x+1=2x-3 \Rightarrow x=4$ bulunur.

Bulunan $x=\frac{2}{3}$ değeri, $x<-1$ şartını sağlamadığından çözüme alınmaz. $x=4$ değeri $x\geq -1$ şartını sağladığından denklemin çözüm kümesi {4} olarak bulunur.

DEĞERLENDİRİYORUM

Amaç: Bu bölümde, öğrendiklerinizi gözden geçirmenizi, kendi öğrenme sürecinizi değerlendirmenizi ve eksiklerinizi fark etmenizi amaçlıyoruz.

Soruları dikkatle yanıtlayınız. Cevaplarınızı geri bildirimlerle karşılaştırarak eksik gördüğünüz noktaları tekrar ediniz.

SORULAR

1. Yüksekliği 300 cm olan dik dairesel silindir şeklindeki bir su deposu tamamen dolu olup tabanındaki çatlaktan su sızmaktadır. 1 dakika boyunca sabit hızla su sızdığında depodaki suyun yüksekliği 5 cm azalmaktadır. Depo tam doluyken su sızmaya başladığı andan itibaren zamana (dk.) bağlı olarak depodaki suyun yüksekliğinin (cm) değişimini gösteren fonksiyon f olsun.

Buna göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) f fonksiyonunun cebirsel temsilini bulunuz.

b) Depodaki suyun tamamının kaç dakikada tükendiğini bulunuz.

c) Depodaki su seviyesinin 5 ile 10. dakikalar arasında santimetre cinsinden hangi aralıkta olduğunu bulunuz.

ç) Depoda kalan suyun seviyesinin kaçıncı dakikalar arasında 100 cm ile 140 cm arasında bulunduğunu hesaplayınız.

2. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=4\left(\frac{x}{3}-1\right)$ **olmak üzere** $f(x)<0$ **eşitsizliğinin çözüm aralığını;**

a) f fonksiyonunun cebirsel temsilinden yararlanarak bulunuz.

b) f fonksiyonunun grafiğinden yararlanarak bulunuz.

3. Benzinli ve mazotlu olmak üzere iki tip motor seçeneği bulunan araç modellerinin satış fiyatları ve bu araçların 100 km de kaç litre yakıt harcadığı aşağıdaki tabloda verilmiştir.

	Litre / 100 km	Satış Fiyatı (TL)
Benzinli	7	1 185 000
Mazotlu	5	1 277 000

Akaryakıt fiyatlarının

- Mazot : 40 TL/Litre
- Benzin: 45 TL/Litre

şeklinde sabit olduğunu varsayalım.

Buna göre tablodaki verileri kullanarak aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) Benzinli ve mazotlu araçların her x km'lik kullanımına bağlı akaryakıt tutarlarını (TL) veren fonksiyonları yazınız.

b) Bir müşteri 5 yıl boyunca yıllık sabit 1 500 km kullanacağı bir araç alacaktır. Toplam maliyet açısından mazotlu veya benzinli araçtan hangisinin daha ekonomik olduğunu belirleyiniz.

4. Yeni bir motosiklet almak isteyen Murat Bey, araştırmalar sonucunda A ve B markaları arasından birini tercih edecektir. Motosikletler zamanla değer kaybettiği için iki motosiklet arasında bazı karşılaştırmalar yapmak istemektedir.

Motosikletlerin satış fiyatını ve yıllık değer kaybını gösteren bilgiler Tablo 1'de verilmiştir.

Tablo 1: *Motosikletlerin Satış Fiyatı ve Yıllık Değer Kaybı*

Motosiklet Markası	Satış Fiyatı (TL)	Yıllık Değer Kaybı (TL)
A	120 000	1 200
B	132 000	2 000

Buna göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) A ve B marka motosikletlerin kullanım süresine (yıl) bağlı olarak değerlerindeki değişimi veren denklemleri yazınız.

b) a seçeneğinde elde edilen denklemlerden yararlanarak motosikletlerin Tablo 2'deki kullanım süreleri sonundaki değerlerini uygun yerlere yazınız.

Tablo 2: *Motosikletlerin Kullanım Süreleri Sonundaki Değerleri*

Kullanım Süresi (Yıl)	A Marka Motosikletin Değeri (TL)	B Marka Motosikletin Değeri (TL)
3		
6		
9		
12		

c) A ve B marka motosikletlerin kullanım süresine (yıl) bağlı olarak değerlerini gösteren grafikleri aynı koordinat sisteminde çiziniz.

ç) A ve B marka motosikletlerin değerlerinin kaç yıl sonra eşit olacağını cebirsel çözüm yaparak bulunuz.

d) Murat Bey'in hangi motosikleti almasının avantajlı olduğunu aşağıdaki tabloda verilen kullanım sürelerine göre uygun yerleri işaretleyerek belirleyiniz.

Kullanım Süresi (Yıl)	A Marka Motosiklet	B Marka Motosiklet
5		
10		
15		
20		

5. Bir öğrencinin 100 sayfa kitap okuması 150 dakika, 100 sayfa dergi okuması ise 80 dakika sürmektedir. Öğrencinin bir günde kitap veya dergi okumaya ayırabileceği maksimum süre 300 dakikadır.

Buna göre öğrencinin bir günde okuyacağı x sayfa kitap ve 120 sayfa dergi için süre kısıtlamasını ifade eden eşitsizliği yazınız.

6. Bir konser organizasyonu için iki farklı firma ile görüşülmüştür. Firmaların aldığı sabit fiyata bağlı olarak kişi başına talep edilen ücret değişmektedir. Firmaların aldığı sabit fiyat ve kişi başı ücret tabloda verilmiştir.

Firma	Sabit Fiyat (TL)	Kişi Başı Ücret (TL)
1	1 000	50
2	1 500	40

Buna göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) x kişilik bir dinleyici grubu için konser organizasyonunun toplam maliyetini (TL) ifade eden maliyet fonksiyonlarını 1 ve 2. firma için yazınız.

b) 1 ve 2. firma için toplam maliyet fonksiyonlarının grafiklerini dik koordinat düzleminde çiziniz.

c) Kaç kişilik katılımda iki firmanın aldığı ücretlerin eşit olduğunu cebirsel olarak hesaplayıp grafik üzerinde gösteriniz.

ç) En çok kaç kişilik katılımda 1. firmanın organizasyon maliyeti, 2. firmanın organizasyon maliyetinden daha düşük olur?

7. a_1, a_2, a_3 birer gerçek sayı olmak üzere gerçek sayılarda tanımlı aşağıdaki fonksiyonlar veriliyor.

$g(x)=|-2x+a_1|$, $h(x)=|-2x+a_2|$, $k(x)=|-2x+a_3|$

Bu fonksiyonların sıfırları (kökleri) sırasıyla x_1, x_2, x_3'tür.

$x_2 < x_1 < x_3$ **olduğuna göre** a_1, a_2, a_3 **değerlerini küçükten büyüğe doğru sıralayınız.**

8. Bir matbaa, iki farklı yazıcı modeli kiralayacaktır. Bu yazıcıların çalışma süresine bağlı olarak kiralama maliyetleri değişmektedir. Yazıcıların sabit kurulum bedeli ve saatlik kullanım ücretleri aşağıdaki tabloda verilmiştir:

Yazıcı Modeli	Sabit Kurulum Bedeli (TL)	Çalışması Süresine Bağlı Ücret (TL/saat)
X	6 000	120
Y	4 500	180

Bu tabloya göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) X ve Y yazıcılarının matbaaya olan toplam maliyetini saat cinsinden ifade eden fonksiyonları yazınız.

b) X ve Y yazıcılarının toplam maliyet fonksiyonlarını aynı dik koordinat düzleminde çiziniz.

c) Hangi yazıcı modeli kullanım süresinin 25 saatten az olduğu durumlar için daha ekonomiktir?

ç) X ve Y yazıcılarının toplam maliyetlerinin eşit olması için kaçar saat çalıştırılmaları gerekir? Denklem kurarak bulunuz.

d) 10, 20, 30, 40 ve 50 saatlik kullanım süreleri için her iki yazıcının toplam maliyetlerini hesaplayınız ve bulduğunuz değerlerle bir tablo oluşturunuz.

9. Aşağıdaki şekilde, dik dairesel silindir biçiminde üç su kabı verilmiştir. Kapların alt kısmında, sabit hızda su akıtan musluklar bulunmaktadır. Kaplar başlangıçta tamamen dolu olup musluklar aynı anda açılmıştır. Kaplardaki su boşalırken, su yüksekliği (cm) ile geçen zaman (dk.) arasındaki ilişki Tablo 1'de; kaplardaki suyun hacmi (cm^3) ile geçen zaman(dk.) arasındaki ilişki ise Tablo 2'de verilmiştir.



Tablo 1: *Su Yüksekliğinin (cm) Zamana (dk.) Bağlı Değişimi*

	Su Yüksekliği (cm)		
Zaman (dk.)	**A Kabı**	**B Kabı**	**C Kabı**
2	18	9	12
4	12	6	8
6	6	3	4

Tablo 2: *Su Hacminin (cm^3) Zamana (dk.) Bağlı Değişimi*

	Suyun Hacmi (cm^3)		
Zaman (dk.)	**A Kabı**	**B Kabı**	**C Kabı**
2	1080	270	480
4	720	180	320
6	360	90	160

Buna göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) A, B ve C kapları için su yüksekliğinin zamana bağlı değişimini gösteren cebirsel ifadelerini yazınız.

b) C kabı için su hacminin zamana bağlı değişimini gösteren fonksiyonu yazınız ve bu fonksiyonun grafiğini çiziniz.

c) B kabı için su yüksekliği ile su hacmi arasındaki ilişkiyi açıklayınız. Bu ilişkinin doğrusal olup olmadığını belirtiniz.

GERİ BİLDİRİM

Bu geri bildirim sayesinde kendi cevabınızı kontrol edebilir, hatalarınızı düzelterek öğrenmenizi pekiştirebilirsiniz.

ÇÖZÜM 1.

a) Depodaki su seviyesi her 1 dakikada 5 cm azaldığından x dakikada (5x) cm azalır.

O hâlde x dakika sonra depoda kalan su seviyesini gösteren fonksiyon $f(x) = 300 - 5x$ şeklinde tanımlanır.

b) a seçeneğinde bulunan f fonksiyonunun sıfırını bulalım.

$300 - 5x = 0$ (5x i eşitliğin diğer tarafına alalım.)

$300 = 5x$ (Eşitliğin her iki tarafını 5 ile sadeleştirelim.)

$x = 60$ dakikada depodaki su tamamen boşalır.

c) Su seviyesini h (cm) ile ifade edelim. Depodaki su seviyesi her 1 dakikada 5 cm azaldığından 5 dakikada $5 \cdot 5 = 25$ cm ve 10 dakikada $5 \cdot 10 = 50$ cm azalır. 5. dakika ile 10. dakika arasında su seviyesi $300 - 50 = 250$ cm ile $300 - 25 = 275$ cm aralığında bulunur. Dolayısıyla su seviyesinin bulunduğu aralığı $250 < h < 275$ şeklinde ifade edebiliriz.

ç) x. dakikada depoda kalan suyun seviyesi $300 - 5x$ olduğundan $100 < 300 - 5x < 140$ eşitsizliğini yazabiliriz.

Eşitsizliğin üç yönünü de "$-$" ile çarpalım ve yeniden yazalım. (Eşitsizlik yön değiştirir.)

$-140 < 5x - 300 < -100$ eşitsizliğin her tarafına 300 ekleyelim.

$300 - 140 < 5x < 300 - 100$

$160 < 5x < 200$ bulunur. Eşitsizliğin her tarafını 5'e bölelim.

$$\frac{160}{5} < \frac{5x}{5} < \frac{200}{5}$$

$32 < x < 40$ elde edilir.

ÇÖZÜM 2.

a) $4\left(\frac{x}{3} - 1\right) < 0 \Rightarrow \frac{4x}{3} - 4 < 0 \Rightarrow \frac{4x}{3} < 4 \Rightarrow \frac{x}{3} < 1 \Rightarrow x < 3$ bulunur.

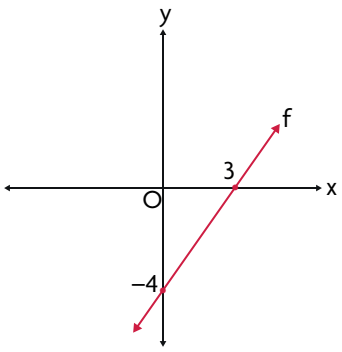
Buradan $(-\infty, 3)$ elde edilir.

b) $f(x)=4\left(\frac{x}{3}-1\right)$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

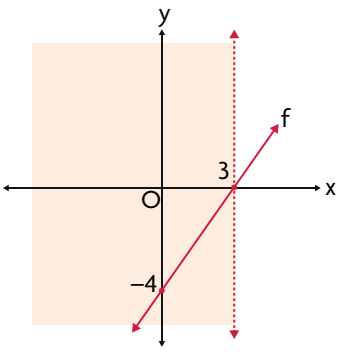
x = 0 için $y=4\left(\frac{0}{3}-1\right)=4(-1)=-4 \Rightarrow y=-4$ bulunur.

y = 0 için $4\left(\frac{x}{3}-1\right)=0$ olur. Buradan $\frac{x}{3}-1=0$ ve x = 3 bulunur.

O hâlde f(x) fonksiyonunun grafiği $(3,0)$ ve $(0,-4)$ noktalarında eksenleri keser.



Grafiğe bakıldığında x in 3'ten küçük değer aldığı durumda f fonksiyonu negatif değer almaktadır.



f(x) < 0 eşitsizliğinin çözüm kümesi boyalı bölgenin x ekseni ile kesişimidir.

ÇÖZÜM 3.

a) Benzinli araç 100 km'de 7 litre benzin harcadığından 7· 45 = 315 TL harcar.

Dolayısıyla

100 km'de	315 TL
x km'de	? TL

$?=\frac{315}{100}x \Rightarrow ?=\frac{63}{20}x$ olur.

Buradan da $f(x)=\frac{63}{20}x$ bulunur.

Mazotlu araç 100 km'de 5 litre mazot harcadığından 5 · 40 = 200 TL harcar.

Dolayısıyla

100 km'de	200 TL
x km'de	? TL

$?=\frac{200}{100}x=2x$

Buradan $g(x)=2x$ bulunur.

b) Toplam süre: 5 · 12 = 60 ay olur.

Her ay 1500 km yol yapılıyorsa 60 ayda 60 · 1500 = 90000 km yol yapılır.

Mazotlu araç için toplam tutar: $1277000+2\cdot 90000=1457000$ TL

Benzinli araç için toplam tutar: $1185000+\frac{63}{20}\cdot\frac{4500}{90000}=1185000+63\cdot 4500$

$=1185000+283500$

$=1468500$ TL olur.

1457000 < 1468500 olduğundan mazotlu araç benzinli araca göre daha ekonomiktir.

ÇÖZÜM 4.

a) "x" yıl ve "y" motosikletin değeri olsun.

A marka motosiklet ⟶ Yılda 1200 TL değer kaybederse x yılda 1200x TL değer kaybeder. ⟶ Dolayısıyla x yıl sonra değeri y = (120000 – 1200x) TL olur.

B marka motosiklet ⟶ Yılda 2000 TL değer kaybederse x yılda 2000x TL değer kaybeder. ⟶ Dolayısıyla x yıl sonra değeri y = (132000 – 2000x) TL olur.

b) A marka motosikletin x yıl sonraki değeri: $y = 120000 - 1200x$

- 3 yıl sonra: $y = 120000 - 1200 \cdot 3 = 116400$ TL
- 6 yıl sonra: $y = 120000 - 1200 \cdot 6 = 112800$ TL
- 9 yıl sonra: $y = 120000 - 1200 \cdot 9 = 109200$ TL
- 12 yıl sonra: $y = 120000 - 1200 \cdot 12 = 105600$ TL

B marka motosikletin x yıl sonraki değeri: $y = 132000 - 2000x$

- 3 yıl sonra: $y = 132000 - 2000 \cdot 3 = 126000$ TL
- 6 yıl sonra: $y = 132000 - 2000 \cdot 6 = 120000$ TL
- 9 yıl sonra: $y = 132000 - 2000 \cdot 9 = 114000$ TL
- 12 yıl sonra: $y = 132000 - 2000 \cdot 12 = 108000$ TL şeklinde olur.

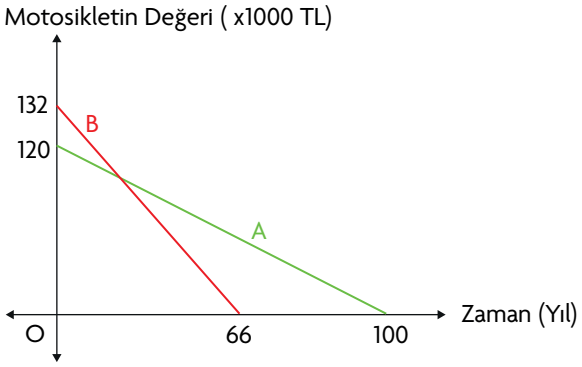
Kullanım Süresi (Yıl)	A Marka Motosikletin Değeri (TL)	B Marka Motosikletin Değeri (TL)
3	116 400	126 000
6	112 800	120 000
9	109 200	114 000
12	105 600	108 000

c) A ⟶ y = 120000 – 1200x doğrusu

x = 0 için y = 120000 ⟶ (0,120000)
y = 0 için x = 100 ⟶ (100,0)
noktalarından geçer.

B ⟶ y = 132000 – 2000x doğrusu

x = 0 için y = 132000 ⟶ (0,132000)
y = 0 için x = 66 ⟶ (66,0)
noktalarından geçer.



ç) İki denklemi birbirine eşitleyelim ve x i bulalım.

$132000 - 2000x = 120000 - 1200x$

$132000 - 120000 = 2000x - 1200x$

$12000 = 800x$

$x = 15$ bulunur.

Dolayısıyla 15 yıl sonra motosikletlerin değerleri eşitlenir.

d) c seçeneğinde çizilen grafikten anlaşılacağı üzere, 0–15 yıl aralığında (15 hariç çünkü 15. yılda ikisi eşit değere sahip) B markasının piyasa değeri daha yüksektir; 15 yıldan sonra A markasının piyasa değeri daha yüksek olur.

Kullanım Süresi (Yıl)	A Marka Motosiklet	B Marka Motosiklet
5		✔
10		✔
15	✔	✔
20	✔	

ÇÖZÜM 5.

100 sayfa dergi — 80 dk.
120 sayfa dergi — k dk.

$100 \cdot k = 80 \cdot 120$

$k = 96$ olur.

100 sayfa kitap — 150 dk.
x sayfa kitap — y dk.

$100 \cdot y = 150 \cdot x$

$y = \frac{150}{100}x = \frac{3}{2}x$ dk. olur.

Her iki sürenin toplamı 300 dakikayı aşmayacağından $96 + \frac{3}{2}x \leq 300$ şeklinde olmalıdır.
Bulduğumuz eşitsizliği 2 ile genişletelim.
$192 + 3x \leq 600$ şeklinde yazabiliriz.

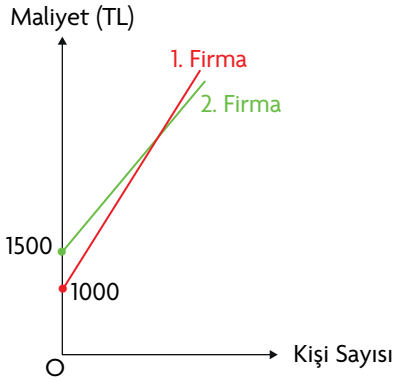
ÇÖZÜM 6.

a) 1. Firma için ⟶ 1 kişi için ücret 50 TL ise x kişi için ücret 50x TL olur. Buradan toplam maliyet (1000 + 50x) TL olur.

2. Firma için ⟶ 1 kişi için ücret 40 TL ise x kişi için ücret 40x TL olur. Buradan toplam maliyet (1500 + 40x) TL olur.

b) 1. Firma için → $f(x) = 1000 + 50x$, $y = 1000 + 50x$

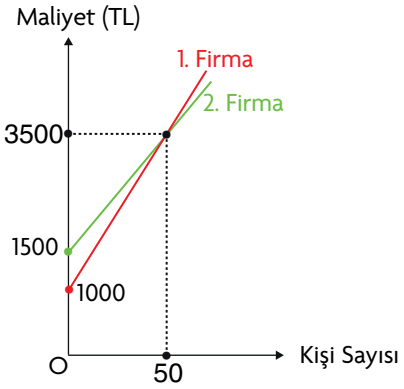
2. Firma için → $g(x) = 1500 + 40x$, $y = 1500 + 40x$



c)

Elde edilen denklemleri birbirine eşitleyelim.

$$1000 + 50x = 1500 + 40x$$
$$50x - 40x = 1500 - 1000$$
$$10x = 500$$
$$x = 50$$ kişi bulunur.



ç) Firmanın organizasyon maliyetinin, 2. firmanın organizasyon maliyetinden daha düşük olması için

$$1000 + 50x < 1500 + 40x$$
$$50x - 40x < 1500 - 1000$$
$$10x < 500$$
$$x < 50$$

olmalıdır. Bu durumda en çok 49 kişilik katılımda istenen şart sağlanır.

ÇÖZÜM 7.

g(x), h(x) ve k(x) fonksiyonlarının sıfırlarını bulalım.

$g(x) = |-2x + a_1| = 0$
$-2x + a_1 = 0$
$x_1 = \frac{a_1}{2}$

$h(x) = |-2x + a_2| = 0$
$-2x + a_2 = 0$
$x_2 = \frac{a_2}{2}$

$k(x) = |-2x + a_3| = 0$
$-2x + a_3 = 0$
$x_3 = \frac{a_3}{2}$

$x_2 < x_1 < x_3$
$\frac{a_2}{2} < \frac{a_1}{2} < \frac{a_3}{2}$
$a_2 < a_1 < a_3$ bulunur.

ÇÖZÜM 8.

a) X modeli için 1 saatlik kullanım ücreti 120 TL ise x saatlik kullanım ücreti 120x TL olur.

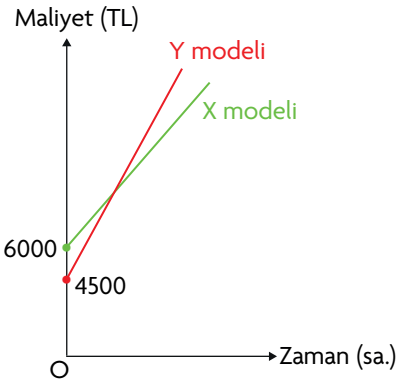
Kurulum ücreti de eklenirse $f(x) = 120x + 6000$ bulunur.

Y modeli için 1 saatlik kullanım ücreti 180 TL ise x saatlik kullanım ücreti 180x TL olur.

Kurulum ücreti de eklenirse $g(x) = 180x + 4500$ bulunur.

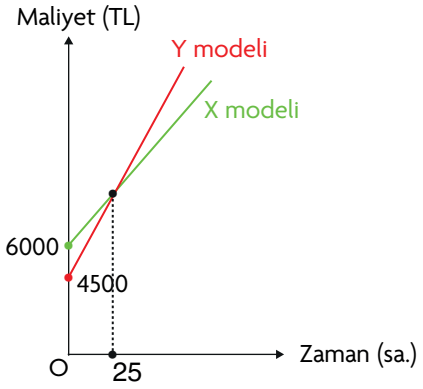
b) X modeli için ⟶ y = 120x + 6000 doğrusu

Y modeli için ⟶ y = 180x + 4500 doğrusu



c) Daha ekonomik olan yazıcıyı bulmak için her iki modelin denklemini birbirine eşitleyelim:

$$120x + 6000 = 180x + 4500$$
$$6000 - 4500 = 180x - 120x$$
$$1500 = 60x$$
$$x = 25 \text{ saat bulunur.}$$



Bir önceki seçenekte çizilen grafiklere dikkat ettiğimizde Y modeli toplam maliyet açısından 25 saate kadar X modelinden daha ekonomiktir.

ç) Bir önceki seçenekte kurulan denklemden

$$120x + 6000 = 180x + 4500$$
$$6000 - 4500 = 180x - 120x$$
$$1500 = 60x$$
$$x = 25 \text{ kişi bulunur.}$$

d)

	X modeli için $f(x) = 120x + 6000$	Y modeli için $g(x) = 180x + 4500$
x = 10 saat	120 · 10 + 6000 = 7200 TL	180 · 10 + 4500 = 6300 TL
x = 20 saat	120 · 20 + 6000 = 8400 TL	180 · 20 + 4500 = 8100 TL
x = 30 saat	120 · 30 + 6000 = 9600 TL	180 · 30 + 4500 = 9900 TL
x = 40 saat	120 · 40 + 6000 = 10800 TL	180 · 40 + 4500 = 11700 TL
x = 50 saat	120 · 50 + 6000 = 12000 TL	180 · 50 + 4500 = 13500 TL

x (Saat)	X Modeli (TL)	Y Modeli (TL)
10	7200	6300
20	8400	8100
30	9600	9900
40	10800	11700
50	12000	13500

ÇÖZÜM 9.

a)

A Kabı → Su seviyesi 2 dakikada 6 cm azalıyorsa başlangıçta A kabındaki suyun yüksekliği 24 cm'dir.

Su seviyesi 2 dakikada 6 cm azaldığından dakikada 3 cm dolayısıyla x dakikada 3x cm azalır.
O hâlde kalan suyun yüksekliğini belirten cebirsel ifade 24 – 3x şeklinde olur.

B Kabı → Su seviyesi 2 dakikada 3 cm azalıyorsa başlangıçta B kabındaki suyun yüksekliği 12 cm'dir.

Su seviyesi 2 dakikada 3 cm azaldığından dakikada $\frac{3}{2}$ cm dolayısıyla x dakikada $\frac{3}{2}x$ cm azalır.

O hâlde kalan suyun yüksekliğini belirten cebirsel ifade $12 - \frac{3}{2}x$ şeklinde olur.

C Kabı → Su seviyesi 2 dakikada 4 cm azalıyorsa başlangıçta C kabındaki suyun yüksekliği 16 cm'dir.

Su seviyesi 2 dakikada 4 cm azaldığından dakikada 2 cm dolayısıyla x dakikada 2x cm azalır.
O hâlde kalan suyun yüksekliğini belirten cebirsel ifade 16 – 2x şeklinde olur.

b)

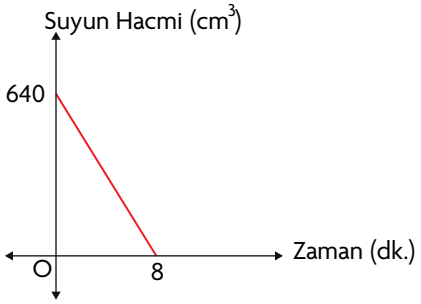
C Kabı → Suyun hacmi 2 dakikada 160 cm³ azalıyorsa
C kabının hacmi 480 + 160 = 640 santimetreküp olur.

Suyun hacmi 2 dakikada 160 cm³ azalıyorsa dakikada 80 cm³ dolayısıyla x dakikada 80x cm³ azalır.
O hâlde kapta kalan suyun hacmini veren fonksiyon $h(x) = 640 - 80x$ olarak ifade edilir.

$h(x) = 640 - 80x$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

$y = 640 - 80x$
$x = 0$ için $y = 640$ → $(0, 640)$
$y = 0$ için $x = 8$ → $(8, 0)$

Fonksiyonun grafiği
$(0, 640)$ ve $(8, 0)$ noktalarından geçer.



c) B kabı ile ilgili verilenlere bakılırsa suyun yüksekliği 9 cm iken hacmi 270 cm³, suyun yüksekliği 6 cm iken hacmi 180 cm³ tür.

Aynı birimleri alt alta yazıp oranlarsak $\frac{9}{6} = \frac{270}{180} \rightarrow \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$ olduğunu görürüz.

Bu da bize su yüksekliği ile su hacminin doğru orantılı olduğunu gösterir. Yani aralarındaki ilişki doğrusaldır.

ÖĞRENDİKLERİM

Amaç: Bu bölümde öğrendiklerinizi özetlemenizi, günlük hayatta ve farklı derslerde kullanabileceğiniz bilgileri belirlemenizi amaçlıyoruz.

Aşağıdaki öğretici bilgi haritasını inceleyin. Ardından boş bırakılan bölüme bu konuyu öğrenirken edindiğiniz kişisel deneyimlere dayanan önemli gördüğünüz bilgileri ekleyiniz.

DENKLEM VE EŞİTSİZLİKLER

DOĞRUSAL FONKSİYONLAR

$a, b \in \mathbb{R}$; $a \neq 0$ olmak üzere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ şeklinde tanımlı f doğrusal fonksiyonu için

- En geniş tanım ve görüntü kümesi, gerçek sayılar kümesidir.
- $f(n) = 0$ koşulunu sağlayan n gerçek sayısı fonksiyonun sıfırıdır.
- $f(0) = b$ olmak üzere $(0, b)$ noktası fonksiyonun y eksenini kestiği noktadır.

$a, b, c, d \in \mathbb{R}$; $a \neq c$, a ve c gerçek sayılarından en az biri sıfırdan farklı olmak koşuluyla gerçek sayılarda tanımlı f ve g fonksiyonlarının cebirsel temsilleri $f(x) = ax + b$ ve $g(x) = cx + d$ olsun.

$f(x) = g(x)$ eşitliğinden birinci dereceden bir bilinmeyenli denklem elde edilir.

$f(x) < g(x)$, $f(x) > g(x)$, $f(x) \leq g(x)$, $f(x) \geq g(x)$ ifadelerinden birinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlikler elde edilir.

BİRİNCİ DERECEDEN DENKLEMLER

$m, n \in \mathbb{R}$; $m \neq 0$ olmak üzere $f(x) = g(x)$ denklemi,
$ax + b = cx + d \Rightarrow (a - c)x + (b - d) = 0$ şeklinde yazılabilir.
Buradan $a - c = m$ ve $b - d = n$ olmak üzere $mx + n = 0$ denklemi elde edilir.

Birinci dereceden bir bilinmeyenli $mx + n = 0$ denklemini sağlayan x değerine **denklemin kökü** denir.

EŞİTSİZLİKLER

$f(x) < g(x)$, $f(x) > g(x)$, $f(x) \leq g(x)$, $f(x) \geq g(x)$ ifadelerine birinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlik denir. Birinci dereceden bir bilinmeyenli bir eşitsizliği sağlayan değerlerin aralığına eşitsizliğin çözüm aralığı adı verilir.

MUTLAK DEĞERLİ DENKLEM VE EŞİTSİZLİK

f ve g doğrusal fonksiyonlar olmak üzere $|f(x)| = g(x)$, $|f(x)| < g(x)$, $|f(x)| > g(x)$, $|f(x)| \leq g(x)$ ve $|f(x)| \geq k$ ifadelerine **mutlak değerli denklem ve eşitsizlikler** denir.

$g(x) = k$ olduğunda

MUTLAK DEĞERLİ DENKLEM VE EŞİTSİZLİK

$g(x) = k$ ($k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$) şeklinde sabit fonksiyon olduğunda mutlak değerli denklem ve eşitsizlikler $|f(x)| = k$, $|f(x)| < k$, $|f(x)| > k$, $|f(x)| \leq k$ ve $|f(x)| \geq k$ biçimine dönüşür.
Özel olarak $g(x) = 0$ olduğunda $|f(x)| = 0$, $|f(x)| < 0$, $|f(x)| > 0$, $|f(x)| \leq 0$ ve $|f(x)| \geq 0$ biçimindeki denklem ve eşitsizlikler elde edilir.

NİCELİKLER VE DEĞİŞİMLER

Gerçek Sayılarda Tanımlı Doğrusal Fonksiyonlar ve Mutlak Değer Fonksiyonlarına Yönelik Yansıtıcı Yazı

Amaç: Bu çalışma, doğrusal ve mutlak değer fonksiyonlarıyla ilgili matematiksel muhakeme ve temsil becerileriniz üzerine farkındalık oluşturmak amacıyla hazırlanmıştır. Çalışma boyunca kendi öğrenme sürecinizi gözden geçirerek edindiğiniz bilgileri değerlendirmeniz beklenmektedir.

Aşağıdaki soruları çözümleriniz üzerinde düşünerek yanıtlayınız. Sorulara kısa ve açık cümlelerle, kullandığınız yöntemi ve düşünme sürecinizi ifade etmeniz yeterlidir.

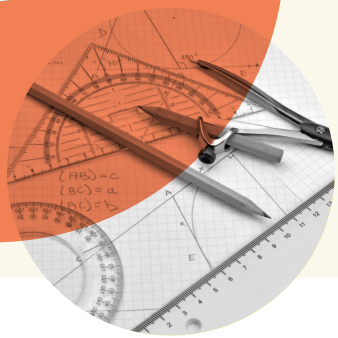
1. **Öğrendiğiniz bu temada sizin dikkatinizi çeken veya önemli bulduğunuz noktaları yazınız.**

2. **Doğrusal referans fonksiyonların nitel özellikleriyle ilgili matematiksel muhakeme yapabilme becerilerinizi gözden geçiriniz. Doğrusal referans fonksiyonların grafik ve cebirsel temsilleri arasındaki ilişkileri genelleyerek ifade ediniz.**

3. **Doğrusal fonksiyon türlerinin grafiksel ve cebirsel temsillerinin oluşturulmasında fonksiyonların nitel özelliklerinden nasıl yararlandığınızı kısaca açıklayınız.**

4. **Doğrusal fonksiyonlara ilişkin öğrendiğiniz bilgi ve problem çözme stratejilerinin, gerçek yaşamda ya da matematiğin başka alanlarında nasıl kullanılabileceğine örnekler veriniz.**

Daha fazlası için karekodu okutunuz.



ÜÇGENDE AÇI VE KENAR İLİŞKİLERİ

BAŞLARKEN

Sevgili öğrencimiz, bu çalışma kartında sizlerin bireysel öğrenme yolculuğuna destek sunmak amaçlanmaktadır. Çalışmalarınızı yürütürken "Hazırlanıyorum", "İlişkilendiriyorum", "Uygulayarak Öğreniyorum", "Değerlendiriyorum" bölümlerini sırası ile yapmanızı; her bölüm ve etkinlik sonundaki geri bildirimleri alarak ilerlemenizi; "Öğrendiklerim" bölümünde öğrenme sürecinizi gözden geçirmenizi bekliyoruz.

Bu çalışma kartında üçgende açı ve kenar ilişkileri konusunu öğrenerek aşağıdaki sorulara cevap verebileceksiniz.

- Üçgende kenar uzunlukları ile açı ölçüleri arasında nasıl bir ilişki vardır?
- Bir üçgende en büyük açının karşısında neden en uzun kenar bulunur?
- Üçgenin iç açılarının toplamı neden 180°dir ve bu bilgi hangi problemlerde kullanılır?
- Üçgen oluşturma koşulları nelerdir ve bu koşullar nasıl yorumlanır?

HAZIRLANIYORUM

Amaç:

Bu bölümde ön bilgilerinizi hatırlamanızı ve temaya hazırlıklı hâle gelmenizi amaçlıyoruz.

Aşağıda yer alan ifadeler, bu temada tamamlanması hedeflenen öğrenme çıktısını ele almadan önce sahip olmanız gereken bazı temel becerileri içermektedir. Lütfen her bir ifadeyi dikkatlice okuyunuz.

- Eğer ifadedeki bilgiye hâkim olduğunuzu düşünüyorsanız kutucuğu işaretleyiniz.
- Eğer konuyu henüz tam olarak bilmediğinizi ya da hatırlamadığınızı düşünüyorsanız kutucuğu boş bırakınız.

ÖN ÖĞRENME KONTROL LİSTESİ	
1. İki ışının ortak bir noktadan çıkarak açı oluşturduğunu bilirim.	☐
2. Dar, dik ve geniş açıları ölçüsüne göre ayırt edebilirim.	☐
3. Doğru açının ölçüsünün 180° olduğunu bilirim.	☐
4. Birbirini kesen iki doğrunun oluşturduğu ters açıları tanıyıp ölçülerinin eşit olduğunu bilirim.	☐
5. Bir açıyı iki eş parçaya bölen ışının açıortay olduğunu bilirim.	☐
6. Paralel iki doğrunun bir kesenle oluşturduğu "iç ters", "dış ters" , "yöndeş" ve " karşı durumlu" açıları ayırt edebilirim.	☐
7. Bir doğru açı boyunca dizilen açılarla bir üçgenin iç açılarının toplamı arasında ilişki kurabilirim.	☐

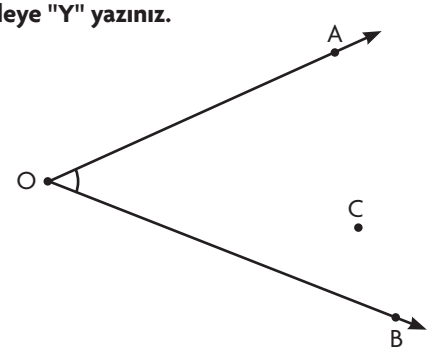
"Ön Öğrenme Kontrol Listesi"ni doldurduktan sonra aşağıda verilen "Kontrol Noktası" sorularını çözünüz ve cevaplarınızı kontrol ediniz.

KONTROL NOKTASI

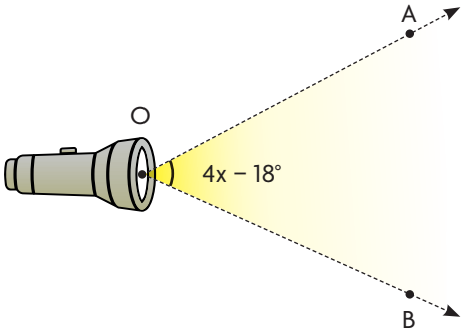
SORU 1.

Aşağıda verilen ifadelerden doğru olan ifadeye "D", yanlış olan ifadeye "Y" yazınız.

- ☐ [OA ∪ [OB = $\widehat{AOB}$
- ☐ [OA ve [OB ışınları uzatılırsa m($\widehat{AOB}$) değişir.
- ☐ C noktası, AOB açısının iç bölgesindedir.
- ☐ [AO ∪ [BO = $\widehat{AOB}$
- ☐ AOB açısının ölçüsü m($\widehat{AOB}$) ile gösterilir.



SORU 2.



Yanda bir el fenerinin yaydığı ışığın oluşturduğu AOB açısı gösterilmiştir.

m($\widehat{AOB}$) = 4x − 18° dir.

AOB açısı bir dar açı olduğuna göre x değişkeninin alabileceği <u>en büyük</u> tam sayı değeri kaçtır?

SORU 3.

Aşağıda boş bırakılan yerlere uygun ifadeleri yazınız.

- Aynı doğrultuda ancak zıt yönde iki ışının oluşturduğu açıya ☐ denir ve ölçüsü ☐ derecedir.
- Aynı doğrultuda ve aynı yönde çakışık iki ışının oluşturduğu açıya ☐ denir ve ölçüsü ☐ derecedir.

SORU 4.

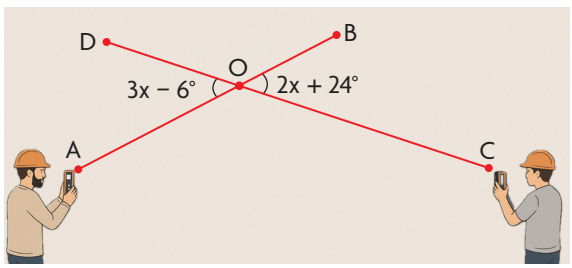
Bir inşaat sahasında iki mühendis, duvar üzerine yerleştirilecek elektrik kablolarının geçeceği doğrultuları belirlemek için lazer ölçüm cihazlarını kullanmaktadır. Mühendisler, lazer cihazlarını duvara dayayarak ölçüm yapmaktadır. Cihazlardan çıkan kırmızı lazer ışınları, duvar yüzeyindeki O noktasında kesişmiştir. Lazer ışınları duvar üzerinde AB ve CD doğrultularında ölçülmüştür.

m($\widehat{AOD}$) = 3x − 6°

m($\widehat{BOC}$) = 2x + 24°

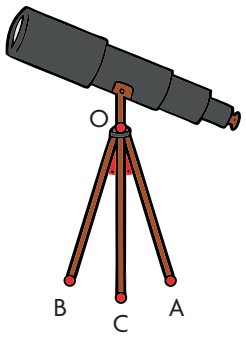
Buna göre x kaç derecedir?

(Not: Lazer ışınlarının O noktasında kesişmesi, ışıkların yön değiştirdiği anlamına gelmez. Her biri kendi doğrultusunda ilerlemeye devam eder.)



SORU 5.1.

Salih, teknoloji ve tasarım dersinde bir teleskop tasarımını kâğıt üzerine düzlemde çizmiştir. Çizimde, teleskobun ayakları A, B ve C noktalarında yere temas etmektedir.



[OC], AOB açısının açıortayıdır.

$m(\widehat{AOC}) = 2x - 20°$

$m(\widehat{BOC}) = x + 10°$

Buna göre $m(\widehat{AOB})$ kaç derecedir?

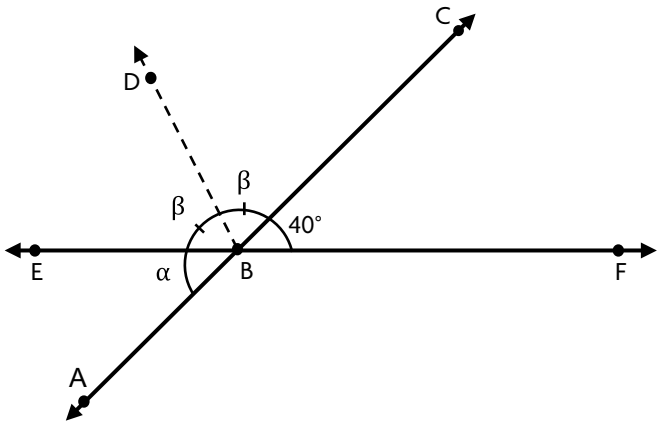
SORU 5.2.

A, B, C noktaları ile E, B, F noktaları doğrusal olmak üzere

[BD, EBC açısının açıortayıdır.

$m(\widehat{CBF}) = 40°$ olduğuna göre

$\alpha+\beta$ toplamı kaç derecedir?

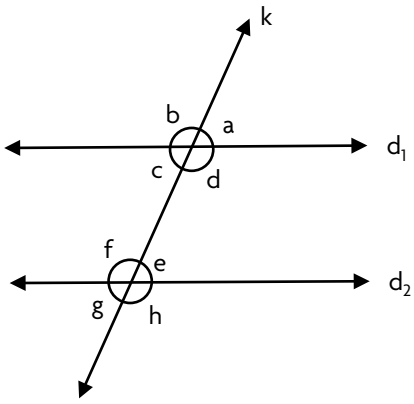


SORU 6.1.

Yandaki şekilde d_1 // d_2 olmak üzere d_1, d_2 ve k doğruları ve bu doğruların oluşturduğu açılar verilmiştir.

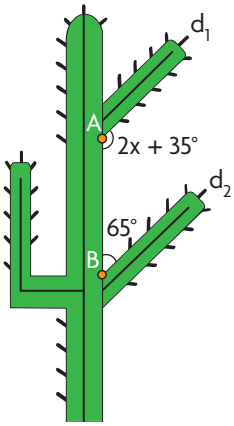
a, b, c, d, e, f, g, h açıları için açılar için "ters", "iç ters", "dış ters" ve "yöndeş" ifadelerinden uygun olanı kullanarak tablodaki boş alanları doldurunuz.

a ile c açıları ____ açılardır.	b ile h açıları ____ açılardır.
b ile d açıları ____ açılardır.	a ile g açıları ____ açılardır.
e ile g açıları ____ açılardır.	a ile e açıları ____ açılardır.
f ile h açıları ____ açılardır.	b ile f açıları ____ açılardır.
d ile f açıları ____ açılardır.	c ile g açıları ____ açılardır.
c ile e açıları ____ açılardır.	d ile h açıları ____ açılardır.



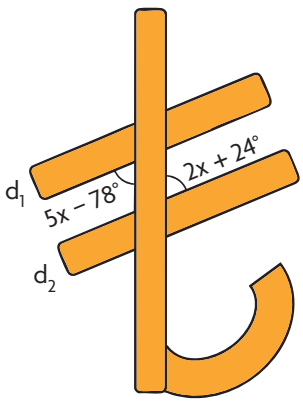
SORU 6.2.

Şekilde d_1 // d_2 olduğuna göre x kaç derecedir?



SORU 6.3.

Şekilde d_1 // d_2 olduğuna göre x kaç derecedir?



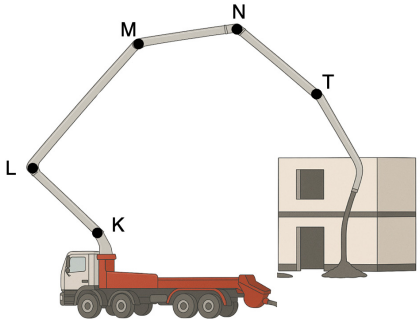
SORU 6.4.

[KL] // [NT] olmak üzere şekilde sabitlenmiş bir beton pompasının kolları gösterilmiştir. Bu kolların kırılma noktalarında oluşan açı ölçüleri arasında

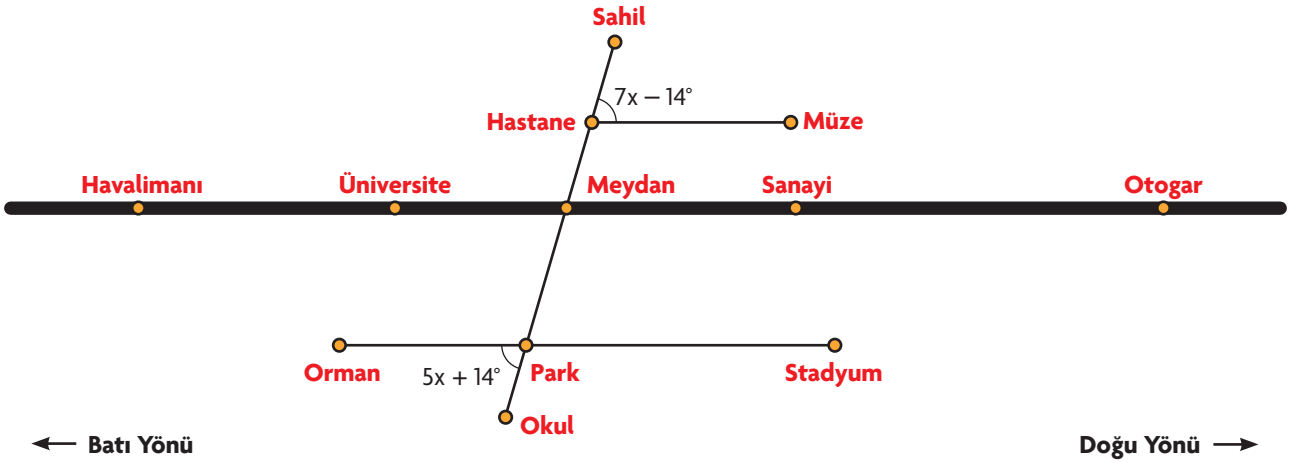
$20 \cdot m(\widehat{KLM}) = 15 \cdot m(\widehat{LMN}) = 12 \cdot m(\widehat{MNT})$

bağıntısı vardır.

Buna göre $m(\widehat{LMN})$ kaç derecedir?



SORU 6.5.

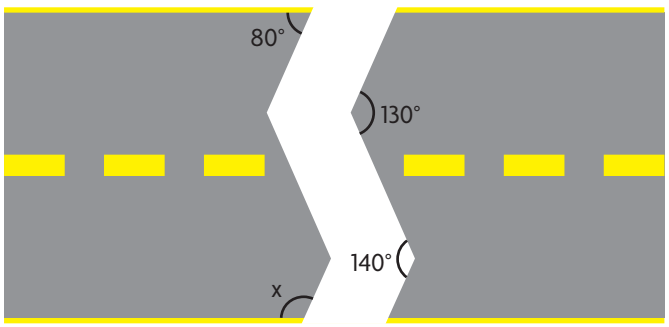


Şekilde bir metronun güzergâhı planı verilmiştir. Tüm hatlar doğrusal kabul edilmiştir ve "Hastane–Müze", "Havalimanı–Otogar" ile "Orman–Stadyum" hatları birbirine paraleldir.

"Okul, Park, Meydan, Hastane ve Sahil" durakları aynı doğru üzerindedir.

Buna göre "Park–Meydan–Otogar" açısı kaç derecedir?

SORU 6.6.



Yukarıdaki şekilde, dikdörtgen biçimindeki bir asfalt yol kesitinde deprem sonrası oluşan yarıklar gösterilmiştir.
Depremden sonra oluşan her bir yarık doğrusaldır ve şekilde görülenler dışında başka bir yarık yoktur.

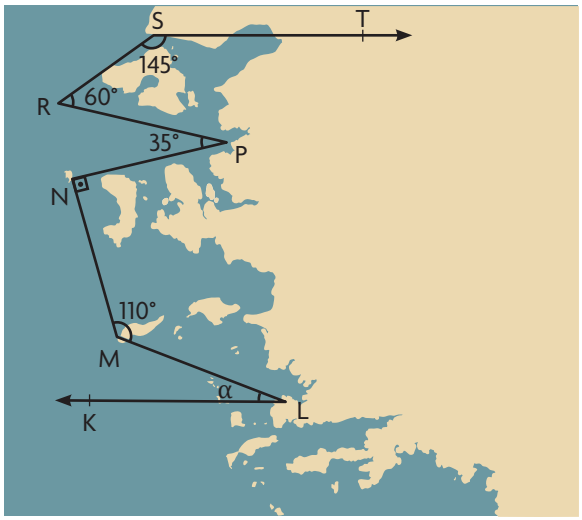
Şekilde verilen açı ölçülerine göre x kaç derecedir?

SORU 6.7

Ege kıyılarının bir bölümü T–S–R–P–N–M–L– K doğrultusunda modellenmiştir.

[ST // [LK dır.

Şekilde verilenlere göre L noktasındaki α açısı kaç derecedir?

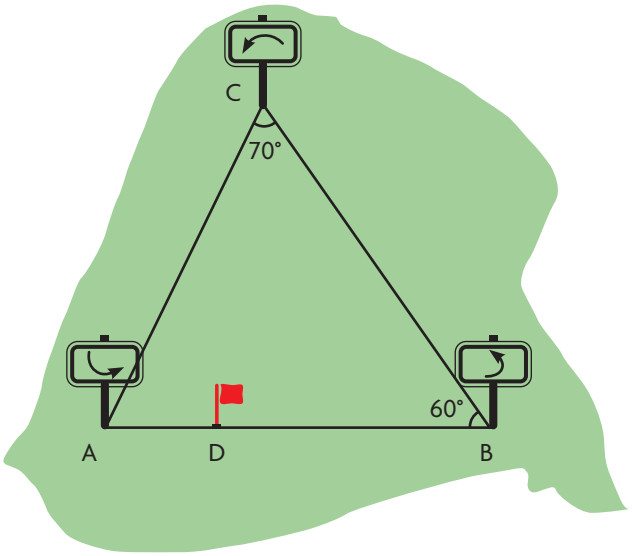


SORU 7.

9/A sınıfı, Esma Öğretmen ile birlikte oryantiring etkinliğine katılır. Etkinlik, şekil üzerinde yeşil alanla gösterilen parkurda yapılmaktadır. Başlangıç ve bitiş noktası D dir. Grup; şekilde belirtilen yönde hareket ederek sırasıyla B, C ve A kontrol noktalarına uğrar ve yeniden D noktasına döner. Haritada A, B ve C noktaları birleştirilerek oluşturulan rota; üçgen şeklinde gösterilmiştir. Öğrenciler, üçgenin köşelerindeki dönüş açılarını tam olarak hatırlayamaz. Bunun üzerine Esma Öğretmen şu açıklamayı yapar: "B noktasındaki dönüş açımız 60°, C noktasındaki ise 70° idi ama A noktasındaki açıyı siz bulacaksınız." Daha sonra A köşesindeki açının BC kenarına paralel olduğunu ve A köşesinden çizilen bir d doğrusu yardımıyla da bulunabileceğini açıklar.

Buna göre A köşesindeki açının ölçüsü kaç derecedir?

(Not: Buradaki dönüş açıları, üçgenin iç açılarını ifade eder.)

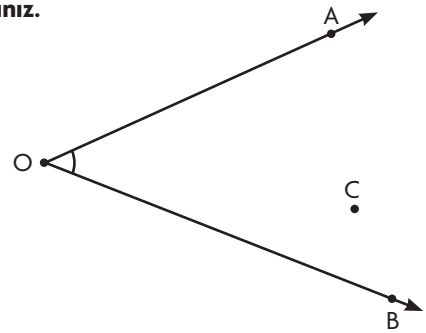


GERİ BİLDİRİM

Bu geri bildirim sayesinde kendi cevabınızı kontrol edebilir, hatalarınızı düzelterek öğrenmenizi pekiştirebilirsiniz.

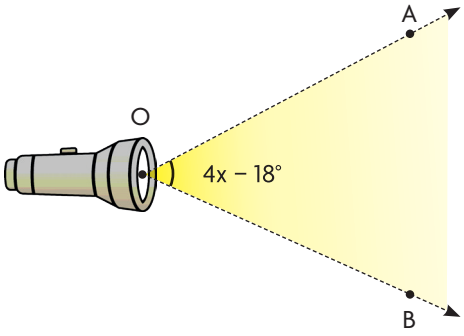
ÇÖZÜM 1.

Aşağıda verilen ifadelerden doğru olan ifadeye "D", yanlış olan ifadeye "Y" yazınız.



- **D** [OA ∪ [OB = $\widehat{AOB}$
- **Y** [OA ve [OB ışınları uzatılırsa m($\widehat{AOB}$) değişir.
- **D** C noktası AOB açısının iç bölgesindedir.
- **Y** [AO ∪ [BO = $\widehat{AOB}$
- **D** AOB açısının ölçüsü m($\widehat{AOB}$) ile gösterilir.

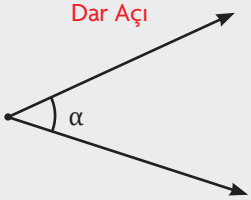
ÇÖZÜM 2.



AOB açısının dar açı olduğu bilindiğine göre
m($\widehat{AOB}$) < 90°
4x − 18° < 90°
4x < 108°
x < 27°
Bu durumda
x in alabileceği en büyük tam sayı değeri 26 olur.

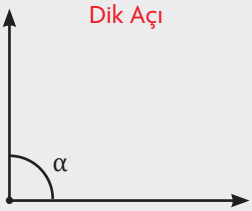
HATIRLATMA

Dar Açı



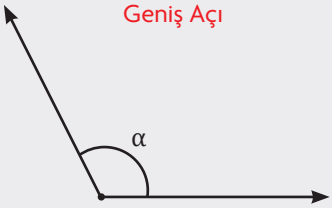
α < 90°

Dik Açı



α = 90°

Geniş Açı



α > 90°

ÇÖZÜM 3.

Aşağıda boş bırakılan yerlere uygun ifadeleri yazınız.

- Aynı doğrultuda ancak zıt yönde iki ışının oluşturduğu açıya **doğru açı** denir ve ölçüsü **180°** derecedir.
- Aynı doğrultuda ve aynı yönde çakışık iki ışının oluşturduğu açıya **tam açı** denir ve ölçüsü **360°** derecedir.

HATIRLATMA

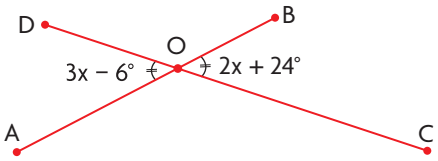
Doğru Açı



Tam Açı

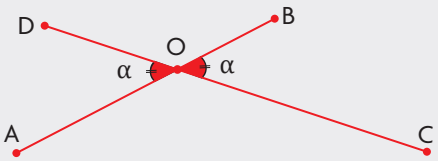


ÇÖZÜM 4.



$\widehat{AOD}$ ile $\widehat{BOC}$ açıları ters açılardır.
$m(\widehat{AOD}) = m(\widehat{BOC})$
$3x - 6° = 2x + 24°$
$3x - 2x = 24° + 6°$
$x = 30°$ olur.

HATIRLATMA

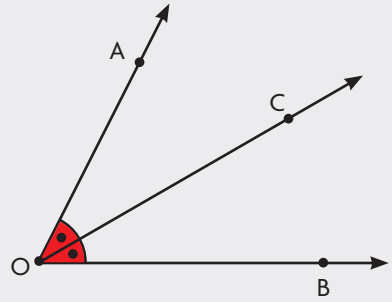


Ters açıların ölçüleri birbirine eşittir.

ÇÖZÜM 5.1.

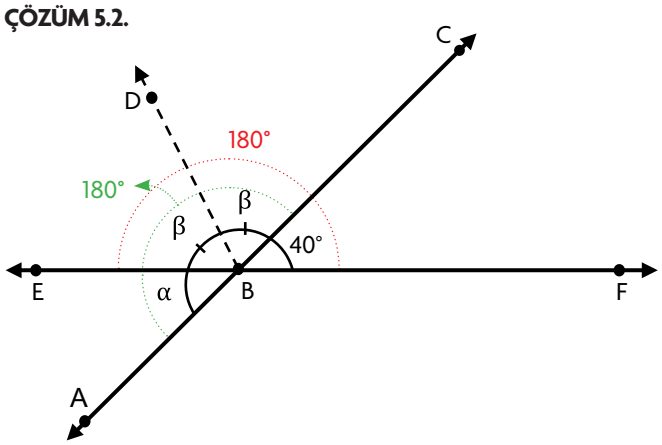
[OC, AOB açısının açıortayı olduğundan $(\widehat{AOC})$ ve $(\widehat{BOC})$ ölçüleri birbirine eşittir.
$m(\widehat{AOC}) = m(\widehat{BOC})$
$2x - 20° = x + 10°$
Buradan $x = 30°$
$m(\widehat{AOB}) = 2 \cdot m(\widehat{AOC}) = 2 \cdot m(\widehat{BOC})$
$m(\widehat{AOB}) = 2 \cdot (2x - 20)$
$x = 30°$ yerine yazılırsa
$m(\widehat{AOB}) = 2 \cdot (2 \cdot 30 - 20) = 80°$ olur.

HATIRLATMA



$m(\widehat{AOC}) = m(\widehat{BOC})$ dır.

ÇÖZÜM 5.2.



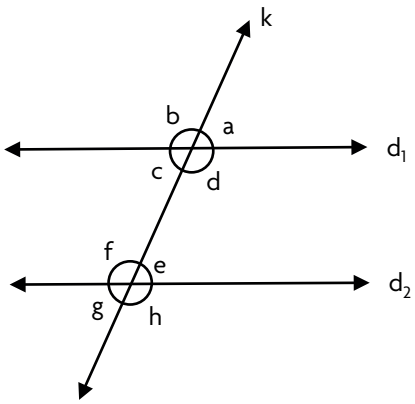
E, B, F noktaları doğrusal olduğundan EF bir doğru belirtir ve doğru açının ölçüsü 180° dir. Buradan
$2 \cdot \beta + 40° = 180°$
$2 \cdot \beta = 140°$
$\beta = 70°$ olur.
Aynı şekilde A, B, C noktaları doğrusal olduğundan AC bir doğru belirtir ve doğru açının ölçüsü 180° dir.
$\alpha + 2\beta = 180°$
$\beta = 70°$ yerine yazılırsa $\alpha + 2 \cdot 70° = 180°$
$\rightarrow \alpha + 140° = 180°$ ise $\alpha = 40°$ olur.
Buradan $\alpha + \beta = 110°$ bulunur.

ÇÖZÜM 6.1.

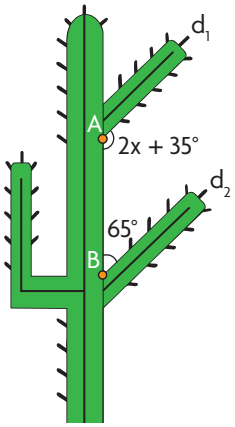
Yandaki şekilde $d_1 // d_2$ olmak üzere d_1, d_2 ve k doğruları ve bu doğruların oluşturduğu açılar verilmiştir.

Şekilde açılar için "ters", "iç ters", "dış ters" ve "yöndeş" ifadelerinden uygun olanı kullanarak tablodaki boş alanları doldurunuz.

a ile c açıları **ters** açılardır.	b ile h açıları **dış ters** açılardır.
b ile d açıları **ters** açılardır.	a ile g açıları **dış ters** açılardır.
e ile g açıları **ters** açılardır.	a ile e açıları **yöndeş** açılardır.
f ile h açıları **ters** açılardır.	b ile f açıları **yöndeş** açılardır.
d ile f açıları **iç ters** açılardır.	c ile g açıları **yöndeş** açılardır.
c ile e açıları **iç ters** açılardır.	d ile h açıları **yöndeş** açılardır.



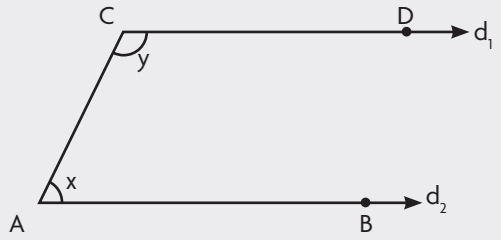
ÇÖZÜM 6.2.



$d_1 // d_2$ olduğundan
$(2x + 35°) + 65° = 180°$
(Karşı Durumlu Açılar)
$2x + 100° = 180°$
$2x = 80°$
$x = 40°$

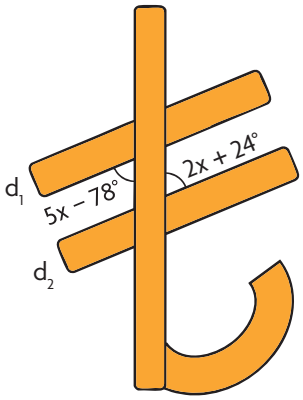
HATIRLATMA

[AB // [CD olmak üzere
x ile y karşı durumlu açılardır ve $x + y = 180°$ dir.



ÇÖZÜM 6.3.

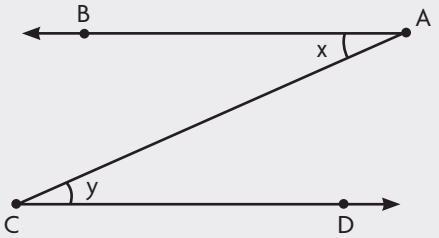
$d_1 // d_2$ olduğundan
iç ters açıların ölçüleri
birbirine eşittir.
$5x - 78° = 2x + 24°$
$3x = 102°$
$x = 34°$ dir.



HATIRLATMA

[AB // [CD ise
$m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{ACD})$ dir.

$x = y$



ÇÖZÜM 6.4

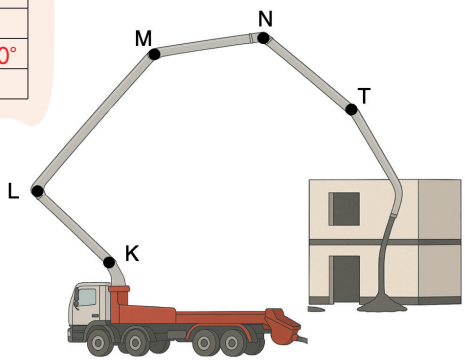
$20 \cdot m(\widehat{KLM}) = 15 \cdot m(\widehat{LMN}) = 12 \cdot (\widehat{MNT})$

$3x$ $4x$ $5x$

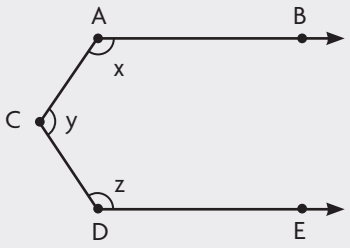
$3x + 4x + 5x = 360°$

$12x = 360°$

$x = 30°$ olur. Buradan $m(\widehat{LMN}) = 4 \cdot 30° = 120°$ dir.



HATIRLATMA



$[AB \parallel [DE$

$m(\widehat{BAC}) = x$

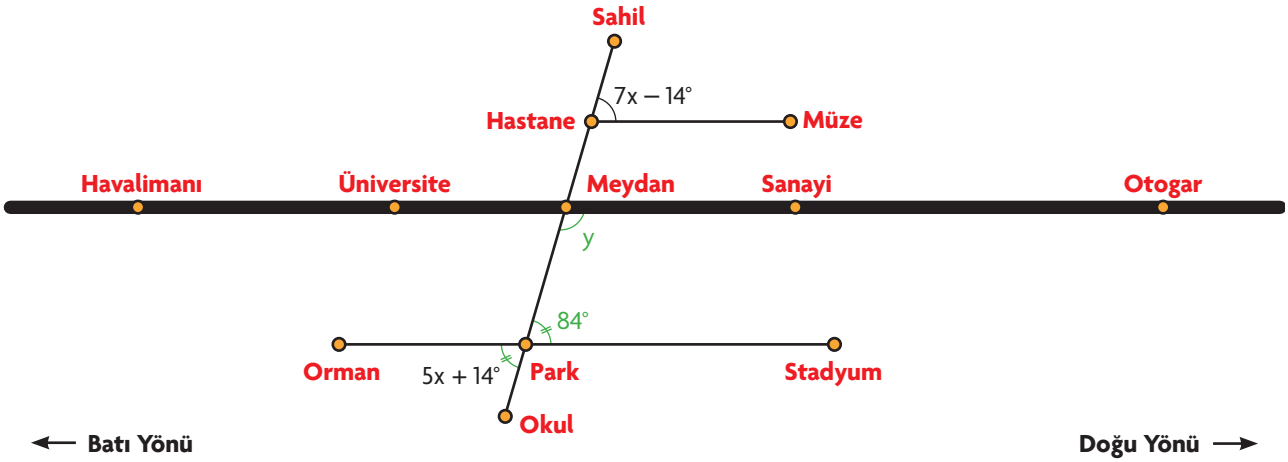
$m(\widehat{ACD}) = y$

$m(\widehat{CDE}) = z$

olmak üzere

$x + y + z = 360°$ dir.

ÇÖZÜM 6.5



"Sahil-Hastane-Müze" arasında oluşan açının ölçüsü ile "Okul-Park-Orman" arasında oluşan açının ölçüsü birbirine eşittir. (Dış ters açılar)

$7x - 14° = 5x + 14°$ tür. $\rightarrow 2x = 28° \rightarrow x = 14°$ olur. Burada $x = 14°$ olduğundan $5x + 14° = 84°$ olur.

"Okul-Park-Orman" arasındaki açı ile "Stadyum-Park-Meydan" arasındaki açı ters açı olduğundan birbirine eşittir ve 84° dir.

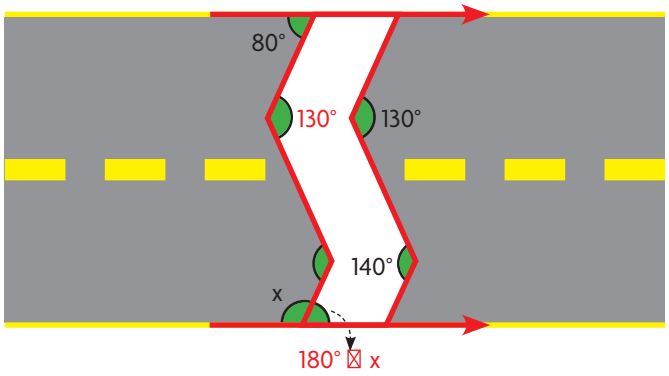
"Stadyum-Park-Meydan" arasında oluşan açı (84°) ile "Park-Meydan-Otogar" arasında oluşan açı (y), karşı durumlu açılar olduğu için toplamları 180° dir.

Burada $84° + y = 180° \rightarrow y = 96°$ olur.

"Park-Meydan-Otogar" arasında oluşan açı $\neq 96°$ dir.

ÇÖZÜM 6.6

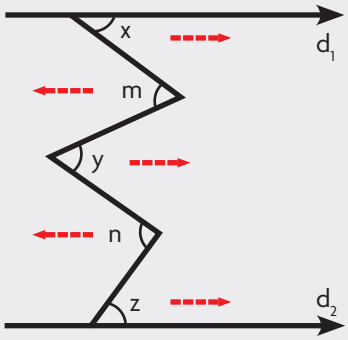
$80° + 140° = 130° + (180° - x)$
$220° = 310° - x$
$x = 110°$ dir.



HATIRLATMA

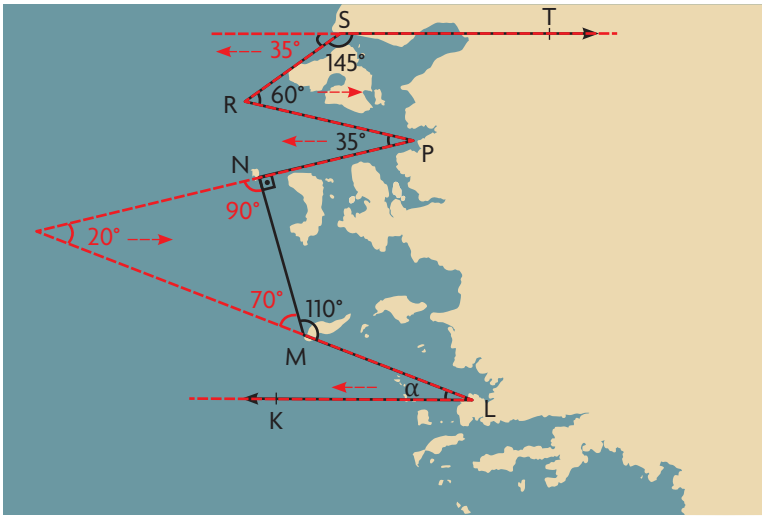
$d_1 // d_2$ olmak üzere

$x + y + z = m + n$

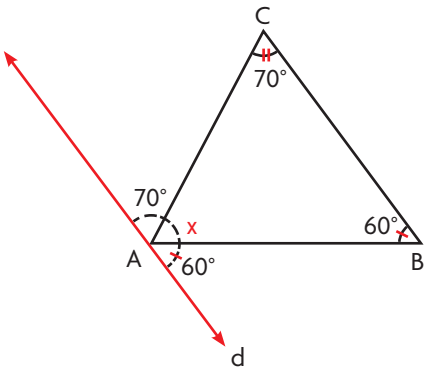


ÇÖZÜM 6.7

Şekilde gerekli açıların belirlenebilmesi amacıyla NP ve LM doğru parçaları uzatılarak kesiştirilmiştir.
$[ST] // [LK]$ olmak üzere
$35° + 35° + \alpha = 60° + 20°$
$\alpha = 10°$ olur.



ÇÖZÜM 7.



Şekilde A noktasından geçen ve $[BC]$ na paralel olacak şekilde bir d doğrusu çizelim. Bu durumda
$m(\widehat{ACB}) = m(\widehat{EAC}) = 70°$ (iç ters açı)
$m(\widehat{CBA}) = m(\widehat{DAB}) = 60°$ (İç ters açı)
$70° + x + 60° = 180°$ (Doğru açı)
Buradan $x = 50°$ olur.

İLİŞKİLENDİRİYORUM

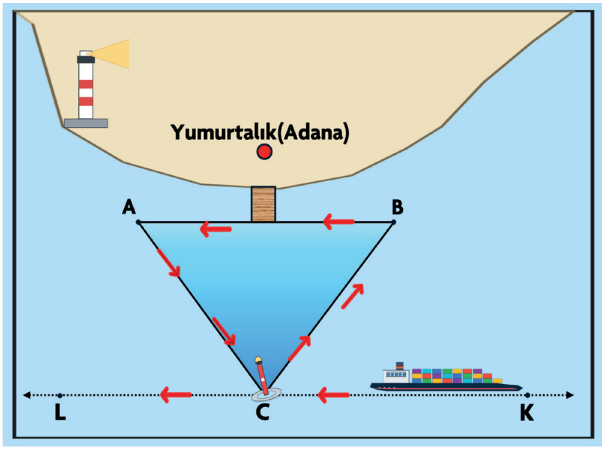
Amaç: Bu bölümde yeni öğreneceğiniz temayı; zihninizde var olan bilgileriniz, yaşantılarınız ve diğer derslerde öğrendiklerinizle ilişkilendirmenizi bekliyoruz.

Verilen örneği okuyunuz. Ardından soruları yanıtlayınız. Cevaplarınızı kendi yaşamınızdan ya da çevrenizden örneklerle destekleyiniz.

ETKİNLİK

Gemi Rotasıyla Üçgende Açı İlişkisi

Yumurtalık Limanı'nda rıhtım doğrultusu [AB] ile gösterilmiştir. K-L yaklaşma hattı, C noktasındaki fener/şamandıra üzerinden geçer ve [AB] na paraleldir. Gemi; K noktası yönünden gelir, C noktasına ulaştıktan sonra rıhtım doğrultusunda ilerleyerek önce B noktasına ardından A noktasına yönelir. Rıhtıma yanaşıp yükünü boşalttıktan sonra A noktasından yeniden C noktasına geçer ve L noktası yönüne doğru limandan ayrılır. Açılar C merkezli olup referans doğrultusu, C noktasından geçen ve [AB] na paralel olan K–L hattıdır.



Verilenlere göre aşağıdaki soruları yanıtlayınız.

1. C merkezli olarak referans doğrultusundan [CB] yönüne ölçülen dönme açısını x ile gösteriniz. x ile gösterilen açı, ABC üçgeninin hangi iç açısına eşittir? Gerekçesiyle yazınız.

2. C merkezli olarak [CB] yönünden [CA] yönüne ölçülen dönme açısını y ile gösteriniz. y ile gösterilen açı, ABC üçgeninin hangi iç açısına eşittir? Gerekçesiyle yazınız.

3. C merkezli olarak [CA] yönünden referans doğrultusuna ölçülen dönme açısını z ile gösteriniz. z ile gösterilen açı, ABC üçgeninin hangi iç açısına eşittir? Gerekçesiyle yazınız.

4. x + y + z toplamı kaç derecedir? ABC üçgeninin iç açılarının toplamına ilişkin eşitliği yazınız.

GERİ BİLDİRİM

Bu geri bildirim sayesinde kendi cevabınızı kontrol edebilir, hatalarınızı düzelterek öğrenmenizi pekiştirebilirsiniz.

1) Referans doğrultusu [KL], [AB] na paraleldir. Bu nedenle referans doğrultusundan [CB] yönüne ölçülen x açısı, üçgenin B tepe noktasındaki iç açıya eşittir. Yani $x = m(\widehat{ABC})$ olur. Çünkü paralel doğrular arasında kalan iç ters açılar birbirine eşittir.

2) C merkezli olarak [CB] dan [CA] na çizilen açı, üçgenin $(\widehat{BCA})$ iç açısıdır. Dolayısıyla $y = m(\widehat{BCA})$ dır.

3) [CA] ile referans doğrultusu (C noktasından geçen ve [AB] na paralel olan) arasındaki açı ve [CA] ile [AB] arasındaki iç açı $(\widehat{CAB})$ iç ters olduğundan birbirlerine eşittir. Böylece $z = m(\widehat{CAB})$ dır.

4) $x + y + z = 180°$

$x + y + z = m(\widehat{ABC}) + m(\widehat{BCA}) + m(\widehat{CAB})$ olup üçgenin iç açılarının toplamı 180° dir.

UYGULAYARAK ÖĞRENİYORUM

Amaç: Bu bölümde bilgilerinizi etkinlikler ve uygulamalarla pekiştirmenizi, öğrenmeyi daha kalıcı hâle getirmenizi amaçlıyoruz. Örneklerde verilen adımları uygulayınız. Çalışmanızı dikkatli ve düzenli bir şekilde yapınız.

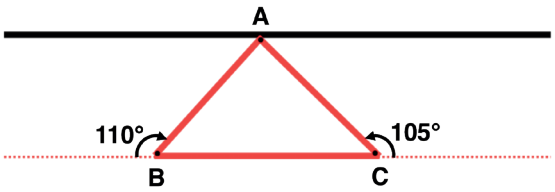
Üçgende açı ilişkileri; yalnızca temel geometri bilgisini değil aynı zamanda günlük yaşamla ilişkilendirilebilen, çok yönlü bir muhakeme becerisini de geliştiren önemli bir konudur. Bu konuyu öğrenmek size aşağıda sıralanmış alanlarda katkı sağlayacaktır.

- **Yön ve Konum Algısı:** Geometrik açıların yön değişimiyle ilişkisini kurmak, günlük yaşamdaki hareketleri (örneğin harita okuma, pusula kullanımı) anlamayı kolaylaştırır.
- **Gerçek Yaşam Uygulamaları:** Mimari çizimler, mühendislik tasarımları, harita planlaması gibi alanlarda üçgen ve açı bilgisi sıkça kullanılır.
- **Akademik ve Mantıksal Düşünme:** Üçgenin iç açılarının toplamının 180° olduğunu ispatlayabilmek için ön bilgileriniz arasında ilişki kurmanız gerekir. Bu da sizlere analitik düşünme becerisi kazandırır.
- **İspat Kültürü:** Daha önce öğrendiğiniz bilgileri (örneğin doğruda açılar) kullanarak bir matematiksel gerçeği (üçgenin iç açılarının toplamı) kanıtlamaya yönelirsiniz. Bu, matematikte temel olan ispat kültürünü geliştirir.

ÖRNEK



Şekil 1



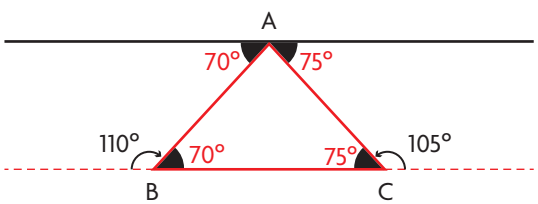
Şekil 2

Şekil 1'de biri siyah, diğeri kırmızı olmak üzere birbirine paralel konumda iki tahta çubuk gösterilmiştir.

Şekil 2'de, siyah çubuk sabit kalmış; kırmızı çubuk B ve C noktalarından kesilip, döndürülerek uçları A noktasında birleşecek şekilde konumlandırılmıştır. Kırmızı çubuğun bu iki kolu, siyah çubuğa göre biri saat yönünde 110°, diğeri saat yönünün tersine 105° olacak şekilde döndürülmüştür.

Buna göre oluşan üçgende $m(\widehat{BAC})$ kaç derecedir?

ÇÖZÜM



Şekil 2

Doğru açının ölçüsü 180° olduğundan $m(\widehat{ABC}) = 70°$ olur ve B noktasından kesilip 110° döndürülürse [AB] oluşur. İç ters açı kuralından

dolayı siyah çubuk ile [AB] arasında oluşan açı da 70° olur.

Aynı şekilde doğru açının ölçüsü 180° olduğundan $m(\widehat{ACB}) = 75°$ olur ve C noktasından kesilip 105° döndürülürse [AC] oluşur. İç ters açı kuralından siyah çubuk ile [AC] arasında oluşan açı 75° olur. Bu durumda

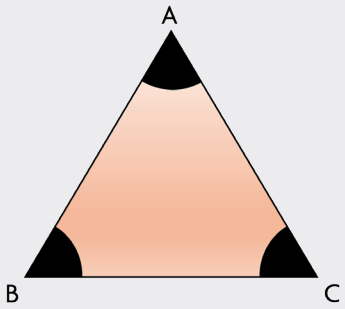
$70° + m(\widehat{BAC}) + 75° = 180°$ (Doğru açı)

$m(\widehat{BAC}) + 145° = 180°$

$m(\widehat{BAC}) = 35°$ bulunur.

HATIRLATMA

Üçgenin iç açılarının toplamı 180° dir.



$m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}) + m(\widehat{C}) = 180^\circ$

ÖRNEK

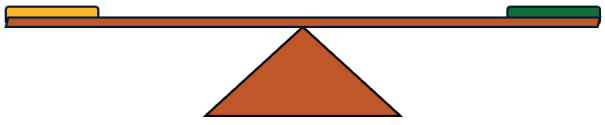
Şekil 1'de, A noktasından ABC üçgensel desteğine dayanan bir tahterevalli yatay şekilde dengededir.

$m(\widehat{A}) = 72^\circ$

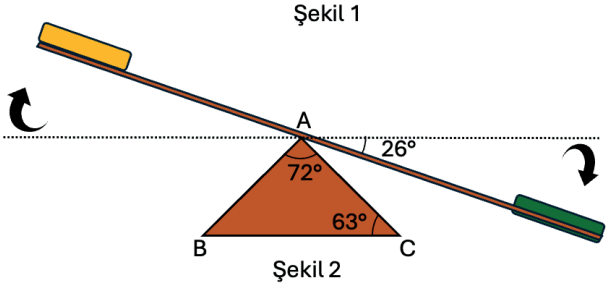
$m(\widehat{C}) = 63^\circ$ dir.

Şekil 2'de tahterevalli, [AC] yönündeki ucu 26° aşağı inecek biçimde hareket etmektedir.

Buna göre [AB] ile tahterevalli arasındaki dar açı kaç derecedir?



Şekil 1



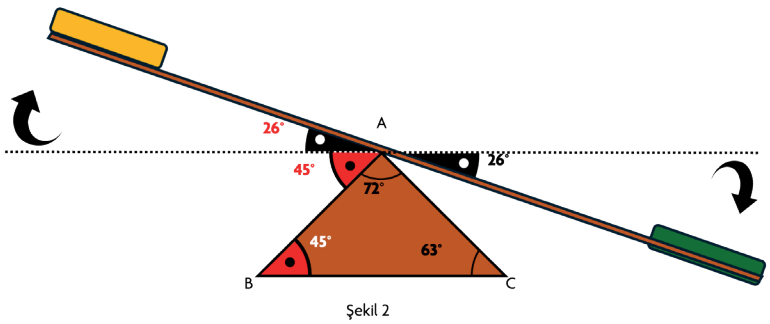
Şekil 2

ÇÖZÜM

ABC üçgeninde $m(\widehat{A}) = 72^\circ$, $m(\widehat{C}) = 63^\circ$ olduğundan
$m(\widehat{B}) = 180^\circ - 72^\circ - 63^\circ = 45^\circ$ olur.

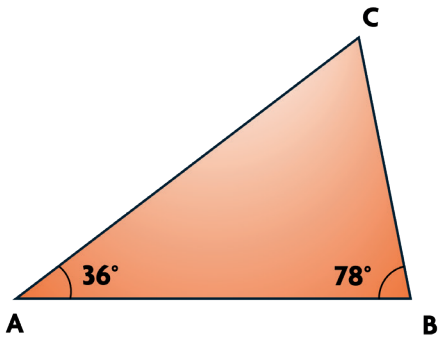
Taban [BC], yatay düzlem ile paraleldir. Dolayısıyla [AB], yatayla 45° lik açı yapar. Şekil 2'de tahterevallinin bir tarafı yatayla 26° aşağıya hareket ettiğinde diğer tarafı da yatayla 26° yukarı hareket eder. Burada ters açı kuralından oluşan açıların ölçüleri birbirine eşittir.

Bu durumda [AB] ile tahterevalli arasındaki dar açı
$45^\circ + 26^\circ = 71^\circ$ olur.

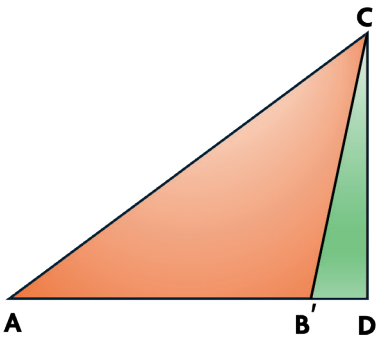


Şekil 2

SIRA SİZDE 1.



Şekil 1



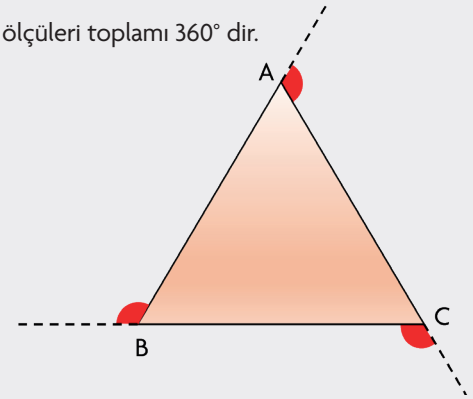
Şekil 2

$m(\widehat{BAC}) = 36°$ ve $m(\widehat{CBA}) = 78°$olmak üzere Şekil 1'de ön yüzü turuncu, arka yüzü yeşil olan üçgen biçimindeki karton verilmiştir. Bu kartonda [BC], [AD] üzerine gelecek şekilde katlandığında Şekil 2 elde edilmiştir.

Buna göre $m(\widehat{CB'D}) - m(\widehat{BCD})$ kaçtır?

HATIRLATMA

Üçgenin dış açılarının ölçüleri toplamı 360° dir.



$m(\hat{A}) + m(\hat{B}) + m(\hat{C}) = 360°$

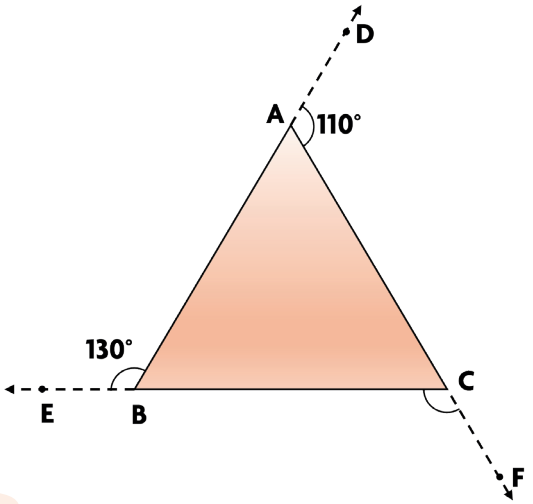
ÖRNEK

ABC bir üçgen

$m(\widehat{DAF}) = 110°$

$m(\widehat{EBD}) = 130°$

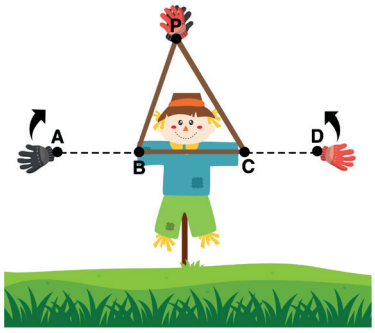
Buna göre $m(\widehat{ECF})$ kaç derecedir?



ÇÖZÜM

Üçgenin dış açı ölçülerinin toplamı 360° olduğundan
$110° + 130° + m(\widehat{ECF}) = 360°$ dir. Buradan
$m(\widehat{ECF}) = 120°$ bulunur.

ÖRNEK



Başlangıçta yer düzlemine paralel duran bir bostan korkuluğunun kolları, omuz hizasındaki destek çubuğu üzerinde A ve D noktalarından uzanmaktadır. Siyah eldivenli kol, saatin dönme yönünde α; kırmızı eldivenli kol, saatin dönme yönünün tersi yönde β kadar döndürülerek P noktasında çakıştırılmıştır. Böylece omuz çizgisi [BC] ile birlikte PBC üçgeni oluşmuştur. Son durumda

$m(\widehat{BPC}) = 60°$

$3 \cdot m(\widehat{ABP}) = 2 \cdot m(\widehat{DCP})$

olduğuna göre β kaç derecedir?

ÇÖZÜM

$3 \cdot m(\widehat{ABP}) = 2 \cdot m(\widehat{DCP})$ olduğundan

$\alpha = 2x$ $\quad$ $\beta = 3x$

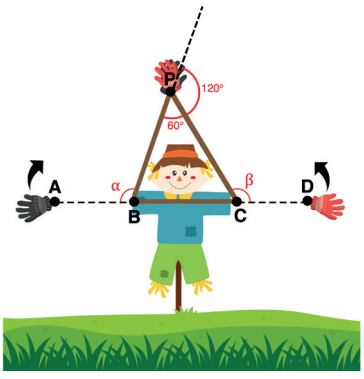
$\alpha + \beta + 120° = 360°$. Buradan,

$2x + 3x + 120° = 360°$

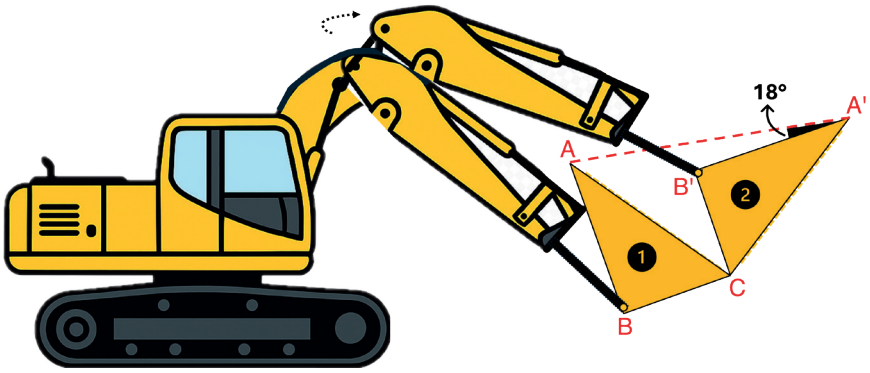
$5x = 240°$

$x = 48°$ olur.

$\beta = 3x$ olduğuna göre $\beta = 3 \cdot 48° = 144°$ bulunur.



SIRA SİZDE 2.



Bir ekskavatörün kepçesi, ABC üçgeni şeklinde modellenmiştir.Bu kepçe, C noktası etrafında saat yönünde 90° döndürülerek 1 numaralı konumdan 2 numaralı konuma gelmektedir.
Bu dönüşüm sonunda A noktası, A′ noktasına;
B noktası ise B′ noktasına taşınmaktadır.
$m(\widehat{AA'B'}) = 18°$ dir.

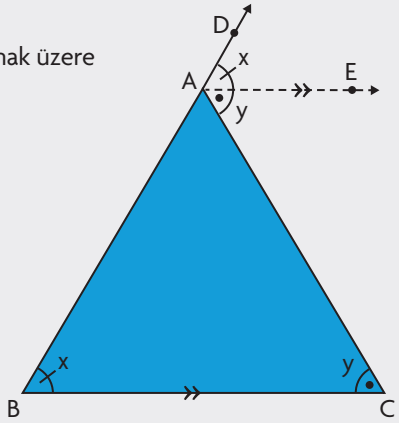
Buna göre $m(\widehat{BAC})$ kaç derecedir?

HATIRLATMA

Üçgende bir dış açının ölçüsü, kendisine komşu olmayan iki iç açının ölçüleri toplamına eşittir.

$m(\widehat{DAC}) = m(\widehat{ABC}) + m(\widehat{BCA})$

[BC // [AE olmak üzere

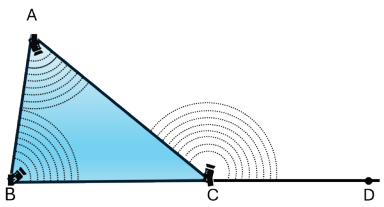


ÖRNEK

Üçgen biçimindeki bir alanda güvenlik kameraları köşelere yerleştirilmiştir.

- A köşesindeki kamera, alanı 54° lik bir açıyla izlemektedir.
- B köşesindeki kamera, alanı 58° lik bir açıyla izlemektedir.
- C köşesindeki kamera ise [BC] kenarının C noktasından uzatılmasıyla oluşan dış açıyı izlemektedir.

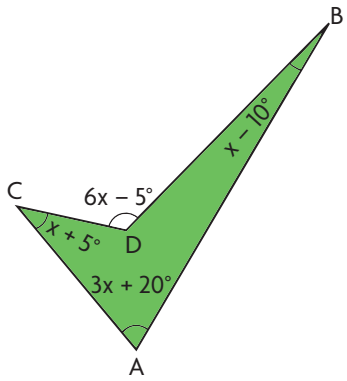
Buna göre C köşesindeki kameranın izlediği açının ölçüsü kaç derecedir?



ÇÖZÜM

Üçgende iki iç açının ölçülerinin toplamı komşu olmayan dış açının ölçüsüne eşittir. Bu durumda,
$m(\widehat{ABC}) + m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{DCA})$ dır.
$68° + 54° = m(\widehat{DCA})$
$m(\widehat{DCA}) = 122°$ bulunur.

ÖRNEK



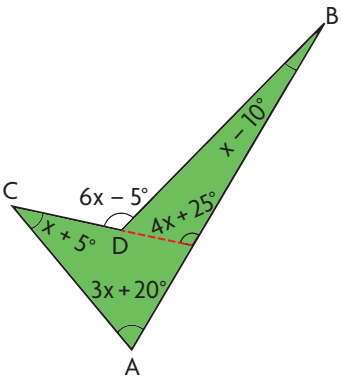
5 Haziran Dünya Çevre Günü için dikkat çeken bir afiş hazırlamak isteyen Salih, yeşil onay işareti şeklinde bir logo tasarlamıştır. Hazırladığı logoyu geometrik olarak modellemiş ve logonun köşe açılarına karşılık gelen açı ölçülerini aşağıdaki gibi belirlemiştir.

$m(\widehat{DBA}) = x - 10°$
$m(\widehat{BAC}) = 3x + 20°$
$m(\widehat{ACD}) = x + 5°$
$m(\widehat{CDB}) = 6x - 5°$

Buna göre $m(\widehat{CDB})$ kaç derecedir?

ÇÖZÜM

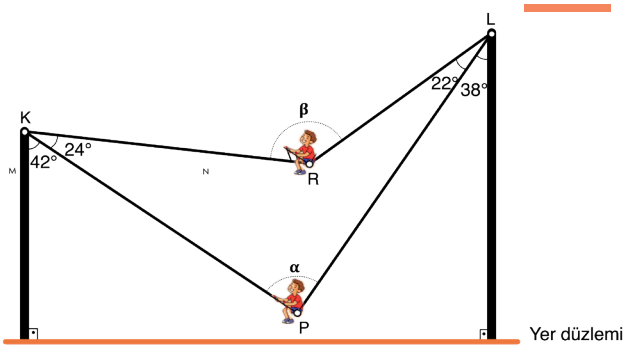
[CD] nın uzantısını çizip [AB] ile kesişim noktasına E noktası adını verelim.
Oluşan ACE üçgeninde $\widehat{CEB}$, ACE üçgeninin bir dış açısı olup
$m(\widehat{EAC}) + m(\widehat{ACE}) = m(\widehat{CEB})$ dir.
$(x + 5°) + (3x + 20°) = m(\widehat{CEB})$
Buradan
$m(\widehat{CEB}) = 4x + 25°$ olur.
Oluşan DEB üçgeninde $\widehat{CDB}$ bir dış açı olup
$m(\widehat{DEB}) + m(\widehat{EBD}) = m(\widehat{CDB})$ olur.
$(4x + 25°) + (x - 10°) = (6x - 5°)$
$5x + 15° = 6x - 5°$
$x = 20°$ bulunur ve $m(\widehat{CDB}) = 6 \cdot 20 - 5 = 115°$ bulunur.



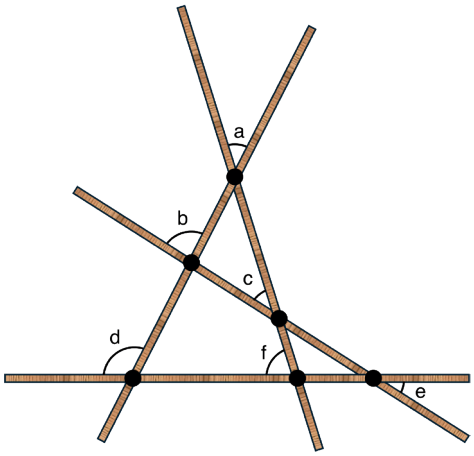
SIRA SİZDE 3.

Yukarıdaki şekilde, yer düzlemine dik K ve L direkleri arasında doğrusal kabul edilen lastiklerle oluşturulmuş bir zıp zıp oyuncağı gösterilmiştir. Ali Çınar'ın bu zıp zıpta P noktası ve R noktasında bulunduğu durumlarda, lastik halatlar arasında oluşan açılar α ve β olarak adlandırılmıştır. Halatların her iki durumdaki konumlarına ait açılar şekilde gösterilmiştir.

Buna göre β – α kaç derecedir?



ÖRNEK

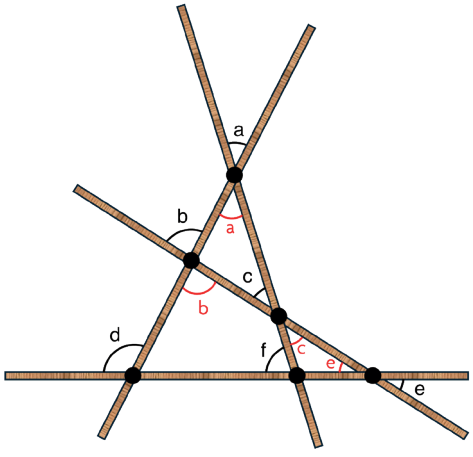


Orman yangınlarına dikkat çekmek amacıyla düzenlenen uçurtma şenliğinde Melih, kendi uçurtmasını tasarlamak için çıtaları şekildeki gibi birleştirmiştir. Çıtalar arasında oluşan açıları a, b, c, d, e, f olarak adlandırmıştır.

Buna göre aşağıdaki ifadelerde boş bırakılan yerlere uygun değerleri yazınız.

1. a + c = ☐
2. b + ☐ = d
3. ☐ + f = d
4. c – f + e = ☐
5. e + ☐ + a = d
6. b + e = ☐ + f

ÇÖZÜM

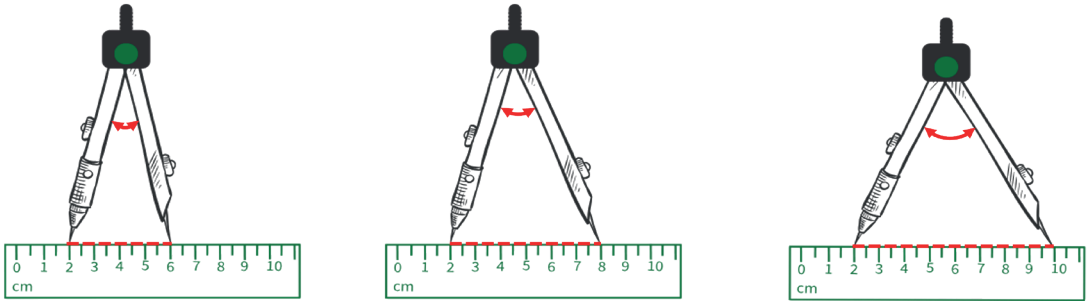


Yanda verilen şekilde "Ters açıların ölçüleri birbirlerine eşittir ve üçgende bir dış açının ölçüsü, kendisine komşu olmayan iki iç açının ölçüleri toplamına eşittir." kuralları uygulanırsa ifadeler aşağıdaki şekilde doldurulur.

1. a + c = **b**
2. b + **e** = d
3. **a** + f = d
4. c – f + e = **0°**
5. e + **c** + a = d
6. b + e = **a** + f

ETKİNLİK:

Üçgende "Açı–Kenar" ilişkisini keşfedelim.



Üç pergelin açısını ve kollarının uzunluğunu dikkatlice inceleyelim. Her üç durumda da pergellerin uçları arasındaki uzaklık değişmektedir.

- Sizce bu değişimin nedeni ne olabilir?
- Pergelin açısını artırdığımızda uçlar arasındaki mesafe nasıl değişir?

Açı büyüdükçe karşı kenar nasıl etkilenir?

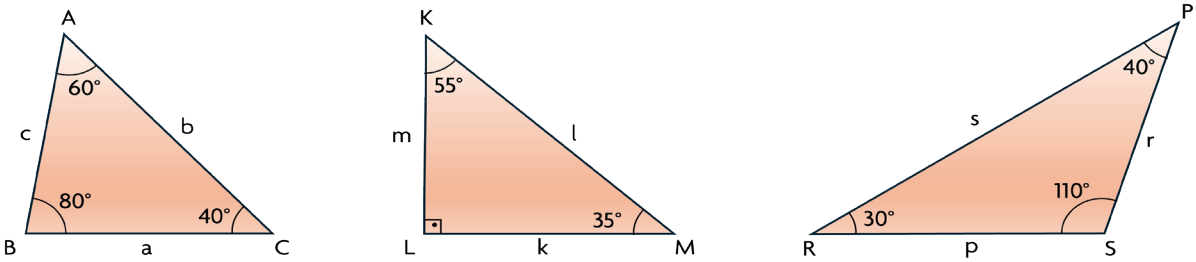
Geri Bildirim: Bu geri bildirim sayesinde kendi cevabınızı kontrol edebilir, hatalarınızı düzelterek öğrenmenizi pekiştirebilirsiniz.

Üç pergelin de kolu aynı uzunluktadır, yalnızca kolların açılarının ölçüsü farklıdır. Pergelin açısının ölçüsü büyüdükçe uçlar arasındaki uzaklığın da arttığı gözlemlenir. Bu durum, üçgenlerde bir açının ölçüsü ile karşısındaki kenarın uzunluğu arasında doğru bir ilişki olduğunu gösterir.

- Büyük açının karşısında uzun kenar,
- Küçük açının karşısında kısa kenar bulunur.

ÖRNEK

Aşağıda açı ölçüleri verilen üçgenler verilmiştir.



1) Şekilde verilen üçgenlere göre tabloyu doldurunuz.

Üçgen	En Küçük Açının Ölçüsü	En Kısa Kenar	En Büyük Açının Ölçüsü	En Uzun Kenar
ABC				
KLM				
PRS				

2) Her bir üçgenin iç açı ölçülerini ve bu açıların karşısındaki kenar uzunlukları arasındaki ilişkileri inceleyiniz. Aşağıda verilen genellemelerde boş bırakılan yerleri doldurunuz.

a. Bir üçgende ölçüsü en büyük olan iç açının karşısında [ ] kenar bulunur.

b. Bir üçgende en uzun kenar karşısında [ ] açı bulunur.

c. Bir üçgende ölçüsü küçük olan iç açının karşısında [ ] kenar bulunur.

d. Bir üçgende en kısa kenar karşısında [ ] açı bulunur.

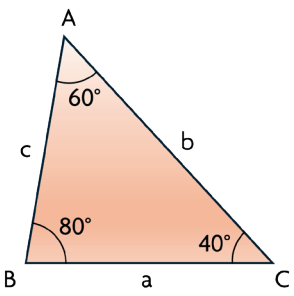
e. Bir dik üçgende en uzun kenar [ ] nin karşısındaki kenar yani hipotenüs uzunluğudur.

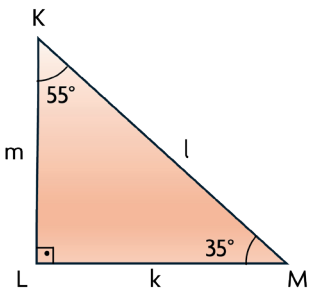
f. Bir geniş açılı üçgende en uzun kenar [ ] açının karşısındaki kenardır.

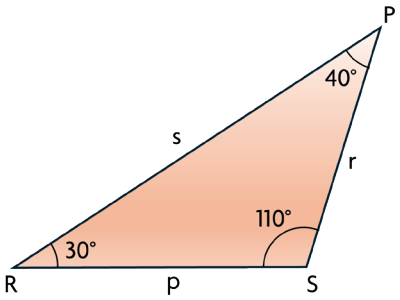
g. Bir ikizkenar üçgende [ ] açıların karşısındaki kenarlar da birbirine [ ] .

h. Bir eşkenar üçgende iç açıların ölçüsü [ ] olduğu için bütün kenar uzunlukları da birbirine [ ] .

ÇÖZÜM







1) Şekilde verilen üçgenlere göre tabloyu doldurunuz.

Üçgen	En Küçük Açının Ölçüsü	En Kısa Kenar	En Büyük Açının Ölçüsü	En Uzun Kenar
ABC	40°	c	80°	b
KLM	35°	m	90°	l
PRS	30°	r	110°	s

2) Her bir üçgenin iç açı ölçülerini ve bu açıların karşısındaki kenar uzunlukları arasındaki ilişkileri inceleyiniz. Aşağıda verilen genellemelerde boş bırakılan yerleri doldurunuz.

a. Bir üçgende ölçüsü en büyük olan iç açının karşısında [en uzun] kenar bulunur.

b. Bir üçgende en uzun kenar karşısında [en büyük] açı bulunur.

c. Bir üçgende ölçüsü küçük olan iç açının karşısında [en kısa] kenar bulunur.

d. Bir üçgende en kısa kenar karşısında [en küçük] açı bulunur.

e. Bir dik üçgende en uzun kenar **90°** nin karşısındaki kenar yani hipotenüs uzunluğudur.

f. Bir geniş açılı üçgende en uzun kenar **geniş** açının karşısındaki kenardır.

g. Bir ikizkenar üçgende **eşit** açıların karşısındaki kenarlar da birbirine **eşittir** .

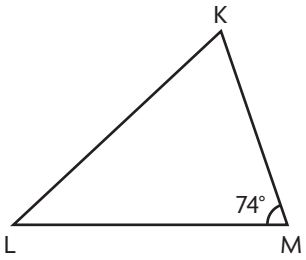
h. Bir eşkenar üçgende iç açıların ölçüsü **eşit** olduğu için bütün kenar uzunlukları da birbirine **eşittir**.

ÖRNEK

KLM üçgeninde

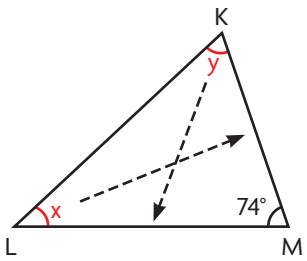
$|LM| > |KM|$ ve $m(\widehat{KLM}) = 74°$ dir.

Buna göre $m(\widehat{KLM})$ nin alabileceği en büyük tam sayı değeri kaçtır?



ÇÖZÜM

KLM üçgeninde
$|LM| > |KM|$ olduğundan
[LM] kenarını gören y açısının ölçüsü,
[KM] kenarını gören x açısının ölçüsünden büyüktür.
Bu durumda $y > x$ dir.
Üçgenin iç açıları toplamı 180° olduğundan
$x + y + 74 = 180°$
$x + y = 106°$ dir.
$y > x$ olduğundan dolayı,
$m(\widehat{KLM}) = x$ in alabileceği en büyük tam sayı değeri 52° olur.

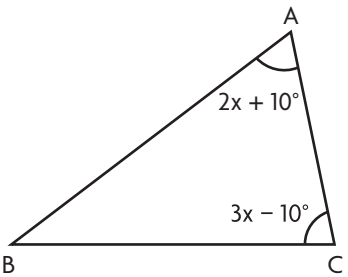


ÖRNEK

ABC üçgeninde,

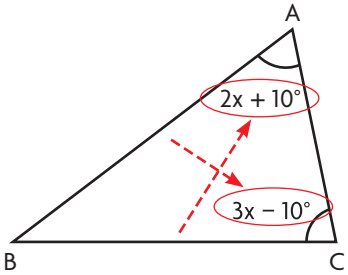
$m(\widehat{ACB}) = 3x - 10°$ ve $m(\widehat{CAB}) = 2x + 10°$ dir.

$|AB| > |BC|$ olduğuna göre x in alabileceği en küçük tam sayı değeri kaçtır?



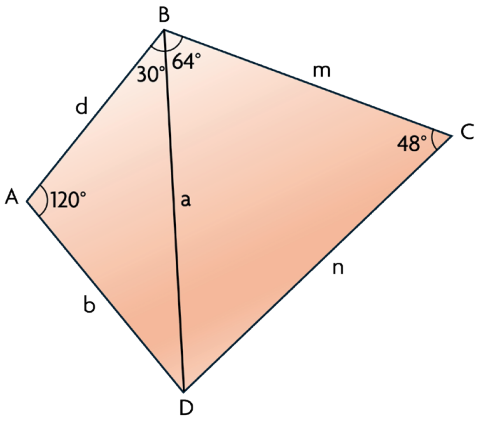
ÇÖZÜM

ABC üçgeninde,
$|AB| > |BC|$ olduğuna göre [AB] kenarını gören açı, [BC] kenarını gören açıdan büyüktür. Bu durumda;
$3x - 10° > 2x + 10°$
$x > 20°$ olur.
x in alabileceği en küçük tam sayı değeri 21 olur.



ÖRNEK

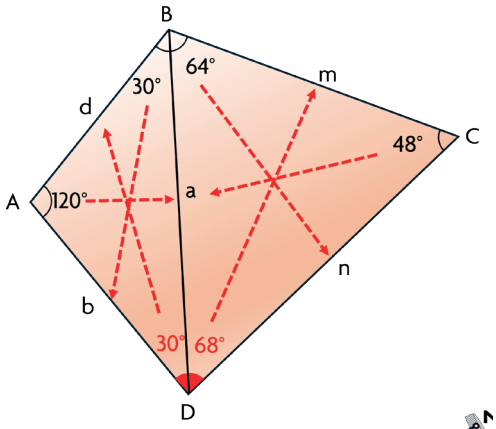
Yandaki şekilde verilenlere göre a, b, d, m ve n kenar uzunluklarını büyükten küçüğe doğru sıralayınız.



ÇÖZÜM

Bir üçgende, en büyük açı karşısında en uzun kenar; en küçük açı karşısında en kısa kenar bulunur.
ABD ikizkenar üçgeninin açıları arasında
30° = 30° < 120° sıralaması olduğundan kenarları arasında
b = d < a sıralaması vardır.
BCD üçgeninin açıları arasında ise
48° < 64° < 68° sıralaması vardır ve kenarları arasında
a < n < m sıralaması vardır. ABD ve BCD üçgenleri birlikte değerlendirildiğinde

b = d < a
a < n < m
} b = d < a < n < m sıralaması bulunur.



ÖRNEK

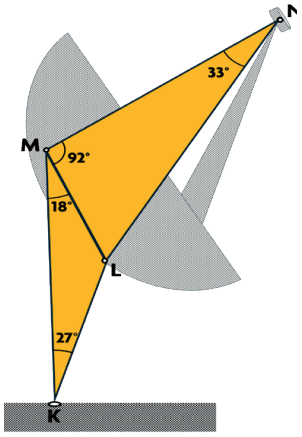
Yukarıdaki şekilde bir uydu alıcı düzeneğinin taşıyıcı kolları ve bağlantı noktaları gösterilmiştir. KML ve MLN birer üçgen olmak üzere

$m(\widehat{MKL}) = 27°$

$m(\widehat{KML}) = 18°$

$m(\widehat{LMN}) = 92°$

$m(\widehat{MNL}) = 33°$

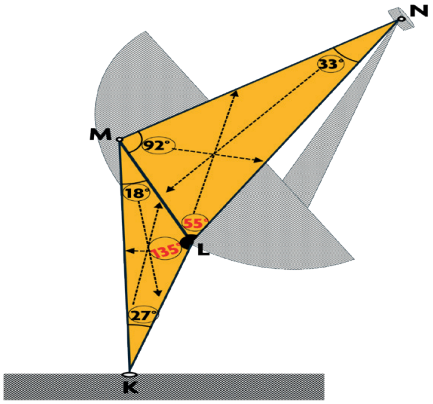


Buna göre bu düzenekte MKLN dörtgeninde <u>en kısa</u> kenar aşağıdakilerden hangisidir?

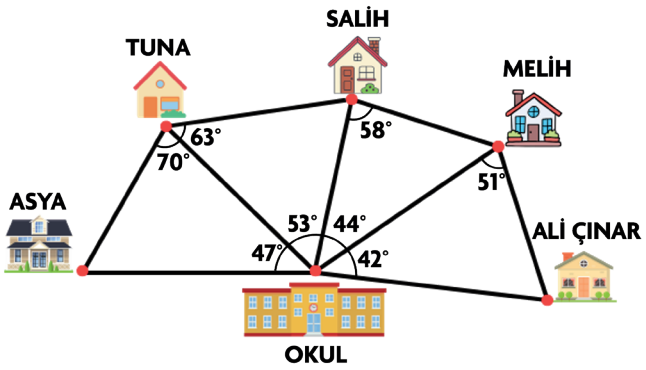
A) [ML] B) [KL] C) [MK] D) [LN] E) [MN]

ÇÖZÜM

KML üçgeni açıları arasında 18° < 27° < 135° sıralaması olduğundan kenarları arasında |KL| < |ML| < |KM| sıralaması olur.
MLN üçgeni açıları arasında 33° < 55° < 92° sıralaması olduğundan kenarları arasında |ML| < |MN| < |NL| sıralaması olur.
Bu durumda
|KL| < |ML| < |KM| ve |ML| < |MN| < |NL| olduğuna göre
en kısa kenar [KL] olur.



SIRA SİZDE 4.

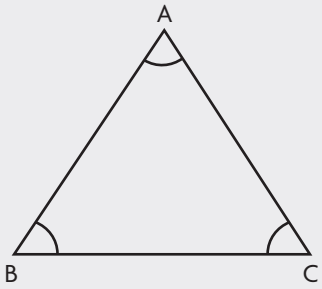


Adana Arif Nihat Asya Anadolu Lisesi, Gürselpaşa Mahallesi'nde bulunmaktadır. Asya, Tuna, Salih, Melih ve Ali'nin evleri okula farklı uzaklıklarda ve yönlerde yer almaktadır.
Okul yönetimi, bilim fuarı davetiyelerini öğrencilere ulaştırmak için bir drone kullanacaktır. Drone, dağıtıma okula en uzak oturan öğrencinin evinden başlayacaktır. Yandaki şekilde, öğrencilerin evlerinin okula göre konumu, üçgenler ve açı ölçüleriyle gösterilmiştir.

Buna göre bilim fuarı davetiyesi ilk olarak hangi öğrencinin evine gönderilir?

HATIRLATMA

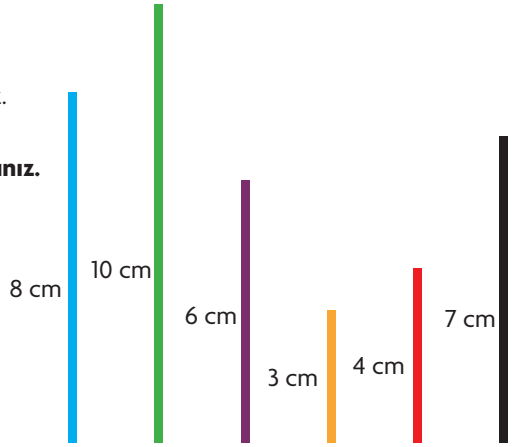
Bir üçgende ölçüsü en büyük olan açı karşısında en uzun kenar, ölçüsü en küçük olan açı karşısında en kısa kenar bulunur.



$m(\widehat{A}) > m(\widehat{B}) > m(\widehat{C}) \Leftrightarrow a > b > c$

DİKKAT
Ortak kenarı bulunan iki ya da daha fazla üçgen söz konusu olduğunda her üçgen ayrı ayrı ele alınarak açı–kenar ilişkisi değerlendirilir.

ÖRNEK
Yanda verilen görselde mavi, yeşil, mor, sarı, kırmızı ve siyah renkli çubuklar ve uzunlukları verilmiştir. Buna göre verilen soruları cevaplayınız.



1) Mavi, yeşil ve mor çubuklar ile bir üçgen oluşturulabilir mi? Açıklayınız.

2) Mor, siyah ve sarı çubuklar ile bir üçgen oluşturulabilir mi? Açıklayınız.

3) Yeşil, mor ve sarı çubuklar ile bir üçgen oluşturulabilir mi? Açıklayınız.

ÇÖZÜM

1) Mavi, yeşil ve mor çubuklar ile bir üçgen oluşturulabilir mi? Açıklayınız.

Mavi (8 cm)–Yeşil (10 cm)–Mor (6 cm)

$|8 - 10| < 6 < 8 + 10$ ☑

$|6 - 10| < 8 < 6 + 10$ ☑

$|6 - 8| < 10 < 6 + 8$ ☑ Üçgen **oluşturulabilir.**

2) Mor, siyah ve sarı çubuklar ile bir üçgen oluşturulabilir mi? Açıklayınız.

Mor (6 cm)–Siyah (7 cm)–Sarı (3 cm)

$|6 - 7| < 3 < 6 + 7$ ☑

$|3 - 7| < 6 < 3 + 7$ ☑

$|6 - 3| < 7 < 6 + 3$ ☑ Üçgen **oluşturulabilir.**

3) Yeşil, mor ve sarı çubuklar ile bir üçgen oluşturulabilir mi? Açıklayınız.

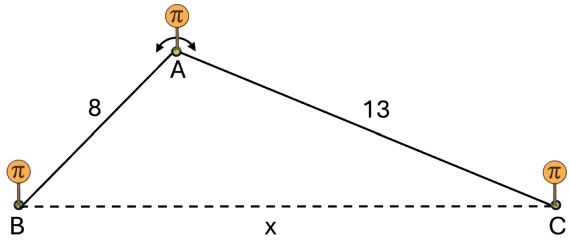
Yeşil (10 cm)–Mor (6 cm)–Sarı (3 cm)

$|3 - 10| \not< 6 < 3 + 10$ ☒

$|6 - 3| < 10 \not< 6 + 3$ ☒

$|6 - 10| \not< 3 < 6 + 10$ ☒ Üçgen **oluşturulamaz.**

ÖRNEK



14 Mart Dünya Pi Günü kapsamında, okul bahçesinde öğrenciler için eğlenceli bir matematik istasyonu hazırlanmıştır.
Bu istasyonda yerde üç farklı noktaya π sembolleriyle süslenmiş işaretler yerleştirilerek üçgen biçiminde bir alan oluşturulmak istenmektedir.
A noktasının B noktası ile arasındaki uzaklık 8 metre, C noktası ile arasındaki uzaklık ise 13 metredir.
A açısının ölçüsü değiştikçe BC kenarının uzunluğu (x) da değişecektir.

Buna göre öğrenciler, metre cinsinden üçüncü kenar olan x i hangi değer aralığında seçip üçgen oluşturabilirler?

ÇÖZÜM

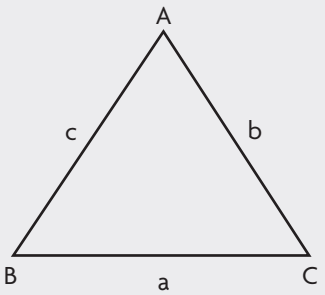
Bir üçgende herhangi bir kenar uzunluğu; diğer iki kenarın uzunlukları farkının mutlak değerinden büyük, diğer iki kenarın uzunlukları toplamından küçüktür. (Üçgen Eşitsizliği)
$|BC| = x$,
$|8 - 13| < x < 8 + 13$
$5 < x < 21$
Dolayısıyla öğrenciler, üçüncü kenar uzunluğunu **5 metreden büyük ve 21 metreden küçük olacak şekilde** seçtiklerinde bir üçgen oluşturabilirler.

HATIRLATMA

ABC üçgeninde a, b, c kenar uzunlukları olmak üzere

$$|b - c| < a < b + c$$
$$|a - c| < b < a + c$$
$$|a - b| < c < a + b$$

eşitsizlikleri sağlanır. Bu eşitsizlikler **üçgen eşitsizliği** olarak adlandırılır.

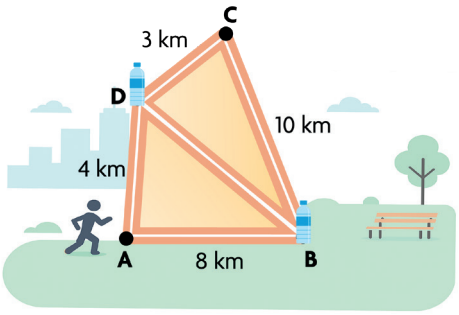


Bir üçgende herhangi bir kenar uzunluğu, diğer iki kenarın uzunlukları farkının mutlak değerinden büyük, diğer iki kenarın uzunlukları toplamından küçüktür.

ÖRNEK

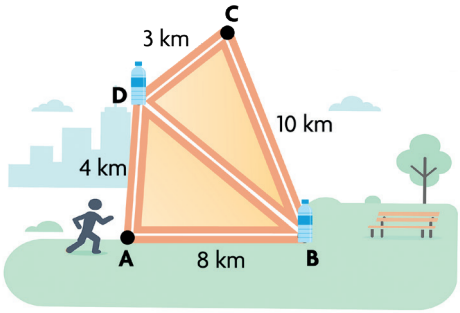
Şehir koşusu parkurunda A, D, C ve B noktaları parkur üzerinde yer almaktadır. Koşucunun su ihtiyacını karşılayabileceği noktalar B ve D noktalarıdır. Parkur planlamasında bu iki nokta arasındaki mesafe, sporcu sağlığı açısından önemlidir.

$|AD| = 4$ km
$|AB| = 8$ km
$|DC| = 3$ km
$|BC| = 10$ km



olduğuna göre BD uzunluğunun alabileceği değer aralığını bulunuz.

ÇÖZÜM



Üçgen eşitsizliği ABD ve BCD üçgenlerinde sırasıyla uygulanırsa

ABD üçgeninde: $|8 - 4| < |BD| < 8 + 4$

$4 < |BD| < 12$

BCD üçgeninde: $|10 - 3| < |BD| < 10 + 3$

$7 < |BD| < 13$

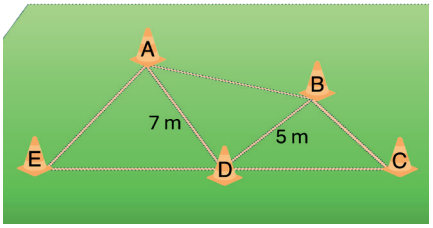
$7 < |BD| < 12$ olur.

Buna göre BD uzunluğu $(7, 12)$ aralığında değer alır.

ÖRNEK

Bir futbol antrenmanında, oyuncuların çeviklik çalışması yapabilmesi için üzerinde harfler yazılı olan koniler kullanılarak üçgenler oluşturulmuştur. Konilerin arasındaki mesafeler metre cinsinden tam sayıdır.

$|DB| = 5$ m ve $|AD| = 7$ m



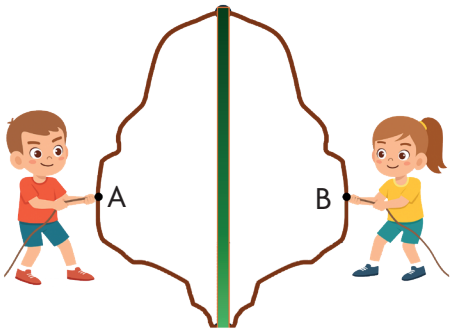
olduğuna göre bu düzenlemenin çevresi en az kaç metre olur?

ÇÖZÜM

$|AE| = x$ metre , $|ED| = y$ metre , $|DC| = z$ metre , $|BC| = k$ metre , $|AB| = t$ metre olsun.
ADE üçgeninde üçgen eşitsizliğine göre $|x - y| < 7 < x + y$
BDC üçgeninde üçgen eşitsizliğine göre $|k - z| < 5 < k + z$
ABD üçgeninde üçgen eşitsizliğine göre $|5 - 7| < t < 5 + 7 \Rightarrow (2 < t < 12)$ eşitsizlikleri yazılır.
$7 < x + y$ ise $x + y$ en az 8 metre olur.
$5 < k + z$ ise $k + z$ en az 6 metre olur.
$2 < t$ ise t en az 3 metre olur.
Bu durumda düzeneğin çevresi $x + y + k + z + t$ en az 17 metre olur.

SIRA SİZDE 5.

Bir parkta, yere dik olarak sabitlenmiş bir direğin tepe ve taban halkalarına uzunlukları sırasıyla 25 m ve 32 m olan ipler bağlanmıştır. İpler farklı yönlere A ve B noktalarından gergin şekilde doğrusal olarak çekildiğinde dörtgensel bir bölge elde edilir.



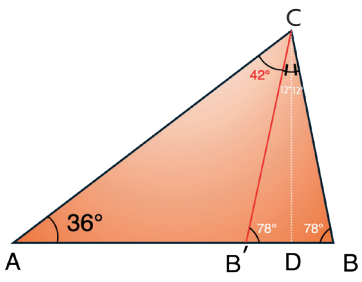
Buna göre A ile B noktaları arasındaki uzaklığın metre cinsinden alabileceği en büyük tam sayı değeri kaçtır?

GERİ BİLDİRİM

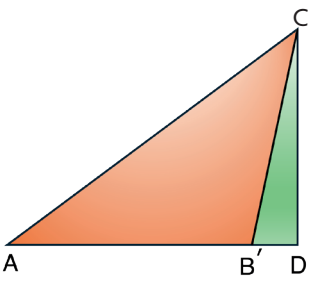
Bu geri bildirim sayesinde kendi cevabınızı kontrol edebilir, hatalarınızı düzelterek öğrenmenizi pekiştirebilirsiniz.

SIRA SİZDE 1.

ÇÖZÜM



Şekil 1

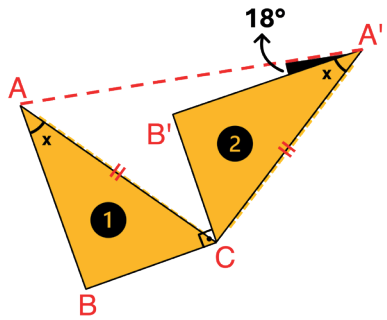


Şekil 2

Bu kartonun [BC] kenarı, [AD] üzerine gelecek şekilde katlanıyor.
Burada katlanan kısım tekrar açılırsa [AD] açıortay olur ve CBB′ ikizkenar üçgeni oluşur.
$m(\widehat{BCD}) = m(\widehat{DCB'}) = 12°$ olur.
Buna göre $m(\widehat{CB'D}) - m(\widehat{BCD}) = 78° - 12° = 66°$ bulunur.

SIRA SİZDE 2.

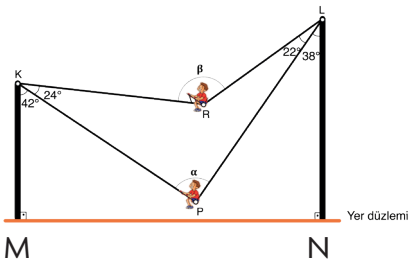
ÇÖZÜM



Bir ekskavatörün üçgen şeklindeki kepçesi, C noktası etrafında saat yönünde 90° döndürülürse döndürme üçgenin açılarının ölçüsünü ve kenar uzunluklarını değiştirmeyeceği için
$m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{B'A'C})$ olup $x°$ ye eşittir.
$|AC| = |A'C|$ dur. Döndürme 90° olduğundan $m(\widehat{BCB'}) = 90°$ olur ve ACA' üçgeni ikizkenar dik üçgen olur.
$m(\widehat{CAA'}) = m(\widehat{CA'A}) = 45°$ dir. Buradan;
$18° + x = 45°$
$x = 27°$ bulunur.

SIRA SİZDE 3.

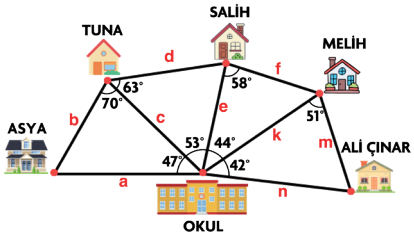
ÇÖZÜM



$m(\widehat{KPL}) = m(\widehat{PKM}) + m(\widehat{PLN})$
$m(\widehat{KPL}) = 42° + 38°$ $\alpha = 80°$
$m(\widehat{KRL}) = m(\widehat{RKM}) + m(\widehat{RLN})$
Buradan $m(\widehat{KRL}) = 66° + 60° = 126°$
Buradan
$\beta - \alpha = 126° - 80° = 46°$ bulunur.

SIRA SİZDE 4.

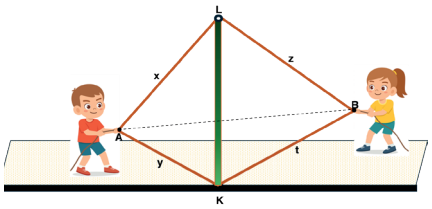
ÇÖZÜM



Okul–Asya–Tuna üçgeninde: $47° < 63° < 70°$ dolayısıyla $b < c < a$
Okul–Tuna–Salih üçgeninde: $53° < 63° < 64°$ dolayısıyla $d < e < c$
Okul–Melih–Salih üçgeninde: $44° < 58° < 78°$ dolayısıyla $f < k < e$
Okul–Melih–Ali Çınar üçgeninde: $42° < 51° < 87°$ dolayısıyla $m < n < k$
Bu durumda, $b < c < a$, $d < e < c$, $f < k < e$, $m < n < k$ sıralamalarına göre en uzun kenar a dır.
Bilim fuarı davetiyesi ilk olarak okula en uzak olan Asya adlı öğrenciye gönderilecektir.

SIRA SİZDE 5.

ÇÖZÜM



A ipinin uzunluğu: $x + y = 25$ metre, B ipinin uzunluğu: $z + t = 32$ metredir.
Üçgen eşitsizliğine göre
$|AB| < x + z$
$|AB| < y + t$ olur.
Bu eşitsizlikler taraf tarafa toplanırsa;
$2|AB| < x + z + y + t$
$2|AB| < 25 + 32$
$2|AB| < 57 \Rightarrow |AB| < 28{,}5$
A ile B noktaları arasındaki uzaklığın alabileceği en büyük tam sayı değeri 28 metre bulunur.

DEĞERLENDİRİYORUM

Amaç: Bu bölümde öğrendiklerinizi gözden geçirmenizi, kendi öğrenme sürecinizi değerlendirmenizi ve eksiklerinizi fark etmenizi amaçlıyoruz.
Soruları dikkatle yanıtlayınız. Cevaplarınızı geri bildirimlerle karşılaştırarak eksik gördüğünüz noktaları tekrar ediniz.

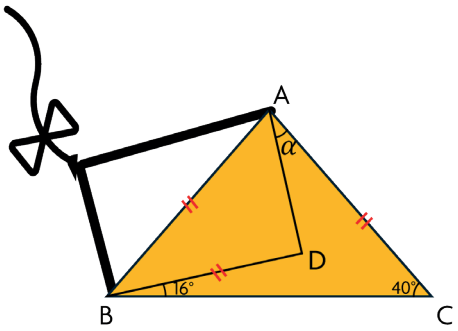
SORULAR

1. Yandaki uçurtma görselinde ABC bir üçgen,

$|BD| = |AB| = |AC|$,

$m(\widehat{ACB}) = 40°$,

$m(\widehat{DBC}) = 16°$ olarak veriliyor.

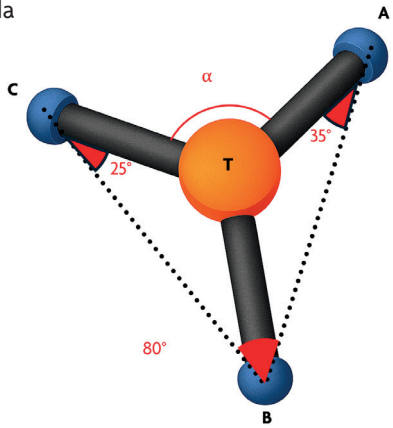


Buna göre $m(\widehat{DAC}) = \alpha$ kaç derecedir?

2. Genç bir bilim insanı olan Mert, üç boyutlu olarak geliştirdiği tripot tasarımını kâğıt üzerinde iki boyutlu olarak çizmiştir. Çizimde tripodun üç ayağı T noktasında birleşmiş ve ayakların uç noktaları A, B ve C harfleriyle gösterilmiştir.

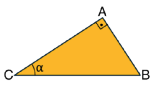
Çizimde

$m(\widehat{TCB}) = 25°$, $m(\widehat{ABC}) = 80°$ ve $m(\widehat{BAT}) = 35°$ olarak verilmiştir.

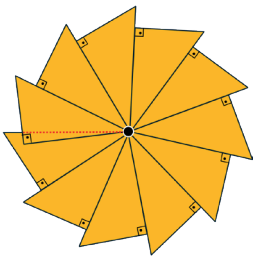


Buna göre merkezdeki birleşme noktasında oluşan $m(\widehat{ATC}) = \alpha$ kaç derecedir?

3. Şekil 1'de, bir köşe açısı α olan bir üçgen verilmiştir. Bu üçgenlerden 9 tanesi Şekil 2'deki gibi C köşeleri ortak olacak biçimde bir araya getirilerek bir rüzgâr gülü yapılmak isteniyor. Ancak 10. üçgen yerleştirilmeye çalışıldığında şeklin bir kısmı çakışmaktadır.
Buna göre α açısının alabileceği kaç tane tam sayı değeri vardır?



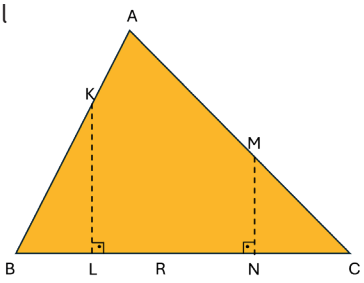
Şekil 1

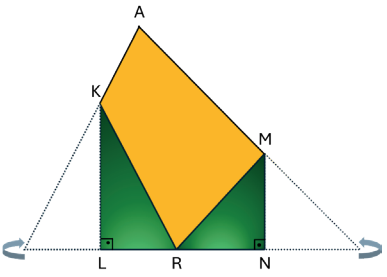

Şekil 2

4. Yukarıdaki şekilde bir yüzü sarı, bir yüzü yeşil ABC üçgeni biçimindeki karton verilmiştir. [KL] ve [MN], [BC] na diktir. Karton, [KL] ve [MN] doğruları boyunca katlandığında B ve C noktalarının görüntüleri B′ ve C′ olup R ∈ [BC] noktasında çakışmaktadır.

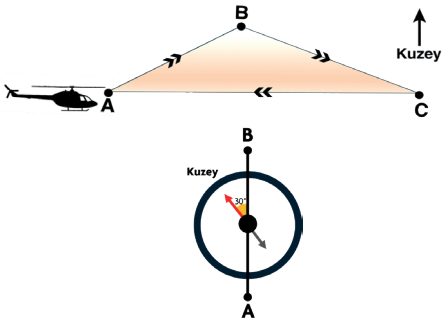
$$m(\widehat{RMN}) = 38^\circ \text{ , } m(\widehat{KRL}) = 52^\circ$$

olduğuna göre BAC açısının ölçüsü kaç derecedir?





5. Bir kurtarma helikopteri; A üssünden B ye, oradan C ye uçar ve tekrar A ya döner. Helikopterin izlediği eşit uzunluktaki uçuş yolları, şekilde ABC üçgeninin kenarlarıyla gösterilmiştir.
Kurtarma helikopteri A üssünden B ye giderken pusulanın görüntüsü aşağıdaki gibidir.



Buna göre pusulanın görüntüsünün,

a) B noktasından C noktasına giderken nasıl olduğunu bulunuz.

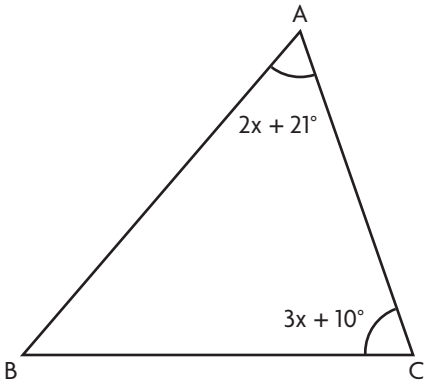
b) C noktasından A ya giderken nasıl olduğunu bulunuz.

6. Yandaki ABC üçgeninde

$m(\widehat{A}) = 2x + 21°$

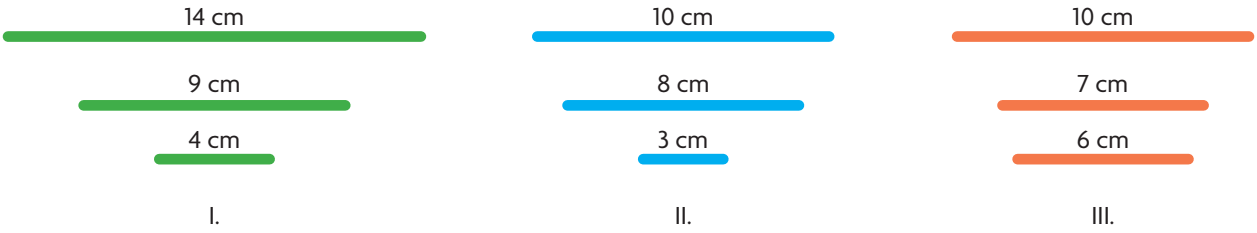
$m(\widehat{C}) = 3x + 10°$

$|BC| < |AB|$ ve x bir tam sayıdır.

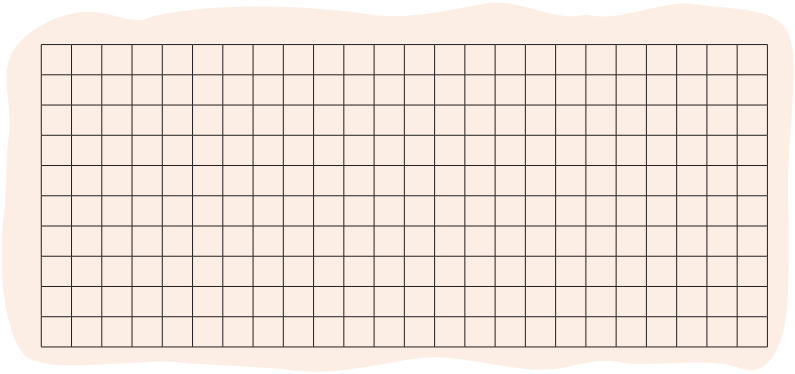


Buna göre B açısının ölçüsünün alabileceği <u>en büyük</u> tam sayı değeri kaçtır?

7. Her birinde üç farklı uzunlukta çubuk bulunan çubuk gruplarının görselleri aşağıda verilmiştir.

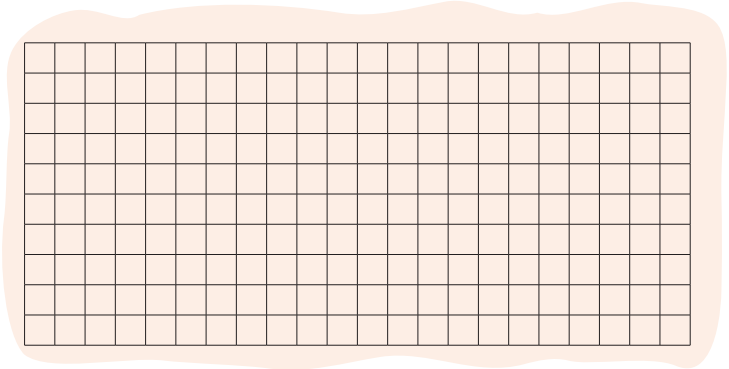


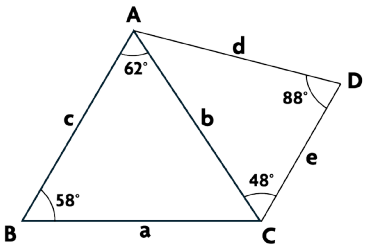
Üçgen oluşturma şartlarını göz önünde bulundurarak yukarıda verilen çubuk paketlerinden hangileriyle üçgen elde edilebileceğini belirleyiniz.



8. Yandaki şekilde verilenlere göre a, b, c, d ve e olarak adlandırılan kenar uzunluklarını küçükten büyüğe doğru sıralayınız.

Buna göre A ile B noktaları arasındaki uzaklığın metre cinsinden alabileceği <u>en büyük</u> tam sayı değeri kaçtır?





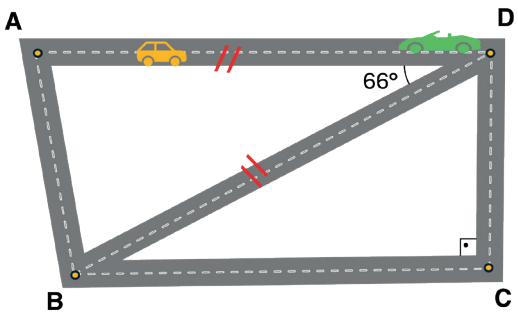
9. D noktasından hareket eden kırmızı bir araç, sabit hızla D–A–B–D–C–B güzergâhında ilerleyerek parkuru B noktasında tamamlıyor.

[AD] // [BC]

|AD| = |DB|

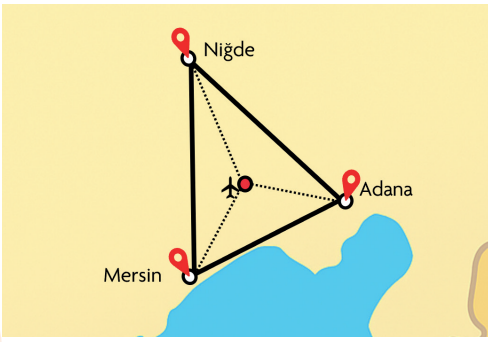
[AD] ⊥ [CD]

$m(\widehat{ADB}) = 66°$



Buna göre araç hangi yolu, en uzun sürede geçmiştir?

10. Şekilde harita üzerinde gösterilen Adana, Mersin ve Niğde şehirlerinin oluşturduğu üçgensel bölgenin çevresi, şehirler arasındaki doğrusal (kuş uçuşu) uzaklıkların toplamı olarak 356 km'dir. Bu bölgenin içine bir havalimanı yapılacak ve havalimanından her şehre doğrusal yol bağlantıları kurulacaktır.



Yol maliyetinin en düşük olması için havalimanının şehirlere olan doğrusal uzaklıklarının toplamı tam sayı olarak en az kaç kilometre olmalıdır?

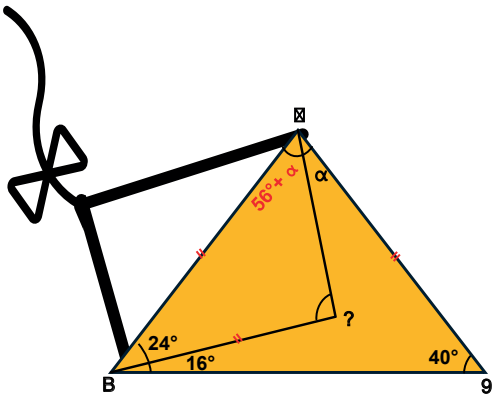
GERİ BİLDİRİM

Bu geri bildirim sayesinde kendi cevabınızı kontrol edebilir, hatalarınızı düzelterek öğrenmenizi pekiştirebilirsiniz.

ÇÖZÜM 1.

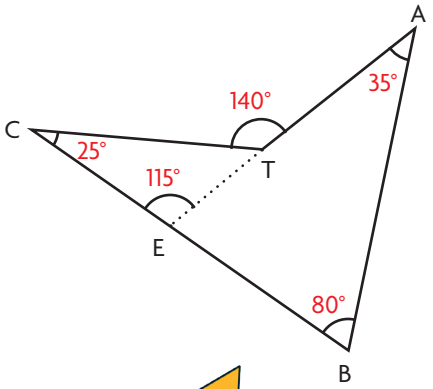
ABC bir üçgen,
|BD| = |AB| = |AC|
$m(\widehat{ADB}) = 40° + 16° + \alpha = 56° + \alpha$
$m(\widehat{ADB}) = m(\widehat{DAB}) = 56° + \alpha$ (|BD| = |AB| olduğundan)
$m(\widehat{ABD}) = 40° - 16° = 24°$ (|AB| = |AC| olduğundan)
$56° + \alpha + 56° + \alpha + 24° = 180°$ (ABD üçgeninin iç açıları toplamı)

$136° + 2\alpha = 180°$
$\alpha = 22°$ bulunur.

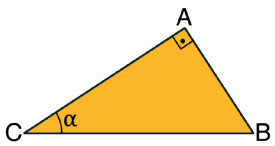


ÇÖZÜM 2.

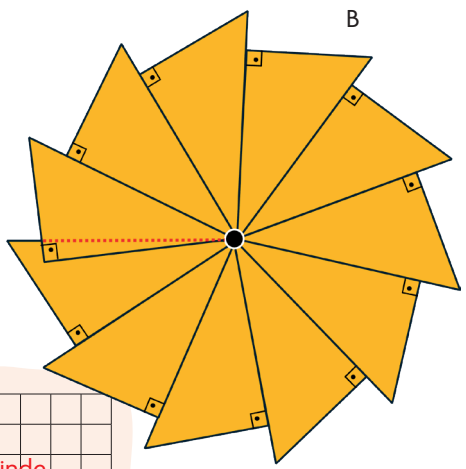
"Üçgende bir dış açının ölçüsü, kendisine komşu olmayan iki iç açının ölçüleri toplamına eşittir."
[AT] doğrusal olarak uzatılırsa [BC] ile bir E noktasında kesişir.
$\widehat{AEC}$, AEB üçgeninin bir dış açısı olup $m(\widehat{EAB}) + m(\widehat{EBA})$ na eşittir.
$m(\widehat{AEC}) = 115°$ olur.
$\widehat{ATC}$, CET üçgeninin bir dış açısı olup $m(\widehat{ECT}) + m(\widehat{TEC})$ na eşittir.
$m(\widehat{ATC}) = 140°$ bulunur.



ÇÖZÜM 3.

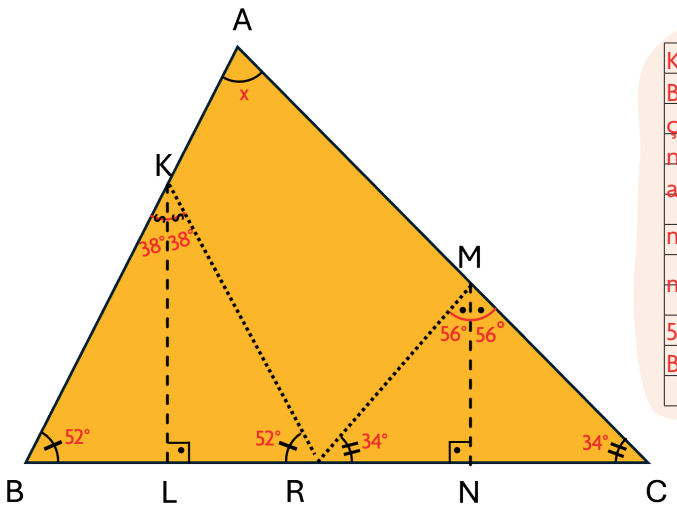


Şekil 1


Şekil 2

Şekil 2'de tüm üçgenlerin C köşeleri merkezde birleşiyor.
Buna göre merkezde toplanan açı α dır.
"9 üçgen merkez etrafında düzgün biçimde yerleşirken 10'uncu üçgen eklendiğinde üçgenler arasında çakışma oluşuyor." ise;
$9\alpha < 360° < 10\alpha$
$9\alpha < 360°$ ve $360° < 10\alpha$
$\alpha < 40°$ ve $36° < \alpha$
Buradan $36° < \alpha < 40°$ bulunur.
Bu aralıktaki tam sayılar 37°, 38°, 39° dir.
α nın alabileceği 3 tane tam sayı değeri vardır.

ÇÖZÜM 4.



Karton, [KL] ve [MN] doğrultularında katlandığında B ve C noktalarının görüntüleri R noktasında çakışmaktadır. Burada [KL] ve [MN] katlandığı noktadan tekrar açıldığında [KL] ve [MN] birer açıortay olur. Aynı zamanda ikizkenar üçgenler oluşur.

$m(\widehat{KBR}) = m(\widehat{KRM})$ ve $m(\widehat{RMN}) = m(\widehat{CMN})$

$m(\widehat{KBL}) = m(\widehat{KRL})$ ve $m(\widehat{MRN}) = m(\widehat{MCN})$ olur.

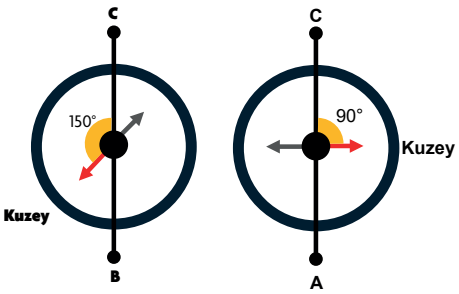
$52° + 34° + x = 180°$ (BAC üçgenin iç açılarının toplamı)

Buradan $x = 94°$ bulunur.

ÇÖZÜM 5.

a) Pusulanın saat yönünün tersinde B merkezli olacak şekilde 150° döndürülmesiyle yandaki görüntü elde edilir.

b) Pusulanın saat yönünde C merkezli olacak şekilde 90° döndürülmesiyle yandaki görüntüsü elde edilir.



ÇÖZÜM 6.

Bir üçgende ölçüsü en büyük olan açı karşısında en uzun kenar, ölçüsü en küçük olan açı karşısında en kısa kenar bulunur.

$|BC| < |AB|$ olduğuna göre $m(\widehat{A}) < m(\widehat{C})$

$2x + 21° < 3x + 10$

$11° < x$ (x in alabileceği en küçük tam sayı değeri 12'dir.)

$m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}) + m(\widehat{C}) = 180°$

$2x + 21° + 3x + 10 + m(\widehat{B}) = 180°$

$5x + 31° + m(\widehat{B}) = 180°$

$x = 12$ yerine yazılırsa

B açısının en büyük değeri 89° olarak bulunur.

ÇÖZÜM 7.

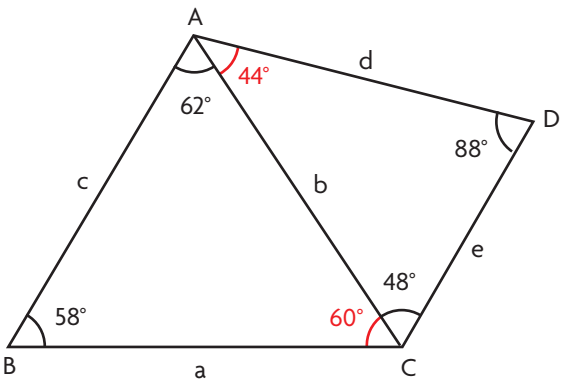
1. Yeşil çubuklar (14 cm–9 cm–4 cm)
$|14 - 9| \not< 4 < 14 + 9$ ✗
$|9 - 4| < 14 \not< 9 + 4$ ✗
$|14 - 4| \not< 9 < 14 + 4$ ✗ Üçgen **elde edilemez.**

2) Mavi çubuklar (10 cm–8 cm–3 cm)
$|10 - 8| < 3 < 10 + 8$ ✓
$|10 - 3| < 8 < 10 + 3$ ✓
$|8 - 3| \not< 3 < 8 + 3$ ✗ Üçgen **elde edilemez.**

3) Turuncu çubuklar (10 cm–7 cm–6 cm)
$|10 - 6| < 7 < 10 + 6$ ✓
$|10 - 7| < 6 < 10 + 7$ ✓
$|7 - 6| < 10 < 7 + 6$ ✓ Üçgen **elde edilebilir.**

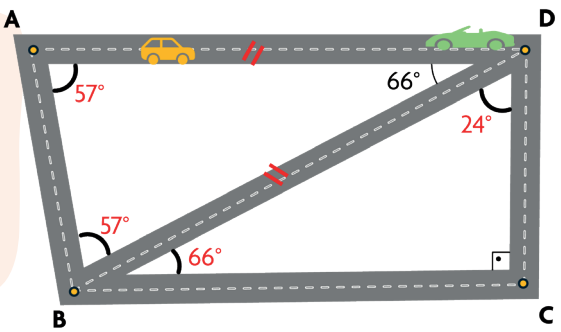
ÇÖZÜM 8.

ABC üçgeninde
$58° < 60° < 62°$ olduğundan $b < c < a$
ACD üçgeninde
$44° < 48° < 88°$ olduğundan $e < d < b$
İki üçgen birlikte ele alınırsa kenarların küçükten büyüğe doğru sıralaması
$e < d < b < c < a$ şeklindedir.



ÇÖZÜM 9.

ABD üçgeninde
$57° = 57° < 66°$ olduğundan $|AD| = |BD| < |AB|$ olur.
BCD üçgeninde
$24° < 66° < 90°$ olduğundan $|BC| < |DC| < |BD|$ olur.
İki üçgen birlikte ele alınırsa
$|BC| < |DC| < |AD| = |BD| < |AB|$
En uzun kenar [AB] olur ve en uzun sürede [AB] yolunu geçmiştir.



ÇÖZÜM 10.

$x + y + z = 356$ km olarak verilmiştir.
Üçgen eşitsizliğine göre
$x < a + b$
$z < a + c$
$y < b + c$
$x + y + z < 2(a + b + c)$ olur.
$x + y + z = 356 \rightarrow 356 < 2(a + b + c)$

$178 < a + b + c$ bulunur. Bu durumda havalimanının şehirlere olan uzaklıklarının toplamı en az 179 km olmalıdır.



ÖĞRENDİKLERİM

Amaç: Bu bölümde öğrendiklerinizi özetlemenizi, günlük hayatta ve farklı derslerde kullanabileceğiniz bilgileri belirlemenizi amaçlıyoruz.
Verilen bilgileri dikkatle okuyunuz. Temanın temel kavramlarını, önemli noktalarını ve bağlantılarını gözden geçirerek öğrenmenizi pekiştiriniz.

1. Üçgende Açılar
- Bir üçgenin iç açı ölçülerinin toplamı 180°dir.
- Bir üçgenin dış açı ölçülerinin toplamı 360°dir.
- Bir üçgende iki iç açının ölçülerinin toplamı, kendilerine komşu olmayan bir dış açının ölçüsüne eşittir.

2. Açı-Kenar Bağıntıları
- Bir üçgende büyük açı karşısında büyük kenar, küçük açı karşısında küçük kenar bulunur. Aynı şekilde uzun kenar karşısında büyük açı, kısa kenar karşısında küçük açı bulunur.
- Bir üçgende eşit açıların karşılarındaki kenar uzunlukları da birbirine eşittir.

3. Üçgen Eşitsizliği
- Bir üçgende herhangi bir kenarın uzunluğu; diğer iki kenarın uzunlukları toplamından küçük, uzunlukları farkının mutlak değerinden büyüktür.($|b - c| < a < b + c$)

4. Özel Durumlar
- Dik üçgende diğer iki iç açı her zaman dar açıdır, bu yüzden en uzun kenar daima hipotenüstür.
- Geniş açılı üçgende geniş açının karşısındaki kenar en uzundur.

GEOMETRİK ŞEKİLLER

Üçgende Açı-Kenar İlişkileri ve İspat Yöntemlerine Yönelik Yansıtıcı Yazı

Amaç

Bu çalışma, üçgenin açı ve kenar özelliklerini incelerken doğrulama ve ispat süreçlerini nasıl yapılandırdığınıza yönelik farkındalık oluşturmak amacıyla hazırlanmıştır. Çalışma süresince kendi öğrenme sürecinizi gözden geçirerek kullandığınız gerekçelendirme adımlarını değerlendirmeniz beklenmektedir.

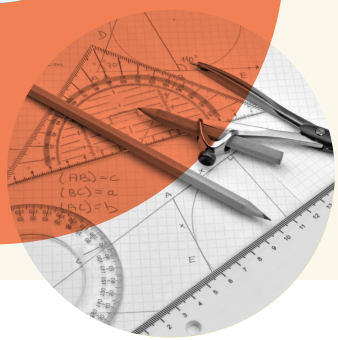
Aşağıdaki soruları çözümleriniz üzerine düşünerek yanıtlayınız. Kısa ve açık cümlelerle kullandığınız yöntemi ve gerekçeleri ifade etmeniz yeterlidir.

1. Öğrendiğiniz bu temada dikkatinizi çeken veya önemli bulduğunuz noktaları yazınız.

2. Üçgenin açıları ve kenarları arasındaki ilişkilerin doğrulanmasına yönelik kullandığınız yöntemleri gözden geçiriniz. Üçgen inşasında açı ve kenar ilişkilerini doğrulamada etkili olduğunu düşündüğünüz bir yöntemi, adımlarını belirterek açıklayınız.

3. Üçgenin açı ve kenar özelliklerinin bir üçgenin inşasındaki etkilerini gerekçeleriyle açıklayınız.

4. Üçgenlerdeki açı ve kenar bağıntılarının kullanıldığı çeşitli gerçek yaşam örnekleri yazınız.

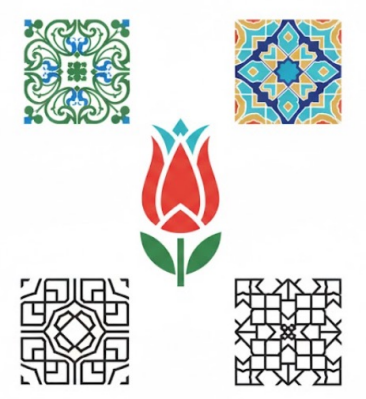


GEOMETRİK DÖNÜŞÜMLER VE MOTİFLER

BAŞLARKEN

Sevgili öğrencimiz, bu çalışma kartında sizlerin bireysel öğrenme yolculuğunuza destek sunmak amaçlanmaktadır. Çalışmalarınızı yürütürken "Hazırlanıyorum", "İlişkilendiriyorum", "Uygulayarak Öğreniyorum", "Değerlendiriyorum" bölümlerini sırası ile yapmanızı; her bölüm ve etkinlik sonundaki geri bildirimleri alarak ilerlemenizi; "Öğrendiklerim" bölümünde öğrenme sürecinizi gözden geçirmenizi bekliyoruz.

Bu çalışma kartında, geometrik dönüşümlerin matematiksel temellerini ve görsel sanatlardaki uygulamalarını ele alarak günlük hayatta karşımıza çıkan pek çok desen ve motifin sırrını aralayacaksınız. Aşağıdaki soruları yanıtlayabileceksiniz.



Bir caminin ya da bir kilisenin penceresindeki karmaşık desenler hangi geometrik dönüşümlerle oluşturulmuştur?

Geleneksel Türk-İslam sanatındaki çini ve ahşap işçiliğindeki süslemeler, hangi geometrik dönüşümlerin sanatsal ifadeleridir?

Bir tekstil ürünü üzerindeki tekrar eden bir motifin tasarımında yansıma, öteleme veya dönme ne şekilde kullanılmıştır?

HAZIRLANIYORUM

Amaç: Bu bölümde ön bilgilerinizi hatırlamanızı ve temaya hazırlıklı hâle gelmenizi amaçlıyoruz. Aşağıda yer alan ifadeler, bu temada tamamlanması hedeflenen öğrenme çıktısını ele almadan önce sahip olmanız gereken bazı temel becerileri içermektedir. Lütfen her bir ifadeyi dikkatlice okuyunuz.

- Eğer ifadedeki beceriye hakim olduğunuzu düşünüyorsanız kutucuğu işaretleyiniz.
- Eğer konuyu henüz tam olarak bilmediğinizi ya da hatırlamadığınızı düşünüyorsanız kutucuğu boş bırakınız.

SORULAR	ÖN ÖĞRENME KONTROL LİSTESİ	✓
1	Dik koordinat sistemini ve bir noktanın koordinatlarını bilirim.	☐
2	Geometrik şekilleri düzlemde yatay ve dikey olarak hareket ettirebilirim.	☐
3	Bir şekli bir eksene göre simetrik olarak hayal edebilirim.	☐
4	Bir şekli bir nokta etrafında döndürebilirim.	☐
5	İki geometrik şeklin eş olup olmadığını belirleyebilirim.	☐

"Ön Öğrenme Kontrol Listesi"ni doldurduktan sonra aşağıda verilen "Kontrol Noktası" sorularını çözünüz ve cevaplarınızı kontrol ediniz.

KONTROL NOKTASI

SORU 1. Aşağıdaki ifadelerden hangisi, bir şeklin aynadaki görüntüsüne benzetilebilir?

a) Bir topu düz bir yolda ileri itmek.

b) Bir kapıyı menteşesi etrafında çevirmek.

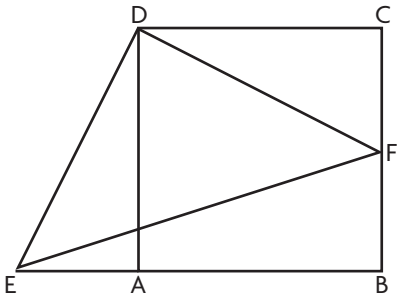
c) Bir elin aynadaki yansımasını görmek.

d) Bir merdivenden aşağıya inmek.

SORU 2. Dik koordinat sisteminde A(5, – 3) noktasının x eksenine olan uzaklığı kaç birim olduğunu hesaplayınız.

SORU 3. Dik koordinat sisteminde B(– 4, 2) noktası 3 birim sağa ve 1 birim yukarı ötelendiğinde oluşan noktayı bulunuz.

SORU 4.

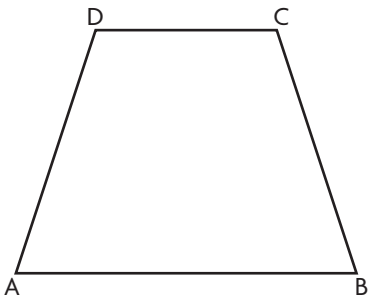


Şekilde ABCD kare; E, A ve B noktaları doğrusaldır.

EAD üçgeni D noktası etrafında saatin tersi yönünde döndürülerek FCD üçgeni elde ediliyor.

Buna göre DFE açısının ölçüsü kaç derecedir?

SORU 5.



Şekildeki ABCD ikizkenar yamuğun alanını dikdörtgenin alan özelliğini kullanarak bulunuz.

GERİ BİLDİRİM

Bu geri bildirim sayesinde kendi cevabınızı kontrol edebilir, hatalarınızı düzelterek öğrenmenizi pekiştirebilirsiniz.

ÇÖZÜM 1.

Aynadaki görüntü bir yansımadır. Bir şeklin yansıması, şeklin boyutunu korur ancak yönünü değiştirir.

c) Bir elin aynadaki yansımasını görmek, aynadaki görüntüye en iyi benzetmedir.

ÇÖZÜM 2.

Bir noktanın x eksenine olan uzaklığı, noktanın y koordinatının mutlak değerine eşittir.

A(5, –3) noktasının x eksenine olan uzaklığı |– 3| = 3 birimdir.

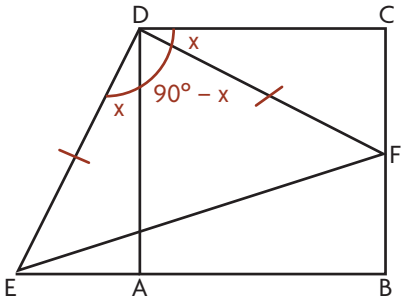
ÇÖZÜM 3.

Bir noktanın x koordinatına sağa doğru öteleme için ekleme, sola doğru öteleme için çıkarma yapılır. y koordinatına yukarı doğru öteleme için ekleme, aşağı doğru öteleme için çıkarma yapılır.

B(– 4, 2) noktasını 3 birim sağa ötelemek, x koordinatına 3 eklemek; 1 birim yukarı ötelemek ise y koordinatına 1 eklemektir. Yeni nokta: (– 4 + 3, 2 + 1) = (– 1, 3) olur.

ÇÖZÜM 4.

- Bir geometrik şekil bir köşesi etrafında döndürülürken dönme noktası sabit kalır.
- Dönme sonucu şeklin konumu değişirken kenar uzunlukları ve açı ölçüleri değişmez.



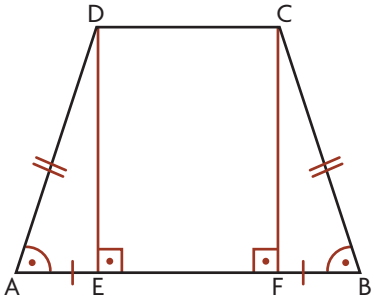
EDA açısının ölçüsüne x denilirse FDC açısının ölçüsü de x olur. Karenin D köşesi dik olduğundan ADF açısının ölçüsü 90° – x olur.

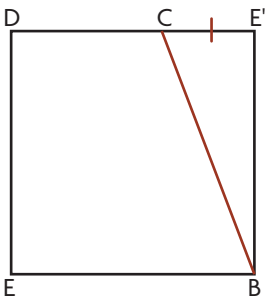
Böylece $m(\widehat{EDF}) = 90°$ olur.

$|ED| = |DF|$ olduğundan $m(\widehat{DEF}) = m(\widehat{DFE}) = \frac{180° - 90°}{2} = 45°$ bulunur.

ÇÖZÜM 5.

- İkizkenar yamuğun paralel olmayan kenar uzunlukları birbirine eşittir.
- İkizkenar yamuğun taban açılarının ölçüleri eşittir.



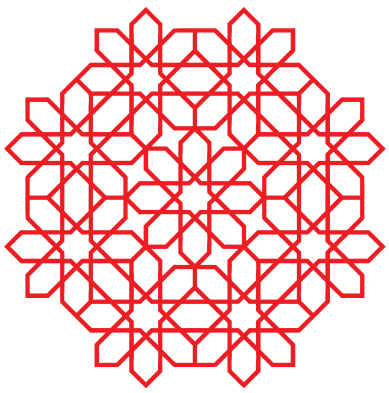


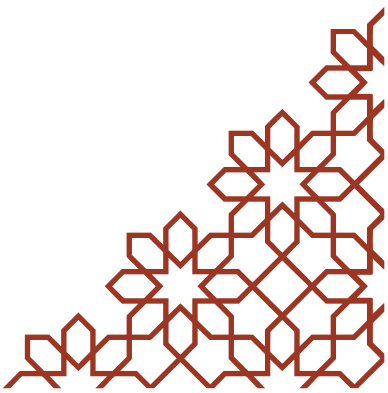
D ve C köşelerinden inilen yükseklikler sonucu oluşan AED ve BCF üçgenleri eştir. AED üçgeni, [DE] boyunca kesilerek [AD] ile [CB] çakışacak şekilde yapıştırılır ise A ile C, D ile B noktası çakışır. E ye karşılık gelen nokta E′ olarak isimlendirildiğinde EBE′D dikdörtgeni oluşur.

Alan |DE'|.|E'B| ile hesaplanır.

İLİŞKİLENDİRİYORUM

Türk-İslam kültüründe bitki ve çiçek desenleri medrese, cami ve saray gibi birçok mimari eserde süsleme amacıyla sıkça kullanılmıştır. Osmanlı Dönemi'nde özellikle lale deseni, İznik üretimi çini ve seramiklerde farklı kompozisyonlarla öne çıkmış ve dönemin mimari eserlerini süslemiştir. Bu süslemeler geometrik dönüşümler kullanılarak oluşturulmuştur.







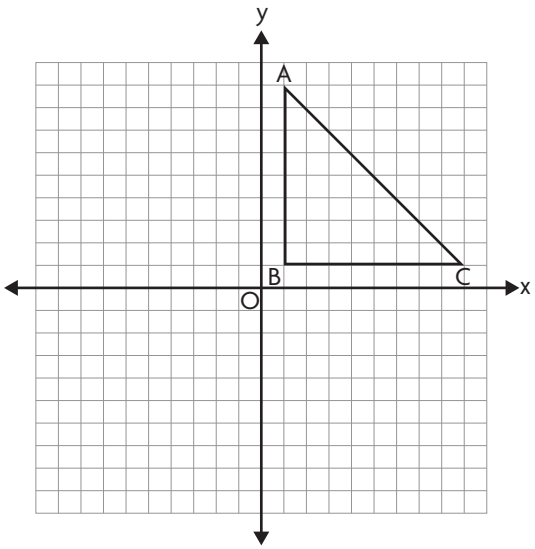
UYGULAYARAK ÖĞRENİYORUM

Amaç: Bu bölümde bilgilerinizi etkinlikler ve uygulamalarla pekiştirmenizi, öğrenmeyi daha kalıcı hâle getirmenizi amaçlıyoruz.

Örnek ya da etkinliklerde verilen adımları dikkatle uygulayınız. Çalışmanızı dikkatli ve düzenli bir şekilde yapınız.

GEOMETRİK DÖNÜŞÜMLER

ÖRNEK



Yandaki dik koordinat sisteminde köşeleri, birim karelerin köşeleri üzerinde verilen üçgenin köşe noktalarını belirleyiniz ve istenilen dönüşümleri uygulayınız.

a) Üçgeni x eksenine göre yansıtınız.

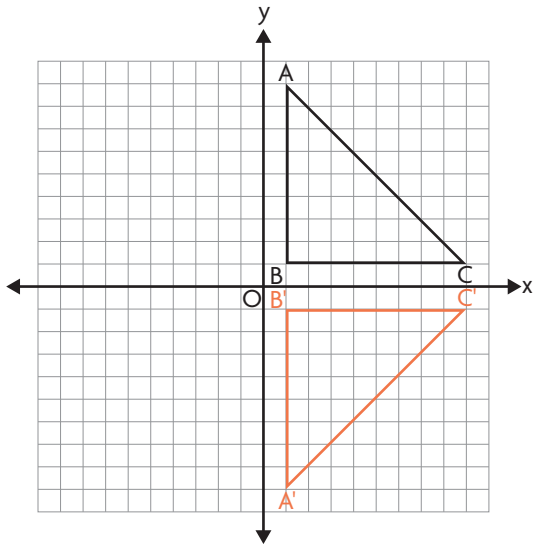
b) Üçgeni 4 birim sola ve 2 birim aşağı öteleyiniz.

c) Üçgeni orijin etrafında saat yönünün tersine 90° döndürünüz.

ÇÖZÜM

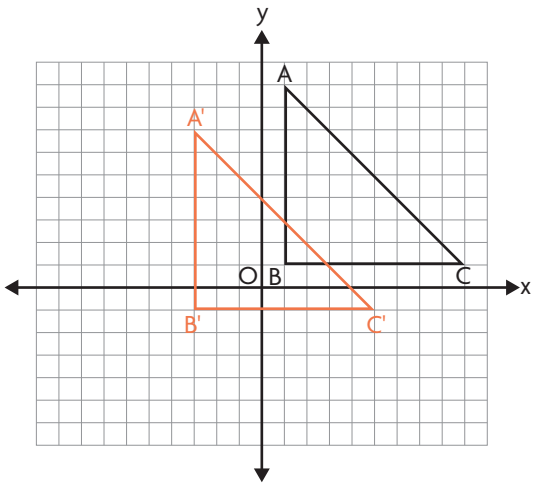
Verilen ABC üçgeninin köşe koordinatları A(1, 9), B(1, 1) ve C(9, 1) olarak belirlenir.

a)



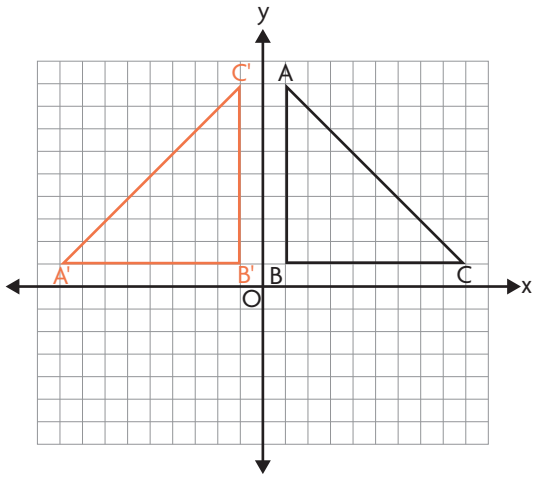
ABC üçgeninin x eksenine göre yansımasıyla oluşan üçgenin köşe koordinatları
A′(1, –9), B′(1, –1) ve C′(9, –1) olur.

b)



ABC üçgeninin 4 birim sola 2 birim aşağıya ötelenmesiyle oluşan üçgenin köşe koordinatları
A′(−3, 7), B′(−3, −1) ve C′(5, −1) olur.

c)



ABC üçgeninin orijin etrafında saat yönünün tersine 90° döndürülmesiyle oluşan üçgenin köşe koordinatları
A′(−9, 1), B′(−1, 1) ve C′(−1, 9) olur.

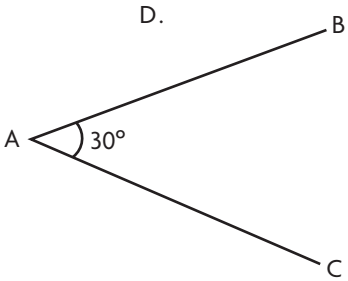
NOT

• **Yansıma:** Bir şeklin bir doğruya (yansıma ekseni) veya bir noktaya (yansıma merkezi) göre simetriğini almaktır. Yansıma; şeklin boyutunu, alanını ve açılarını korur ancak yönünü değiştirir. Düzlemde bir şeklin bir doğruya göre yansıma dönüşümü altındaki görüntüsü, şekil üzerindeki noktaların verilen doğruya göre simetriği olan noktalar belirlenerek oluşturulur. Düzlemde bir şekil ile onun bir doğruya göre yansıma altındaki görüntüsü karşılaştırılarak yansıma dönüşümünün özellikleri ile şeklin değişen ve değişmeyen yönleri belirlenebilir.

• **Öteleme:** Bir şekli düz bir çizgi boyunca kaydırmaktır. Öteleme; şeklin boyutunu, alanını, açılarını ve yönünü korur. Düzlemde bir şeklin belirli bir uzaklık ve yönde öteleme dönüşümü altındaki görüntüsü, şekil üzerindeki tüm noktaların verilen yön ve uzaklıkta ilerletilmesiyle oluşturulur. Düzlemde bir şekil ile onun öteleme altındaki görüntüsü karşılaştırılarak öteleme dönüşümünün özellikleri ile şeklin değişen ve değişmeyen yönleri belirlenebilir.

• **Dönme:** Bir şekli sabit bir nokta (dönme merkezi) etrafında belli bir açı kadar döndürmektir. Dönme; şeklin boyutunu, alanını, açılarını ve yönünü korur. Bir şekle dönme dönüşümü uygulandığında şekil üzerindeki herhangi bir nokta ile bu noktanın görüntüsünün dönme merkezine uzaklıkları birbirine eşit olur.

ÖRNEK



Şekilde $m(\widehat{BAC}) = 30°$ olmak üzere bir D noktası verilmiştir. D noktasının [AB] na göre yansıması alındığında E noktası, E noktasının [AC] na göre yansıması alındığında F noktası elde edilmektedir.

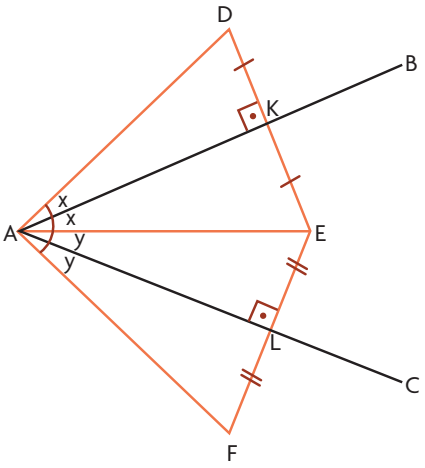
Buna göre

a) Bahsedilen yansımaları şekil üzerinde gösteriniz.

b) DAF açısının ölçüsünü bulunuz.

c) D noktası ile F noktasının dönme dönüşümü ile ilişkisini belirleyiniz.

ÇÖZÜM



a) $[DE] \perp [AB]$, $[EF] \perp [AC]$, $[DE] \cap [AB] = \{K\}$, $[EF] \cap [AC] = \{L\}$
$|DK| = |KE|$, $|EL| = |LF|$ olduğundan $|AD| = |AE| = |AF|$ dur.

b) [AB], AED üçgeninin ve [AC], AFE üçgeninin simetri ekseni olduğundan $m(\widehat{DAK}) = m(\widehat{KAE}) = x$ ve $m(\widehat{EAL}) = m(\widehat{LAF}) = y$ olur. $x + y = 30°$ ise $m(\widehat{DAF}) = 2x + 2y = 60°$ olur.

c) D noktasının A noktası etrafında saat yönünde 60 derece döndürülmesiyle F noktası elde edilir.

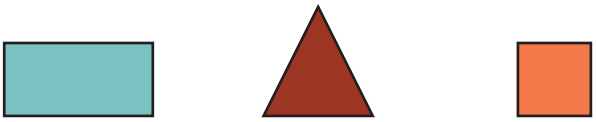
DEĞERLENDİRİYORUM

Amaç: Bu bölümde öğrendiklerinizi gözden geçirmenizi, kendi öğrenme sürecinizi değerlendirmenizi ve eksiklerinizi fark etmenizi amaçlıyoruz.

Soruları dikkatle yanıtlayınız. Cevaplarınızı geri bildirimlerle karşılaştırarak eksik gördüğünüz noktaları tekrar ediniz.

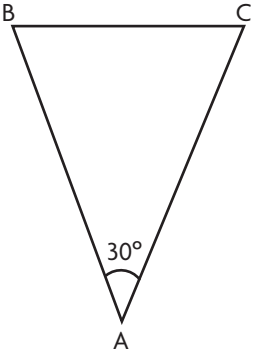
SORULAR

1. Aşağıdaki şekillerin simetri eksenlerini çizerek her bir şeklin kaç tane simetri ekseni olduğunu bulunuz.



Dikdörtgen | Eşkenar Üçgen | Kare

2.



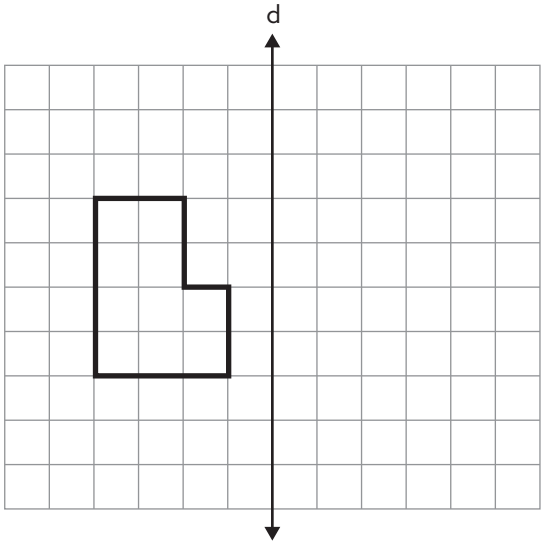
Şekildeki ACB üçgeninde $m(\widehat{BAC}) = 30°$, $|AB| = |AC|$ dur. Üçgen A noktası etrafında pozitif yönde 30° döndürülüyor.

Buna göre

a) Döndürme işlemi üçgen kendisi ile çakışana kadar yapılırsa oluşacak geometrik şekli bulunuz.

b) Döndürme işlemi dokuzuncu kez yapıldığında B noktasına karşılık B′ noktasının geldiğini AB′C üçgenini çizerek gösteriniz.

3.



Yandaki birim karelere ayrılmış zeminde altıgen şekline d doğrusuna göre yansıma dönüşümü uygulanıyor. Daha sonra aynı ilk altıgen şekle, 7 birim sağa ve 2 birim aşağıya olmak üzere öteleme dönüşümü uygulanıyor. Bunun sonucunda iki farklı altıgen elde ediliyor.

Buna göre altıgenlerin kesişimiyle oluşan bölgenin alanının kaç birimkare olduğunu bulunuz.

4. 

Yandaki şekilde Türk-İslam tarihinde kullanılan motiflerden biri verilmiştir.

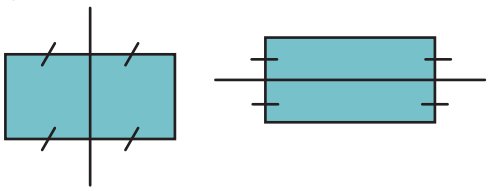
Buna göre bu motifte aşağıdaki dönüşümlerden hangisi ya da hangileri uygulanmıştır?

Dönme	☐
Öteleme	☐
Yansıma	☐

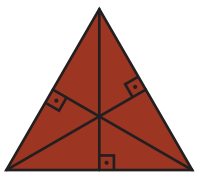
GERİ BİLDİRİM

Bu geri bildirim sayesinde kendi cevabınızı kontrol edebilir, hatalarınızı düzelterek öğrenmenizi pekiştirebilirsiniz.

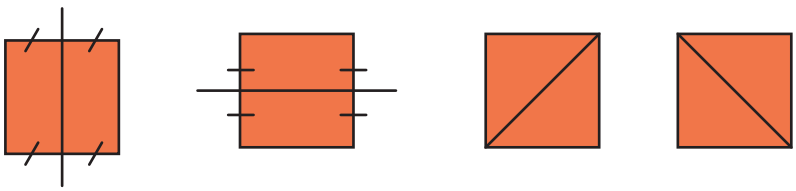
ÇÖZÜM 1.



Dikdörtgende uzun ve kısa kenarın orta dikmeleri olmak üzere iki tane simetri ekseni vardır.



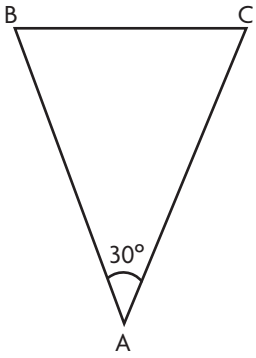
Eşkenar üçgende yükseklikler simetri ekseni olmak üzere üç tane simetri ekseni vardır.



Karede karşılıklı kenarların orta dikmeleri ve köşegenler olmak üzere 4 tane simetri ekseni vardır.

ÇÖZÜM 2.

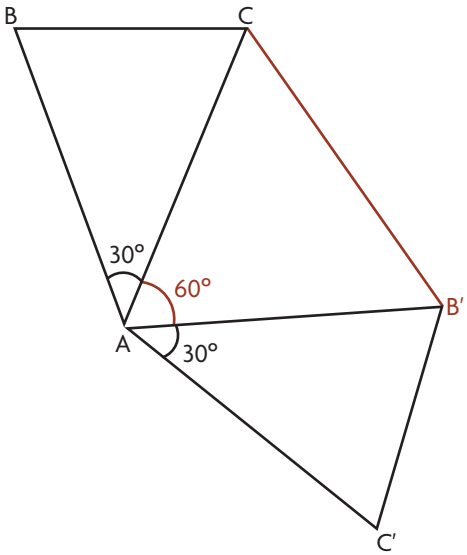
a)



Üçgenin kendisiyle çakışması için toplam 360° döndürülmesi gerekir.

360° : 30° = 12 olduğundan kenarları her bir döndürme sonucu [BC] na karşılık gelen düzgün onikigen oluşur.

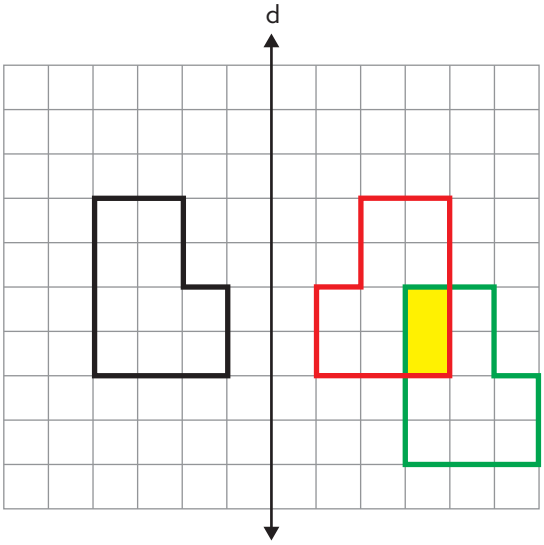
b)



Döndürme işlemi dokuz kez yapıldığından
CAB′ açısının ölçüsü 360° – (9. 30° + 30°)= 60° bulunur.

|AC| = |AB′| olduğundan AB′C eşkenar üçgen olur.

ÇÖZÜM 3.



Yansıma sonucu oluşan altıgen kırmızı renk ile öteleme sonucu oluşan altıgen yeşil renk ile çizilmiştir. Kesişimleri ile oluşan bölgenin alanı 2 birimkaredir.

ÇÖZÜM 4.

Dönme	☑
Öteleme	☑
Yansıma	☑

ÖĞRENDİKLERİM

Amaç: Bu bölümde öğrendiğiniz temel geometrik dönüşümleri özetlemeyi, günlük hayatta ve Türk-İslam sanatındaki kullanım alanlarını belirlemeyi amaçlıyoruz.

Aşağıdaki tabloda boş bırakılan yerleri uygun şekilde doldurunuz.

KAVRAM	TANIM VE TEMEL ÖZELLİK	KORUNAN ÖZELLİKLER	DEĞİŞEN ÖZELLİKLER
YANSIMA			
ÖTELEME			
DÖNME			

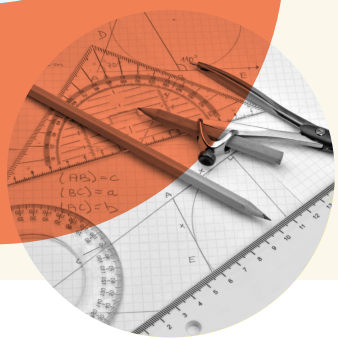
Koordinat düzlemindeki bir P(x, y) noktasının dönüşümlerini gösteren tablodaki boş bırakılan yerleri uygun şekilde doldurunuz.

DÖNÜŞÜM	UYGULAMA	KOORDİNAT	YENİ KOORDİNAT
x eksenine göre yansıması			
y eksenine göre yansıması			
Öteleme (sağa a, yukarı b)			
Orijin Etrafında 90° Döndürme (Saat Yönü Tersine)			

Aşağıdaki tabloda geometrik dönüşümlerin gündelik hayatta nerelerde kullanıldığı ile ilgili tablo oluşturulmuştur. Boş bırakılan yerleri uygun ifadeler ile doldurunuz.

KULLANIM ALANI	DÖNÜŞÜM TÜRÜ	UYGULAMA ÖRNEĞİ
Günlük Hayat	Yansıma	
Günlük Hayat	Öteleme	
Mimari/Sanat	Dönme ve Yansıma	
Grafikte	Tüm Dönüşümler	

Daha fazlası için karekodu okutunuz.



ÜÇGENLERDE EŞLİK VE BENZERLİK

BAŞLARKEN

Sevgili öğrencimiz, bu çalışma kartında bireysel öğrenme yolculuğunuza destek sunmak amaçlanmaktadır. Çalışmalarınızı yürütürken "Hazırlanıyorum", "İlişkilendiriyorum", "Uygulayarak Öğreniyorum", "Değerlendiriyorum" bölümlerini sırası ile yapmanızı; her bölüm ve etkinlik sonundaki geri bildirimleri alarak ilerlemenizi; "Öğrendiklerim" bölümünde öğrenme sürecinizi gözden geçirmenizi bekliyoruz.

Bu çalışma kartında matematiğin günlük hayata olan katkılarına ilişkin çıkarımlarda bulunup aşağıdaki soruları yanıtlayabileceksiniz.

- Benzerlik koşullarını gerçek yaşam problemlerinde nasıl kullanabilirim?
- Günlük yaşamda karşılaşılan tüm benzer şekillerin doğası gereği üçgende benzerlik kurallarına uygun olduğu ileri sürülebilir mi?
- İki üçgenin eş veya benzer olarak adlandırılabilmesi için sağlaması gereken ön koşullar nelerdir?
- Gerçek yaşamda karşılaşılan üçgensel şekillerin görsel ve ölçümsel temsilleri ile eşlik ve benzerlik açısından nasıl bir yargıda bulunulabilir?

HAZIRLANIYORUM

Amaç: Bu bölümde ön bilgilerinizi hatırlamanızı ve temaya hazırlıklı hâle gelmenizi amaçlıyoruz.

- Lütfen her bir ifadeyi dikkatlice okuyunuz.
- Eğer ifadedeki bilgiye hâkim olduğunuzu düşünüyorsanız kutucuğu işaretleyiniz.
- Eğer temayı henüz tam olarak bilmediğinizi ya da hatırlamadığınızı düşünüyorsanız kutucuğu boş bırakınız.

SORULAR	ÖN ÖĞRENME KONTROL LİSTESİ	
1	Geometrik bir şeklin yansıma ve öteleme dönüşümü altındaki görüntüsüne ilişkin çıkarım yapabilirim.	
2	Dönüşümleri içeren problemleri çözebilirim.	
3	Bir üçgeni oluşturan yeterli sayıda eleman ile eşlik koşulları arasındaki ilişkileri belirleyebilirim.	
4	Benzer nesneler/şekiller arasındaki ilişkileri yorumlayabilirim.	
5	Pisagor teoremini tam kare uzunlukları hesaplamak için kullanabilir ve ilgili problemleri çözebilirim.	

"Ön Öğrenme Kontrol Listesi"ni doldurduktan sonra aşağıda verilen "Kontrol Noktası" sorularını çözünüz ve cevaplarınızı kontrol ediniz.

KONTROL NOKTASI

SORU 1. Köşe koordinatları A(– 2, 1), B(–1, 2) ve C(2, 3) olan ABC üçgeni; x ekseni boyunca pozitif yönde 2 birim, y ekseni boyunca negatif yönde 1 birim ötelendiğinde oluşan A'B'C' üçgeninin köşe koordinatlarını bulunuz.

SORU 2. Koordinat düzleminde A(2, 3) noktası; x eksenine göre yansıtılıp, 2 birim sağa ötelendiğinde elde edilen A' noktasının koordinatlarını bulunuz.

SORU 3. Bir haritanın ölçeği 1:200 000'dir. Bu haritada iki şehir merkezi arasındaki mesafe 3 cm olarak ölçülüyor. **Buna göre şehir merkezleri arasındaki gerçek uzaklığı kilometre cinsinden bulunuz.**

SORU 4. Aşağıdaki tabloda bazı dik üçgenlere ait kenar uzunluklarından bir kısmı verilmiştir. Pisagor teoremini kullanarak tablodaki boşlukları uygun sayılarla doldurunuz.

Dik Kenar Uzunluğu	Dik Kenar Uzunluğu	Hipotenüs Uzunluğu
9	12	
5		13
	15	17
7	24	
20		29

GERİ BİLDİRİM

Bu geri bildirim sayesinde kendi cevabınızı kontrol edebilir, hatalarınızı düzelterek öğrenmenizi pekiştirebilirsiniz.

KONTROL NOKTASI

ÇÖZÜM 1.

A(x, y) noktası;

- x ekseni boyunca pozitif yönde a birim ötelenirse A'(x + a, y),
- x ekseni boyunca negatif yönde a birim ötelenirse A'(x – a, y),
- y ekseni boyunca pozitif yönde b birim ötelenirse A'(x, y + b),
- y ekseni boyunca negatif yönde b birim ötelenirse A'(x, y – b)

noktası elde edilir.

Bu durumda oluşan A'B'C' üçgeninin köşe koordinatları

$A(-2,\ 1) \rightarrow A(-2+2,\ 1-1) \rightarrow A'(0, 0)$

$B(-1, 2) \rightarrow B(-1+2, 2-1) \rightarrow B'(1, 1)$

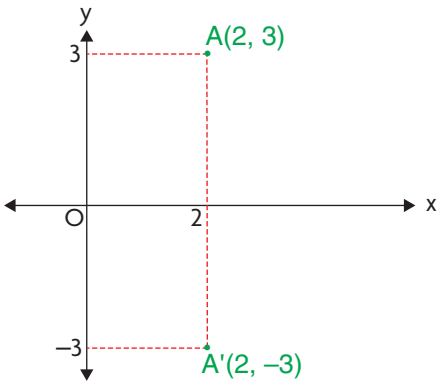
$C(2,\ 3) \rightarrow C(2+2,\ 3-1) \rightarrow C'(4, 2)$

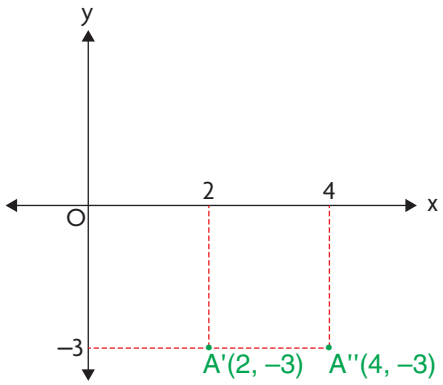
olarak bulunur.

ÇÖZÜM 2.

A noktası x eksenine göre yansıtılıp ardından 2 birim sağa ötelendiğinde

$A(2,\ 3) \rightarrow A'(2+2,\ -3) \rightarrow A''(4, -3)$ noktası elde edilir.





"Kontrol Noktası"nda verilen 1 ve 2. soruda geometrik dönüşümlerle ilgili çıkarım yapabilmeniz esastır.

ÇÖZÜM 3.

Gerçek uzaklık G, harita üzerindeki uzunluk H olmak üzere gerçek uzaklık ile harita üzerindeki uzaklığın benzerlik oranı $\frac{1}{200\,000}$'dir.

$\frac{H}{G} = \frac{1}{200\,000} \Rightarrow \frac{3}{G} = \frac{1}{200\,000} \Rightarrow G = 600\,000 \text{ cm} \Rightarrow G = 6 \text{ km}$ olur.

ÇÖZÜM 4.

Dik Kenar Uzunluğu	Dik Kenar Uzunluğu	Hipotenüs Uzunluğu
9	12	15
5	12	13
8	15	17
7	24	25
20	21	29

1. $x^2 = 9^2 + 12^2$
$x^2 = 81 + 144 = 225$
$x = 15$

2. $x^2 + 5^2 = 13^2$
$x^2 + 25 = 169 \Rightarrow x^2 = 144$
$x = 12$

3. $x^2 + 15^2 = 17^2$
$x^2 + 225 = 289 \Rightarrow x^2 = 64$
$x = 8$

4. $x^2 = 7^2 + 24^2$
$x^2 = 49 + 576 = 625$
$x = 25$

5. $x^2 + 20^2 = 29^2$
$x^2 + 400 = 841 \Rightarrow x^2 = 441$
$x = 21$

İLİŞKİLENDİRİYORUM

Amaç: Bu bölümde ele alacağınız içerikleri zihninizde var olan bilgileriniz, yaşantılarınız ve diğer derslerde öğrendiklerinizle ilişkilendirmenizi bekliyoruz.

Verilen metinleri okuyunuz. Günlük yaşamda eş ve benzer geometrik şekillerle nerelerde karşılaştığınızı gözlemleyiniz.

ÖĞRENME YOLCULUĞUNA BAŞLARKEN

Matematiksel düşünme becerileri, üçgenlerde eşlik ve benzerlik konusunu anlamada temel bir rol oynar. Bu beceriler, hem akademik başarıya hem de günlük yaşamda pratik çözümler üretmeye yardımcı olur.

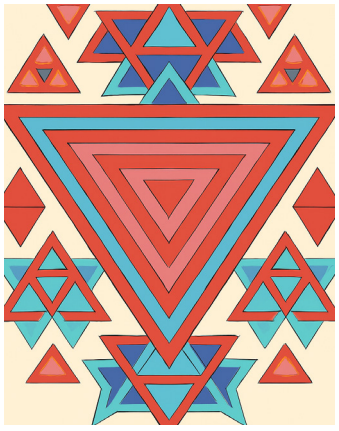
Gerçek Dünya Problemleri

- Mimarlıkta, benzer üçgenler kullanılarak yapıların oranları hesaplanır.
- Fotoğrafçılıkta perspektif hesaplamaları benzerlik kurallarına dayanır.
- Gölge boyu ölçerek bir ağacın boyunu tahmin etmek, benzer üçgenlerin doğrudan bir uygulamasıdır.
- Benzerlik oranı sayesinde, harita üzerindeki bir mesafe gerçek hayattaki uzaklığa dönüştürülebilir.

Programlama ve Teknoloji Kullanımı

- Bilgisayar grafiklerinde, şekiller benzerlik oranları kullanılarak ölçeklendirilir.
- Oyun tasarımında karakterlerin boyutları benzerlik kurallarına göre ayarlanır.
- Kodlama yaparken geometrik algoritmaların temelinde eşlik ve benzerlik yer alır.

Aşağıdaki görselde eş ve benzer üçgenlerle yapılmış halı motifinin bir kısmı verilmiştir.



Buna göre halı desenindeki üçgenlerin eş ya da benzer olduğunu belirlemek için hangi görsel ipuçlarının kullanıldığını yazınız.

Halı süslemesindeki üçgenlerin eş ya da benzer olup olmadığını anlamak için şu adımlar izlenebilir:

Görsel simetriyi incelemek: Eğer üçgenler simetrik olarak yerleştirilmişse bu eşlik veya benzerlik için ilk ipucudur.

Açı ölçülerini karşılaştırmak: Eş ve benzer üçgenlerde karşılıklı açıların ölçüleri eşittir.

Kenar uzunluklarını karşılaştırmak: Eş üçgenlerde karşılıklı tüm kenarların uzunlukları birbirine eşittir; benzer üçgenlerde ise karşılıklı kenar uzunlukları orantılıdır.

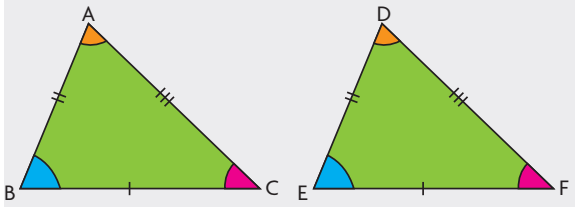
Renk ve desen tekrarı: Aynı renk ve desenle tekrarlanan üçgenler genellikle eş ya da benzer olacak şekilde tasarlanır.

UYGULAYARAK ÖĞRENİYORUM

Amaç: Bu bölümde bilgilerinizi etkinlikler ve uygulamalarla pekiştirmenizi, öğrenmeyi daha kalıcı hâle getirmenizi amaçlıyoruz.

Adım adım verilen etkinlik basamaklarını uygulayınız. Uygulama, problem çözme ya da etkinlik yönergelerine dikkat ediniz. Çalışmanızı dikkatli ve düzenli bir şekilde yapınız.

ÜÇGENLERİN EŞ OLMA KOŞULLARI



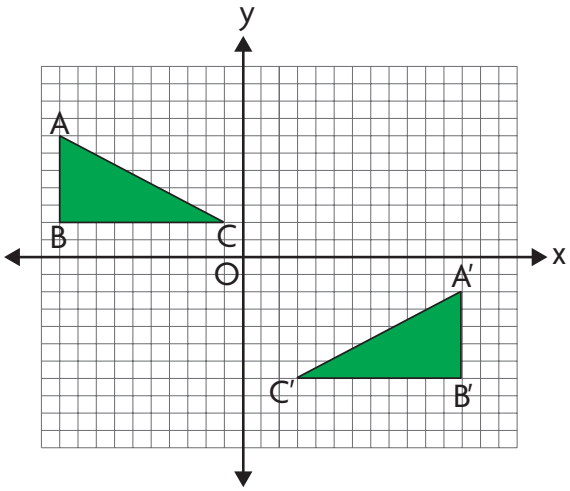
İki üçgenin köşeleri arasında bire bir eşleme yapıldığında üçgenlerin karşılıklı kenar uzunlukları ve karşılıklı açılarının ölçüleri eşit ise bu üçgenler eştir.

Yukarıda verilen $\widehat{ABC}$ ile $\widehat{DEF}$ eştir. Bu durum $\widehat{ABC} \cong \widehat{DEF}$ biçiminde gösterilir.

Dönüşümler; geometrik bir şeklin kenar uzunluklarını, açı ölçülerini, çevre uzunluğunu ve alanını korumaktadır. Bir üçgenin çeşitli dönüşümler altındaki görüntüsü, üçgenin kendisine eştir.

ÖRNEK

Birimkareli zemin üzerine çizilmiş ABC üçgeni ile bu üçgene uygulanan bazı dönüşümler sonucunda oluşturulmuş A'B'C' üçgenini inceleyiniz.



Üçgenle ilgili verilen aşağıdaki soruların cevaplarına ilişkin varsayımlarınızı boş bırakılan alanlara yazınız.

a) ABC üçgenine hangi dönüşümler uygulanarak A'B'C' üçgeni elde edilebilir?

b) ABC üçgeni ile A'B'C' üçgeni arasında nasıl bir ilişki vardır?

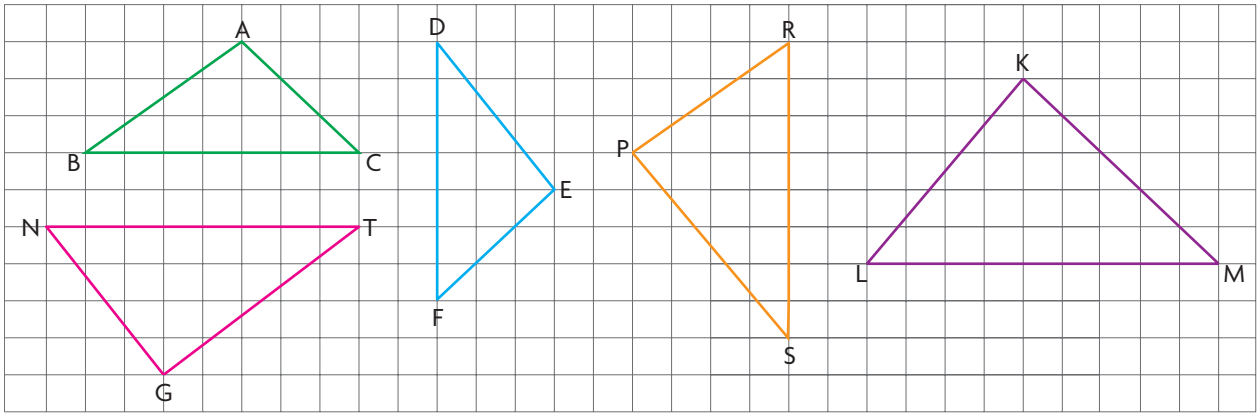
ÇÖZÜM

a) ABC üçgeninin y eksenine göre simetriği alındıktan sonra 2 birim sağa 9 birim aşağı ötelenmiştir.

b) IABI = IA'B'I, IACI = IA'C'I ve IBCI = IB'C'I olduğundan ABC üçgeni ile A'B'C' üçgeni eştir.

SIRA SİZDE 1.

İpek, aşağıdaki birimkareli çizim kâğıdına 5 üçgen çizmiştir.



Buna göre İpek'in çizdiği üçgenlerden eş olanları belirtiniz.

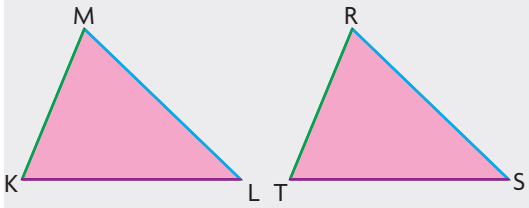
ÖRNEK

İki üçgenin karşılıklı tüm kenar uzunluklarının eşit olması, üçgenlerin eş olduğunu söylemek için yeterli midir? Açıklayınız.

ÇÖZÜM

Üç kenar uzunluğu bilinen tek bir üçgen çizilebileceğinden kenar uzunlukları eşit olan iki üçgen eştir.

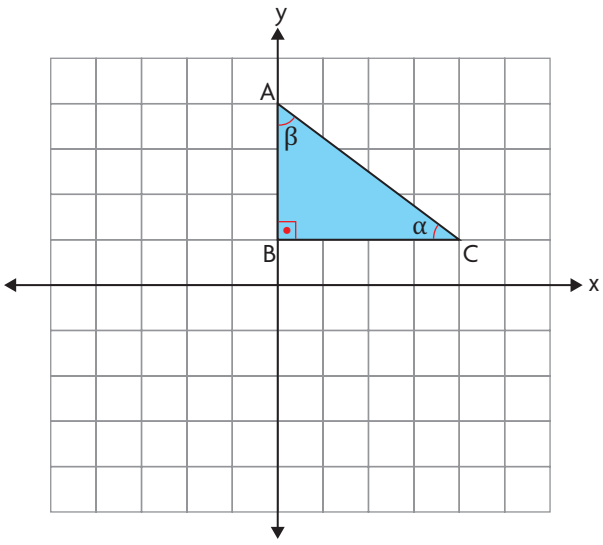
Kenar-Kenar-Kenar Eşliği (KKK)



$|KL| = |TS|$
$|KM| = |RT|$
$|ML| = |RS|$
$\Rightarrow \triangle KLM \cong \triangle TSR$

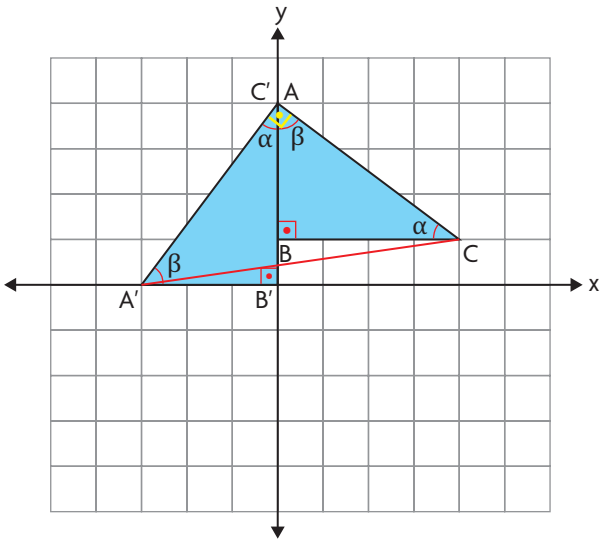
ÖRNEK

Aşağıdaki dik koordinat düzleminde verilen ABC üçgeninde $[AB] \perp [BC]$, $|BC| = 4$ birim ve $|AB| = 3$ birimdir. ABC üçgeni, B köşesi etrafında saatin ters yönünde 90° döndürüldükten sonra 1 birim aşağı öteleniyor. Dönüşümler sonunda A noktası A' noktasına geliyor.



Buna göre |A'C| nun kaç birim olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM



$|AB|^2 + |BC|^2 = |AC|^2$

$\Rightarrow 3^2 + 4^2 = |AC|^2 \Rightarrow 25 = |AC|^2 \Rightarrow |AC| = 5$ birim

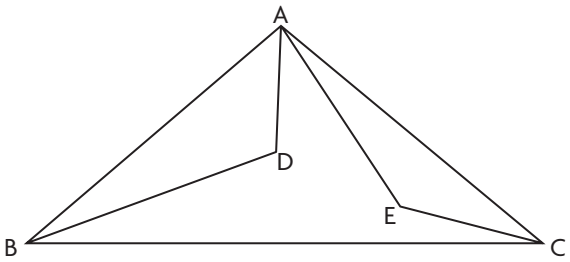
$\left.\begin{array}{l} m(\hat{A}) = \beta \Rightarrow m(\hat{A'}) = \beta \\ m(\hat{C}) = \alpha \Rightarrow m(\hat{C'}) = \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow m(\widehat{CAA'}) = 90^\circ$ (KKK Eşliği)

$|AC|^2 + |A'C'|^2 = |A'C|^2$

$5^2 + 5^2 = |A'C|^2 \Rightarrow |A'C|^2 = 50 \Rightarrow |A'C| = 5\sqrt{2}$ birim

SIRA SİZDE 2.

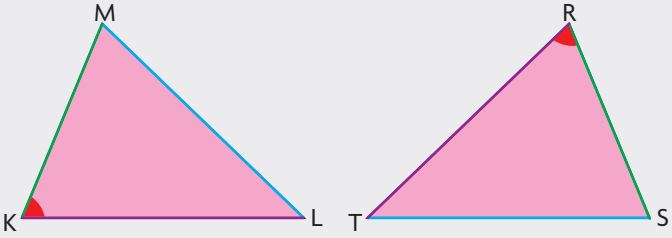
ABC ikizkenar üçgeninde $|AB| = |AC|$ ve $m(\widehat{ABC}) = 35°$ dir.



$|AD| = |EC|$, $|AE| = |BD|$ ve $m(\widehat{DAE}) = 30^{\circ}$

Verilenlere göre AEC açısının ölçüsünü bulunuz.

Kenar-Açı-Kenar Eşliği (KAK)



$|KM| = |RS|$
$|KL| = |RT|$
$m(\widehat{MKL}) = m(\widehat{SRT})$

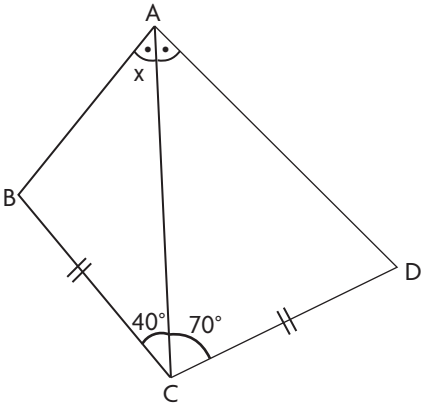
$\Rightarrow \triangle KLM \cong \triangle TSR$

ÖRNEK

Aşağıdaki şekilde ABC ve ACD üçgenleri verilmiştir.

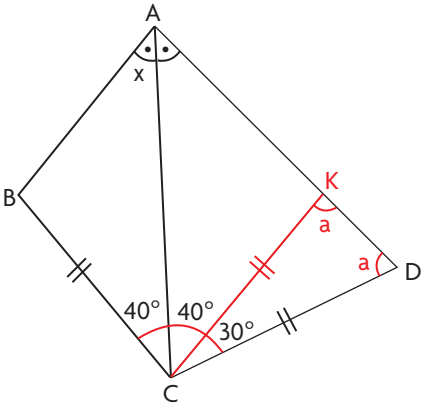
$m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{CAD})$, $m(\widehat{ACB}) = 40^\circ$,

$m(\widehat{ACD}) = 70^\circ$ ve $|BC| = |CD|$



Verilenlere göre BAC açısının ölçüsünü bulunuz.

ÇÖZÜM



[AC] açıortay olduğundan $m(\widehat{ACK}) = 40^\circ$ olacak şekilde [CK] çizilirse $\overset{\triangle}{ACB} \cong \overset{\triangle}{ACK}$ (KAK Eşliği) ve |CK| = |CD| olur.

KCD üçgeninde iç açılar toplamından

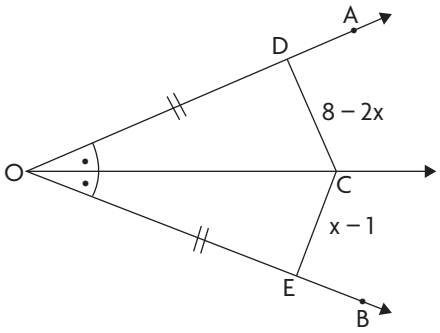
$30^\circ + a + a = 180^\circ \Rightarrow 2a = 150^\circ \Rightarrow a = 75^\circ$

O hâlde ACD üçgeninde iç açılar toplamından

$70^\circ + 75^\circ + x = 180^\circ \Rightarrow x = 35^\circ$ bulunur.

SIRA SİZDE 3.

Aşağıdaki şekilde [OC, AOB açısının açıortayıdır.



$|DC| = (8 - 2x)$ birim, $|EC| = (x - 1)$ birim ve $|OD| = |OE|$

Verilenlere göre $|CE|$ **nun kaç birim olduğunu bulunuz.**

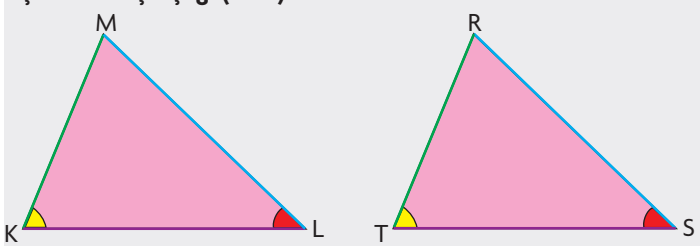
ÖRNEK

İki üçgenin karşılıklı iki açısının ölçüsünün ve birer kenar uzunluğunun eşit olduğunun bilinmesi, üçgenlerin eş olduğunu söylemek için yeterli midir?

ÇÖZÜM

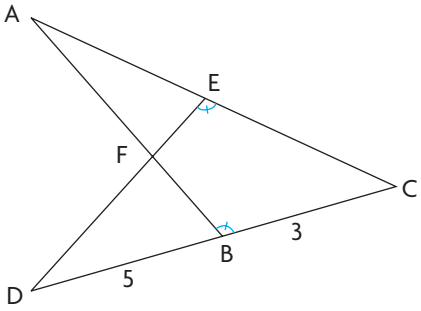
İki açısının ölçüsü bilinen sonsuz tane üçgen çizilebileceğinden iki üçgenin karşılıklı açılarının ölçülerinin eşit olması, üçgenlerin eş olması için yeterli değildir. Üçgenlerin eş olabilmesi için karşılıklı ikişer açısının ölçüsünün ve bu açılar arasında bulunan kenarın uzunluğunun eşit olması gerekir.

Açı-Kenar-Açı Eşliği (AKA)



$$\left.\begin{array}{l} |KL| = |TS| \\ m(\widehat{MKL}) = m(\widehat{RTS}) \\ m(\widehat{MLK}) = m(\widehat{RST}) \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\frown}{KLM} \cong \overset{\frown}{TSR}$$

ÖRNEK



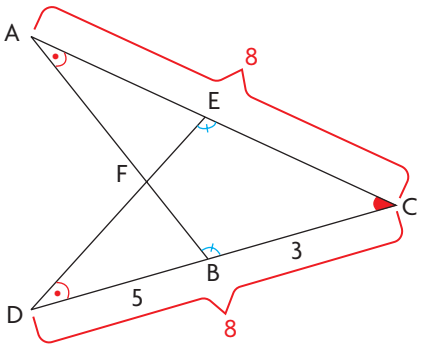
$[AB] \cap [DE] = \{F\}$, $|AC| = 8$ birim, $|DB| = 5$ birim

$|BC| = 3$ birim, $m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{DEC})$

Verilenlere göre $|AE|$ kaç birimdir?

ÇÖZÜM

ABC ve DEC üçgenleri için $m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{DEC})$ ve C açısı ortak olduğundan $m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{EDC})$ olur.



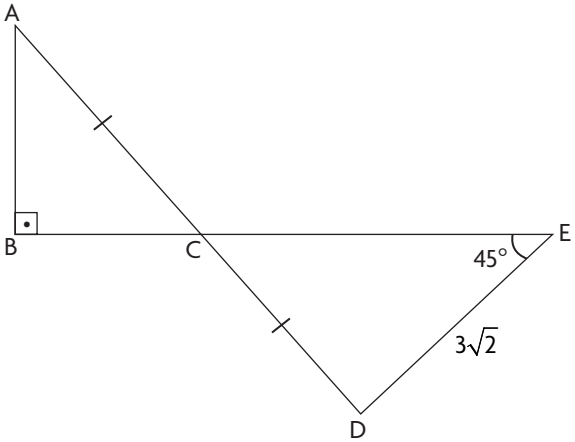
$m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{EDC})$
$m(\widehat{ACB}) = m(\widehat{ECD})$ } ve $|AC| = |DC|$

olduğundan AKA Eşlik bağıntısından $\triangle ABC \cong \triangle DEC$ dir.

O hâlde $|EC| = |BC| = 3$ birim ve buradan $|DB| = |AE| = 5$ birimdir.

SIRA SİZDE 4.

Aşağıdaki şekilde ABC ve CDE birer üçgen ve $[AB] \perp [BE]$ dır.



$|DE| = 3\sqrt{2}$ birim, $m(\widehat{DEB}) = 45^\circ$

$|AC| = |CD|$

Verilenlere göre $|AB|$ nun kaç birim olduğunu bulunuz.

ÜÇGENLERİN BENZER OLMA KOŞULLARI

ÖRNEK

Bir teknoloji mağazasında 40 ve 60 inçlik iki televizyon vardır. Aynı görüntü en-boy oranı korunarak her iki televizyonda da aşağıdaki gibi tam ekran olarak gösterilmektedir.



Televizyonların ekranlarında görünen ABC üçgenlerini karşılaştırarak aşağıdaki soruları yanıtlayınız.

a) Üçgen çiftinin benzer olduğunu söyleyebilmek için bu üçgenlerin karşılıklı tüm açılarının eş ve karşılıklı kenar uzunluklarının orantılı olduğu gösterilmeli midir? Açıklayınız.

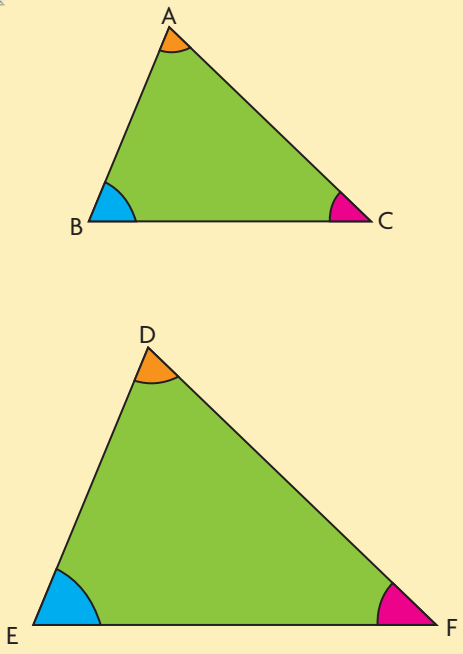
İki üçgenin benzer olduğunu söyleyebilmek için üç açısının eş olduğunu göstermek de, üç kenarının orantılı olduğunu göstermek de ayrı ayrı yeter koşuldur.

b) Ölçüsü 40 inç olan televizyonda görünen ABC üçgeninin kenar uzunlukları 8, 10 ve 12 birim olduğuna göre ölçüsü 60 inç olan televizyonda görünen ABC üçgeninin kenar uzunluklarının kaç birim olduğunu bulunuz.

Benzerlik oranı:

$$\frac{40}{60} \Rightarrow \frac{8}{x} = \frac{10}{y} = \frac{12}{z} = \frac{2}{3}$$

$$2x = 24 \Rightarrow x = 12$$
$$2y = 30 \Rightarrow y = 15$$
$$2z = 36 \Rightarrow z = 18$$



$m(\widehat{A}) = m(\widehat{D})$, $m(\widehat{B}) = m(\widehat{E})$ ve $m(\widehat{C}) = m(\widehat{F})$

veya

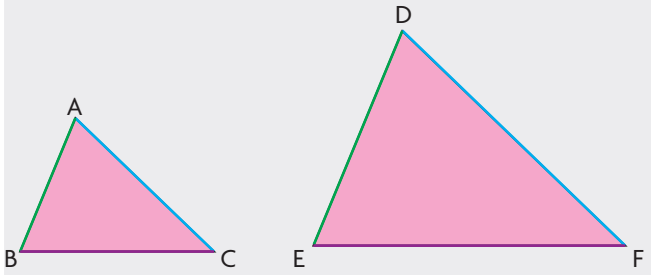
$$\frac{|BC|}{|EF|} = \frac{|AC|}{|DF|} = \frac{|AB|}{|DE|} = k \text{ ise}$$

ABC ve DEF üçgenleri benzerdir ve bu üçgenlerin benzerlik oranı k dir.

Üçgenlerin benzerliği $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ şeklinde gösterilir.

Benzer iki üçgenin benzerlik oranı 1 ise bu üçgenler eş üçgenlerdir.

Kenar-Kenar-Kenar Benzerliği (KKK)



$$\frac{|BC|}{|EF|}=\frac{|AC|}{|DF|}=\frac{|AB|}{|DE|}=k \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle DEF$$

olduğunda $m(\widehat{A})=m(\widehat{D})$, $m(\widehat{B})=m(\widehat{E})$ ve $m(\widehat{C})=m(\widehat{F})$ olur.

k sayısına benzerlik oranı denir.

k = 1 ise üçgenler eş olur.

ÖRNEK

Ayşe, Emir ve Tuğra'nın oturdukları şehirler sırasıyla A, E ve T olmak üzere şehir merkezleri bir harita üzerinde işaretlenip birleştirilerek AET üçgeni oluşturuluyor. Harita üzerindeki üçgenin kenar uzunlukları |AE| = 7 cm, |AT| = 12 cm ve |ET| = 20 cm olarak ölçülüyor.

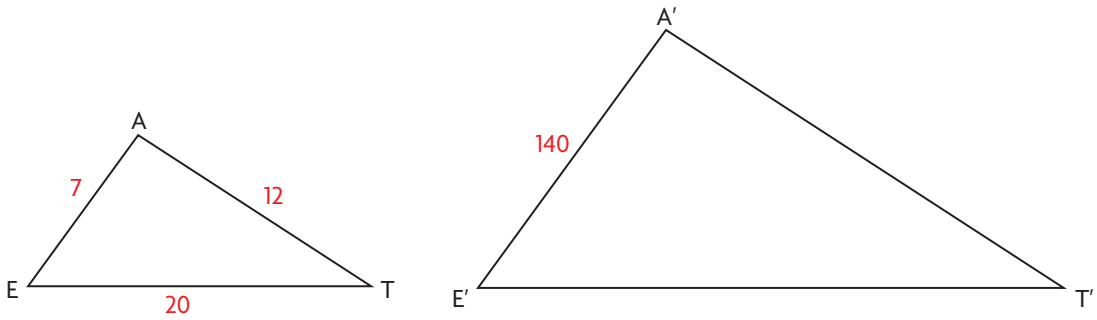
Ayşe ile Emir'in oturduğu şehirler arasındaki kuş uçuşu mesafe 140 km olduğuna göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) Haritanın ölçeğini bulunuz.

b) Ayşe, Emir ve Tuğra'nın oturduğu şehirler arasındaki kuş uçuşu mesafelerin toplamının kaç kilometre olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

a)



140 km = 14 000 000 cm

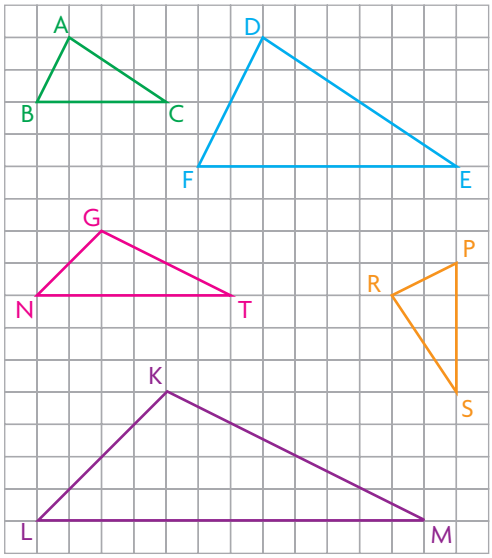
$\frac{|AE|}{|A'E'|}=\frac{7}{14\,000\,000}$ olduğundan haritanın ölçeği $\frac{1}{2\,000\,000}$ olur.

b) $\frac{Ç(AET)}{Ç(A'E'T')}=\frac{7+12+20}{x}$

$\frac{39}{x}=\frac{1}{2\,000\,000} \Rightarrow x = 78\,000\,000 \text{ cm}$

$x = 78\,000\,000 \text{ cm} = 780 \text{ km}$

SIRA SİZDE 5.



Yandaki birimkareli kâğıda çizilmiş üçgenlerden benzer olanlarını belirleyiniz.

a) Benzer üçgenlerin sembolik gösterimini yazınız.

b) Benzer üçgenlerin benzerlik oranlarını yazınız.

SIRA SİZDE 6.

Bir ABC üçgeninin AB kenarı üzerinde K, AC kenarı üzerinde N, BC kenarı üzerinde L noktası B'ye daha yakın olacak şekilde L ve M noktaları işaretleniyor. K ile L, M ile N noktaları birer doğru parçası ile birleştiriliyor. İşaretlemeler sonucu yapılan ölçümde IANI = IMCI = 2IBKI = 4 cm, IMNI = 2IKLI = 6 cm, INCI = 2IBLI = 10 cm olarak bulunuyor.

Buna göre IAKI **nun kaç santimetre olduğunu bulunuz.**

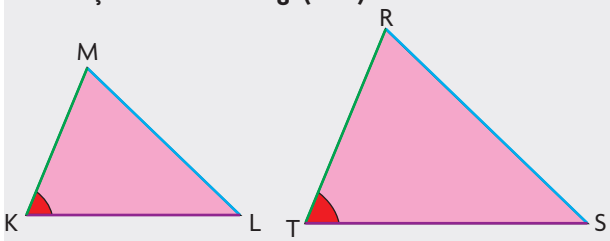
ÖRNEK

İki üçgenin karşılıklı birer açısının eş ve bu açıları oluşturan kenarların uzunlukları oranının eşit olması, üçgenlerin benzer olduğunu söylemek için yeterli midir?

ÇÖZÜM

İki üçgenin karşılıklı iki kenar uzunluğu orantılı ve bu kenarların oluşturduğu açılar eş ise bu üçgenler benzerdir.

Kenar-Açı-Kenar Benzerliği (KAK)



$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{|KM|}{|TR|}=\dfrac{|KL|}{|TS|}=k\\ m(\widehat{K})=m(\widehat{T})\end{array}\right\}\Leftrightarrow \overset{\frown}{MKL}\sim\overset{\frown}{RTS}$$

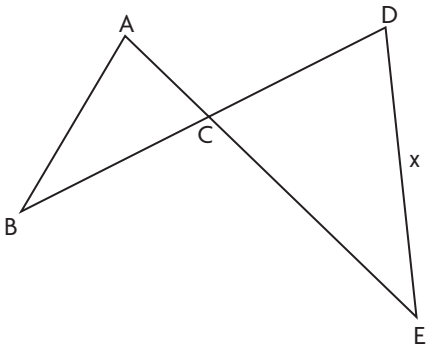
Bu durumda

$m(\widehat{K})=m(\widehat{T})$, $m(\widehat{M})=m(\widehat{R})$ ve $m(\widehat{L})=m(\widehat{S})$ olur.

k sayısına benzerlik oranı denir k = 1 ise üçgenler eş olur.

ÖRNEK

Aşağıdaki şekilde ABC ve CDE üçgenleri verilmiştir.



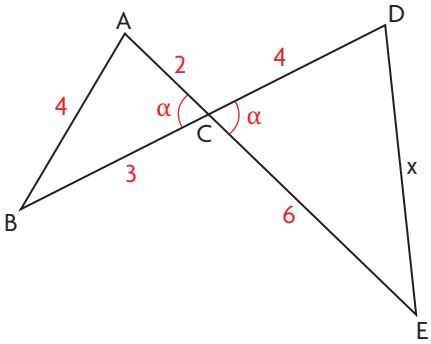
$[AE]\cap[BD]=\{C\}$

$|AB|=|CD|=2|AC|=4$ cm

$|CE|=2|BC|=6$ cm

olduğuna göre $|DE|=x$ **in kaç santimetre olduğunu bulunuz.**

ÇÖZÜM

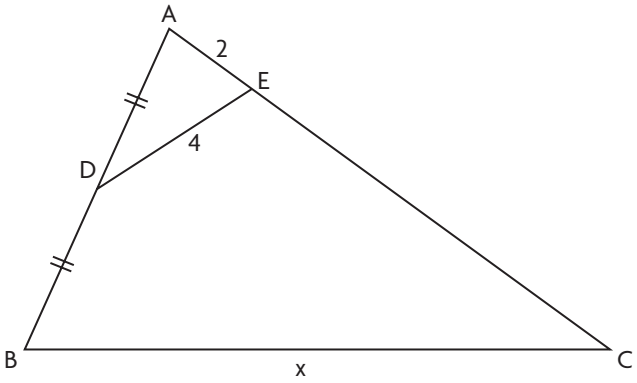


$$\left.\begin{array}{l}m(\widehat{ACB})=m(\widehat{DCE})\ \text{(Ters açılar)}\\ \dfrac{|AC|}{|CD|}=\dfrac{|BC|}{|CE|}=\dfrac{1}{2}\end{array}\right\}\text{olduğundan}$$

$$\overset{\frown}{ABC}\sim\overset{\frown}{DEC}\Rightarrow\frac{|AC|}{|CD|}=\frac{|BC|}{|CE|}=\frac{|AB|}{|DE|}$$

$\dfrac{4}{x}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow x=8$ cm olur.

SIRA SİZDE 7.



ABC üçgen
IADI = IBDI = 3 cm
IAEI = 2 cm
IACI = 9 cm
IDEI = 4 cm

Verilenlere göre IBCI = x **in kaç santimetre olduğunu bulunuz.**

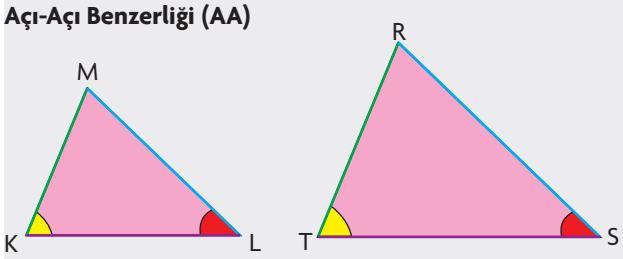
ÖRNEK

İki üçgenin iki açı ölçüsünün eşit olması, üçgenlerin benzer olduğunu söylemek için yeterli midir?

ÇÖZÜM

İki üçgenin karşılıklı iki açısı eş ise bu üçgenler benzerdir. Karşılıklı iki açısının ölçüsü eşit olan üçgenlerin üçüncü açılarının ölçüleri de eşittir ve karşılıklı kenar uzunlukları orantılıdır.

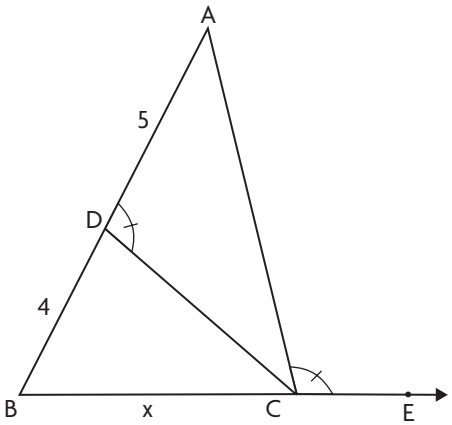
Açı-Açı Benzerliği (AA)



$$\left.\begin{matrix} m(\widehat{MKL}) = m(\widehat{RTS}) \\ m(\widehat{MLK}) = m(\widehat{RST}) \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \overset{\triangle}{KLM} \sim \overset{\triangle}{TSR}$$

ÖRNEK

Aşağıdaki şekilde B, C ve E noktaları doğrusaldır.



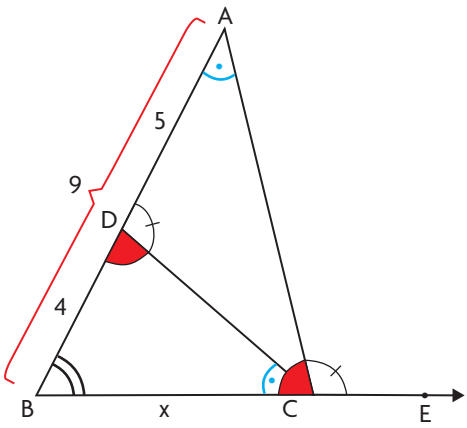
$m(\widehat{ADC}) = m(\widehat{ACE})$

$|AD| = 5$ birim

$|DB| = 4$ birim

Verilenlere göre $|BC| = x$ **in kaç birim olduğunu bulunuz.**

ÇÖZÜM



ABC ve CBD üçgenlerinde $m(\widehat{ADC})$ ve $m(\widehat{ACE})$ açılarının ölçüleri eşit olduğundan bu açıların bütünleri olan açıların ölçüleri de eşittir. Yani, $m(\widehat{BDC}) = m(\widehat{ACB})$ olur. B açısı da ortak olduğundan $m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{DCB})$ olmalıdır. O hâlde $\overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{CBD}$ dir. Buradan

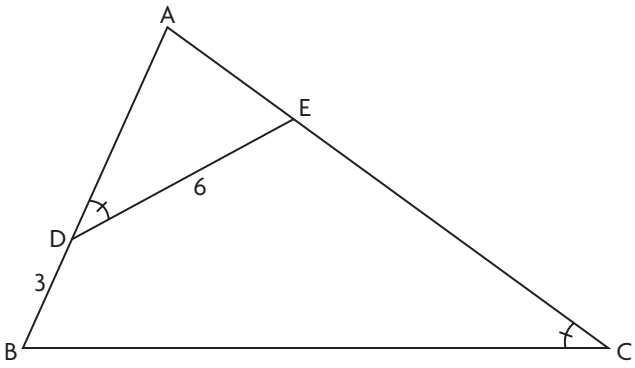
$$\frac{|AB|}{|CB|} = \frac{|BC|}{|BD|} = \frac{|AC|}{|CD|} \Rightarrow \frac{9}{x} = \frac{x}{4}$$

$$\Rightarrow x^2 = 36$$

$$\Rightarrow x = 6 \text{ birimdir.}$$

SIRA SİZDE 8.

Aşağıdaki şekilde ABC üçgen ve AE, AD ve EC kenarlarının uzunlukları sırasıyla ardışık tam sayılardır.



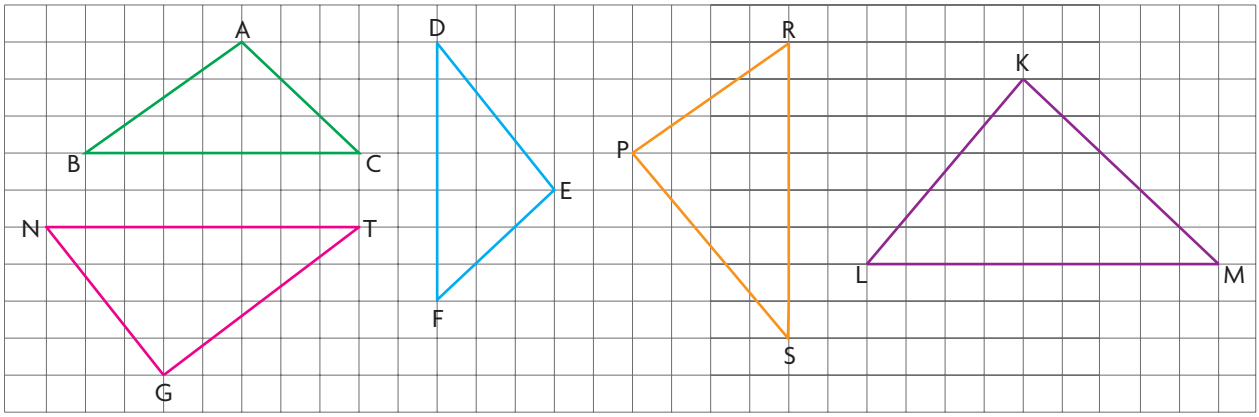
$m(\widehat{ADE}) = m(\widehat{ACB})$, $|BD| = 3$ birim **ve** $|DE| = 6$ birim **olduğuna göre BC kenarının uzunluğunu bulunuz.**

GERİ BİLDİRİM

Bu geri bildirim sayesinde kendi cevabınızı kontrol edebilir, hatalarınızı düzelterek öğrenmenizi pekiştirebilirsiniz.

SIRA SİZDE 1.

ÇÖZÜM

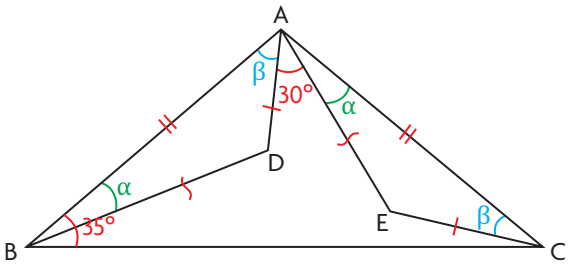


Birim kareli çizim kâğıdına çizilmiş ABC ve EDF üçgenleri ile GNT ve PRS üçgenleri eştir. Üçgenlerin eşliğinin sembolle gösterilişi $\widehat{ABC} \cong \widehat{EDF}$ ve $\widehat{GNT} \cong \widehat{PRS}$ şeklindedir.

SIRA SİZDE 2.

ÇÖZÜM

ABC üçgeninde verilenler yerleştirilirse



ABD ve CAE üçgenlerinin karşılıklı tüm kenar uzunlukları eşit olduğundan bu üçgenler eştir. (KKK)

$\widehat{ABD} \cong \widehat{CAE}$ olduğundan $m(\widehat{ABD}) = m(\widehat{EAC}) = \alpha$ ve $m(\widehat{BAD}) = m(\widehat{ACE}) = \beta$ olsun.

$IABI = IACI \Rightarrow m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{ACB}) = 35^\circ \Rightarrow m(\widehat{ABC}) + m(\widehat{ACB}) + m(\widehat{BAC}) = 180^\circ$

$\Rightarrow 35^\circ + 35^\circ + m(\widehat{BAC}) = 180^\circ \Rightarrow m(\widehat{BAC}) = 110^\circ$

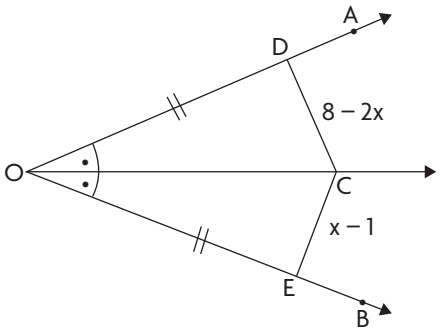
O hâlde $\alpha + \beta + 30^\circ = 110^\circ$ olur. Buradan $\alpha + \beta = 80^\circ$ olarak bulunur.

$\widehat{EAC}$'de, $m(\widehat{AEC}) + m(\widehat{ACE}) + m(\widehat{EAC}) = 180^\circ \Rightarrow \alpha + \beta + m(\widehat{AEC}) = 180^\circ$, $\alpha + \beta = 80^\circ$ $\Rightarrow m(\widehat{AEC}) = 100^\circ$ olur.

SIRA SİZDE 3.

ÇÖZÜM

DOC ve EOC üçgenlerinde |OD|=|OE|, $m(\widehat{DOC}) = m(\widehat{EOC})$ ve OC kenarı ortak olduğundan DOC ve EOC üçgenleri eştir.



$m(\widehat{DOC}) = m(\widehat{EOC}) \Rightarrow |DC| = |EC|$ olur. Buradan

$\Rightarrow 8 - 2x = x - 1$

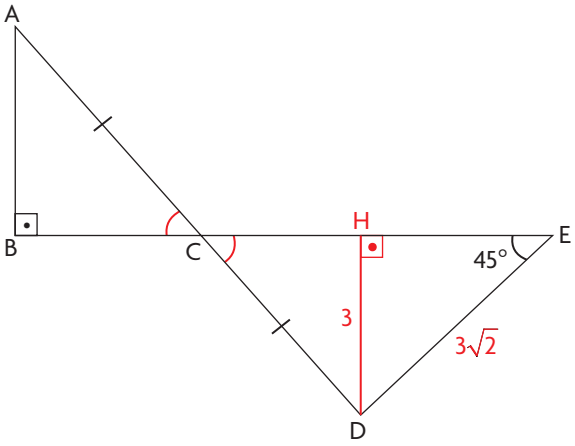
$\Rightarrow 9 = 3x \Rightarrow x = 3$ olarak bulunur. O hâlde

$\left.\begin{array}{l} |EC| = x - 1 \\ x = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow |EC| = 2\,cm$ olur.

SIRA SİZDE 4.

ÇÖZÜM

Aşağıdaki şekilde ABC ve CDE birer üçgen ve $[AB] \perp [BE]$ dir.



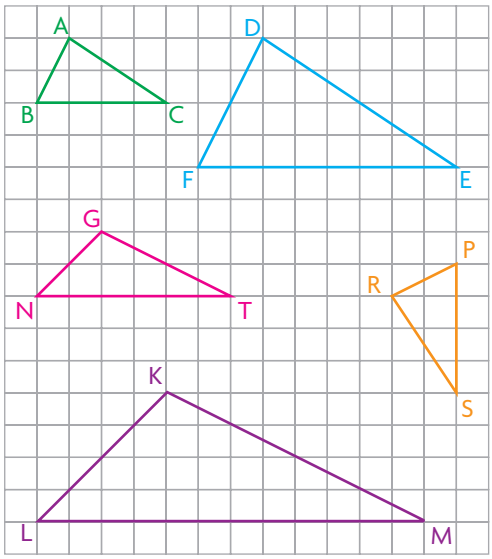
D noktasından [BE] na bir dikme çizildiğinde oluşan DHE üçgeni dik üçgendir. 45° – 45° – 90° dik üçgeni kuralından |DE| = $3\sqrt{2}$ birim ise |DH| = 3 birim olur.

$m(\widehat{ABE}) = m(\widehat{CHD}) = 90^\circ$ ve $m(\widehat{ACB}) = m(\widehat{HCD})$ (ters açılar) olduğundan $\widehat{ABC} \cong \widehat{DHC}$ olur. (AKA Eşliği)

O hâlde |AB| = |HD| = 3 birim olur.

SIRA SİZDE 5.

ÇÖZÜM



Yandaki birim kareli kâğıda çizilmiş üçgenlerden benzer olanları belirleyiniz.

a) Benzer üçgenlerin sembolik gösterimini yazınız.

$\widehat{ABC} \sim \widehat{DFE}$, $\widehat{ABC} \sim \widehat{RPS}$ ve $\widehat{GNT} \sim \widehat{KLM}$ üçgenleri benzerdir.

b) Benzer üçgenlerin benzerlik oranlarını yazınız.

$\widehat{ABC} \sim \widehat{DFE} \Rightarrow \frac{|AB|}{|DF|} = \frac{|BC|}{|FE|} = \frac{|AC|}{|DE|} = \frac{1}{2}$

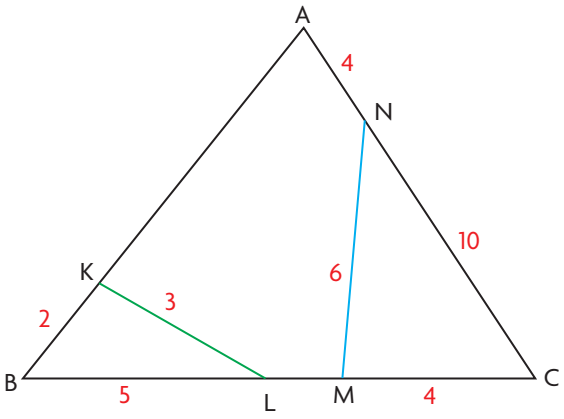
$\widehat{ABC} \sim \widehat{RPS} \Rightarrow \frac{|AB|}{|RP|} = \frac{|BC|}{|PS|} = \frac{|AC|}{|RS|} = 1$ olduğundan $\widehat{ABC} \cong \widehat{RPS}$ olur.

$\widehat{GNT} \sim \widehat{KLM} \Rightarrow \frac{|GN|}{|KL|} = \frac{|GT|}{|KM|} = \frac{|NT|}{|LM|} = \frac{1}{2}$

SIRA SİZDE 6.

ÇÖZÜM

Soruda verilen ABC üçgenini ölçülerine uygun olacak şekilde çizelim.



$\frac{|KB|}{|MC|} = \frac{|KL|}{|NM|} = \frac{|BL|}{|NC|} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{KBL} \sim \widehat{MCN}$ (KKK Benzerliği). O hâlde $\begin{cases} m(\widehat{KBL}) = m(\widehat{MCN}) \\ m(\widehat{KLB}) = m(\widehat{MNC}) \\ m(\widehat{BKL}) = m(\widehat{CMN}) \end{cases}$ olur.

$m(\widehat{KBL}) = m(\widehat{MCN})$ olduğundan ABC üçgeni ikizkenar üçgendir. Buradan |AB| = |AC| olur.

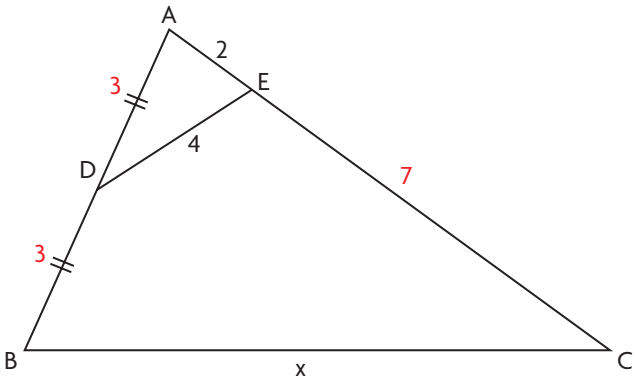
|AK| + 2 = 4 + 10

|AK| = 12 birim olur.

SIRA SİZDE 7.

ÇÖZÜM

Aşağıdaki ABC üçgeninde



$|AD| = |BD| = 3$ cm

$|AE| = 2$ cm

$|AC| = 9$ cm

$|DE| = 4$ cm

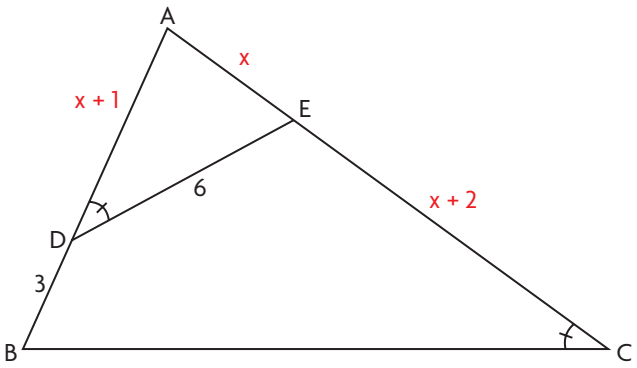
ABC ve AED üçgenlerinde A açısı ortaktır.

$\frac{|AE|}{|AB|} = \frac{|AD|}{|AC|} = \frac{1}{3}$ olduğundan $\widehat{ABC} \sim \widehat{AED}$ (KAK Benzerliği) olur. O hâlde

$\frac{|AE|}{|AB|} = \frac{|AD|}{|AC|} = \frac{|DE|}{|BC|} = \frac{1}{3}$ olacaktır. Buradan $\frac{4}{|BC|} = \frac{1}{3} \Rightarrow |BC| = 12$ cm olur.

SIRA SİZDE 8.

ÇÖZÜM



$m(\widehat{ADE}) = m(\widehat{ACB})$ ve BAC ile EAD üçgenleri için A açısı ortak olduğundan $\widehat{ABC} \sim \widehat{AED}$ (A.A Benzerliği) olur. Buradan,

$\frac{|AE|}{|AB|} = \frac{|DE|}{|BC|} = \frac{|AD|}{|AC|} \Rightarrow \frac{|AD|}{|AC|} = \frac{x+1}{2x+2} = \frac{1}{2}$ olur.

$\frac{6}{|BC|} = \frac{1}{2} \Rightarrow |BC| = 12$ birim bulunur.

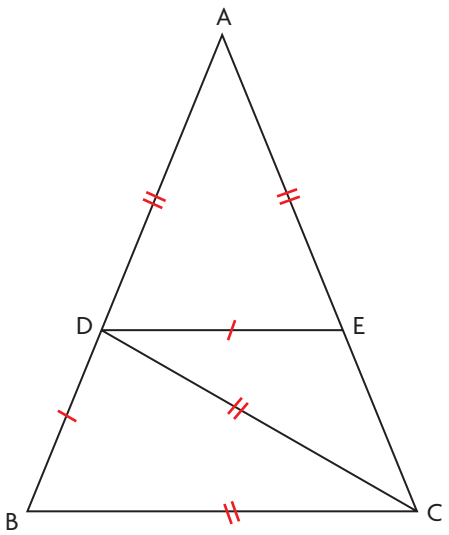
DEĞERLENDİRİYORUM

Amaç: Bu bölümde, öğrendiklerinizi gözden geçirmenizi, kendi öğrenme sürecinizi değerlendirmenizi ve eksiklerinizi fark etmenizi amaçlıyoruz.

Soruları dikkatle yanıtlayınız. Cevaplarınızı geri bildirimlerle karşılaştırarak eksik gördüğünüz noktaları tekrar ediniz.

SORULAR

1. Şekildeki ABC üçgeninde

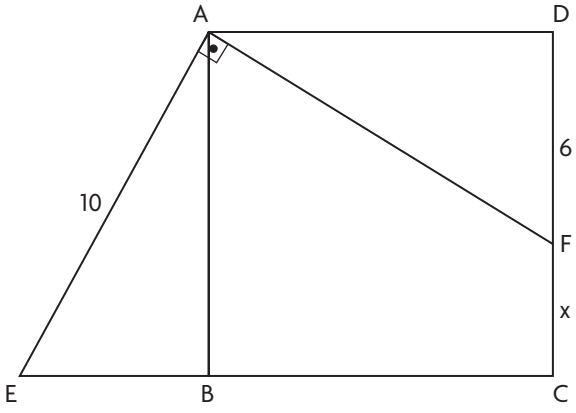


$|AD| = |AE| = |DC| = |BC|$ ve $|DE| = |DB|$

Buna göre $m(\widehat{BAC})$ **kaç derecedir?**

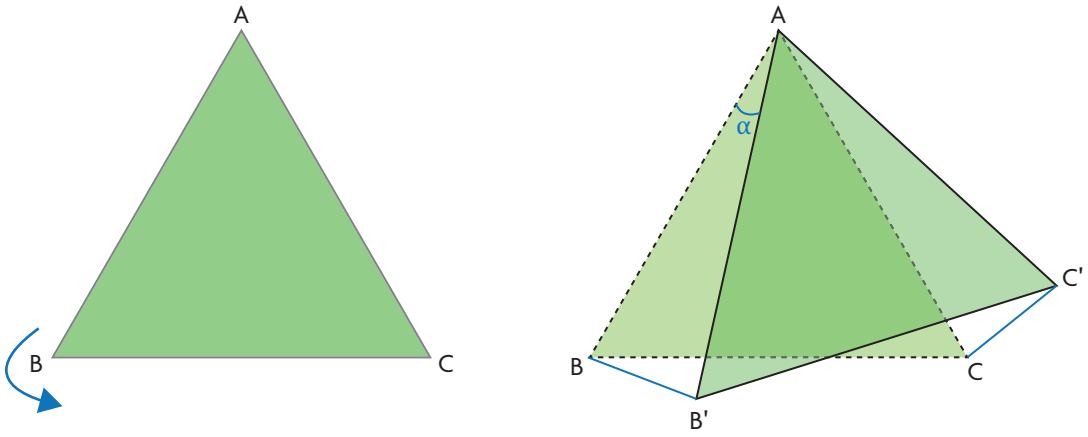
2. Şekilde verilen ABCD karesinde E, B ve C noktaları doğrusaldır.

$[AF] \perp [AE]$, $|DF| = 6$ cm ve $|AE| = 10$ cm'dir.



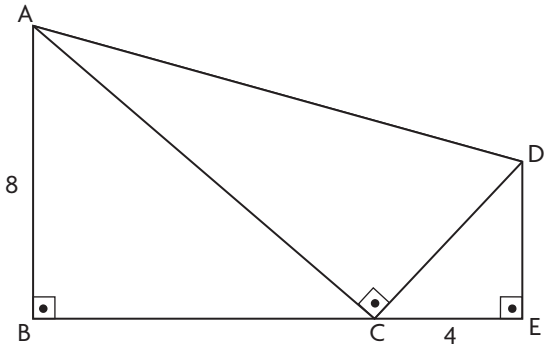
Buna göre $|FC| = x$ uzunluğunu bulunuz.

3. ABC eşkenar üçgeni şekildeki gibi A köşesi etrafında ok yönünde α derece döndürülüyor.



ICC'I = 6 cm **olduğuna göre** IBB'I **nun kaç santimetre olduğunu bulunuz.**

4. Şekilde verilen ABC, DCE ve ACD dik üçgenlerdir.



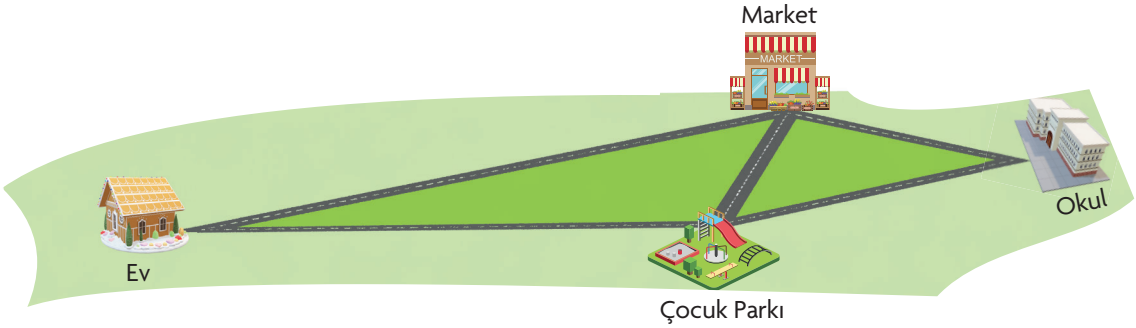
IABI = 8 cm, ICEI = 4 cm **ve** IBEI = 10 cm **olduğuna göre** IADI **nun kaç santimetre olduğunu bulunuz.**

5. Bir harita üzerinde beş şehrin merkezi A, B, C, D ve E noktaları ile gösteriliyor. A, B ve C noktaları birleştirilerek ABC üçgeni elde edildiğinde D noktası AC kenarı üzerinde, E noktası BC kenarı üzerinde yer almaktadır.

Şehir merkezleri arasındaki kuş uçuşu uzaklıklar IABI =135 km, IADI = 40 km, IDCI = 50 km, IECI = 30 km ve IBEI = 120 km'dir.

Buna göre D ve E ile işaretlenen şehir merkezleri arasındaki kuş uçuşu mesafenin kaç kilometre olduğunu hesaplayınız.

6. Aşağıda Sinem'in evi, okulu, çocuk parkı ve markete ait kroki verilmiştir.



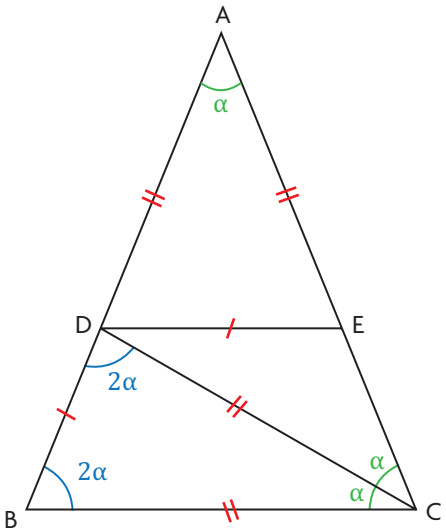
Sinem'in evinin markete olan uzaklığı 4 410 m, çocuk parkına uzaklığı 3 570 m; çocuk parkının okula uzaklığı 1 000 m, markete uzaklığı x m, okulun markete uzaklığı ise y metredir.

Ev, market ve çocuk parkı arsındaki yolların oluşturduğu EMP üçgeni ile market, çocuk parkı ve okul arasındaki yolların oluşturduğu MPO üçgeni benzer olduğuna göre MPO üçgeninin çevresinin kaç metre olduğunu hesaplayınız.

GERİ BİLDİRİM

Bu geri bildirim sayesinde kendi cevabınızı kontrol edebilir, hatalarınızı düzelterek öğrenmenizi pekiştirebilirsiniz.

ÇÖZÜM 1.



Soruda verilenlere göre $\widehat{CBD} \cong \widehat{AED}$ (KKK Eşliği)

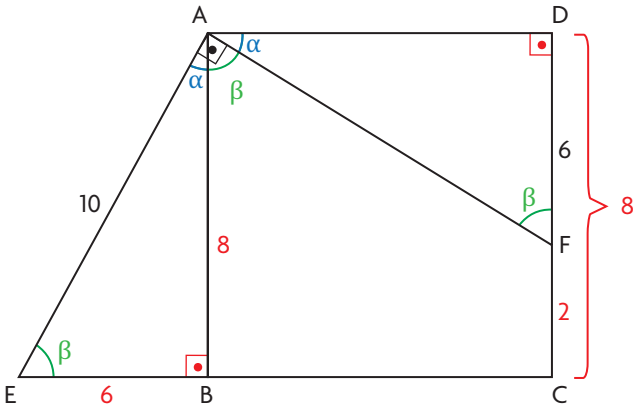
$m(\widehat{DAE}) = \alpha$ olsun. $|AD| = |DC|$ olduğundan $m(\widehat{ACD}) = \alpha$ olur.

$m(\widehat{BDC}) = 2\alpha$ (Dış açı)

$|BC| = |DC| \Rightarrow m(\widehat{BDC}) = m(\widehat{DBC}) = 2\alpha$

$5\alpha = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 36^\circ \Rightarrow m(\widehat{BAC}) = 36^\circ$

ÇÖZÜM 2.



ABCD kare olduğundan $[AB] \perp [EC]$ dir.

$\alpha + \beta = 90^\circ \Rightarrow$ $m(\widehat{FAB}) = \beta$, $m(\widehat{BAE}) = \alpha$ ve $m(\widehat{AEB}) = \beta$ olur. O hâlde

$\widehat{AFD} \cong \widehat{AEB}$ (KAK Eşliği) $|EB| = |DF| = 6$ cm

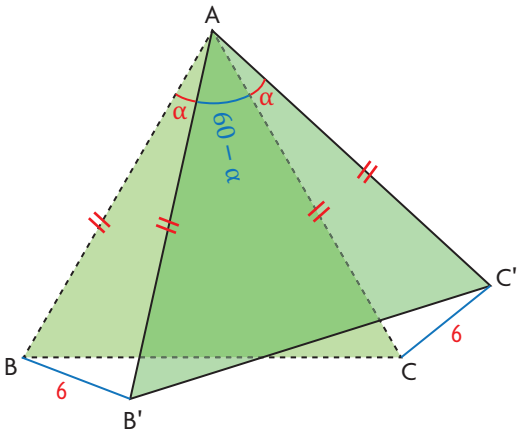
$|EB|^2 + |AB|^2 = |AE|^2$

$6^2 + |AB|^2 = 10^2$

$|AB| = 8$ cm

$|AB| = |DC| = 8$ cm ve buradan $|FC| = 2$ cm bulunur.

ÇÖZÜM 3.



ABC eşkenar üçgeni A köşesi etrafında ok yönünde α derece döndürülüyor.

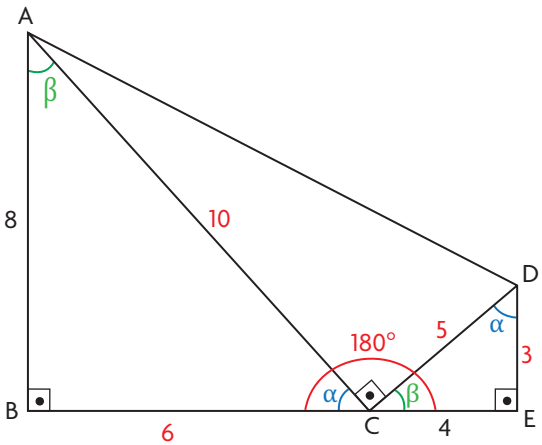
ABC eşkenar üçgen olduğundan

$\left.\begin{array}{l} m(\widehat{BAB'}) = \alpha \\ m(\widehat{BAC}) = 60^\circ \end{array}\right\} m(\widehat{B'AC}) = 60^\circ - \alpha \Rightarrow m(\widehat{CAC'}) = \alpha$ olur.

$\left.\begin{array}{l} |AB| = |AB'| = |AC| = |AC'| \\ m(\widehat{BAB'}) = \alpha \text{ ve } m(\widehat{CAC'}) = \alpha \end{array}\right\}$ $\widehat{BAB'} \cong \widehat{CAC'}$ (KAK Eşliği)

$|BB'| = |CC'| = 6$ cm olur.

ÇÖZÜM 4.



$\left.\begin{array}{l} m(\widehat{BCA}) = \alpha \\ m(\widehat{BAC}) = \beta \end{array}\right\} \alpha + \beta = 90^\circ$

$\left.\begin{array}{l} m(\widehat{BCA}) = \alpha \\ m(\widehat{ACD}) = 90^\circ \end{array}\right\} m(\widehat{BCA}) + m(\widehat{ACD}) + m(\widehat{DCE}) = 180^\circ$

$\alpha + 90^\circ + m(\widehat{DCE}) = 180^\circ$

$\alpha + \underbrace{m(\widehat{DCE})}_{\beta} = 90^\circ$

$\underbrace{m(\widehat{CDE})}_{\alpha} + \underbrace{m(\widehat{DCE})}_{\beta} = 90^\circ$

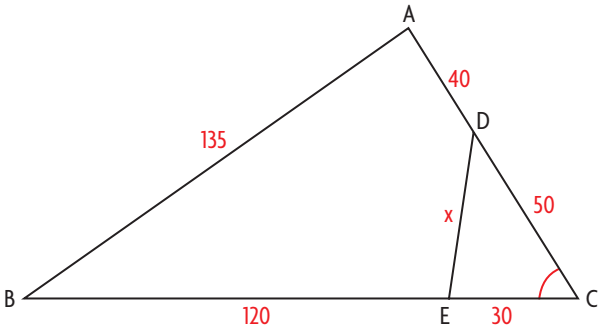
$\left.\begin{array}{l} m(\widehat{BCA}) = m(\widehat{CDE}) = \alpha \\ m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{DCE}) = \beta \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{CBA} \cong \widehat{DEC}$ (AA Benzerliği) $\Rightarrow \dfrac{|CE|}{|AB|} = \dfrac{|CD|}{|AC|} = \dfrac{|ED|}{|BC|} = \dfrac{\cancel{4}^{\,1}}{\cancel{8}_{\,2}} \Rightarrow \dfrac{x}{6} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x = 3\,\text{cm}$

$|AB|^2 + |BC|^2 = |AC|^2$
$8^2 + 6^2 = |AC|^2$
$|AC|^2 = 100$
$|AC| = 10\,\text{cm}$

$|CE|^2 + |DE|^2 = |DC|^2$
$4^2 + 3^2 = |DC|^2$
$|DC|^2 = 25$
$|DC| = 5\,\text{cm}$

$|AC|^2 + |CD|^2 = |AD|^2$
$10^2 + 5^2 = |AD|^2$
$|AD|^2 = 125$
$|AD| = 5\sqrt{5}$ cm

ÇÖZÜM 5.



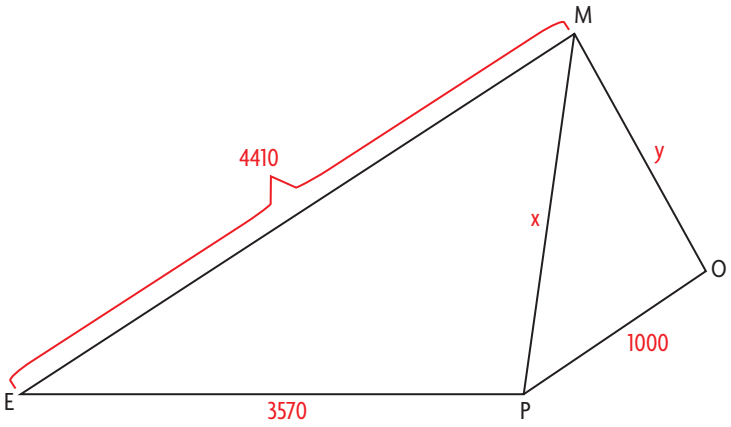
$\frac{\cancel{30}^{1}}{\cancel{90}_{3}} = \frac{\cancel{50}^{1}}{\cancel{150}_{3}}$ olduğundan $\frac{|EC|}{|AC|} = \frac{|CD|}{|BC|}$ dur.

DEC ve ABC üçgenleri için C açısı ortak olduğundan

} $\widehat{ABC} \sim \widehat{EDC}$ (KAK Benzerliği)

O hâlde $\frac{|EC|}{|AC|} = \frac{|CD|}{|BC|} = \frac{|ED|}{|AB|}$ eşitliğinden $\frac{1}{3} = \frac{x}{135} \Rightarrow x = 45$ km

ÇÖZÜM 6.



$\widehat{EMP} \sim \widehat{MPO} \Rightarrow \frac{|EM|}{|MP|} = \frac{|EP|}{|MO|} = \frac{|MP|}{|OP|} \Rightarrow \frac{4410}{x} = \frac{x}{1000} = \frac{3570}{y} \Rightarrow 4410 \cdot 1000 = x^2 \Rightarrow x^2 = 4410000 \Rightarrow x = 2100$ m

$\frac{3570}{y} = \frac{\cancel{2100}}{\cancel{1000}} \Rightarrow y \cdot 21 = 3570 \cdot 10 \Rightarrow y = 1700$ m

Ç($\widehat{MPO}$) = 2100 + 1700 + 1000 ⇒ Ç($\widehat{MPO}$) = 4800 m

ÖĞRENDİKLERİM

Amaç: Bu bölümde, öğrendiklerinizi özetlemenizi, günlük hayatta ve farklı derslerde kullanabileceğiniz bilgileri belirlemenizi amaçlıyoruz.

Özet bilgide verilen boş bırakılan yerleri uygun şekilde tamamlayınız. Yazdıklarınızı çalışma kartını gözden geçirerek kontrol ediniz. Özetle ilgili eklemek istediğiniz bilgileri verilen boşluğa kendi cümlelerinizle yazabilirsiniz.

ÜÇGENLERDE EŞLİK VE BENZERLİK

EŞLİK

Tanım: İki üçgenin köşeleri arasında bire bir eşleme yapıldığında üçgenlerin karşılıklı kenar uzunlukları ve karşılıklı ..... ölçüleri eşit ise bu üçgenlere eş üçgenler denir. Eşlik, "≅" sembolü ile gösterilir.

Eşlik Kriterleri:
İki üçgen arasında yapılan bire bir eşlemede:

- Karşılıklı kenarlarının uzunlukları eşit olan üçgenler eştir. (..... Eşliği)
- Karşılıklı iki kenarının uzunluğu ve bu kenarlar arasındaki açıların ölçüsü eşit olan üçgenler eştir. (.....Eşliği)
- Karşılıklı ikişer açısının ölçüsü ve bu açılar arasındaki kenarlarının uzunluğu eşit olan üçgenler eştir. (.....Eşliği)

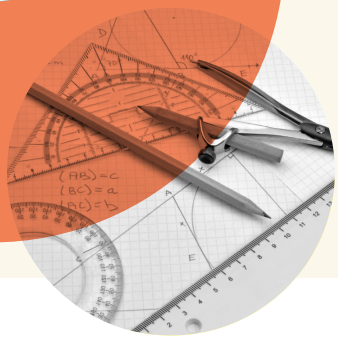
BENZERLİK

Tanım: İki üçgenin karşılıklı açıları eş ve bu açıların karşısındaki ..... uzunlukları orantılı ise bu üçgenler benzerdir.
Benzerlik, "~" sembolü ile gösterilir.

Benzerlik Kriterleri:
İki üçgen arasında yapılan bire bir eşlemede:

- Karşılıklı üç kenarının uzunluğu orantılı olan üçgenler benzerdir. (.....Benzerliği)
- Karşılıklı iki kenarının uzunluğu orantılı ve bu kenarların oluşturduğu açıları eş olan üçgenler benzerdir. (..... Benzerliği)
- Karşılıklı iki açısı eş olan üçgenler benzerdir. (.....Benzerliği)

Daha fazlası için karekodu okutunuz.



EŞLİK VE BENZERLİK UYGULAMALARI

BAŞLARKEN

Sevgili öğrencimiz, bu çalışma kartında bireysel öğrenme yolculuğunuza destek sunmak amaçlanmaktadır. Çalışmalarınızı yürütürken "Hazırlanıyorum", "İlişkilendiriyorum", "Uygulayarak Öğreniyorum", "Değerlendiriyorum" bölümlerini sırası ile yapmanızı; her bölüm ve etkinlik sonundaki geri bildirimleri alarak ilerlemenizi; "Öğrendiklerim" bölümünde öğrenme sürecinizi gözden geçirmenizi bekliyoruz.

Bu çalışma kartında matematiğin günlük hayata olan katkılarına ilişkin çıkarımlarda bulunup aşağıdaki soruları yanıtlayabileceksiniz.

• Bir mimarın oluşturduğu projeyi hayata geçiren inşaat mühendisleri, matematiksel hesaplamaların dışında benzerlik kuralından nasıl yararlanır?

• Seyahat sırasında kullanılan haritalarda ve navigasyon cihazlarında, en kısa ve doğru yol hesaplanırken üçgenlerin benzerlik özelliklerinden nasıl yararlanılır?

• Kule gibi çok yüksek yapıların gölgelerinden yararlanarak yüksekliklerinin ölçümü yapılabilir mi?

HAZIRLANIYORUM

Amaç: Bu bölümde ön bilgilerinizi hatırlamanızı ve konuya hazırlıklı hâle gelmenizi amaçlıyoruz.

Aşağıda yer alan ifadeler, bu temada tamamlanması hedeflenen öğrenme çıktısını ele almadan önce sahip olmanız gereken bazı temel becerileri içermektedir. Lütfen her bir ifadeyi dikkatlice okuyunuz.

Eğer ifadedeki bilgiye hâkim olduğunuzu düşünüyorsanız kutucuğu işaretleyiniz.

Eğer temayı henüz tam olarak bilmediğinizi ya da hatırlamadığınızı düşünüyorsanız kutucuğu boş bırakınız.

Bu çalışma notla değerlendirilmeyecek olup amacı temaya ne ölçüde hazır olduğunuzu belirlemektir.

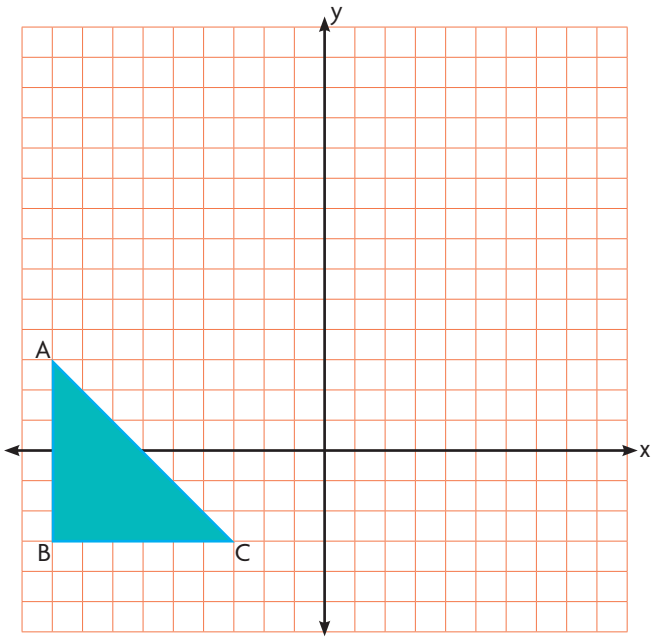
ÖN ÖĞRENME KONTROL LİSTESİ	
1. Bir şeklin bir doğruya göre yansıması dönüşümü sonucu elde edilecek şekli tanıyabilirim.	☐
2. Bir şeklin öteleme dönüşümü sonucu elde edilecek şekli tanıyabilirim.	☐
3. Bir şeklin dönme dönüşümü sonucu elde edilecek şekli tanıyabilirim.	☐
4. Bir geometrik şekle uygulanacak dönüşümler sonucunda elde edilen şekilde kenar uzunlukları, açılar gibi temel elemanların değişip değişmediğini bilirim.	☐
5. İki üçgenin benzer olup olmadığını tespit edebilirim.	☐
6. Benzer iki üçgenin benzerlik oranını hesaplayabilirim.	☐
7. Bir dik üçgende Pisagor teoremini uygulayabilirim.	☐
8. Benzer iki üçgenin hangi benzerlik koşulunu (Kenar-Kenar-Kenar eşliği ve benzerliği, Açı-Açı benzerliği, Açı-kenar-Açı eşliği gibi) sağladığını bulabilirim.	☐

"Ön Öğrenme Kontrol Listesi"ni doldurduktan sonra aşağıda verilen "Kontrol Noktası" sorularını çözünüz ve cevaplarınızı kontrol ediniz.

KONTROL NOKTASI

SORU 1.

Aşağıda birimkarelere ayrılmış bir analitik düzlemde verilen ABC üçgeni x ekseni boyunca 8 birim sağa, y ekseni boyunca 6 birim yukarı ötelenerek A'B'C' üçgeni elde ediliyor.



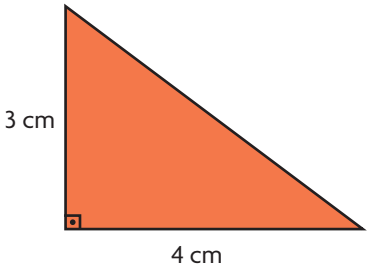
a) ABC ve A'B'C' üçgenlerine ait kenar uzunlukları, açı ölçüleri, çevre ve alan değerlerini bulunuz.

b) ABC üçgeni ile öteleme sonucu oluşan A'B'C' üçgeninin değişmeyen elemanlarını belirtiniz.

c) |AA'| + |CC'| toplamının alacağı değeri bulunuz.

ç) ABC üçgeninin y eksenine göre yansıması sonucu elde edilen üçgen A"B"C" ise B" noktasının koordinatları toplamı kaçtır?

SORU 2. Aşağıda bir dik üçgen ve bu üçgenin dik kenar uzunlukları verilmiştir.



Verilenlere göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) Üçgenin hipotenüs uzunluğu kaç santimetredir?

b) Üçgenin dik kenar uzunlukları iki katına çıkarılırsa hipotenüs uzunluğu nasıl değişir? Açıklayınız.

c) Aşağıda kenar uzunlukları verilen üçgenlerden hangileri yukarıdaki üçgen ile benzerdir?

I. 6 cm – 8 cm – 10 cm

II. 9 cm – 12 cm – 15 cm

III. 6 cm – 12 cm – 18 cm

IV. $\frac{3}{4}$ cm – 1 cm – $\frac{5}{4}$ cm

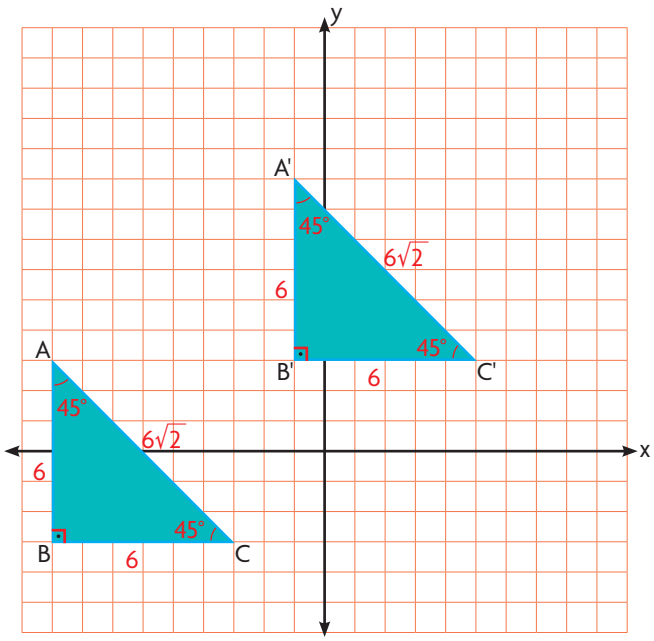
V. $3\sqrt{3}$ cm-$4\sqrt{3}$ cm-$5\sqrt{3}$ cm

GERİ BİLDİRİM

Bu geri bildirim sayesinde kendi cevabınızı kontrol edebilir, hatalarınızı düzelterek öğrenmenizi pekiştirebilirsiniz.

ÇÖZÜM 1.

a)



ABC üçgeni	A'B'C üçgeni
$\|AB\| = 6$ birim	$\|A'B'\| = 6$ birim
$\|BC\| = 6$ birim	$\|B'C'\| = 6$ birim
$m(\hat{A}) = 45°$	$m(\hat{A}') = 45°$
$m(\hat{B}) = 90°$	$m(\hat{B}') = 90°$
$m(\hat{C}) = 45°$	$m(\hat{C}') = 45°$
$\|AC\| = 6\sqrt{2}$ birim	$\|A'C'\| = 6\sqrt{2}$ birim
$Ç(\widehat{ABC}) = 12 + 6\sqrt{2}$ birim	$Ç(\widehat{A'B'C'}) = 12 + 6\sqrt{2}$ birim
$A(\widehat{ABC}) = 18$ birimkare	$A(\widehat{A'B'C'}) = 18$ birimkare

$|AC|^2 = 6^2 + 6^2$

$|AC|^2 = 72$

$|AC| = 6\sqrt{2}$ birim

$|A'C'|^2 = 6^2 + 6^2$

$|A'C'|^2 = 72$

$|A'C'| = 6\sqrt{2}$ birim

$A(\widehat{ABC}) = \frac{6 \cdot 6}{2} = 18$ birimkare

$A(\widehat{A'B'C'}) = \frac{6 \cdot 6}{2} = 18$ birimkare

b) Değişmeyen elemanlar

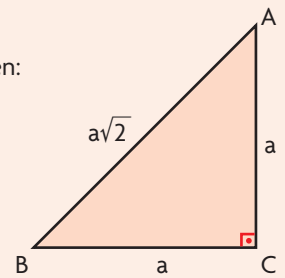
- Kenar uzunlukları
- Açı ölçüleri
- Çevre
- Alan

NOT

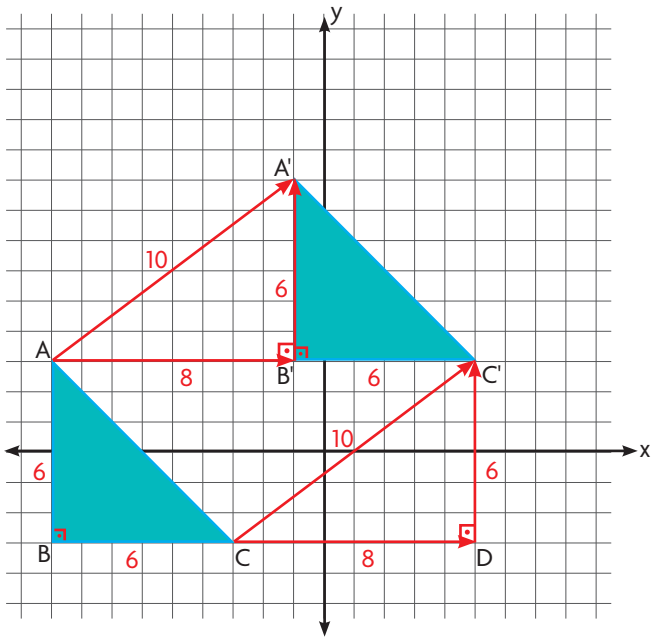
Üçgenin Alanı = $\frac{\text{Taban} \cdot \text{Tabana ait yükseklik}}{2}$

HATIRLATMA

İkizkenar Dik Üçgen:



c)



$|AB'| = 8$ birim

$|A'B'| = 6$ birim

$|AA'|^2 = 6^2 + 8^2$

$|AA'|^2 = 100$

$|AA'| = 10$ birim

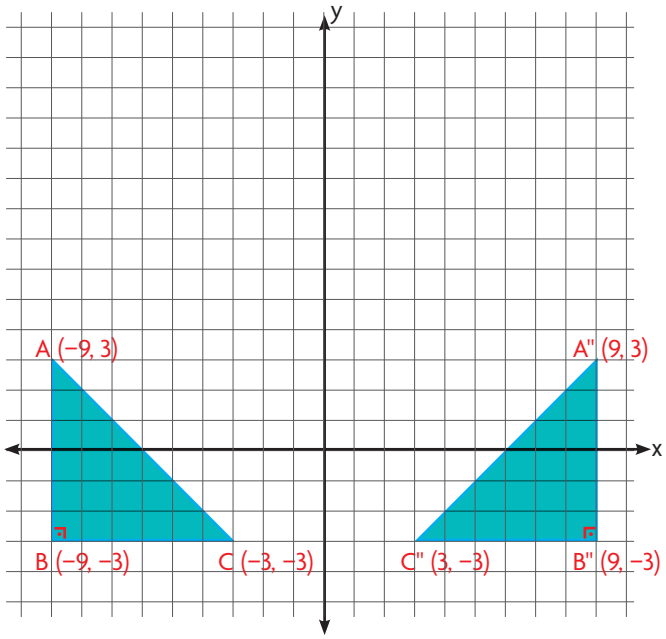
$|CC'|^2 = 6^2 + 8^2$

$|CC'|^2 = 100$

$|CC'| = 10$ birim

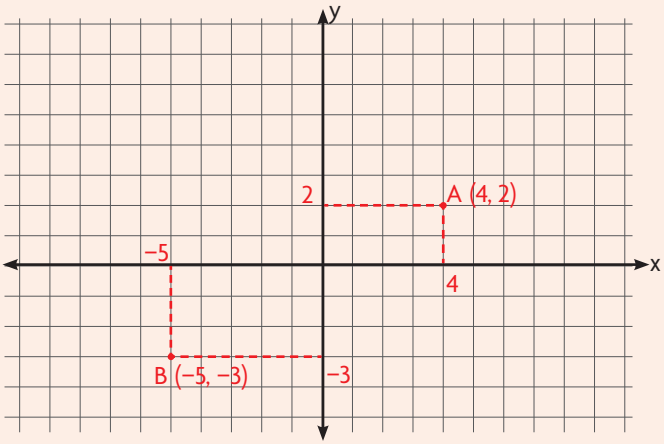
$|AA'| + |CC'| = 10 + 10 = 20$ birim

ç)



NOT

Dik Koordinat Düzlemi:



B" (9, −3)

9 + (−3) = 6

Geometrik şekillere uygulanan yansıma, öteleme ve dönme dönüşümleri sonucunda elde edilen şekillerde hangi elemanların ve özelliklerin aynı kaldığına dikkat ediniz. Elde edilen şekiller ile başlangıçtaki geometrik şeklin birbirine eş mi yoksa benzer mi olduğunu belirleyiniz.

ÇÖZÜM 2.

a) Hipotenüs uzunluğu c cm olsun.

Pisagor teoreminden

$c^2 = 3^2 + 4^2$

$c^2 = 25$

c = 5 cm olarak bulunur.

b) Üçgenin dik kenar uzunlukları iki katına çıkarılırsa hipotenüs uzunluğu da iki katına çıkar.

Bir üçgenin iki kenar uzunluğu aynı oranda değiştirilirse üçüncü kenar uzunluğu da aynı oranda değişir. (K.K.K. Benzerliği)

Siz de Pisagor teoremini kullanarak doğru cevaba ulaşabilirsiniz.

c) Soruda verilen üçgenin kenar uzunlukları 6 cm, 8 cm ve 10 cm'dir. Bir üçgenin tüm kenar uzunlukları aynı pozitif sayı ile genişletilirse elde edilen üçgenin ilk üçgenle açıları eş ve kenar uzunlukları orantılı olduğundan iki üçgen benzer olur.

I. 6 cm-8 cm-10 cm ✓ (Kenar uzunluklarının 2 katı alınmış.)

II. 9 cm-12 cm-15 cm ✓ (Kenar uzunluklarının 3 katı alınmış.)

III. 6 cm-12 cm-18 cm (Kenar uzunlukları ilk üçgenle orantılı değil.)

IV. $\frac{3}{4}$ cm-1 cm-$\frac{5}{4}$ cm ✓ (Kenar uzunlukları 4 ile bölünmüş.)

V. $3\sqrt{3}$ cm-$4\sqrt{3}$ cm-$5\sqrt{3}$ cm ✓ (Kenar uzunlukları $\sqrt{3}$ ile çarpılmış.)

Sonuç olarak I–II–IV–V numaralı üçgenler ilk üçgenle benzerdir.

GERİ BİLDİRİM

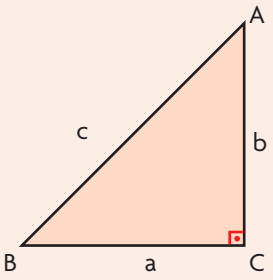
Bu tarz sorularda Pisagor bağıntısı ile üçgenlerde eşlik ve benzerlik (Kenar-Kenar-Kenar eşliği ve benzerliği, Açı-Açı benzerliği, Açı-Kenar-Açı eşliği gibi) temasına ait becerileri kullanabilmek gerekmektedir.

Eğer sorunun çözümünde kavramsal olarak emin olamadığınız noktalar olduysa temel bilgilerinizi pekiştirmek amacıyla "8. Sınıf Öğretim Programı'ndaki Üçgen Çizimi ve Pisagor Bağıntısı; Eşlik, Benzerlik ve Dönüşüm Geometrisi" konularını yeniden gözden geçirmeniz faydalı olacaktır. Bu temel konu üzerindeki hâkimiyetiniz, ilerleyen çalışmalardaki başarınızı doğrudan destekleyecektir.

HATIRLATMA

Pisagor Teoremi:

$c^2 = a^2 + b^2$



HATIRLATMA

Kenar-Kenar-Kenar Benzerlik Teoremi:

- İki üçgenin karşılıklı bütün kenar uzunlukları orantılı ise bu iki üçgen benzerdir.
- Kenar uzunlukları orantılı olan benzer üçgenlerde orantılı kenarları gören açılar eştir.

İLİŞKİLENDİRİYORUM

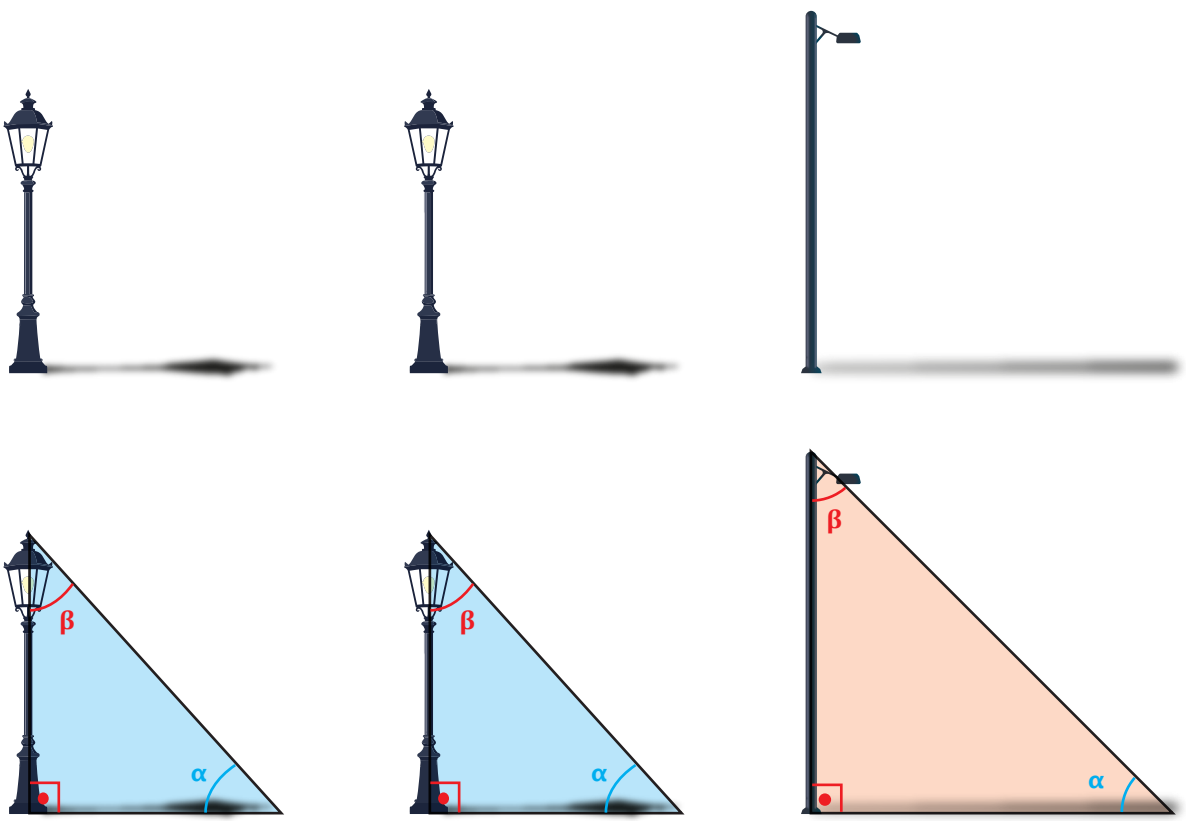
Amaç: Bu bölümde yeni öğreneceğiniz konuyu; zihninizde var olan bilgileriniz, yaşantılarınız ve diğer derslerde öğrendiklerinizle ilişkilendirmenizi bekliyoruz.

Verilen örneği okuyunuz. Ardından soruları yanıtlayınız. Cevaplarınızı kendi yaşamınızdan ya da çevrenizden örneklerle destekleyiniz.

Günlük yaşamdan örnekleri incelediğimizde geometrik şekillere yansıma, öteleme ve dönme dönüşümleri uygulandığında elde edilen geometrik şekillerin aynı özelliklere sahip olduğunu görüyoruz. Bu bilgi bağlamında bir üçgene eş ve benzer üçgenler elde etmeyi öğreneceğiniz "Eşlik ve Benzerlik" konusuna geçiş yapıyoruz.

Sokak Lambaları

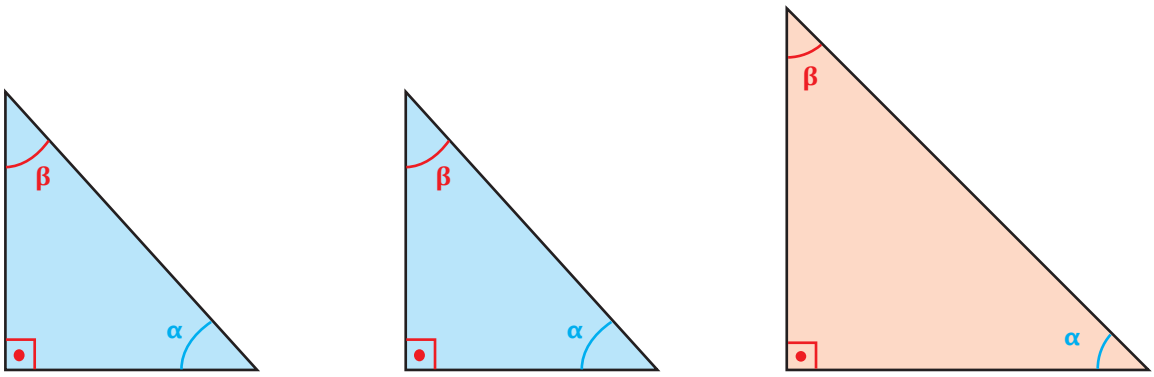
Yan yana duran, ikisi birbirinin aynı ve biri farklı üç sokak lambasının görseli aşağıda verilmiştir. Günün belli bir saatinde güneş ışınlarının yere geliş açısı bu üç lamba için aynıdır. Güneş ışınlarının etkisiyle lambaların her birinin gölgesi yere düşmektedir.



Sokak lambalarının boyları, oluşan üçgenlerin birer dik kenarını; gölgelerinin uzunlukları ise diğer dik kenarını oluşturur.

Bu bilgilere göre oluşan üç üçgen arasındaki ilişki hakkında ne söylenebilir?

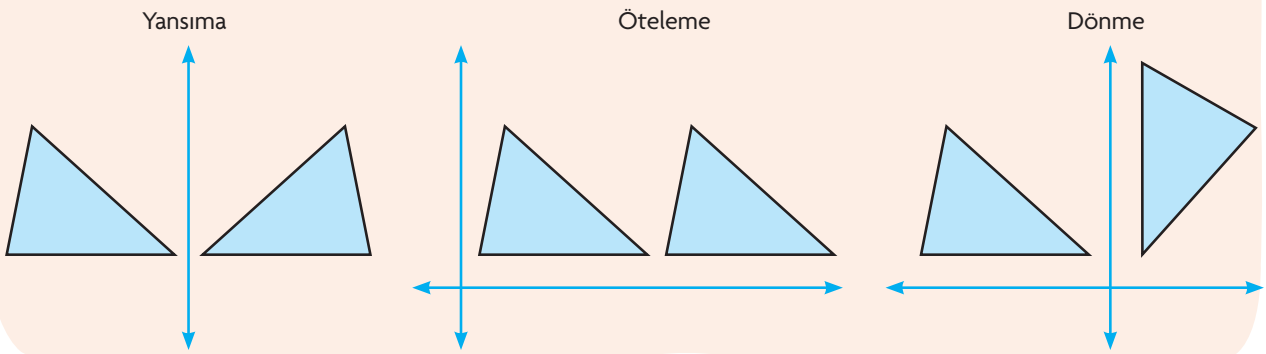
Güneş ışınlarının yer düzlemiyle yaptığı açı (α) tüm üçgenlerde aynıdır ve bu üçgenlerin birer açısı da dik açıdır. Dolayısıyla üçgenlerin ikişer açıları eş olduğundan (A.A. benzerliği) oluşan dik üçgenler birbirine benzerdir.



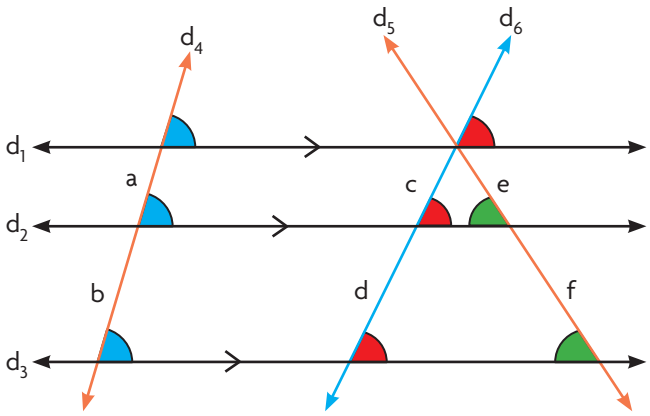
Bu sokak lambalarının iki tanesinin boyu eşit olduğundan bu iki lambanın gölge boyu da eşit olur ve bu iki üçgen eş üçgen olurlar.

- Bu iki üçgen eş olduğundan herhangi biri, diğer üçgene uygulanacak öteleme dönüşümü yoluyla elde edilebilir.

- Bir üçgene yansıma, öteleme ve dönme dönüşümleri uygulandığında başlangıçtaki üçgene eş üçgenler elde edilir.
- Benzerlik oranı 1 olan üçgenlere eş üçgenler denir.



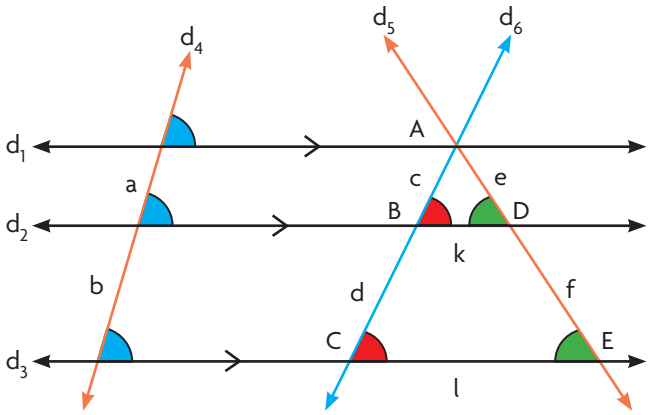
Thales Teoremi:



d1 // d2 // d3 ve
d4, d5, d6 kesen doğrular
olmak üzere

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$$

Temel Benzerlik Teoremi:



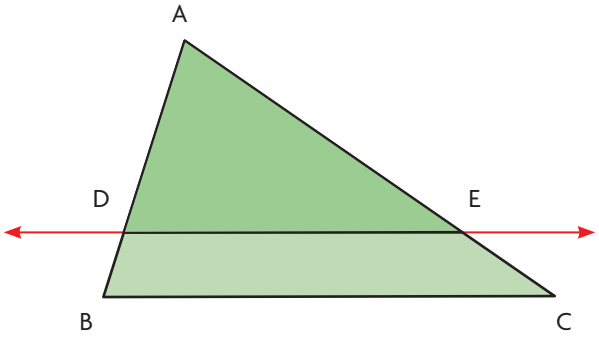
Tepe noktaları aynı, tabanları paralel olan üçgenler benzerdir. d1 // d2 // d3

$\widehat{(ABC)} \sim \widehat{(ACE)}$

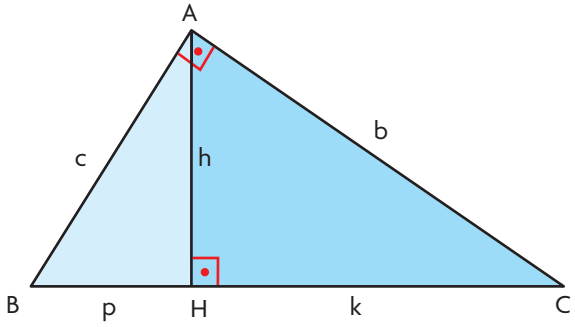
$$\frac{c}{c+d} = \frac{e}{e+f} = \frac{k}{l}$$

Kenara Paralel Doğrular Çizme

Bir üçgenin herhangi bir kenarına içinde ya da dışında bulunan bir noktadan çizilecek paralel doğrular ile temel benzerlik teoremi gereği benzer üçgenler elde edilir.



Öklid Teoremi:



Dik üçgende dik açıdan hipotenüse bir dikme çizilerek benzer üçgenler elde edilir.

Bu benzer üçgenlerde, benzerlik bağıntılarıyla elde edilen formüller birçok soru çözümünde kolaylık sağlar.

$h^2 = p \cdot k$

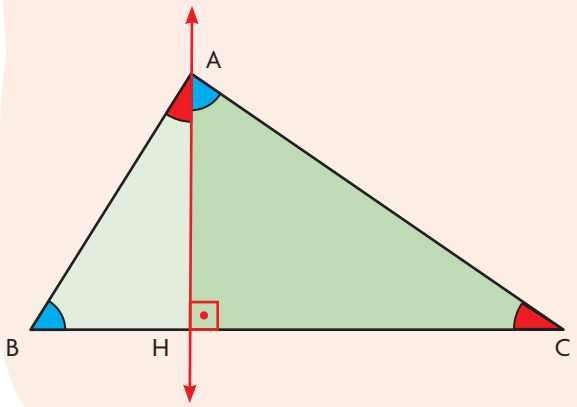
$b^2 = k \cdot (p + k)$

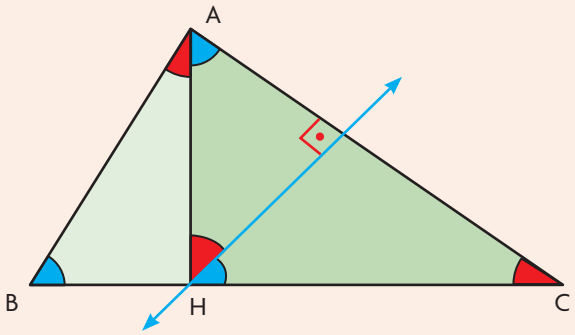
$c^2 = p \cdot (p + k)$

$b \cdot c = a \cdot h \quad (p + k = a)$

BİLGİ

Bir dik üçgende dik açıdan hipotenüse çizilen yükseklik ile başlangıçtaki dik üçgene benzer dik üçgenler elde edilebilir.





UYGULAYARAK ÖĞRENİYORUM

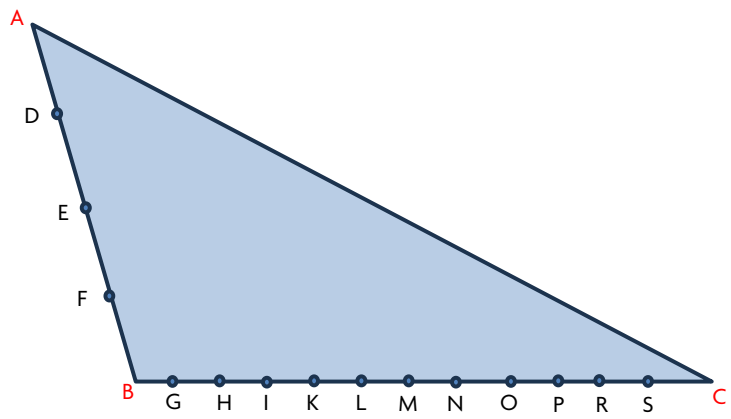
Amaç: Bu bölümde bilgilerinizi etkinlikler ve uygulamalarla pekiştirmenizi, öğrenmeyi daha kalıcı hâle getirmenizi amaçlıyoruz.

Etkinliklerde verilen adımları dikkatle uygulayınız. Çalışmanızı güvenli ve düzenli bir şekilde yapınız.

ETKİNLİK 1.

Noktalardan Üçgene

Aşağıdaki ABC üçgeninin AB kenarı 4 eş, BC kenarı 12 eş parçaya bölünmüştür.



Verilenlere göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

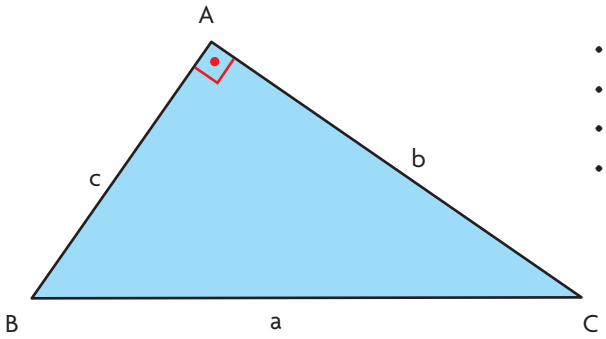
a) AB kenarı üzerinde verilen noktalar ile BC kenarı üzerinde verilen noktalardan hangileri birleştirilirse oluşan üçgenler ABC üçgenine benzer olur?

b) ABC üçgeninin AC kenarının uzunluğu 36 cm ise D ve P noktaları birleştirilerek elde edilen doğru parçasının uzunluğu kaç santimetre olur?

ETKİNLİK 2.

Dik Üçgenden Dik Üçgene

Aşağıda ABC dik üçgeni verilmiştir.



- A noktasından BC kenarına dik bir doğru çiziniz.
- Çizdiğiniz doğrunun BC kenarını kestiği nokta D olsun.
- D noktasından AC kenarına bir dik doğru daha çiziniz.
- Çizdiğiniz doğrunun AC kenarını kestiği nokta E noktası olsun.

a) Elde edilen benzer üçgenleri yazınız.

b) Son durumda elde edilen görselde paralel olan doğru parçaları hangileridir?

c) Oluşacak üçgenlerde $|BC| = 5$ cm, $|AB| = \sqrt{5}$ cm olduğunda $|AE| = ?$

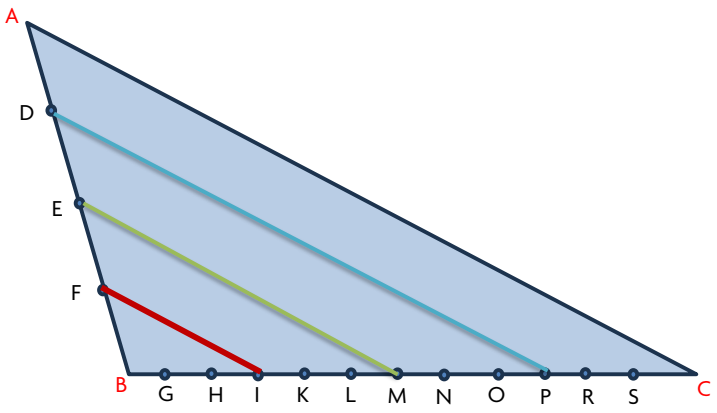
GERİ BİLDİRİM

Bu geri bildirim sayesinde kendi cevabınızı kontrol edebilir, hatalarınızı düzelterek öğrenmenizi pekiştirebilirsiniz.

ETKİNLİK 1.

ÇÖZÜM

Noktalardan Üçgene

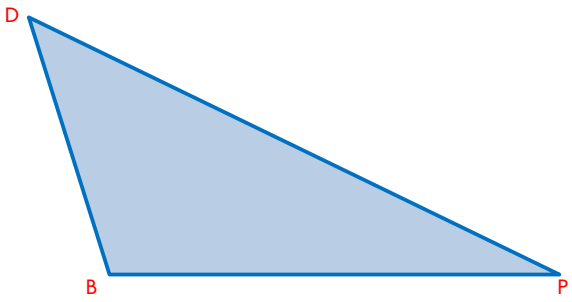


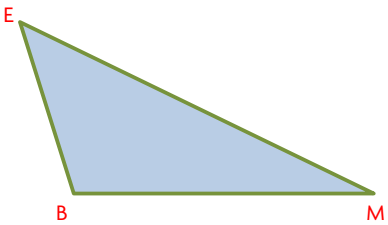
HATIRLATMA

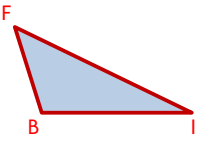
Kenar-Açı-Kenar Benzerliği

İkişer kenar uzunluğu orantılı ve bu kenarların arasındaki açıları eş olan iki üçgen, karşı kenar uzunlukları da aynı orantıya sahip olacağı için benzerdir.

a) D–P noktaları birleştirilirse elde edilen DBP üçgeni,
E–M noktaları birleştirilirse elde edilen EBM üçgeni,
F–I noktaları birleştirilirse elde edilen FBI üçgeni,
ABC üçgeni ile benzer olur.







b) D noktası ile P noktası birleştirilirse elde edilen DBP üçgeni ile ABC üçgeni benzer olur. Çünkü

$\frac{|BD|}{|BA|} = \frac{3a}{4a} = \frac{3}{4}$ ve $\frac{|BP|}{|BC|} = \frac{9b}{12b} = \frac{3}{4}$

olarak bulunur.

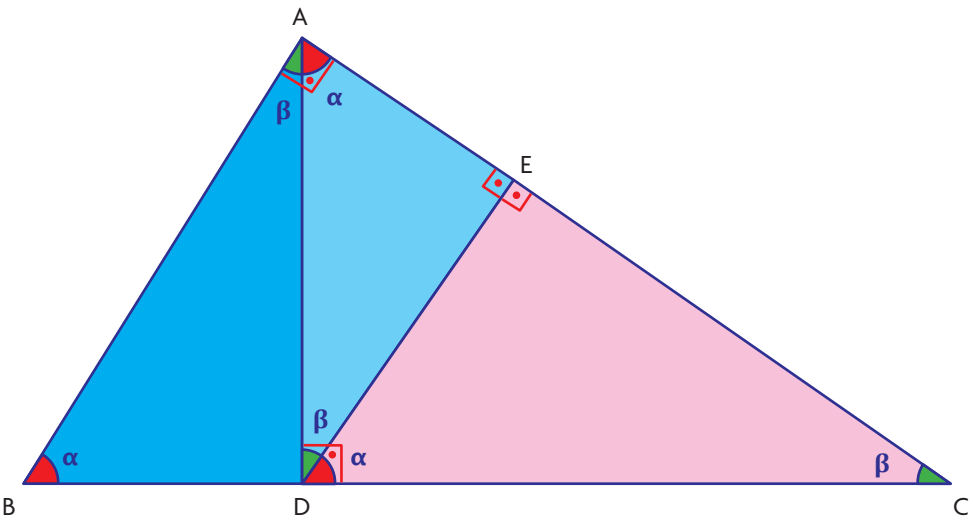
B açısı ortak olduğundan Kenar–Açı–Kenar benzerlik teoremine göre üçgenler benzer olur.
[DP] ve [AC] birbirine paralel olur ve

$\frac{|DP|}{|AC|} = \frac{3}{4}$ bulunur. Bu durumda DBP üçgeni ile ABC üçgenin benzerlik oranı $\frac{3}{4}$ olur.

Benzerlik oranı $= \frac{3}{4}$ olduğundan

$\frac{x}{24} = \frac{3}{4}$ $x = 18$ cm olur.

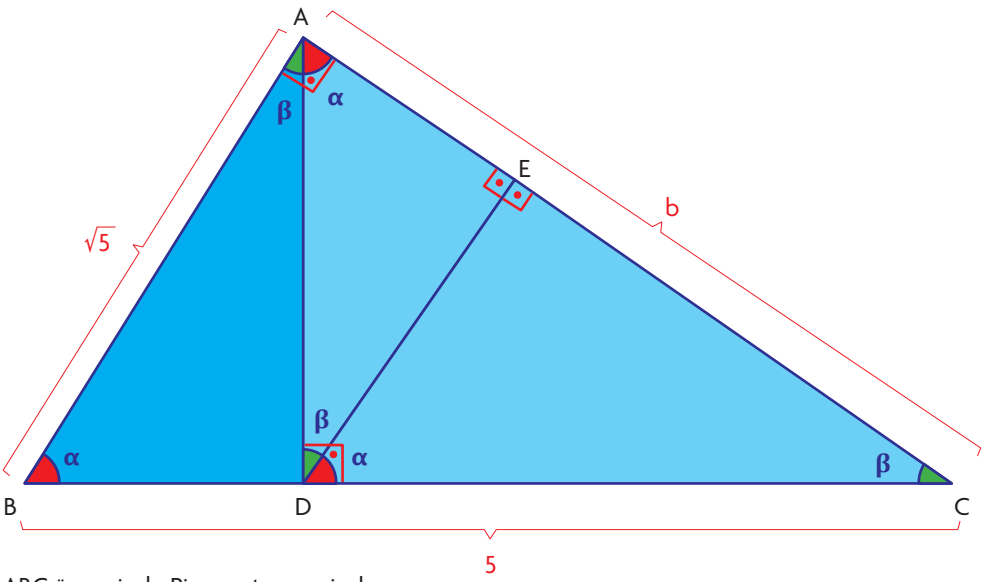
ETKİNLİK 2.
ÇÖZÜM
Dik Üçgenden Dik Üçgene



a) $\widehat{(ABC)} \sim \widehat{(DBA)}$
$\widehat{(ABC)} \sim \widehat{(EAD)}$
$\widehat{(ABC)} \sim \widehat{(EDC)}$
$\widehat{(ABC)} \sim \widehat{(DAC)}$

b) AB doğru parçası ile DE doğru parçası birbirine paraleldir.
[ABI] // [AE]

c) $|BC| = 5$ cm $|AB| = \sqrt{5}$ cm



ABC üçgeninde Pisagor teoreminden

$$(\sqrt{5})^2 + a^2 = 5^2$$
$$5 + a^2 = 25$$
$$a^2 = 20$$
$$a = 2\sqrt{5} \text{ cm bulunur.}$$

ABC üçgeninde a yerine yazılırsa Öklid teoreminden

$$|AD| \cdot 5 = \sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5}$$
$$5|AD| = 10$$
$$|AD| = 2 \text{ cm bulunur.}$$

ADB üçgeninde |BD| yerine yazılırsa Pisagor teoreminden

$$2^2 + |BD|^2 = (\sqrt{5})^2$$
$$4 + |BD|^2 = 5$$
$$|BD|^2 = 1$$
$$|BD|^2 = 1 \text{ cm bulunur.}$$

DBA ve EAD üçgenlerinde benzerlikten

$$\frac{|AB|}{|AD|} = \frac{|BD|}{AE}$$

$$\frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{x}$$

$$x \cdot \sqrt{5} = 2 \qquad x = \frac{2\sqrt{5}}{5} \text{ cm}$$

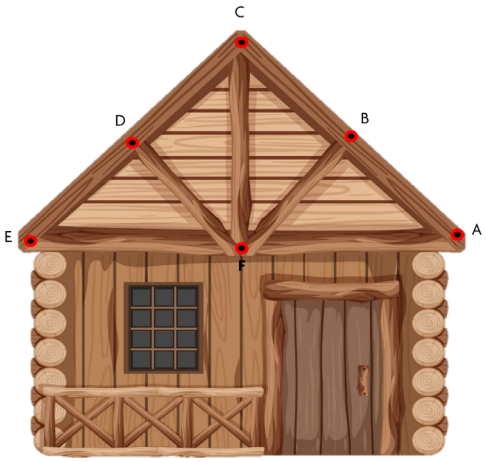
$$x = \frac{2}{\sqrt{5}} \qquad |AE| = \frac{2\sqrt{5}}{5} \text{ cm bulunur}$$

DEĞERLENDİRİYORUM

Amaç: Bu bölümde öğrendiklerinizi gözden geçirmenizi, kendi öğrenme sürecinizi değerlendirmenizi ve eksiklerinizi fark etmenizi amaçlıyoruz. Soruları dikkatle yanıtlayınız. Cevaplarınızı geri bildirimlerle karşılaştırarak eksik gördüğünüz noktaları tekrar ediniz.

SORULAR

1. Aşağıda düz bir zemin üzerinde bulunan ahşap kulübenin çatısının ön yüzündeki bazı köşeler A, B, C, D, E ve F noktaları olarak isimlendirilmiştir. A, B, C ve C, D, E noktaları doğrusal olmak üzere bu noktalar ve bu noktalar ile oluşan geometrik şekillerle ilgili aşağıdaki bilgiler verilmiştir.



$|EC| \perp |AC|$

$|FD| \perp |EC|$

$|FB| \perp |AC|$

$|CF| \perp |AE|$

$|EF| = |AF|$

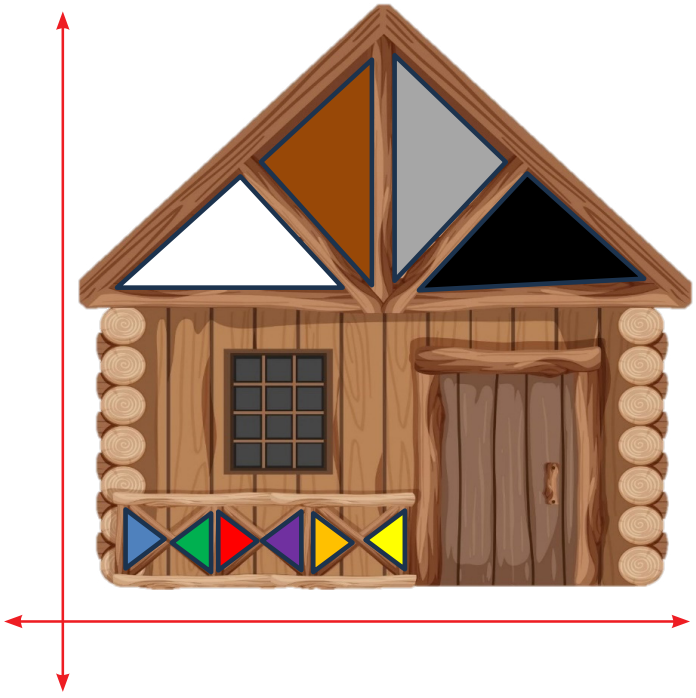
Verilen bilgilere göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) Kulübenin çatısında oluşan üçgenlerden benzerlik oranı 1 olan üçgenleri yazınız. Bu üçgenler için ne söylenebilir?

b) Kulübenin çatısında oluşan üçgenlerden CBF üçgeni ile benzerlik oranı 2 olan üçgeni yazınız.

c) Kulübenin çatısında oluşan üçgenlerden CBF üçgeni ile benzerlik oranı $\sqrt{2}$ olan üçgenleri yazınız.

2. Aşağıda düz bir zemin üzerinde bulunan ahşap kulübenin çatısındaki ve verandasındaki çitlerle oluşan birbirine eş üçgenler farklı renklerle gösterilmiştir.

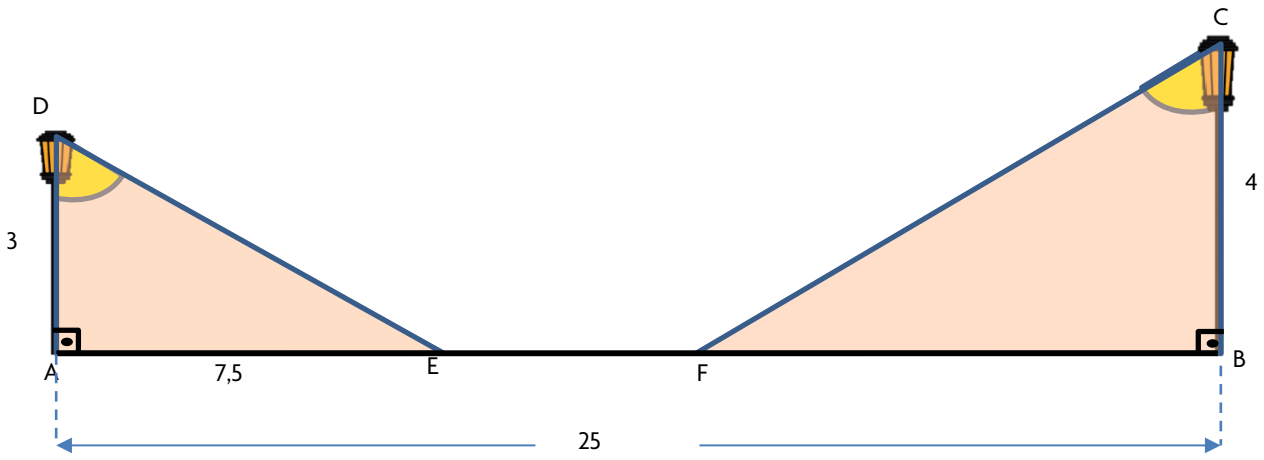


a) Aşağıdaki tabloda eş üçgen ikilileri verilmiştir. Buna göre eş üçgenler elde edilirken kullanılabilecek dönüşümleri belirtiniz.

(Dönüşümler, kulübenin zeminine paralel bir doğru ve kulübenin zeminine dik bir doğruya göre düşünülecektir.)

Dönüşümler / Üçgenler	Yansıma	Öteleme	Dönme
Mavi-Yeşil			
Mavi-Turuncu			
Mavi-Mor			
Kırmızı-Sarı			
Beyaz-Siyah			
Beyaz-Gri			
Kahverengi-Gri			
Kahverengi-Siyah			

3. Aşağıdaki görselde doğrusal bir yol üzerinde aralarında 25 metre mesafe olan A ve B noktalarına yerleştirilmiş, yüksekliği değiştirilebilen, sabit bir aydınlatma açısına sahip olan sokak lambaları verilmiştir. A ve B noktalarındaki lamba direklerinin yükseklikleri sırası ile 3 ve 4 metre olup A noktasında bulunan sokak lambası yol üzerinde 7,5 metrelik kısmı aydınlatabilmektedir.



Buna göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) Yol üzerinde aydınlatılmayan kısmın uzunluğu kaç metredir?

b) Yol üzerinde aydınlatılmayan kısmın da aydınlatılabilmesi için A noktasında bulunan direk kaç metre sağa ötelenmelidir?

c) A noktasındaki sokak lambasının boyu değiştirilerek FBC üçgenine eş bir üçgen oluşturulduğunda yol üzerinde aydınlatılmayan kısmın uzunluğu kaç metre olduğunu bulunuz.

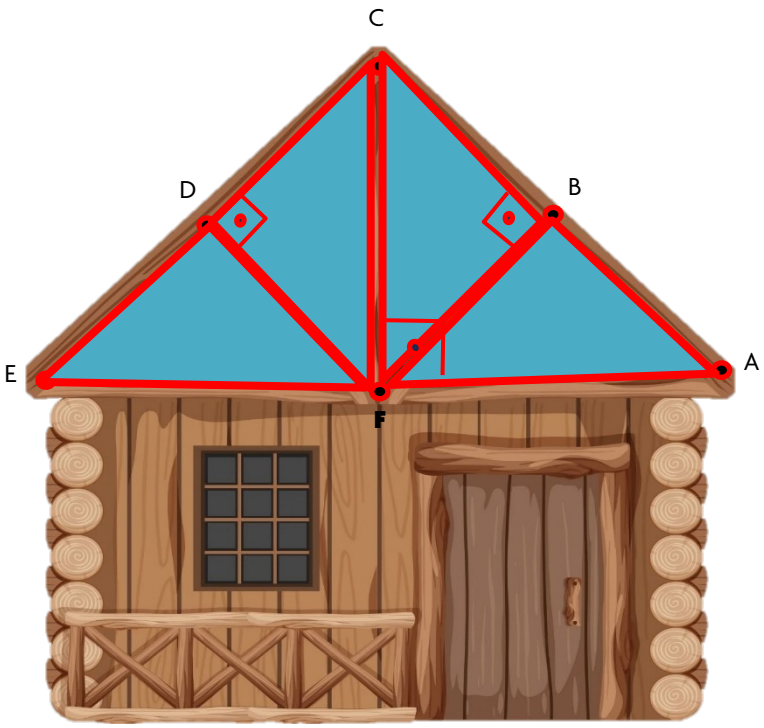
4. Aşağıda verilen tablodaki önermelerden doğru olanların karşısına D ve yanlış olanların karşısına Y yazınız.

	Önerme	D/Y
1	Eş iki üçgenin karşılıklı olarak her üç açısı birbirine eşittir.	☐
2	Eş iki üçgende eşit açıların karşısındaki kenarların oranı 1'dir.	☐
3	Bütün eş üçgenler aynı zamanda benzerdir ve her benzer üçgen aynı zamanda eş üçgenlerdir.	☐
4	Benzer üçgenlerin benzerlik oranı 1 olamaz.	☐
5	Benzer iki üçgenin karşılıklı olarak üç açısı da birbirine eşittir.	☐
6	Bütün dik üçgenler benzerdir.	☐
7	Bütün eşkenar üçgenler birbiri ile benzerdir.	☐
8	Herhangi bir üçgenin herhangi bir kenarına üçgenin içinde ya da dışında olan paralel bir doğru çizilerek elde edilen üçgen ilk üçgenin benzeridir.	☐
9	Bir üçgenin her bir kenar uzunluğunun iki katı alınarak elde edilen bu üçgenin benzeri olan üçgende açılar da iki katına çıkar.	☐
10	Eş iki üçgeni $\widehat{(ABD)} \cong \widehat{(DEF)}$ olarak yazmak ile $\widehat{(ABC)} \cong \widehat{(EDF)}$ olarak yazmak arasında bir fark yoktur.	☐

GERİ BİLDİRİM

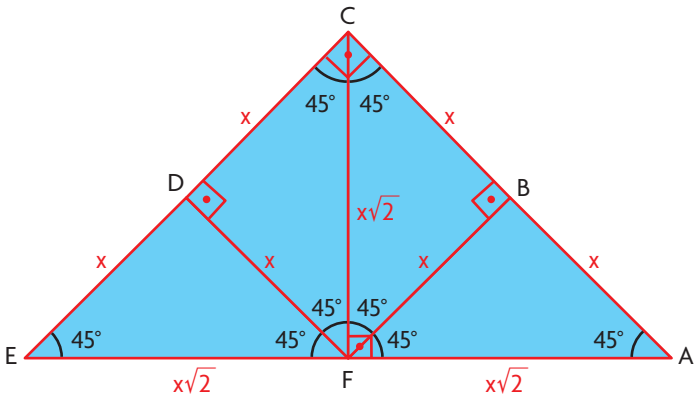
Bu geri bildirim sayesinde kendi cevabınızı kontrol edebilir, hatalarınızı düzelterek öğrenmenizi pekiştirebilirsiniz.

ÇÖZÜM 1.



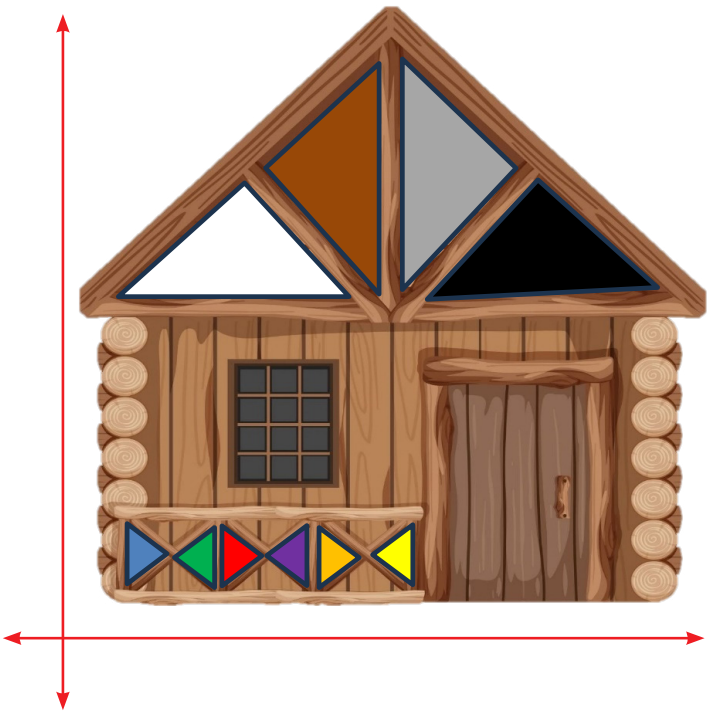
a) EDF üçgeni, CDF üçgeni, CBF üçgeni, ABF üçgeni benzerlik oranı 1 olan üçgenlerdir.
EFC üçgeni ve AFC üçgeni benzerlik oranı 1 olan üçgenlerdir.
Benzerlik oranı 1 olan üçgenler eş üçgenlerdir.

b) CBF üçgeni ile ACE üçgeni şekilde gösterilen açı ve oranlara sahip olduğu için benzerlik oranı 2'dir.



c) CBF üçgeni ile CFE üçgeni ve CBF üçgeni ile CFA üçgeninin benzerlik oranı $\sqrt{2}$'dir.

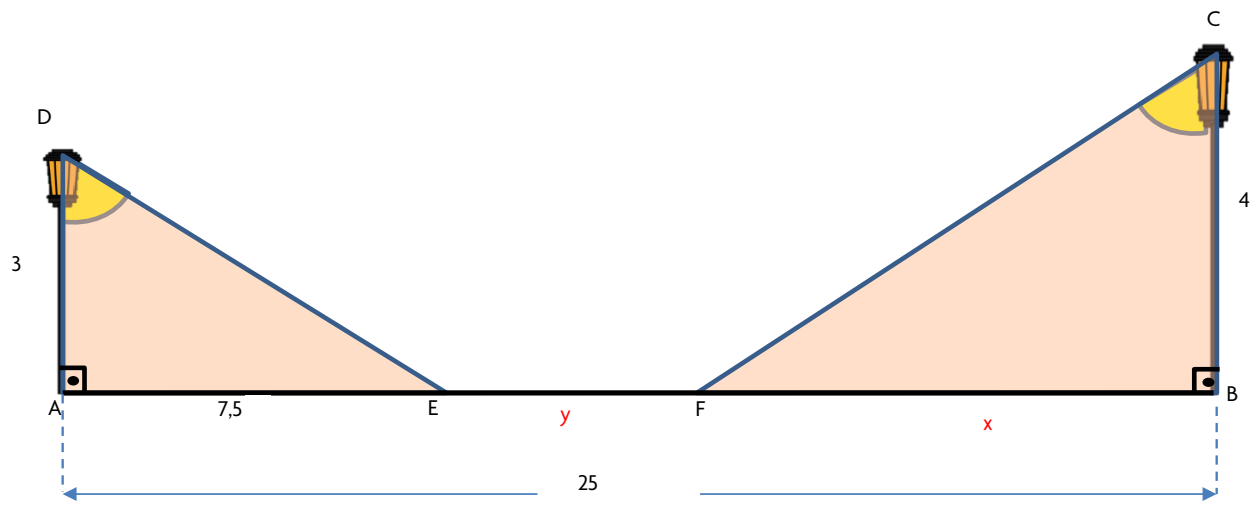
ÇÖZÜM 2.



Dönüşümler / Üçgenler	Yansıma	Öteleme	Dönme
Mavi-Yeşil	☑		
Mavi-Turuncu		☑	
Mavi-Mor	☑	☑	
Kırmızı-Sarı	☑	☑	
Beyaz-Siyah		☑	
Beyaz-Gri			☑
Kahverengi-Gri	☑		
Kahverengi-Siyah			☑

ÇÖZÜM 3.

a)



DAE ve CBF üçgenleri benzer olduğundan

$\frac{3}{7,5} = \frac{4}{x}$

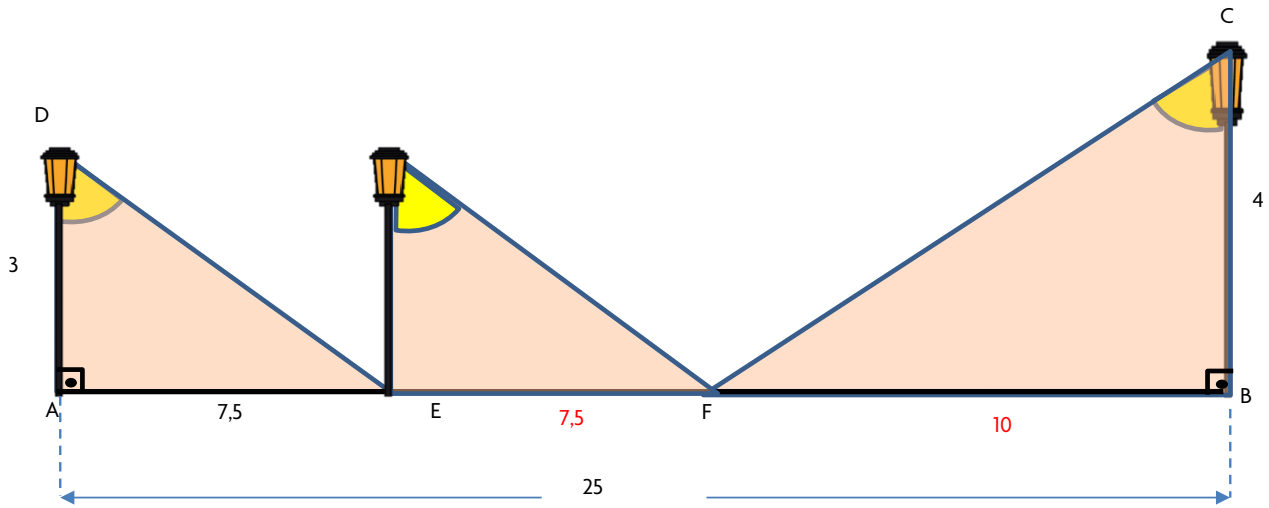
$3 \cdot x = 30$

$x = 10$ bulunur.

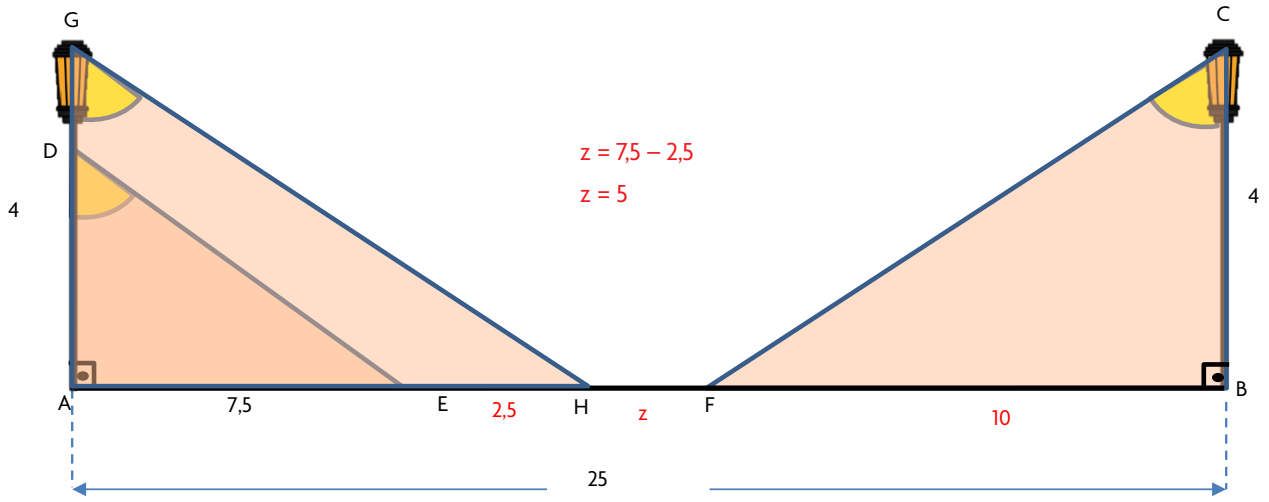
$y = 25 - 7,5 - 10$

$y = 7,5$ bulunur.

b) Öteleme dönüşümü uygulanan üçgenler eş üçgen olduğundan üçgenlerin bütün kenar uzunlukları aynı kalacaktır. Bu durumda A noktasındaki (soldaki) sokak lambası 7,5 metre sağa doğru ötelenmelidir.



c) Sol tarafa oluşturulan GAH üçgeni ile CBF üçgeni eş üçgendir ve eşit açılarının karşısındaki kenar uzunlukları birbirine eşittir.



ÇÖZÜM 4.

	Önerme	D/Y
1	Eş iki üçgenin karşılıklı olarak her üç açısı birbirine eşittir.	D
2	Eş iki üçgende eşit açıların karşısındaki kenarların oranı 1'dir.	D
3	Bütün eş üçgenler aynı zamanda benzerdir ve her benzer üçgen aynı zamanda eş üçgenlerdir.	Y
4	Benzer üçgenlerin benzerlik oranı 1 olamaz.	Y
5	Benzer iki üçgenin karşılıklı olarak üç açısı da birbirine eşittir.	D
6	Bütün dik üçgenler benzerdir.	Y
7	Bütün eşkenar üçgenler birbiri ile benzerdir.	D
8	Herhangi bir üçgenin herhangi bir kenarına üçgenin içinde ya da dışında olan paralel bir doğru çizilerek elde edilen üçgen ilk üçgenin benzeridir.	D
9	Bir üçgenin her bir kenar uzunluğunun iki katı alınarak elde edilen bu üçgenin benzeri olan üçgende açılar da iki katına çıkar.	Y
10	Eş iki üçgeni $(\overset{\triangle}{ABD}) \cong (\overset{\triangle}{DEF})$ olarak yazmak ile $(\overset{\triangle}{ABC}) \cong (\overset{\triangle}{EDF})$ olarak yazmak arasında bir fark yoktur.	Y

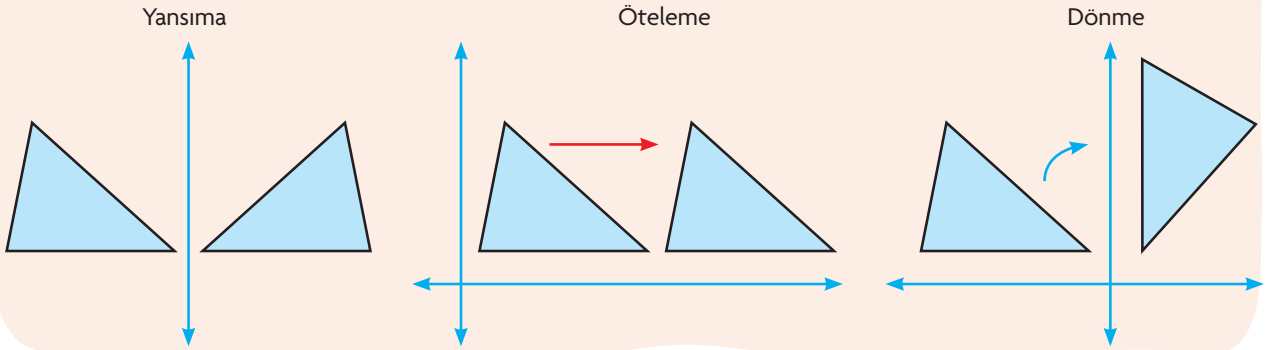
ÖĞRENDİKLERİM

Amaç:

Bu bölümde öğrendiklerinizi özetlemenizi, günlük hayatta ve farklı derslerde kullanabileceğiniz bilgileri belirlemenizi amaçlıyoruz.

Aşağıda verilen temel formüller ile bilgileri iyi öğrenmenizi ve kendi özetinizi hazırlarken bu bilgileri hatırlamada zorluk yaşadığınızı hissettiğinizde çalışma kartını tekrar gözden geçirmenizi öneririz.

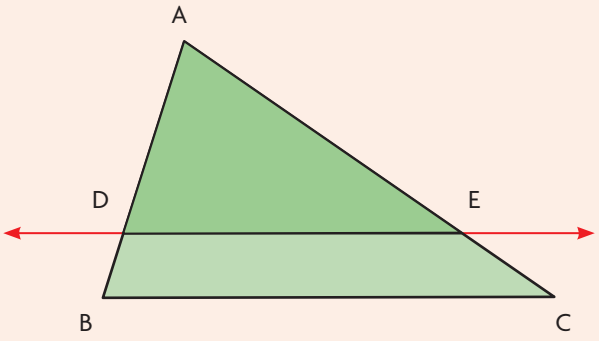
- Bir üçgene yansıma, öteleme ve dönme dönüşümleri uygulandığında başlangıçtaki üçgene eş üçgenler elde edilir.
- Eş iki üçgen, benzerlik oranı 1 olan iki üçgendir.



Bir üçgenin herhangi bir kenarına, üçgenin içinde ya da dışında olan paralel bir doğru çizilerek, üçgene benzer bir üçgen elde edebilir.

(THALES TEOREMİ)

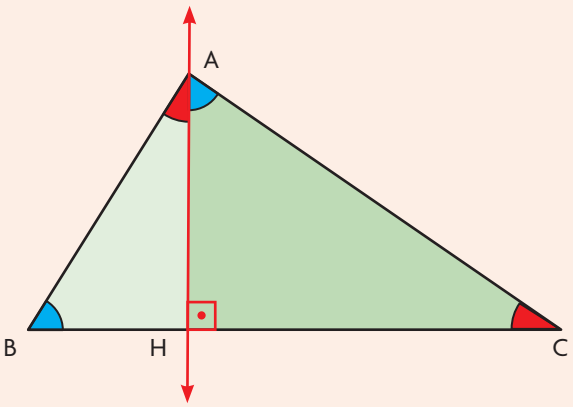
Kenara Paralel Doğrular Çizme



Dik Üçgende Dik Açıdan Dikme İndirme

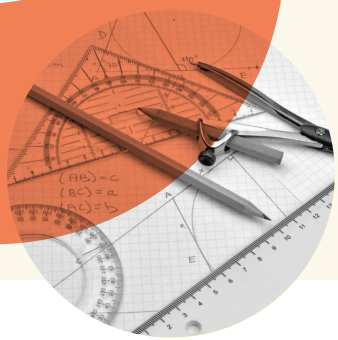
Bir dik üçgenin dik açısından hipotenüse bir dik doğru çizilerek başlangıçtaki dik üçgene benzer bir dik üçgen elde edebilir.

(ÖKLİD TEOREMİ)



ÖZET BİLGİLERİM

Daha fazlası için karekodu okutunuz.



TALES, ÖKLİD, PİSAGOR TEOREMLERİ

BAŞLARKEN

Sevgili öğrencimiz, bu çalışma kartında sizlerin bireysel öğrenme yolculuğuna destek sunmak amaçlanmaktadır. Çalışmalarınızı yürütürken "Hazırlanıyorum", "İlişkilendiriyorum", "Uygulayarak Öğreniyorum", "Değerlendiriyorum" bölümlerini sırası ile yapmanızı; her bölüm ve etkinlik sonundaki geri bildirimleri alarak ilerlemenizi; "Öğrendiklerim" bölümünde öğrenme sürecinizi gözden geçirmenizi bekliyoruz.

Bu çalışma kartı ile Tales, Öklid ve Pisagor teoremlerine ilişkin temel bilgilerin kazanılması; bu teoremlere yönelik soru çözme ve ispatları anlama becerilerinin geliştirilmesi; farklı ispat yaklaşımları arasındaki benzerlik ve farklılıkların fark edilmesi hedeflenmektedir. Ayrıca öğrenilen teoremlerin yeni durumlara uygulanarak kullanılabilmesi ve düşünce becerilerinin gelişmesi hedeflenmektedir.

HAZIRLANIYORUM

Amaç: Bu bölümde ön bilgilerinizi hatırlamanızı ve temaya hazırlıklı hâle gelmenizi amaçlıyoruz.

Aşağıda yer alan ifadeler, bu temada tamamlanması hedeflenen öğrenme çıktısını ele almadan önce sahip olmanız gereken bazı temel becerileri içermektedir. Lütfen her bir ifadeyi dikkatlice okuyunuz.

- Eğer ifadedeki bilgiye hâkim olduğunuzu düşünüyorsanız kutucuğu işaretleyiniz.
- Eğer konuyu henüz tam olarak bilmediğinizi ya da hatırlamadığınızı düşünüyorsanız kutucuğu boş bırakınız.

Bu çalışma notla değerlendirilmeyecek olup amacı yalnızca temaya ne ölçüde hazır olduğunuzu belirlemektir.

SORULAR	ÖN ÖĞRENME KONTROL LİSTESİ	✓
1	Verilen iki üçgenin hangi durumlarda eş olduklarını belirleyebilirim.	☐
2	Verilen iki üçgenin hangi durumlarda benzer olduklarını belirleyebilirim.	☐
3	Açı-Açı Benzerliğinin hangi durumlarda olduğunu açıklayabilirim.	☐
4	Kenar-Açı-Kenar Benzerliği hangi durumlarda olduğunu açıklayabilirim.	☐
5	Bir üçgende temel orantı teoremini açıklayabilirim.	☐

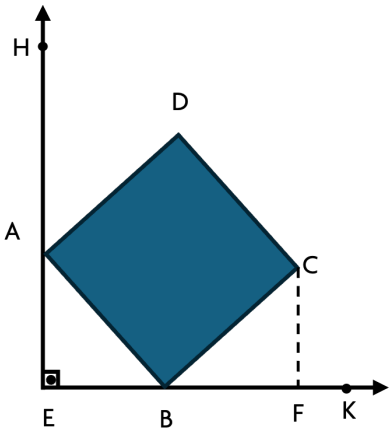
"Ön Öğrenme Kontrol Listesi"ni doldurduktan sonra aşağıda verilen "Kontrol Noktası" sorularını çözünüz ve cevaplarınızı kontrol ediniz.

KONTROL NOKTASI

SORU 1. Aşağıda verilen önermelerden doğru olanlarını (D), yanlış olanlarını (Y) ile işaretleyiniz.

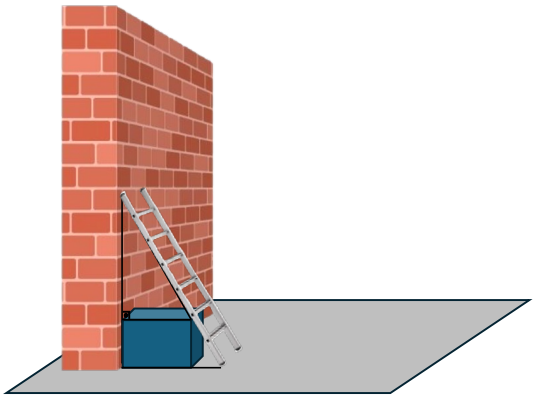
SORU NO	ÖNERME	DOĞRU	YANLIŞ
1	İki üçgenin köşeleri arasında bire bir eşleme yapıldığında üçgenlerin karşılıklı kenar uzunlukları ve karşılıklı açılarının ölçüleri eşit ise bu üçgenlere eş üçgenler denir.		
2	Eşlik "≅" sembolü ile gösterilir.		
3	Kenar uzunlukları eşit olan iki üçgen eştir.		
4	İki kenar uzunluğu ve bir iç açısının ölçüsü eşit olan iki üçgen eştir.		
5	İki üçgenin karşılıklı açılarının ölçülerinin eşit olması üçgenlerin eş olması için yeterlidir.		
6	Alanları eşit olan iki üçgen eştir.		

SORU 2. A ∈ [EH, B ∈ [EK ve [EH ⊥ [EK olmak üzere ABCD karesinde C noktasının [EK na uzaklığı 4 cm ve D noktasının [EK na uzaklığı 7 cm'dir.



Buna göre ABCD karesinin alanı kaç santimetrekaredir?

SORU 3. Aşağıdaki görselde, duvara belli bir açı ile dayanmış merdivenin ikinci basamağına teğet olan dikdörtgen prizma şeklindeki kutunun bir kenarı duvar, diğer kenarı zemin üzerindedir.



Birbirine eşit mesafede toplam 6 basamağı bulunan bu merdivenin duvara dayandığı noktanın yerden yüksekliği 350 santimetre olduğuna göre merdivenin 2. basamağına teğet olan dikdörtgen prizma şeklindeki kutunun yerden yüksekliği kaç santimetredir?

SORU 4. Aşağıda verilen eşleştirme etkinliğinde yer alan **Grup A**'da üçgenler arasındaki belirli geometrik koşullar tanımlanmıştır.

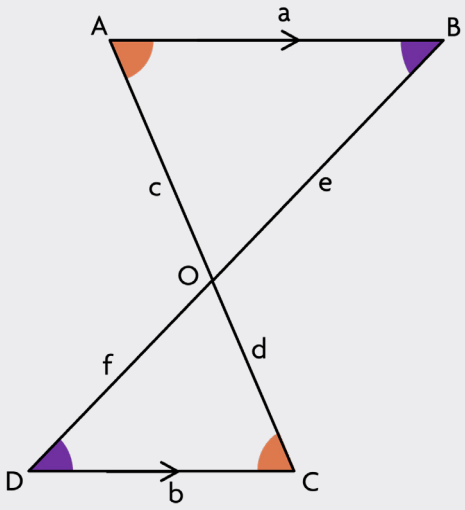
Grup B'de ise bu koşulların dayandığı temel benzerlik teoremleri ve geometrik ilkeler listelenmiştir.

	Grup A Üçgenlerde Benzerlik Durumları, Yapıları ve Koşulları
1.	Bir üçgenin bir kenarına çizilen paralel doğrunun oluşturduğu yeni küçük üçgen ile başlangıçtaki üçgen
2.	Dönüşüm geometrisinde bir üçgenin sadece öteleme ile elde edilen görüntüsü
3.	Bir üçgenin kenarları belirli bir sabit oranla küçültülerek elde edilen üçgen ile başlangıçtaki üçgen
4.	Bir üçgenin sadece dönme ile elde edilen görüntüsü ile başlangıçtaki üçgen

	Grup B Benzerlik Açısından Ortaya Çıkan Yapısal Sonuçlar
A	Bir üçgenin dönme sonucunda elde edilen üçgen ile ilk üçgen eştir.
B	Öteleme sonucunda elde edilen üçgen ile ilk üçgenin kenarları orantılı olduğundan iki üçgen ile benzerdir.
C	Geometrik dönüşüm öteleme yalnızca konumu değiştirir, şekil ve boyut korunur, dolayısıyla üçgenler eştir.
D	Üçgenler arasında (A.A) Açı-Açı benzerliği doğar.
E	Kenar-Kenar-Kenar (K.K.K.) Benzerlik Teoremine göre benzerdir.
F	Üçgenler arasında (K.A.K) Kenar-Açı-Kenar eşliği doğar.

A sütununda verilen maddeleri, B sütunundaki uygun seçeneklerle eşleştiriniz. Her madde için yalnız bir eşleştirme yapınız. B sütunundaki seçeneklerden bazıları kullanılmayabilir.

HATIRLATMA



Aynı renkli açıların ölçüleri eşit olduğundan

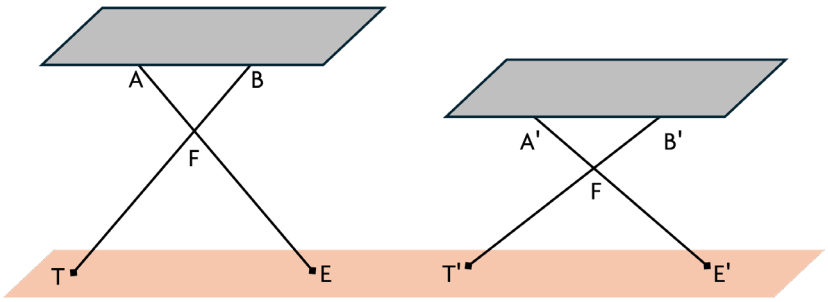
$\widehat{ABO} \approx \widehat{CDO}$

Açı-açı benzerlik teoremine göre benzerdir. Bundan dolayı

$$\frac{|AB|}{|DC|} = \frac{|AO|}{|OC|} = \frac{|BO|}{|OD|}$$ eşitliği yazılır.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$$

SORU 5.



Şekil 1 Şekil 2

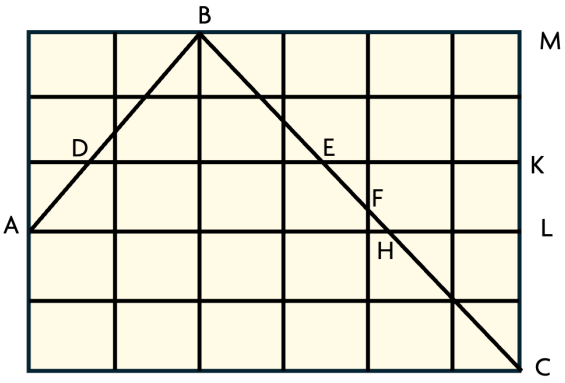
Hatice Hanım, ütü yapmak için Şekil 1'de gösterilen ütü masasının yüksekliğini kendisine uygun olacak biçimde ayarlamıştır. Ancak küçük kızı ütü masasıyla oynarken masayı aşağı indirerek [AB] nın uzunluğunu 6 cm artırmış ve Şekil 2'deki durum oluşmuştur.

Ütü masasının ayarı, F noktası sabit kalacak şekilde alt ayakların açılıp kapanmasıyla yapılmaktadır. Alt ayaklar arasındaki mesafe daraldıkça masa yükselmekte, mesafe arttıkça masa alçalmaktadır. Ütü yapılan üst yüzey ise her iki durumda da zemine paralel olacak biçimde konumlanmaktadır.

|AB| = 30 cm, F noktasının zemine uzaklığı 30 cm ve AFB üçgeninin alanı 180 cm^2 dir.

Buna göre Şekil 2 'deki ütü masasında IT'E'I kaç santimetredir?

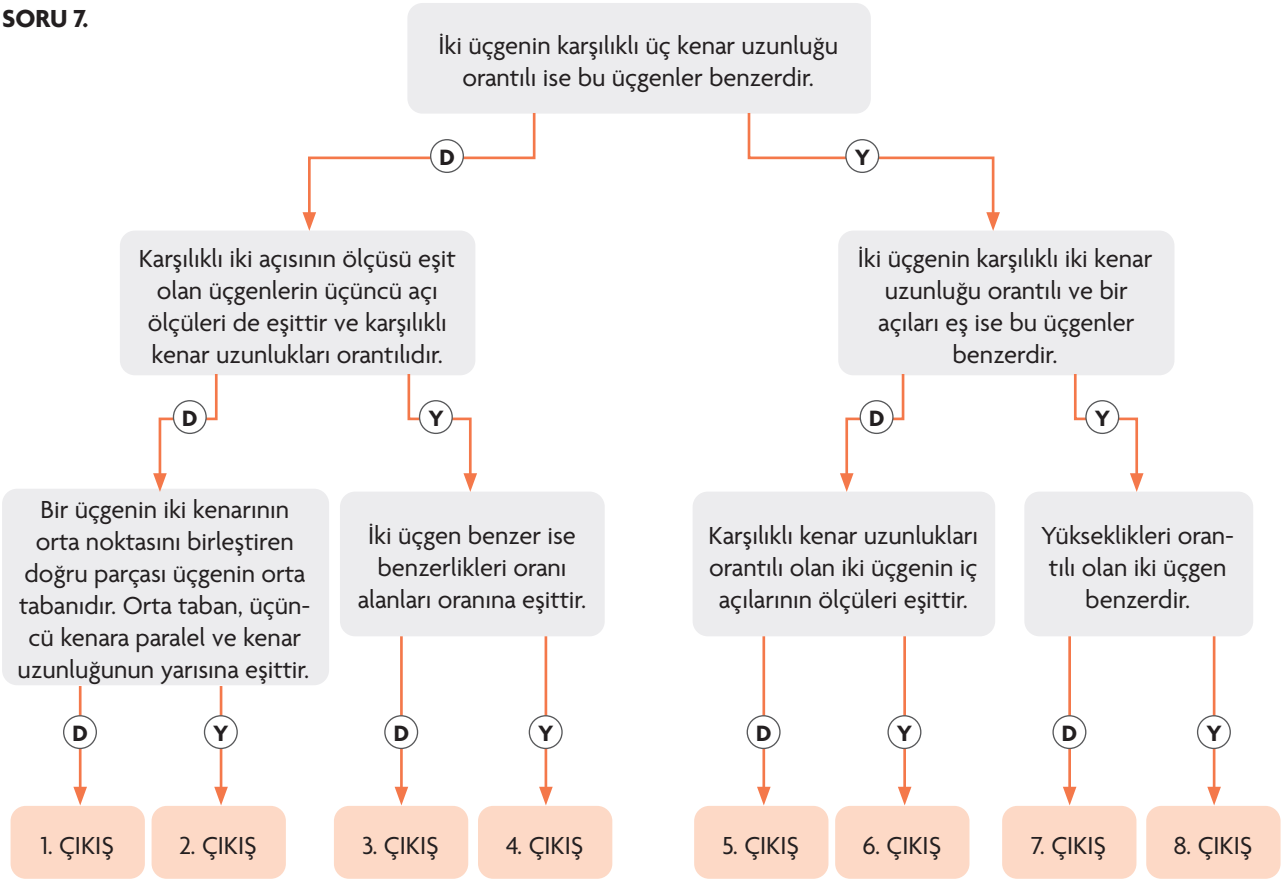
SORU 6. Aşağıdaki 30 eş kareden oluşan bir zeminde A, B ve C noktaları karelerin köşeleri üzerindedir.



Yukarıdaki şekil ile ilgili öğrenci yorumları aşağıdaki tabloda verilmiştir. Yorumları inceleyerek doğru veya yanlış olma durumlarına göre uygun olanı işaretleyiniz.

ÖĞRENCİLER	ÖĞRENCİ YORUMLARI	DOĞRU	YANLIŞ
1. Öğrenci	BDE ve BAH açılarının ölçüleri eşittir çünkü bu açılar yöndeş açılardır.		
2. Öğrenci	BED ve BHA açılarının ölçüleri eşittir çünkü bu açılar yöndeş açılardır.		
3. Öğrenci	BDE ve BAH üçgenleri benzer üçgenlerdir.		
4. Öğrenci	$\frac{\lvert KE\rvert}{\lvert MB\rvert} = \frac{3}{2}$		
5. Öğrenci	$\lvert DE\rvert$ nun karenin bir kenar uzunluğuna oranı 3 olur.		

SORU 7.



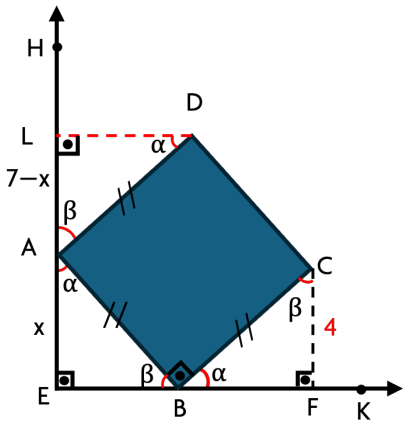
GERİ BİLDİRİM

Bu geri bildirim sayesinde kendi cevabınızı kontrol edebilir, hatalarınızı düzelterek öğrenmenizi pekiştirebilirsiniz.

ÇÖZÜM 1.

SORU NO	ÖNERME	DOĞRU	YANLIŞ
1	İki üçgenin köşeleri arasında birebir eşleme yapıldığında üçgenlerin karşılıklı kenar uzunlukları ve karşılıklı açılarının ölçüleri eşit ise bu üçgenlere eş üçgenler denir.	✓	
2	Eşlik "≅" sembolü ile gösterilir.	✓	
3	Kenar uzunlukları eşit olan iki üçgen eştir.	✓	
4	İki kenar uzunluğu ve bir iç açısının ölçüsü eşit olan iki üçgen eştir.		✓
5	İki üçgenin karşılıklı açılarının ölçülerinin eşit olması üçgenlerin eş olması, için yeterlidir.		✓
6	Alanları eşit olan iki üçgen eştir.		✓

ÇÖZÜM 2.



CBF üçgeninde iç açı ölçüleri α ve β olarak adlandırılır. α + β = 90° olarak bulunur. D noktasından [EH na dikme çizilerek elde edilen DLA üçgeninin iç açı ölçüleri α, β olur.

AEB üçgeninin iç açı ölçüleri α, β olur. ABCD kare olduğundan tüm kenar uzunlukları eşit olur. Dolayısıyla AEB, CBF ve DLA üçgenleri eş üçgenler olur.

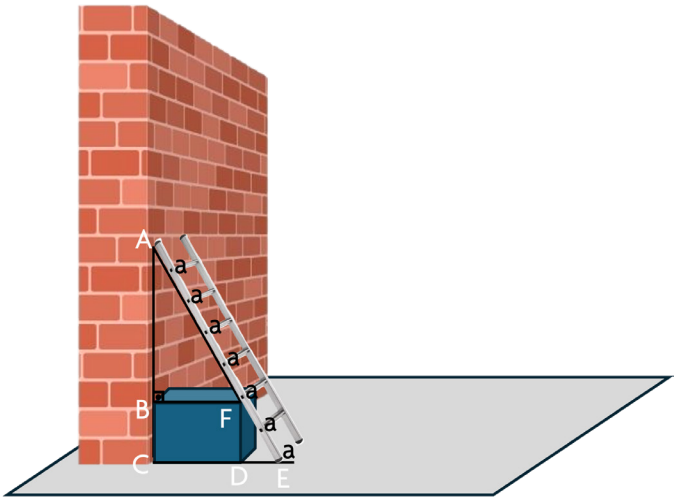
(A.K.A) eşliği

O hâlde |LA| = |CF|, 7 − x = 4 ve x = 3 cm olarak bulunur.

AEB dik üçgeninin dik kenar uzunlukları 3 ve 4 cm olduğundan 3-4-5 özel üçgeninden karenin bir kenar uzunluğu 5 cm olarak bulunur.

O hâlde ABCD karesinin alanı 25 santimetrekare olarak bulunur.

ÇÖZÜM 3.



Merdiven basamağının uzunluğu a ve zemin ile duvar arasında oluşan ACE üçgeninde |AC| = 350 cm'dir. Merdiven kenarı ile kutu ve zemin arasında kalan bölge FDE dik üçgeni olarak adlandırılsın. Bu iki üçgen Açı-Açı benzerlik teoremine göre benzerdir.

O hâlde bu üçgenlerde temel orantı teoremine göre

$$\frac{2\cdot a}{7\cdot a}=\frac{|FD|}{|AC|}$$

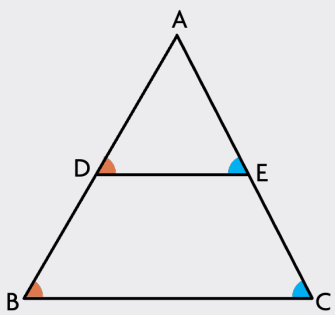
$$\frac{2}{7}=\frac{|FD|}{|AC|}$$

|FD| = 100 cm olarak bulunur.

HATIRLATMA

ABC üçgen ve [DE] // [BC] dır. Bu üçgeni inceleyerek temel orantı teoremini yazalım.

ADE ve ABC üçgenlerinde eşit açı ölçüleri aynı renk ile gösterilmiştir.

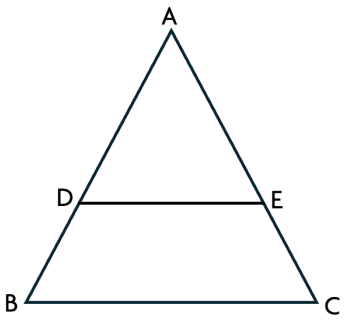


$m(\widehat{ADE}) = m(\widehat{ABC})$ $\qquad$ $m(\widehat{AED}) = m(\widehat{ACB})$

$\widehat{ADE} \approx \widehat{ABC}$

$$\frac{|AD|}{|AB|}=\frac{|AE|}{|AC|}=\frac{|DE|}{|BC|}$$

ÇÖZÜM 4.

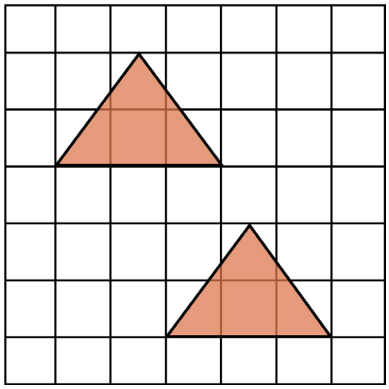


1) ABC üçgeninde bir kenara paralel doğru çizildiğinde, örneğin [BC] na paralel [DE] çizildiğinde $m(\widehat{ADE}) = m(\widehat{ABC})$ (yöndeş açılar)

$m(\widehat{AED}) = m(\widehat{ACB})$ (yöndeş açılar) olur.

O hâlde Açı-Açı benzerlik teoremine göre ADE ve ABC üçgenleri benzerdir.

1-D eşleşmesi yapılır.



2) Arka planı birim karelere ayrılmış panoya bir üçgen yerleştirilip, üçgen 2 birim sağa ve 3 birim aşağı ötelendiğinde, üçgenin sadece konumu değiştiğinden üçgenler eş olacaktır.

Geometrik dönüşüm yalnızca konumu değiştirir; şekil ve boyut korunur dolayısıyla üçgenler eştir.

2-C olur.

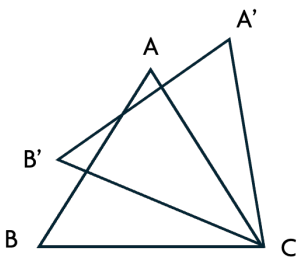


3) Bir üçgenin içine ve kenarlarının ortasına köşe noktaları denk gelecek şekilde başka bir üçgen yerleştirilmiştir. Bu ikinci üçgenin aynı şekilde içine üçgenin kenarlarının orta noktalarına köşe noktaları denk gelen üçüncü bir üçgen yerleştirilmiştir.

Bu üçgenlerin kenarları orantılı olduğundan üçgenler

Kenar-Kenar-Kenar (K.K.K.) Benzerlik Teoremine göre benzerdir.

3-E eşleşmesi yapılır.



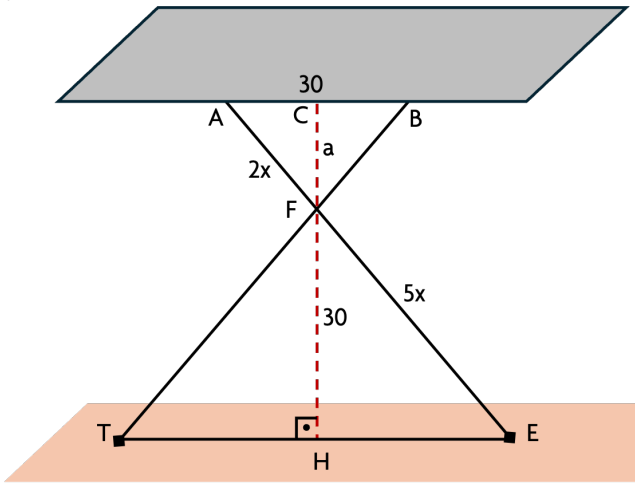
4) ABC üçgeni, C köşesi etrafında döndürülmüş A'B'C üçgeni elde edilmiştir.

Bu üçgen açıları ve kenar uzunlukları değişmediğinden iki üçgen eştir.

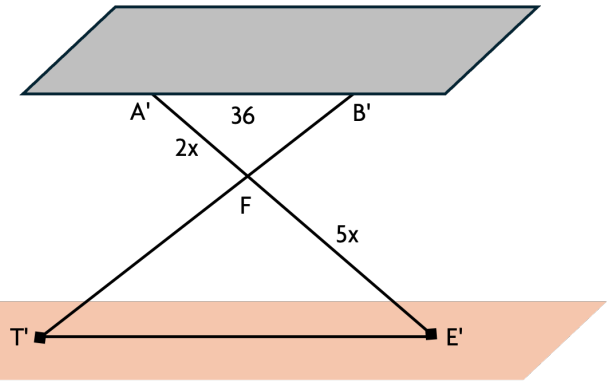
Bir üçgen döndürüldüğünde kenar uzunlukları ve açı ölçüleri değişmez, dolayısıyla elde edilen yeni üçgen ile başlangıçtaki üçgen eştir.

4-A eşleşmesi yapılır.

ÇÖZÜM 5.



Şekil 1



Şekil 2

Şekil 1'de HC dik doğrusu çizilir ve |HC| = a denilir. AFB üçgeninin alanı 180 cm^2 olduğundan

$\frac{30 \cdot a}{2} = 180$

a = 12 cm olur. Temel orantı teoreminden

$\frac{12}{30} = \frac{|AF|}{|FE|} = \frac{2}{5}$ bulunur.

Ütü masasının ayaklarının uzunluğu değişmediğinden

$\frac{|AF|}{|FE|} = \frac{|A'F|}{|FE'|}$

$\frac{|AF|}{|FE|} = \frac{|A'F|}{|FE'|} = \frac{2}{5}$ olur.

Şekil 2'de |A'F| = 2x ve |FE'| = 5x olur.

[AB] nın uzunluğu 6 cm arttığından |A'B'| = 36 cm olur.

O hâlde

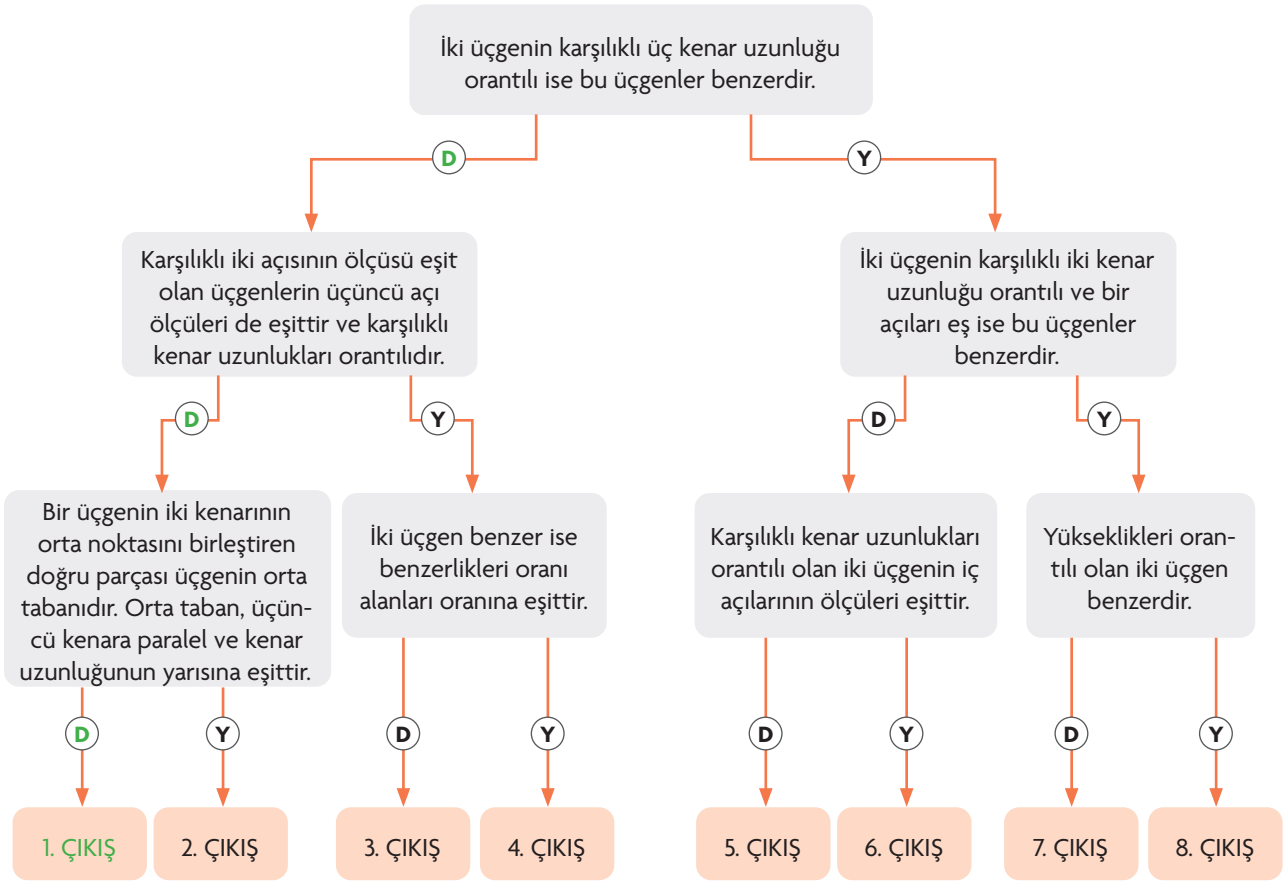
$\frac{|A'F|}{|FE'|} = \frac{2}{5} = \frac{36}{|T'E'|}$ eşitliğinden

|T'E'| = 90 cm olur.

ÇÖZÜM 6.

ÖĞRENCİLER	ÖĞRENCİ YORUMLARI	DOĞRU	YANLIŞ
1. Öğrenci	BDE ve BAH açılarının ölçüleri eşittir çünkü bu açılar yöndeş açılardır.	✓	
2. Öğrenci	BED ve BHA açılarının ölçüleri eşittir çünkü bu açılar yöndeş açılardır.	✓	
3. Öğrenci	BDE ve BAH üçgenleri benzer üçgenlerdir.	✓	
4. Öğrenci	$\frac{\|KE\|}{\|MB\|} = \frac{3}{2}$		✓
5. Öğrenci	|DE| nun karenin bir kenar uzunluğuna oranı 3 olur.		✓

ÇÖZÜM 7.

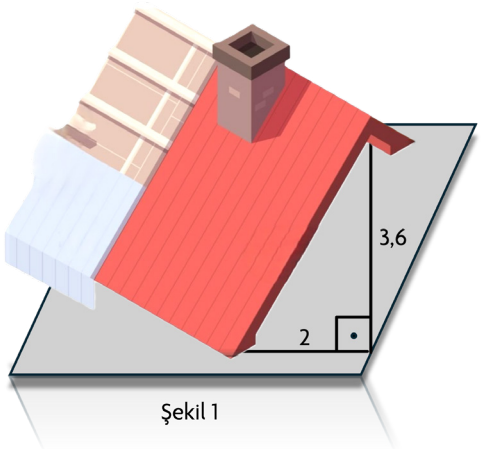

İki üçgenin karşılıklı üç kenar uzunluğu orantılı ise bu üçgenler benzerdir.
D
Y
Karşılıklı iki açısının ölçüsü eşit olan üçgenlerin üçüncü açı ölçüleri de eşittir ve karşılıklı kenar uzunlukları orantılıdır.
İki üçgenin karşılıklı iki kenar uzunluğu orantılı ve bir açıları eş ise bu üçgenler benzerdir.
D
Y
D
Y
Bir üçgenin iki kenarının orta noktasını birleştiren doğru parçası üçgenin orta tabanıdır. Orta taban, üçüncü kenara paralel ve kenar uzunluğunun yarısına eşittir.
İki üçgen benzer ise benzerlikleri oranı alanları oranına eşittir.
Karşılıklı kenar uzunlukları orantılı olan iki üçgenin iç açılarının ölçüleri eşittir.
Yükseklikleri orantılı olan iki üçgen benzerdir.
D
Y
D
Y
D
Y
D
Y
1. ÇIKIŞ
2. ÇIKIŞ
3. ÇIKIŞ
4. ÇIKIŞ
5. ÇIKIŞ
6. ÇIKIŞ
7. ÇIKIŞ
8. ÇIKIŞ

İLİŞKİLENDİRİYORUM

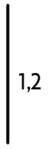
Amaç: Bu bölümde yeni öğreneceğiniz temayı; zihninizde var olan bilgileriniz, yaşantılarınız ve diğer derslerde öğrendiklerinizle ilişkilendirmenizi bekliyoruz. Verilen örneği okuyunuz. Ardından soruları yanıtlayınız. Cevaplarınızı kendi yaşamınızdan ya da çevrenizden örneklerle destekleyiniz.

ÖRNEK

Şekil 1'de verilen üçgen çatı yapımında çatı zeminine dik olan 3,6 metrelik ana direğin sabitlenebilmesi için Şekil 2'deki gibi bu direğe paralel 1,2 metre uzunluğunda bir destek çubuğu kullanılması gerekmektedir.



Şekil 1

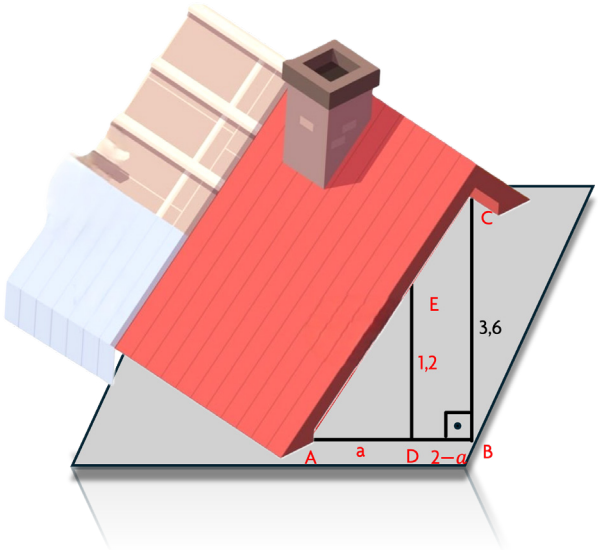


Şekil 2

Buna göre bu çubuğun çatı zemininde ve çatı üzerinde ayırdığı parçaların uzunlukları oranı kaçtır?

ÇÖZÜM

Burada olduğu gibi çevrenizde gördüğünüz yapılarda geometrik şekilleri fark edebildiniz mi?



Buradan $\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|AE|}{|EC|}$ olduğunu fark ettiniz mi?

ABC üçgeninde Temel orantı teoremi uygulanır.

$$\frac{a}{2} = \frac{1,2}{3,6}$$

$$\frac{a}{2} = \frac{1}{3}$$

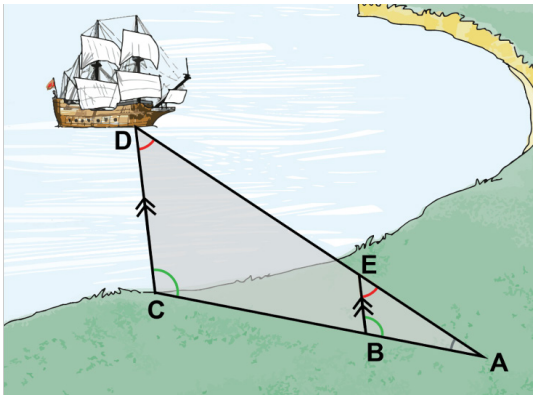
$a = \frac{2}{3}$ olur.

O hâlde çatı zemininde ayırdığı parçaların oranı

$\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{1}{2}$ olarak bulunur.

$\frac{|AE|}{|AC|} = \frac{1,2}{3,6} = \frac{1}{3}$ olduğundan çatı üzerinde ayırdığı parçaların oranı $\frac{|AE|}{|EC|} = \frac{1}{2}$ olarak bulunur.

TALES TEOREMİ



Antik kaynaklara göre Thales, doğrudan ölçülmesi mümkün olmayan uzaklıkları belirlemek için **benzer üçgenlere dayalı dolaylı ölçme yöntemini** kullanmıştır. Bu teknik, Miletli filozofun hem karada hem de su üzerinde yer alan noktaların konumlarını hesaplamasını sağlamıştır.

Gemilerin kıyıdan uzaklığını belirleme probleminde Thales'in yaptığı, antik metinlerde şu şekilde aktarılır:

1. Kıyı üzerinde ölçülebilir uzaklıkta iki nokta seçer.

Bu noktalar arasındaki mesafe ölçülür.

2. Bu iki noktadan gemiye doğru bakış doğrultuları belirlenir.

Böylece kıyıda ölçülen doğru parçası ile gemiye yönelen doğrultular bir açı oluşturur.

3. Kıyıda bu açıyla eş açıya sahip ikinci bir üçgen oluşturulur.

Bu ikinci üçgen tamamen karada olduğu için üçgenin tüm kenarları ölçülebilir.

Antik Yunan matematiğine göre

- Kıyıda kurulan iki üçgen **(A.A) Açı-Açı benzerliği** ile benzerdir.
- Benzer üçgenlerde **karşılıklı kenarların oranı sabittir.**
- Bu nedenle gemiye olan uzaklık (ölçülemeyen kenar) sadece oran kullanılarak hesaplanabilir.

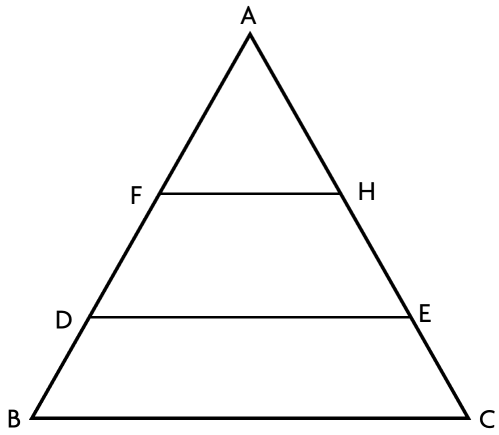
UYGULAYARAK ÖĞRENİYORUM

Amaç: Bu bölümde bilgilerinizi etkinlikler ve uygulamalarla pekiştirmenizi ve öğrenmeyi daha kalıcı hâle getirmenizi amaçlıyoruz.

Problem ya da etkinliklerde verilen adımları uygulayınız. Çalışmanızı dikkatli ve düzenli bir şekilde yapınız.

ÖRNEK

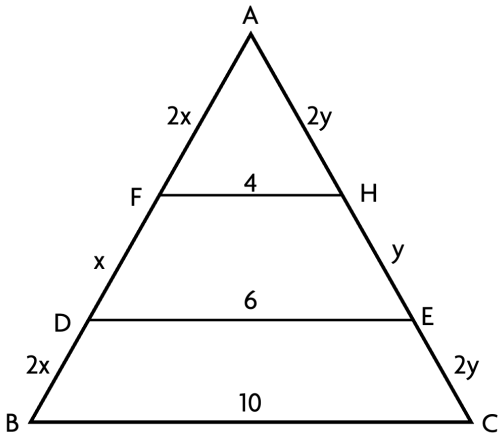
[FH] // [DE] // [BC], |FH| = 4 birim, |DE| = 6 birim ve |BC| = 10 birim olmak üzere F, D, H ve E noktaları ABC üçgeninin kenarları üzerindedir.



Buna göre $\frac{|AF|}{|FD|}, \frac{|AH|}{|HE|}, \frac{|DE|}{|BC|}$ **oranlarını bulunuz.**

ÇÖZÜM

F, D, H ve E noktaları ABC üçgeninin kenarları üzerindedir. AFH ve ADE üçgenleri Açı-Açı benzerlik teoremine göre benzerdir. O hâlde temel orantı teoreminden



$\frac{|FH|}{|DE|} = \frac{|AF|}{|AD|} = \frac{|AH|}{|AE|}$

$\frac{4}{6} = \frac{|AF|}{|AD|} = \frac{|AH|}{|AE|}$ ve |AF| = 2x, |AD| = 3x olduğundan temel orantı teoremi yazılır.

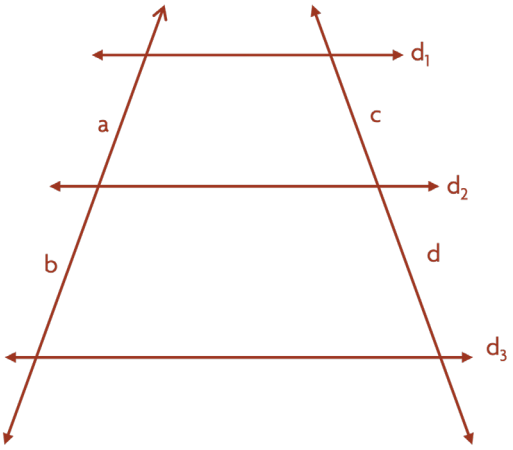
$\frac{6}{10} = \frac{|AD|}{|AB|} = \frac{|AE|}{|AC|}$ olup |AD| = 3x |AB| = 5x ve |AE| = 3y |AC| = 5y olarak bulunur.

$\frac{|AF|}{|FD|} = \frac{2 \cdot x}{x} = 2$

$\frac{|AH|}{|HE|} = \frac{2 \cdot y}{y} = 2$ ve $\frac{|DE|}{|BC|} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ olarak bulunur.

ETKİNLİK 1.

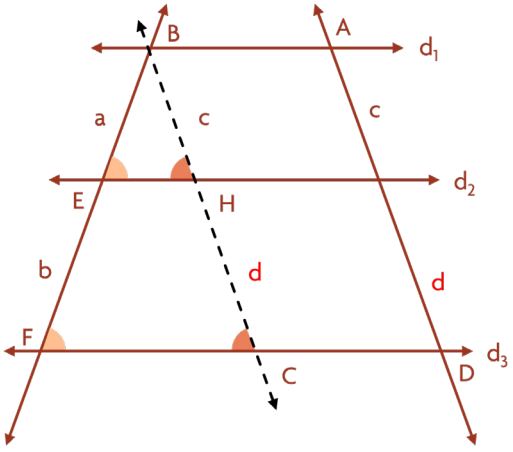
Aşağıdaki şekilde $d_1 // d_2 // d_3$ tür. Buna göre a, b, c ve d uzunlukları arasındaki ilişkiyi temel orantı teoremini kullanarak gösteriniz.



ÇÖZÜM

AD doğrusuna paralel olacak şekilde BC doğrusu çizilir. $m(\widehat{BEH}) = m(\widehat{BFC})$ yöndeş açılar olduğundan ölçüleri eşit olur.

Benzer şekilde $m(\widehat{BHE}) = m(\widehat{BCF})$ olur. O hâlde BEH üçgeni ile BFC üçgeni (A.A) Benzerlik teoremine göre benzer üçgenlerdir.



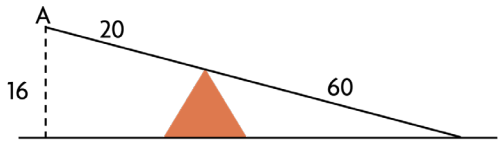
Temel orantı teoremine göre

$$\frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d} \text{ ise } \frac{a+b}{a}=\frac{c+d}{c} \text{ ise } \frac{a}{a}+\frac{b}{a}=\frac{c}{c}+\frac{d}{c}$$

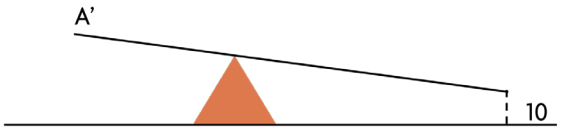
$1+\frac{b}{a}=1+\frac{d}{c}$ olup

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ olarak bulunur.

ÖRNEK



Şekil 1

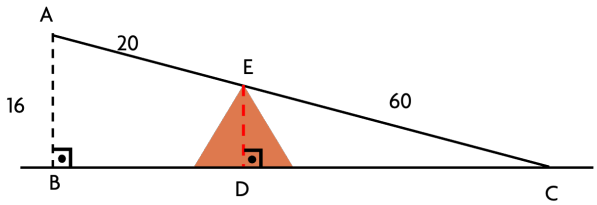


Şekil 2

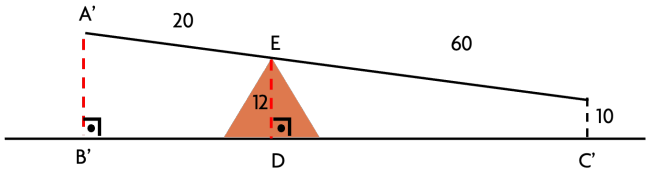
Şekil 1'de, zemin üzerine yerleştirilen ikizkenar üçgen biçimindeki bir destek takozunun tepesine konulan bir tahta ile eşit kollu olmayan bir tahterevalli oluşturulmuştur. Tahterevallinin sağ ucu Şekil 1'deki gibi yere değdiği anda sol ucunun yerden yüksekliği 16 cm olmaktadır.

Buna göre tahterevallinin sağ ucunun yerden yüksekliği Şekil 2'de olduğu gibi 10 cm yukarı çıktığında sol ucunun yere uzaklığı kaç santimetre olur?

ÇÖZÜM



Şekil 1



Şekil 2

Şekil 1'de ABC üçgeni ile EDC üçgeni Açı-Açı benzerliğine göre benzerdir.
Temel orantı teoremine göre

$$\frac{60}{60+20}=\frac{|DE|}{16}$$

$$\frac{60}{80}=\frac{|DE|}{16}$$

$|DE| = 12$ cm olur.

Şekil 2'de Tales teoremi uygulanırsa

$$\frac{20}{60}=\frac{|B'D|}{|DC'|}$$

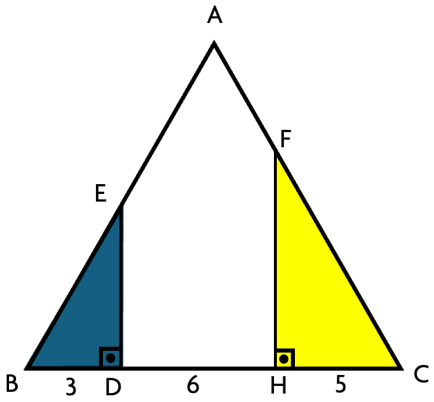
$|B'D| = 2 \cdot x$
$|DC'| = 6 \cdot x$ olur.
$6 \cdot x$ birimde $12 - 10 = 2$ birim artış varsa
$2 \cdot x$ birimde $\frac{2}{3}$ artış olacağından

$$12+\frac{2}{3}=\frac{38}{3}$$

O hâlde $|A'B'| = \frac{38}{3}$ cm olarak bulunur.

ÖRNEK

[ED] ⊥ [BC], [FH] ⊥ [BC] ve E ∈ [AB], F ∈ [AC] olacak şekilde ABC üçgeni verilmiştir.



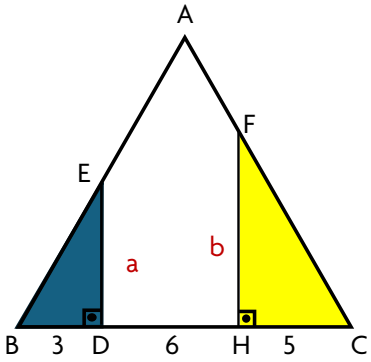
|BD| = 3 birim, |DH| = 6 birim ve |HC| = 5 birim **olduğuna göre aşağıdaki ifadelerin doğru ya da yanlış olduğunu belirleyiniz.**

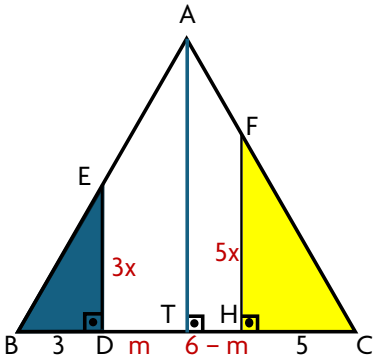
I. ( ) Mavi üçgenin alanının sarı üçgenin alanına oranı $\frac{9}{25}$ ise ABC üçgeni ikizkenar üçgendir.

II. ( ) ABC üçgeni dik üçgen ise |ED| · |FH| = 15 birimkare olur.

III. ( ) ABC üçgeni eşkenar üçgen ise sarı üçgenin alanının mavi üçgenin alanına oranı $\frac{5}{3}$ olur.

ÇÖZÜM





I. EBD üçgeninde |ED| = a ve FHC üçgeninde |FH| = b denilip bu üçgenlerin alanları yazılırsa

$A(\widehat{EBD}) = \frac{3 \cdot a}{2}$, $A(\widehat{FHC}) = \frac{5 \cdot b}{2}$

$\frac{A(\widehat{EBD})}{A(\widehat{FHC})} = \frac{\frac{3 \cdot a}{2}}{\frac{5 \cdot b}{2}}$ ise $\frac{3 \cdot a}{5 \cdot b} = \frac{9}{25}$ ve $\frac{a}{b} = \frac{3}{5}$ olur.

[AT] dikmesi çizilir. |DT| = m ve |TH| = 6 – m denilir. ABT ve ATC üçgenlerinde temel orantı teoremi yazılır.

$\frac{3}{3+m} = \frac{3 \cdot x}{|AT|}$

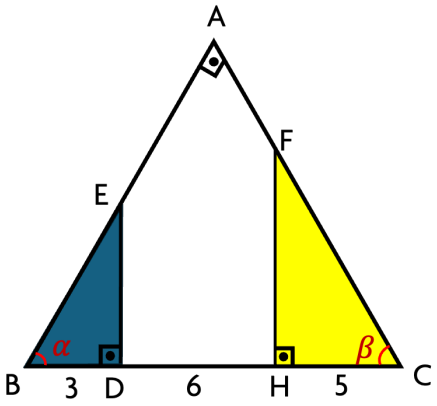
$\frac{5}{11-m} = \frac{5 \cdot x}{|AT|}$

İfadeleri oranlandığında

$\frac{3}{3+m} \cdot \frac{11-m}{5} = \frac{3}{5}$ ve 11 – m = 3 + m olur. m = 4 birim olarak bulunur.

O hâlde |BT| = |TC| olduğundan |AB| = |AC| olur.

Buradan ABC üçgeninin ikizkenar üçgen olduğu sonucu çıkar ve **I. ifade** doğrudur.



II. ABC dik üçgen ise

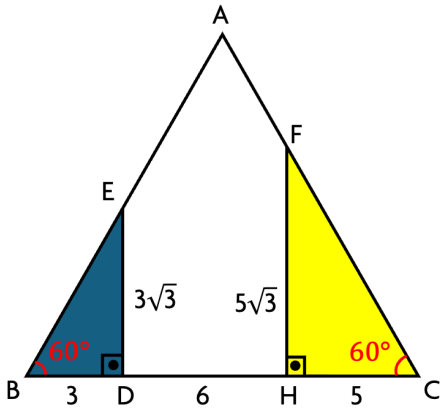
$m(\widehat{ABC}) = \alpha$ ve $m(\widehat{ACB}) = \beta$ denildiğinde $\alpha + \beta = 90°$ olduğundan EBD üçgeni ile CFH üçgeni benzerdir.

Benzerlik oranı yazılır,

$\frac{|DE|}{5} = \frac{3}{|FH|}$ olacağından $|ED| \cdot |FH| = 15$ birimkare olur.

O hâlde

II. ifade doğrudur.



III. ABC üçgeni eşkenar üçgen olduğunda

$m(\widehat{EBD}) = 60°$ ve $m(\widehat{FCH}) = 60°$ ve

$|FH| = 5\sqrt{3}$ birim,

$|ED| = 3\sqrt{3}$ birim olur.

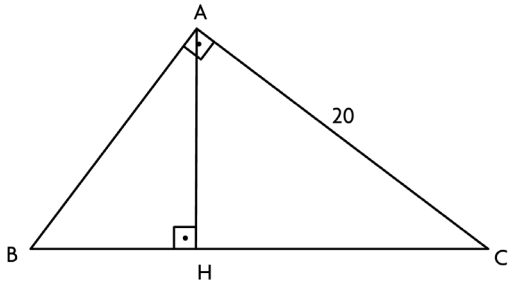
$A(\widehat{EBD}) = \frac{3 \cdot 3\sqrt{3}}{2}$, $A(\widehat{FHC}) = \frac{5 \cdot 3\sqrt{3}}{2}$

$\frac{A(\widehat{FHC})}{A(\widehat{EBD})} = \frac{\frac{15\sqrt{3}}{2}}{\frac{9\sqrt{3}}{2}} = \frac{5}{3}$ olduğundan **III. ifade** doğrudur.

ÖKLİD TEOREMİ

ÖRNEK

Aşağıdaki şekilde ABC dik üçgendir.

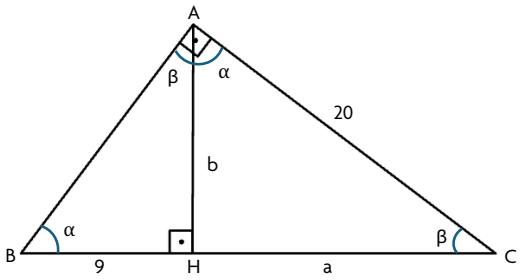


[BA] ⊥ [AC], [AH] ⊥ [BC], |AC| = 20 cm ve |BH| = 9 cm'dir.

Buna göre |BC| **nun kaç santimetre olduğunu bulunuz.**

ÇÖZÜM

Aşağıdaki şekilde ABC dik üçgendir.



$\widehat{ABH} \approx \widehat{CAH}$ üçgenleri Açı-Açı benzerliğine göre benzerdir.

O hâlde benzerlik oranlarını yazalım.

$\frac{b}{a} = \frac{9}{b} \Rightarrow b^2 = 9a \Rightarrow b = 3\sqrt{a}$

$\widehat{AHC} \approx \widehat{ACB}$

$\frac{20}{a+9} = \frac{a}{20}$

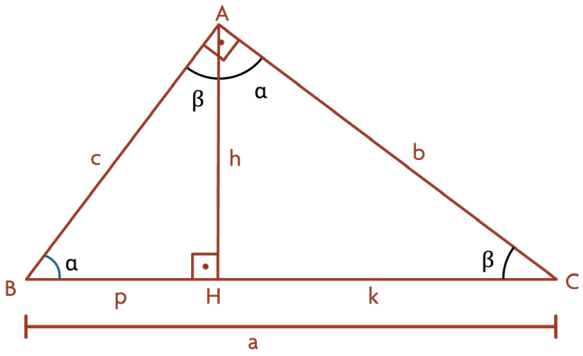
$a^2 + 9a = 400 \Rightarrow a^2 + 9a - 400 = 0$

$(a - 16)(a + 25) = 0 \Rightarrow a = 16$ cm

|BC| = 25 cm olarak bulunur.

ETKİNLİK 2. Öklid Teoremi

Aşağıda verilen şekilde kenar uzunlukları arasındaki ilişkileri bulunuz.

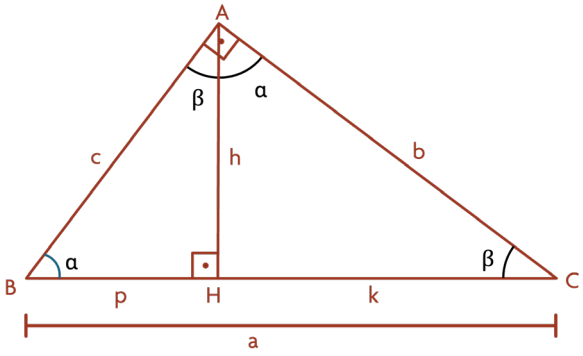


$m(\widehat{ABH}) = m(\widehat{HAC})$ $\quad$ $m(\widehat{ABH}) = m(\widehat{HAC})$

$\widehat{HAB} \approx \widehat{HCA}$

$\frac{|HB|}{|HA|} = \frac{|HA|}{|HC|}$ ise $\frac{p}{h} = \frac{h}{k}$

$h^2 = p \cdot k$ bulunur.

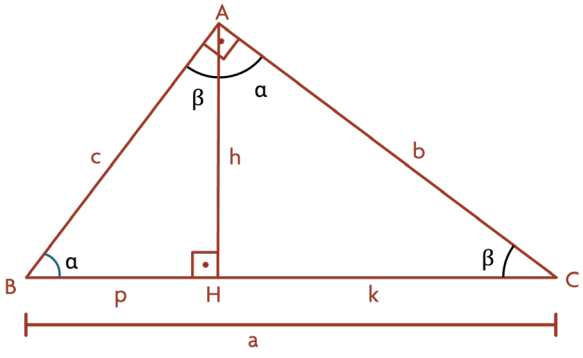


$m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{HBA})$ $\quad$ $m(\widehat{BAH}) = m(\widehat{ACB})$

$\widehat{ABC} \approx \widehat{HBA}$

$\frac{|AB|}{|HB|} = \frac{|BC|}{|BA|}$ ise $\frac{c}{p} = \frac{a}{c}$

$c^2 = p \cdot a$ bulunur.

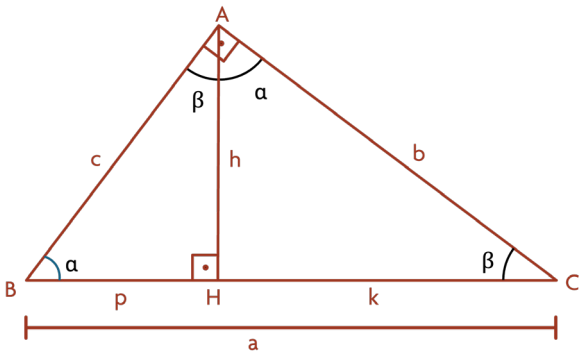


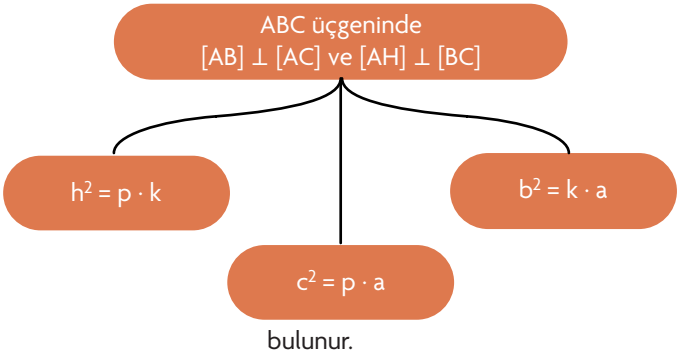
$m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{HAC})$ $\quad$ $m(\widehat{HCA}) = m(\widehat{BCA})$

$\widehat{ABC} \approx \widehat{HAC}$

$\frac{|AC|}{|HC|} = \frac{|BC|}{|AC|}$ ise $\frac{b}{k} = \frac{a}{b}$

$b^2 = k \cdot a$ bulunur.

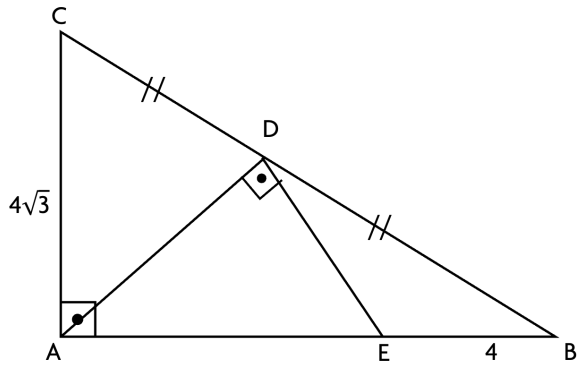




bulunur.

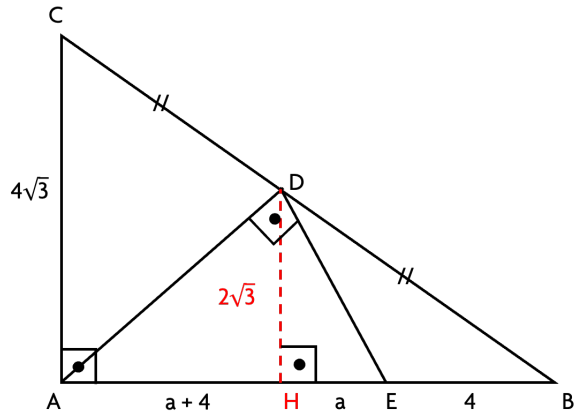
ÖRNEK

Aşağıdaki şekilde [CA] ⊥ [AB], [AD] ⊥ [DE], |CD| = |DB|, $|AC| = 4\sqrt{3}$ birim ve |EB| = 4 birim olan ABC dik üçgeni verilmiştir.



Buna göre |DE| **kaç birimdir?**

ÇÖZÜM



D noktasından [AB] na bir dikme çizilir ve [AB] nı kestiği noktaya H noktası denilir. [AC] ve [DH] birbirine paraleldir. D noktası bulunduğu kenarın orta noktası olduğu için orta tabandan

$|DH| = 2\sqrt{3}$ birim olur. Ayrıca H noktası da orta nokta olacağından |HA| = |HB| olur. |HE| = a denildiğinde |HA| = |HB| = a + 4 olur.

DAE dik üçgeninde Öklid teoremi uygulanır.

$(2\sqrt{3})^2 = (a + 4) \cdot a$

$12 = (a + 4) \cdot a$

$a^2 + 4 \cdot a = 12$

$a^2 + 4 \cdot a - 12 = 0$

$(a + 6)(a - 2) = 0$

a = 2 birim olarak bulunur.

DHE üçgeninde Pisagor teoremi uygulanır.

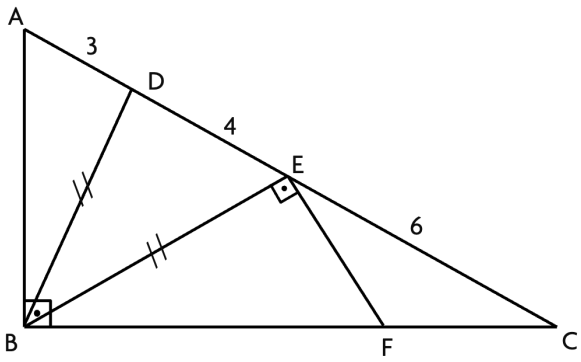
$(2\sqrt{3})^2 + a^2 = |DE|^2$

$12 + 4 = |DE|^2$

|DE| = 4 birim olarak bulunur.

ÖRNEK

ABC ve BFE birer dik üçgendir. A, D, E ve C noktaları doğrusal; F ∈ [BC], [AB] ⊥ [BC], [BE] ⊥ [EF] ve |BD| = |BE| dur.



|AD| = 3 birim, |DE| = 4 birim ve |EC| = 6 birim olarak verilmektedir.

Buna göre

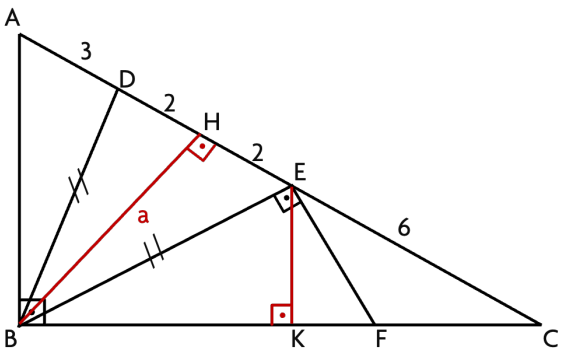
I. $\frac{|FB|}{|FC|}$ oranı bulunabilir.

II. |EF| bulunabilir.

III. |AB| = $\sqrt{65}$ birimdir.

ifadelerinden hangileri doğrudur?

ÇÖZÜM



DBE ikizkenar üçgeninde [BH] yüksekliği çizilir. Yükseklik aynı zamanda kenarortay olduğundan |DH| = |HE| = 2 birim olur. ABC dik üçgeninde [BH] dik olduğundan Öklid teoremi uygulanır.

$a^2 = 5 \cdot 8$

$a = 2\sqrt{10}$ birim ve yine Öklid teoreminden

$|AB|^2 = 5 \cdot 13$

|AB| = $\sqrt{65}$ birim olarak bulunur. O hâlde **III. ifade** doğrudur.

EBF üçgeninde [EK] dikmesi çizildiğinde, [AB] // [EK] olduğundan $\frac{|CE|}{|CA|} = \frac{|CK|}{|CB|} = \frac{6}{13}$ olur.

$\frac{|AB|}{|EK|} = \frac{13}{6}$ ise $\frac{\sqrt{65}}{|EK|} = \frac{13}{6}$ olduğundan |EK| bulunur.

HBE dik üçgeninde Pisagor teoreminden [BE] bulunur. EBF dik üçgeninde Öklid teoremi uygulandığında |BK|, |KF| bulunur.

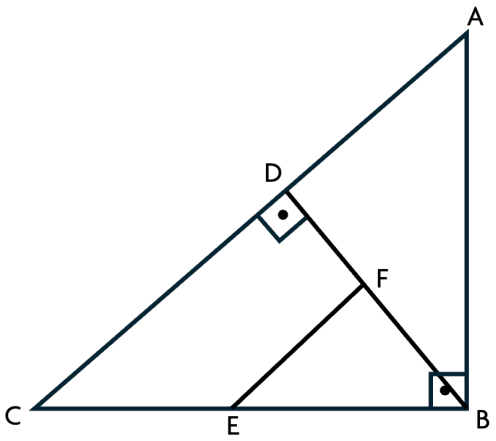
$\frac{|KB|}{|KC|} = \frac{7}{6}$ olduğundan $\frac{|FB|}{|FC|}$ oranı bulunur. **I. ifade** doğrudur.

EKF dik üçgeninde |EK| ve |KF| bilindiğinden |EF| Pisagor teoreminden bulunur.

O hâlde **II. ifade** doğrudur.

ÖRNEK

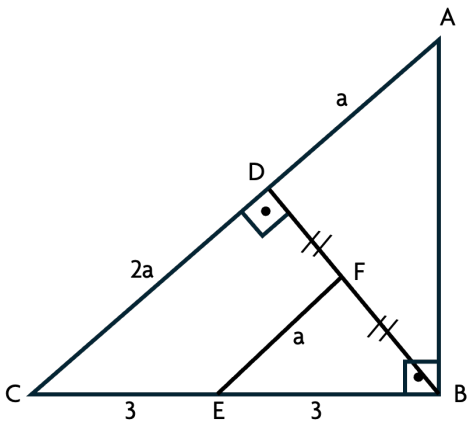
Aşağıda [CB] ⊥ [BA], [BD] ⊥ [AC] ve D ∈ [AC] olan CBA dik üçgeni verilmiştir.



|CD| = 2 · |DA|, |DF| = |FB| ve |EB| = |EC| = 3 birimdir.

Buna göre |FD| **kaç birimdir?**

ÇÖZÜM



ABC üçgeninde E ve F noktaları bulundukları kenarların orta noktası olduklarından [EF] // [CD] olur. Orta tabandan

|EF| = a denildiğinde

|BD| = 2 · a olur.

ABC üçgeninde [BD] ⊥ [AC] olduğundan Öklid teoremi uygulanır.

$6^2 = (2a) \cdot (3a)$

$36 = 6 \cdot a^2$

$a = \sqrt{6}$ birim olur.

|FB| = b denildiğinde |FD| = b olur.

$(2 \cdot b)^2 = (2 \cdot a) \cdot a$

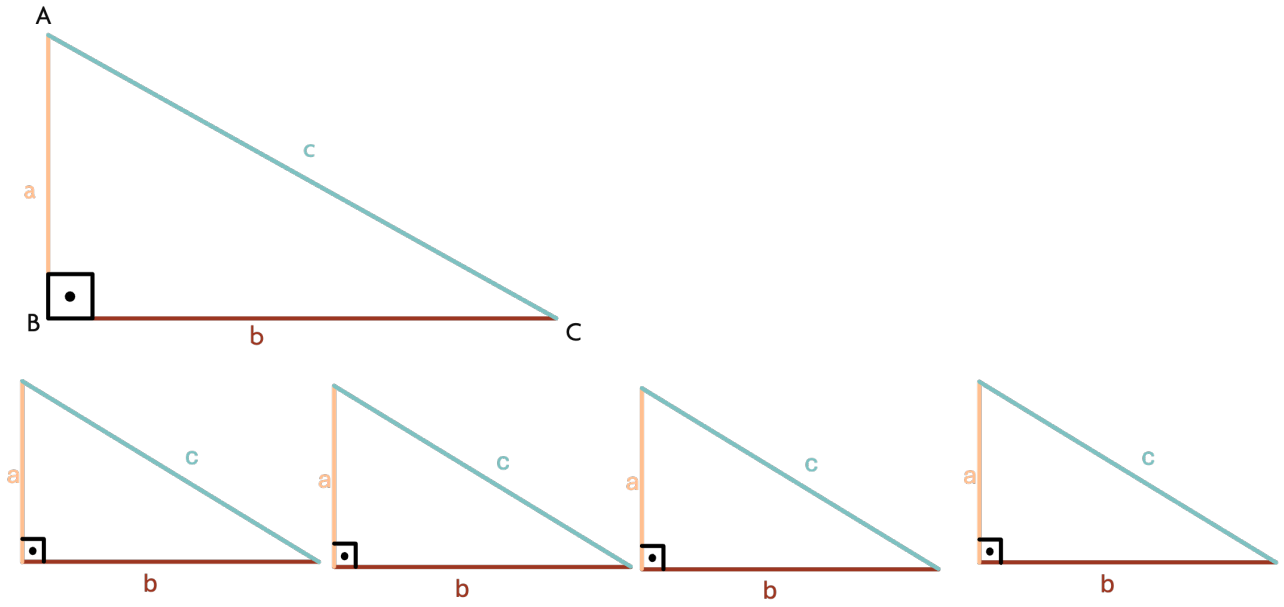
$4 \cdot b^2 = 2 \cdot a^2$ olur.

Buradan $4 \cdot b^2 = 12$ olacağından $b^2 = 3$ ve $b = \sqrt{3}$ birim olup |FD| = $\sqrt{3}$ birim olarak bulunur.

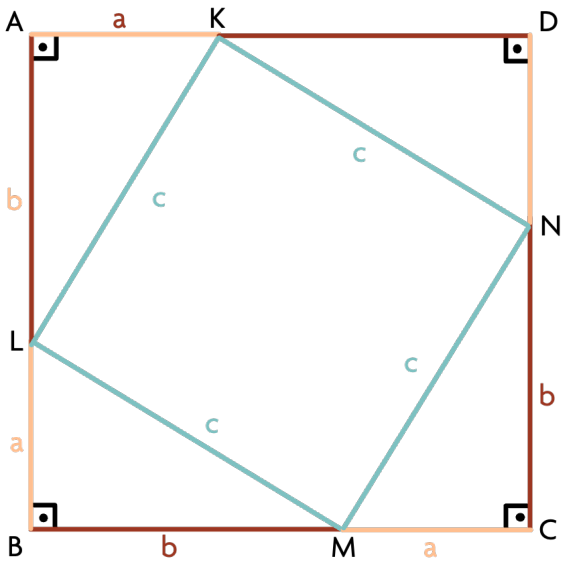
PİSAGOR TEOREMİ

ETKİNLİK 3. Pisagor Teoremi

Aşağıda verilen üçgendeki (şekildeki) a, b ve c kenarları arasındaki ilişkiyi bulunuz.



Verilen üçgenin üç kopyası alınır ve dört üçgen şekilde olduğu gibi birleştirilir.



Üçgenlerin birleşimi ile ABCD karesi ve ortada KLMN karesi elde edilir.

ABCD karesinin alanı birleştirilen dört dik üçgenin alanları ile KLMN karesinin alanı toplamına eşit olur.

$A(\widehat{ALK}) + A(\widehat{KND}) + A(\widehat{LBM}) + A(\widehat{NMC})$

$= \frac{a \cdot b}{2} + \frac{a \cdot b}{2} + \frac{a \cdot b}{2} + \frac{a \cdot b}{2} = 2 \cdot a \cdot b$

ABCD karesinin alanı $(a + b)^2$

KLMN karesinin alanı c^2 olduğundan

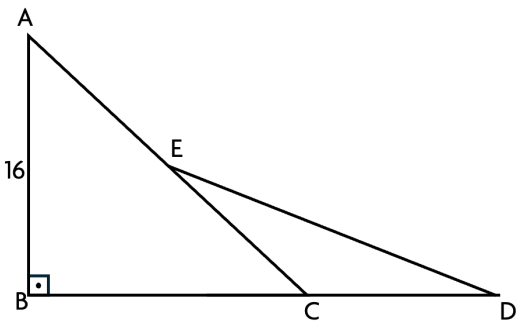
$(a + b)^2 = 2 \cdot a \cdot b + c^2$

$a^2 + b^2 = c^2$

olarak bulunur.

ÖRNEK

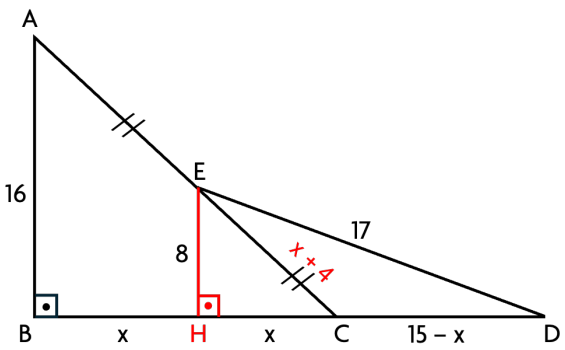
Aşağıda ABC ve ECD birer üçgen; E ∈ [AC], [AB] ⊥ [BC] ve B, C, D doğrusal olarak verilmiştir.



|AB| = 16 birim, |ED| = 17 birim, |AE| = |EC| ve Çevre($\overset{\frown}{ECD}$) = 36 birimdir.

Buna göre |BD| **kaç birimdir?**

ÇÖZÜM



E noktasından [BC] na dikme çizilir EHC dik üçgeni elde edilir. [EH], ABC üçgeninde orta taban olduğundan |EH| = 8 birim olur.

EHD dik üçgeninde Pisagor teoremi uygulanır.

$8^2 + |HD|^2 = 17^2$

$|HD|^2 = 17^2 - 8^2$

$|HD|^2 = 289 - 64$

$|HD|^2 = 225$

|HD| = 15 birim olarak bulunur.

ECD üçgeninin çevresi 36 birim olduğundan

$36 = |EC| + 17 + 15 - x$

$|EC| = x + 4$ olur.

EHC dik üçgeninde Pisagor teoremi uygulanır.

$8^2 + x^2 = (x + 4)^2$

$64 + x^2 = x^2 + 8 \cdot x + 16$

$8 \cdot x + 16 = 64$

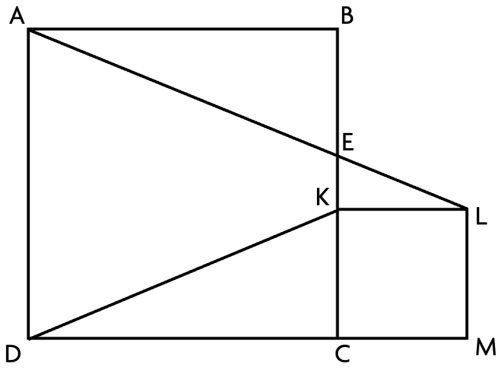
x = 6 birim olarak bulunur.

|BD| = 15 + 6

|BD| = 21 birim olur.

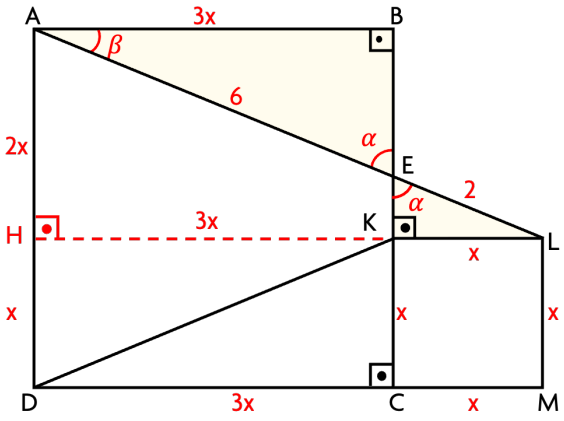
ÖRNEK

Aşağıdaki şekilde ADCB ve KCML birer kare ve [AL] ∩ [BK] = {E} dir.



|AE| = 6 birim ve |EL| = 2 birim olduğuna göre |DK| **kaç birimdir?**

ÇÖZÜM



AEB ve EKL dik üçgenleri iç açı ölçüleri α ve β ile adlandırılır. α + β = 90° olur. AEB ve EKL dik üçgenleri benzer üçgenler olur. (Açı-Açı benzerlik teoremine göre) O hâlde |AL| = 6 birim ve |EL| = 2 birim olduğundan benzerlik oranı 3 olur. |AB| = 3 · x ve |KL| = x olur.

ADCB karesinin bir kenar uzunluğu 3 · x ve KCML karesinin bir kenar uzunluğu x olur.

K noktasından [AD] na dikme çizilerek AHL dik üçgeni oluşturulur ve Pisagor teoremi uygulanır.

$(2x)^2 + (4x)^2 = 8^2$

$4x^2 + 16x^2 = 64$

$20x^2 = 64$

$x^2 = \frac{16}{5}$

$x = \frac{4}{\sqrt{5}}$ birim olarak bulunur.

KDC dik üçgeninde Pisagor teoremi uygulanır.

$(3x)^2 + x^2 = |DK|^2$

$10x^2 = |DK|^2$

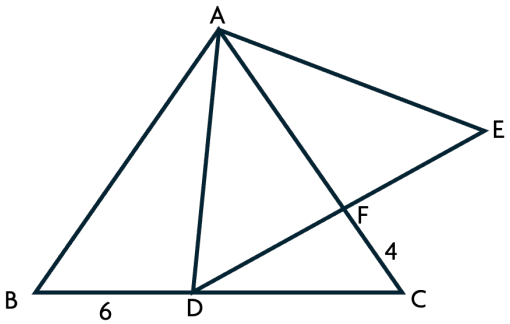
$|DK| = x\sqrt{10}$

$|DK| = \frac{4}{\sqrt{5}} \cdot \sqrt{10}$

$|DK| = 4\sqrt{2}$ birim olarak bulunur.

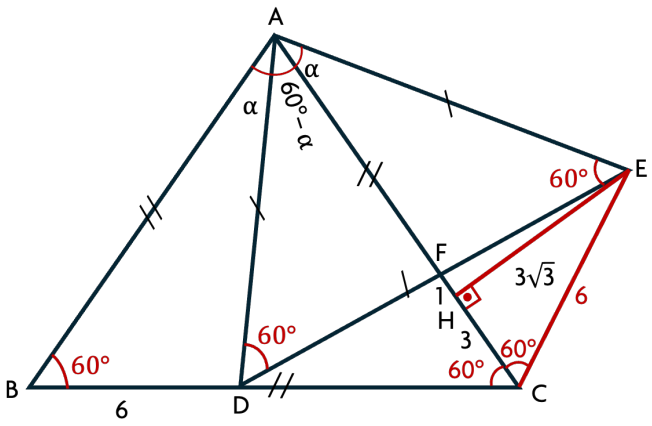
ÖRNEK

Aşağıda ABC ve ADE birer eşkenar üçgen, D ∈ [BC] ve F ∈ [AC] dır.



|BD| = 6 birim ve |FC| = 4 birim olduğuna göre |FE| **kaç birimdir?**

ÇÖZÜM



ABC ve ADE eşkenar üçgenlerin iç açı ölçüleri yazılır. $m(\widehat{BAD}) = \alpha$ ise $m(\widehat{DAC}) = 60° - \alpha$ olacağından $m(\widehat{CAE}) = \alpha$ olur. ADE eşkenar üçgen ve bu üçgenin bir iç açısının ölçüsü 60° olduğundan buradan ABD ve ACE üçgenleri K.A.K eşliğine göre eş üçgenler olur.

O hâlde |EC| = 6 birim ve $m(\widehat{ACE}) = 60°$ olur.

EFC üçgeninde [EH] dik çizilir ve 90°–60°–30° özel üçgeni oluşturulur ve oluşturulur.

Buradan |HC| = 3 birim ve $|HE| = 3\sqrt{3}$ birim olur. |FC| = 4 birim olduğundan |HC| = 3 birim ve |FH| = 1 birim olarak bulunur.

FHE üçgeninde Pisagor teoremi uygulanır.

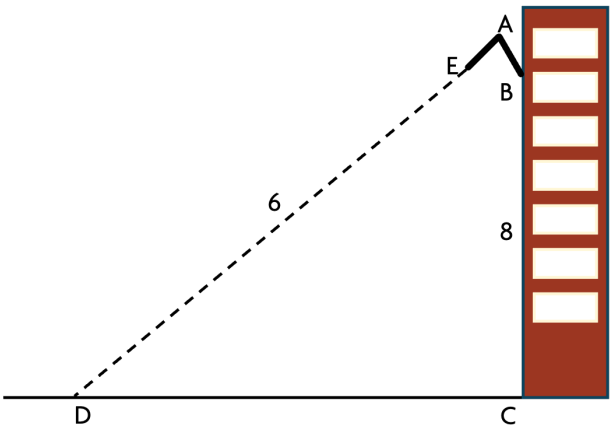
$(3\sqrt{3})^2 + 1 = |FE|^2$

$28 = |FE|^2$

$|FE| = 2\sqrt{7}$ birim olarak bulunur.

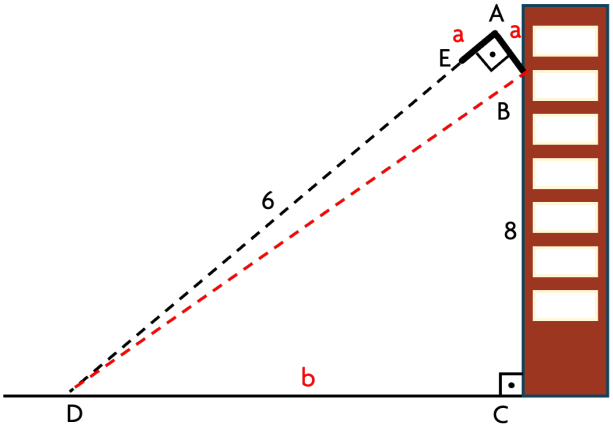
ÖRNEK

Şekilde, bir yapının duvar yüzeyine A noktasında birbiriyle dik açı yapan iki eş kola ([AB] ve [AE]) sahip sabitlenmiş bir güvenlik kamerası ve bu kameranın görüş doğrultusunun üzerinde bulunduğu ED doğru parçası gösterilmektedir.



Kameranın yerden yüksekliği 8 metre ve kameranın gösterdiği ADCB dörtgeninin alanı 60 metrekare olduğuna göre |DC| kaç metredir?

ÇÖZÜM



Kamera kolları eşit uzunlukta olduğundan her bir kol uzunluğu a olsun. Kamera kolları dik kesiştiğinden A açısının ölçüsü 90° olur. [DB] çizilerek DBA dik üçgeni elde edilir ve Pisagor teoremi uygulanır.

1. $(a + 6)^2 + a^2 = |DB|^2$

BDC dik üçgeninde Pisagor teoremi uygulanır.

2. $b^2 + 8^2 = |DB|^2$

1 ve 2. eşitlikte $|DB|^2$ ortak olduğundan bu iki eşitliğe göre

$(a + 6)^2 + a^2 = b^2 + 8^2$ yazılır.

Ayrıca ADCB dörtgeninin alanı 27 metrekare ve bu alan DBA ve BDC dik üçgenlerinin alanları toplamı olduğundan

$$\frac{a \cdot (a+6)}{2} + \frac{8 \cdot b}{2} = 27$$

$a^2 + 6 \cdot a + 8 \cdot b = 54$ $\qquad$ $a^2 + 6 \cdot a = 54 - 8 \cdot b$

$(a + 6)^2 + a^2 = b^2 + 8^2$

$a^2 + 12 \cdot a + 6^2 + a^2 = b^2 + 8^2$

$2a^2 + 12 \cdot a + 36 = b^2 + 8^2$

$2(a^2 + 6 \cdot a) = b^2 + 28$ eşitliğinde.... $(a^2 + 6 \cdot a = 54 - 8 \cdot b)$ ifadesi yerine yazılırsa

$2 \cdot (54 - 8 \cdot b) = b^2 + 28$

$108 - 16 \cdot b = b^2 + 28$

$b^2 + 16 \cdot b - 80 = 0$

$(b + 20) \,.\, (b - 4) = 0$

b= −20 veya b = 4 olarak bulunur. b uzunluk olduğundan negatif olamaz.

b = 4 metre

|DC| = 4 metre olarak bulunur.

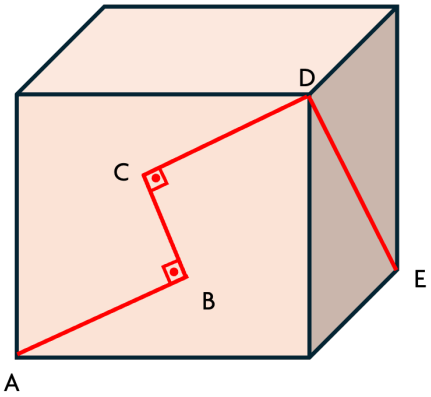
DEĞERLENDİRİYORUM

Amaç: Bu bölümde öğrendiklerinizi gözden geçirmenizi, kendi öğrenme sürecinizi değerlendirmenizi ve eksikliklerinizi fark etmenizi amaçlıyoruz.

Soruları dikkatle yanıtlayınız. Cevaplarınızı geri bildirimlerle karşılaştırarak eksik gördüğünüz noktaları tekrar ediniz.

SORULAR

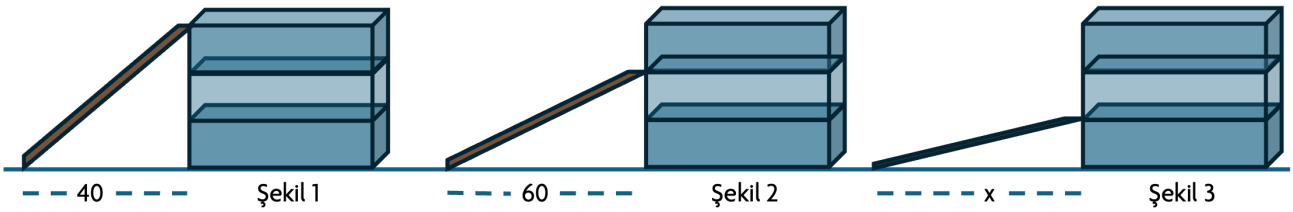
1. Aşağıdaki şekilde bir küp ve bu küpün iki yüzeyinde bir karıncanın yürüdüğü yollar kırmızı doğru parçaları ile gösterilmiştir.



Karınca küpün bir köşesi olan A noktasından başlayarak sırasıyla [AB], [BC], [CD] ve[DE] yollarından giderek küpün farklı bir köşesi olan E noktasına inmiştir.

|AB| = 8 cm, |BC| = 6 cm **ve** |CD| = 7 cm **olduğuna göre karınca D noktasından E noktasına indiğinde kaç santimetre yol almıştır?**

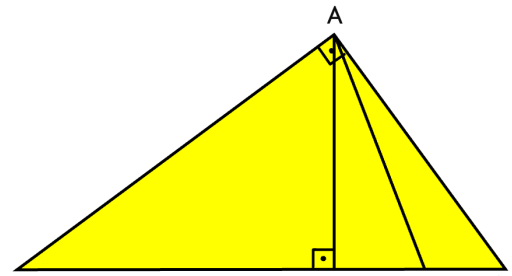
2. Şekilde, eş dikdörtgen prizmalardan oluşan bir ayakkabılığın üzerine yerleştirilen tahta parçasının kayması sonucunda üç farklı konumda düştüğü durumlar verilmiştir.



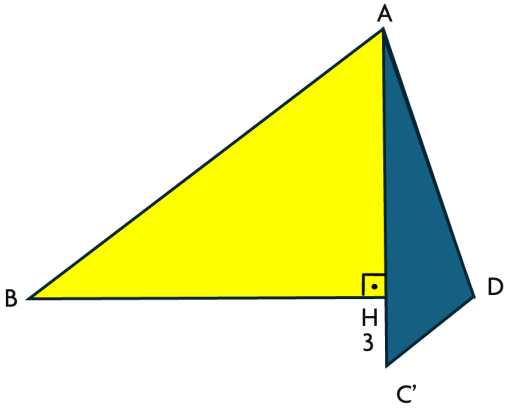
Şekil 1'de, düşen tahtanın zemin üzerinde ayakkabılığın alt kenarına olan yatay uzaklığı 40 cm'dir. Şekil 2'de ise aynı uzaklık 60 cm olmaktadır.

Buna göre Şekil 3'te düşen tahtanın zemin üzerinde ayakkabılığın alt kenarına olan yatay uzaklığı olan x kaç santimetredir?

3. Şekil 1'de ön yüzü sarı, arka yüzü mavi olan ABC dik üçgeni şeklindeki kâğıt [AD] boyunca katlandığında C noktası; Şekil 2'de olduğu gibi C' noktası ile çakışmaktadır.



Şekil 1



Şekil 2

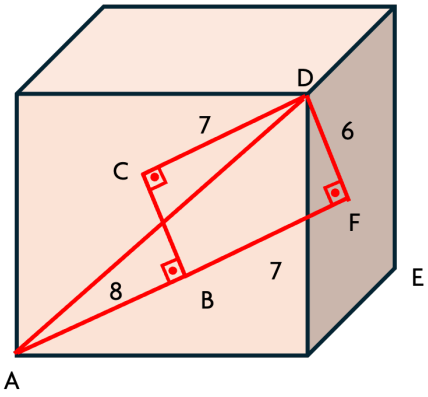
[BA] ⊥ [AC], [AH] ⊥ [BC], |HC'| = 3 cm ve |HD| = 4 cm'dir.

Buna göre |AB| **kaç santimetredir?**

GERİ BİLDİRİM

Bu geri bildirim sayesinde kendi cevabınızı kontrol edebilir, hatalarınızı düzelterek öğrenmenizi pekiştirebilirsiniz.

ÇÖZÜM 1.



[AB] doğrusal bir şekilde uzatılır ve [AF] elde edilir. D noktasından [AF] na dik [DF] çizildiğinde CBFD dikdörtgeni oluşur. Dikdörtgenin karşıklı kenar uzunlukları eşit olduğundan |FB| = 7 cm ve |DF| = 6 cm olur.

[AD] çizildiğinde AFD dik üçgeni elde edilir, bu üçgenden yola çıkarak Pisagor teoremi yazılır.

$15^2 + 6^2 = |AD|^2$

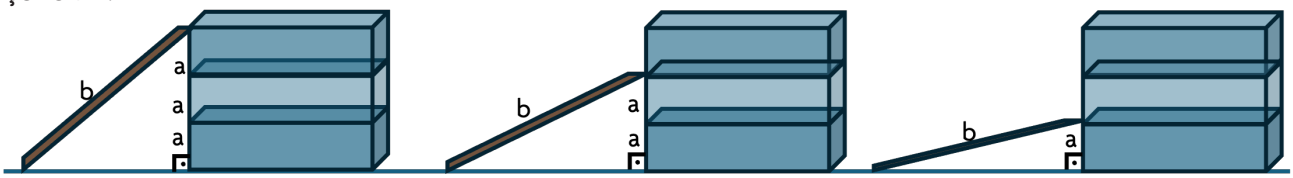
$225 + 36 = |AD|^2$

$261 = |AD|^2$

$|AD| = 3\sqrt{29}$ cm olarak bulunur.

Küpün tüm kenarları eş olduğundan köşegenleri de eştir. Bundan dolayı $|AD| = |DE| = 3\sqrt{29}$ santimetre olarak bulunur.

ÇÖZÜM 2.



Şekil 1'de dikdörtgen prizmanın kısa kenarlarından birinin uzunluğu **a**, tahtanın uzunluğu **b** olarak verilmiştir.

Şekil 1'de Pisagor teoremi uygulanır.

$(3 \cdot a)^2 + 40^2 = b^2$

$9 \cdot a^2 + 1600 = b^2$ ..... (1)

Şekil 2'de Pisagor teoremi uygulanır.

$(2 \cdot a)^2 + 60^2 = b^2$

$4 \cdot a^2 + 3600 = b^2$ olur. ..... (2)

1 ve 2. eşitlikte b^2 ler birbirine eşitlenir.

$9 \cdot a^2 + 1600 = 4 \cdot a^2 + 3600$

$5 \cdot a^2 = 2000$

$a^2 = 400$ olarak bulunur.

$9 \cdot a^2 + 1600 = b^2$

$9 \cdot 20^2 + 1600 = b^2$

$b^2 = 5200$ olur.

Şekil 3'te Pisagor teoremi uygulanır.

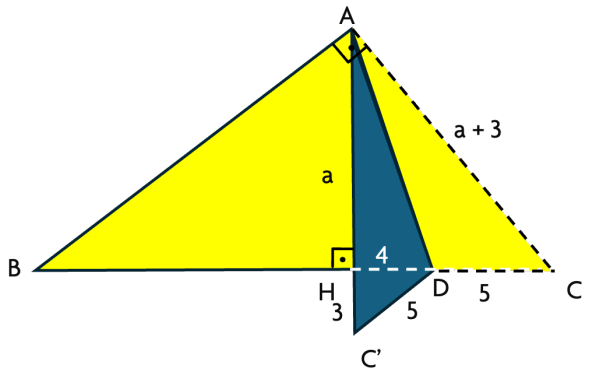
$a^2 + x^2 = b^2$

$400 + x^2 = 5200$

$x^2 = 4800$

$x = 40\sqrt{3}$ santimetre olarak bulunur.

ÇÖZÜM 3.



Şekil 2

Şekil 2'de katlanmış kısım açılınca |HD| = 4 birim, |HC'| = 3 birim ve HC'D dik üçgeninden |DC'| = 5 birim olur.
|AH| = a birim olursa |AC| = a + 3 birim olur. Katlama sonucunda çakışan |DC'| = |DC| = 5 birim olur.

AHC dik üçgeninde Pisagor teoremi uygulanır.

$a^2 + 9^2 = (a + 3)^2$

$a^2 + 81 = a^2 + 6 \cdot a + 9$

$81 = 6 \cdot a + 9$

a = 12 birim olarak bulunur.

ABC dik üçgeninde [AH] ⊥ [BC] olduğundan Öklid teoremi uygulanır.

$12^2 = |BH| \cdot 9$

|BH| = 16 birim olarak bulunur.

$|AB|^2 = |BH| \cdot |BC|$

$|AB|^2 = 16 \cdot 25$

|AB| = 20 birim olarak bulunur.

ÖĞRENDİKLERİM

Amaç: Bu bölümde öğrendiklerinizi özetlemenizi, günlük hayatta ve farklı derslerde kullanabileceğiniz bilgileri belirlemenizi amaçlıyoruz.

Verilen bilgileri dikkatle okuyunuz. Temanın temel kavramlarını, önemli noktalarını ve bağlantılarını gözden geçirerek öğrenmenizi pekiştiriniz.

Tales Pisagor ve Öklid teoremleri ile ilgili verilen anahtar kavramları ve önemli bilgileri kendi cümlelerinizle yazınız.

.....

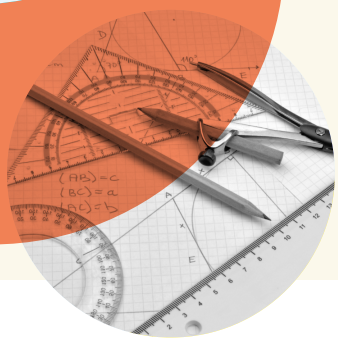
.....

.....

.....

.....

Daha fazlası için karekodu okutunuz.



ÜÇGENLERDE TEOREMLERİ KULLANARAK PROBLEM ÇÖZME

BAŞLARKEN

Sevgili öğrencimiz, bu çalışma kartında bireysel yolculuğunuza destek sunmak amaçlanmaktadır. Çalışmalarınızı yürütürken "Hazırlanıyorum", "İlişkilendiriyorum", "Uygulayarak Öğreniyorum", "Değerlendiriyorum" bölümlerini sırası ile yapmanızı; her bölüm ve etkinlik sonundaki geri bildirimleri alarak ilerlemenizi; "Öğrendiklerim" bölümünde öğrenme sürecinizi gözden geçirmenizi bekliyoruz.



Bu çalışma kartında eşlik ve benzerlik konularının günlük yaşamda hangi alanlarda karşımıza çıktığını göreceksiniz. Aşağıdaki soruları yanıtlayabileceksiniz.



Bir mimar, aynı plan şemasını kullanarak farklı büyüklüklerde iki bina tasarlarken bu binaların cepheleri arasında hangi geometrik ilişkiyi kullanır?

Bir fotoğrafçı, uzaktaki bir objenin görüntüsünü net bir şekilde elde etmek için lens ayarlarını yaparken benzer üçgenler prensibini bilinçli veya bilinçsiz olarak nasıl kullanır?

Harita mühendisleri; büyük arazilerin küçültülmüş ölçekli haritalarını oluştururken, arazideki uzaklıkları ve açıları koruyarak hangi geometrik ilke sayesinde doğru temsil sağlarlar?

HAZIRLANIYORUM

Amaç: Bu bölümde ön bilgilerinizi hatırlamanızı ve konuya hazırlıklı hâle gelmenizi amaçlıyoruz.

Tabloda yer alan ifadeleri dikkatlice okuyunuz; ifadelere katılıyorsanız kutucuğu ✓(tik işareti) ile işaretleyiniz, katılmıyorsanız boş bırakınız.

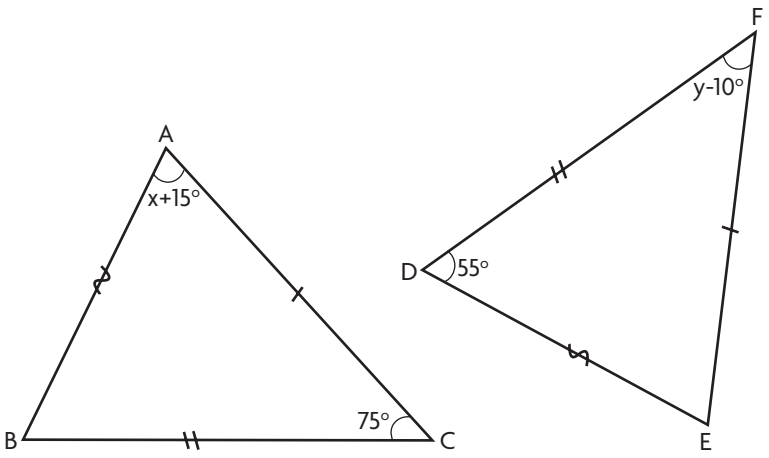
Aşağıda yer alan ifadeler, bu temada tamamlanması hedeflenen öğrenme çıktısını ele almadan önce sahip olmanız gereken bazı temel becerileri içermektedir.

SORULAR	ÖN ÖĞRENME KONTROL LİSTESİ	
1	Bir üçgeni oluşturabilen yeterli eleman ile eşlik koşulları arasındaki ilişkiyi belirleyebilirim.	
2	Benzer şekiller arasındaki ilişkiyi yorumlayıp, çokgenlerin benzerliğini değerlendirebilirim.	
3	Pisagor teoremini kullanabilirim.	

"Ön Öğrenme Kontrol Listesi"ni doldurduktan sonra aşağıda verilen "Kontrol Noktası" sorularını çözünüz ve cevaplarınızı kontrol ediniz.

KONTROL NOKTASI

SORU 1. ABC ve DEF birer üçgen olmak üzere



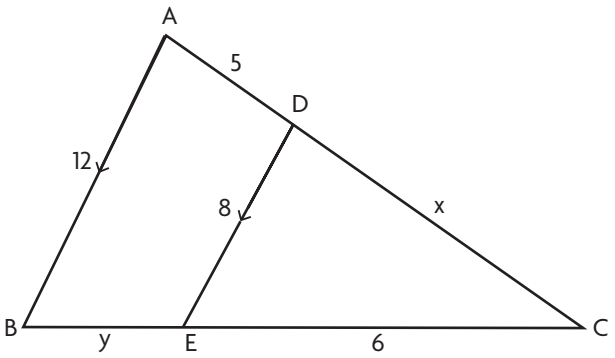
$|AB| = |DE|$, $|BC| = |DF|$, $|AC| = |EF|$

$m(\widehat{BAC}) = x + 15^\circ$, $m(\widehat{BCA}) = 75^\circ$

$m(\widehat{DFE}) = y - 10^\circ$, $m(\widehat{EDF}) = 55^\circ$

Verilenlere göre y – x değeri kaçtır?

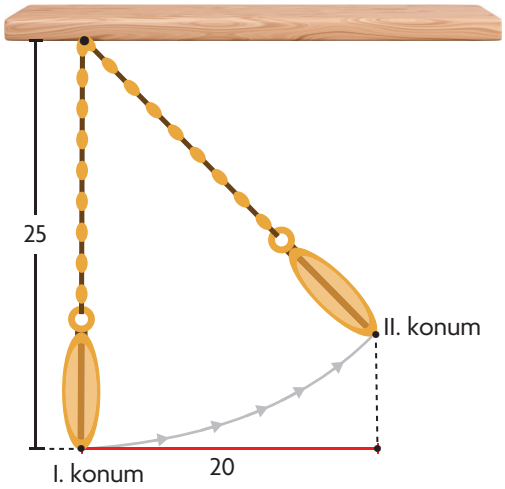
SORU 2. ABC bir üçgen, [AB] // [DE]



$|AB| = 12$ birim, $|AD| = 5$ birim, $|DE| = 8$ birim, $|EC| = 6$ birim

Verilenlere göre x + y ifadesinin değeri kaç birimdir?

SORU 3. Aşağıda 25 birim uzunluğunda bir sarkaç verilmiştir. Serbest durumda iken I. konumda olan sarkaç, yatayda 20 birim sağa çekildiğinde II. konuma gelmiştir.



Buna göre sarkaç, II. konuma geldiğinde I. konuma göre kaç birim yükselmiştir?

GERİ BİLDİRİM

Bu geri bildirim sayesinde kendi cevabınızı kontrol edebilir, hatalarınızı düzelterek öğrenmenizi pekiştirebilirsiniz.

KONTROL NOKTASI

ÇÖZÜM 1.

$\overset{\frown}{ABC} \cong \overset{\frown}{EDF}$ olduğundan $m(\widehat{C}) = m(\widehat{F})$ ve $m(\widehat{B}) = 55^\circ$ olur.

$75^\circ = y - 10^\circ$

$85^\circ = y$

ABC üçgeninde iç açılar toplamı 180° olduğundan

$x + 15^\circ + 55^\circ + 75^\circ = 180^\circ$

$x = 35^\circ$ olur.

$y - x = 85^\circ - 35^\circ = 50^\circ$ bulunur.

İki üçgenin köşeleri arasında bire bir eşleme yapıldığında üçgenlerin karşılıklı kenar uzunlukları ve karşılıklı açılarının ölçüleri eşit ise bu üçgenlere eş üçgenler denir. Eşlik "$\cong$" sembolü ile gösterilir.

HATIRLATMA

- Kenar uzunlukları eşit olan iki üçgen eştir.
- Karşılıklı iki açısının ölçüsü ve karşılıklı bir kenar uzunluğu eşit olan üçgenler eştir.
- Karşılıklı iki kenar uzunluğu ve bu kenarların oluşturduğu açı ölçüleri eşit olan üçgenler eştir.

ÇÖZÜM 2.

HATIRLATMA

İki üçgenin karşılıklı açıları eş ve bu açıların karşısındaki kenar uzunlukları orantılı ise bu üçgenler benzerdir. Benzerlik, "~" sembolü ile gösterilir.

$\widehat{DEC} \sim \widehat{ABC}$ olduğundan

$$\frac{x}{x+5}=\frac{6}{6+y}=\frac{8}{12}$$

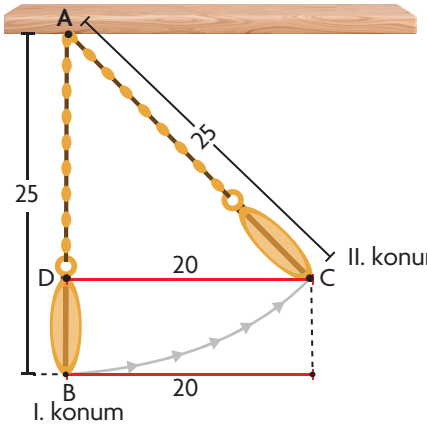
$$\frac{x}{x+5}=\frac{\cancel{8}^{2}}{\cancel{12}_{3}} \rightarrow 3x = 2x + 10 \rightarrow x = 10$$

$$\frac{6}{6+y}=\frac{\cancel{8}^{2}}{\cancel{12}_{3}} \rightarrow 2y + 12 = 18 \rightarrow y = 3$$

$x + y = 13$ birim bulunur.

- Karşılıklı üç kenar uzunluğu orantılı olan üçgenler benzerdir.
- Karşılıklı birer açısı eş ve bu açıyı oluşturan kenarların uzunlukları orantılı olan üçgenler benzerdir.
- Karşılıklı iki açısı eş olan üçgenler benzerdir.

ÇÖZÜM 3.



ADC üçgeninde Pisagor bağıntısı

$|AD|^2 + |DC|^2 = |AC|^2$

$|AD|^2 + 20^2 = 25^2$

$|AD|^2 + 400 = 625$

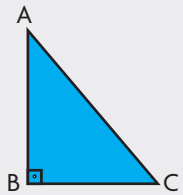
$|AD|^2 = 225$

$|AD| = 15$ birim

$|BD| = 25 - 15$

$|BD| = 10$ birim

NOT



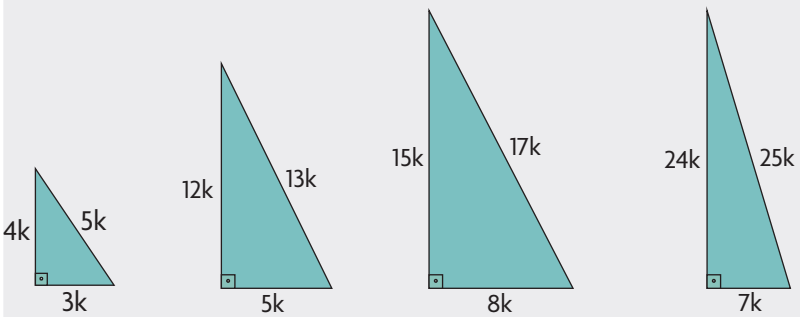
Pisagor teoremi

$[AB] \perp [BC]$

$|AB|^2 + |BC|^2 = |AC|^2$ şeklindedir.

HATIRLATMA

Bazı Özel Üçgenler



İLİŞKİLENDİRİYORUM

Amaç: Bu bölümde yeni öğrendiğiniz konuyu; zihninizde var olan bilgileriniz, yaşantılarınız ve diğer derslerde öğrendiklerinizle ilişkilendirmenizi bekliyoruz.

Aşağıda verilen Türkiye haritasının alt kısmındaki ölçek dikkatinizi çekti mi? Sizce nasıl bir anlam ifade ediyor?
Ölçeğin kullanılmaması harita çizimlerinde ne gibi bir soruna yol açabilir?



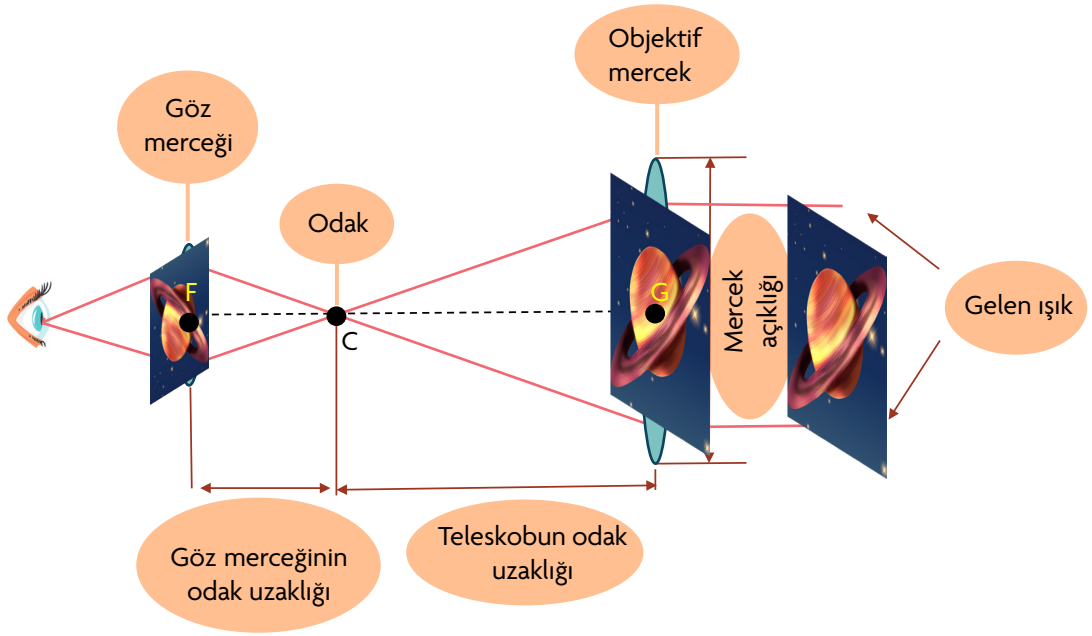


Türkiye haritasını bir A4 kâğıdına sığdırmak mümkün değildir. Fakat harita ölçeğini kullanarak bunu sağlayabiliriz.
Harita ölçeği, bir harita üzerindeki uzunlukların gerçek uzunluklara oranını gösteren bir ölçüdür.
Başka bir deyişle harita üzerindeki küçültme oranıdır.

$$\text{Harita Ölçeği} = \frac{\text{Haritadaki Uzunluk}}{\text{Gerçek Uzunluk}}$$

Örneğin 1 / 100 000 ölçekli bir harita, haritadaki 1 birim uzunluğun gerçekte 100 000 birim uzunluğa denk geldiğini gösterir.
Gerçek dünya ile model ya da harita arasındaki oran benzerlik oranıdır.

Mercekli teleskop (refraktör teleskop), uzak cisimlerden (yıldız, gezegen, vb.) gelen ışığı mercekler yardımıyla toplayan ve büyüterek görüntüleyen bir optik alettir.



Bu sistemde hem ışığın kırılması hem de görüntü oluşumu benzer üçgenlerle açıklanabilir. Mercekler ışığı kırarken ışınlar ve odak noktası arasında oluşan geometrik şekiller benzer üçgenler oluşturur. Bu sayede küçük bir görüntü, mercekle orantılı şekilde büyütülür.

Teleskopun büyütme gücü = $\frac{|CG|}{|CF|} = k$ = Benzerlik oranı





Bir fotoğraf makinesi ya da kamera, aslında mercekli bir optik sistemdir. Nesne (fotoğraflanan şey) belirli bir uzaklıktadır. Işık ışınları, bu nesneden gelip mercekten geçerek ters çevrilmiş bir görüntü oluşturur. Görüntü, film ya da dijital sensör üzerine düşer. Bu görüntü, orijinal nesnenin belirli oranda küçültülmüş bir benzeri olur.

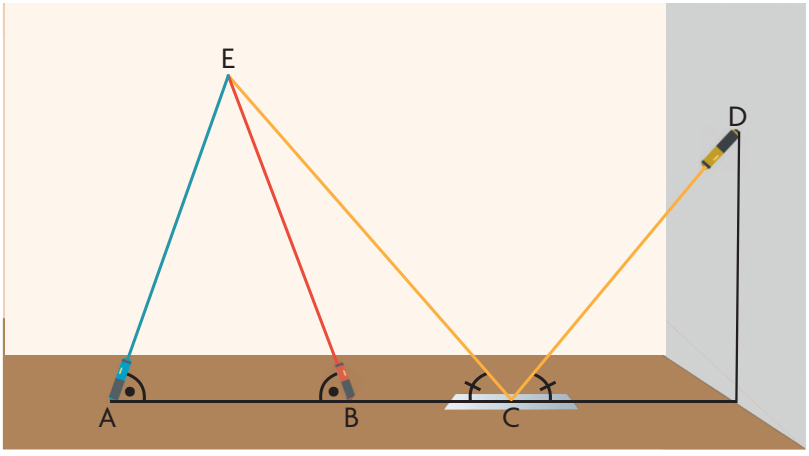
Fotoğraf makineleri bu prensip sayesinde devasa şeyleri küçük bir kareye sığdırabilir. Görüntü küçülerek benzerlik oranına göre makineye aktarılır.

Geometride benzerlik konusu, farklı büyüklükteki şekillerin orantılı olarak karşılaştırılmasını sağlar ve bu yönüyle birçok bilimsel ve teknik alanda temel bir rol oynar. Özellikle haritacılık, mimarlık ve mühendislik gibi disiplinlerde gerçek nesnelerin ölçeklendirilmiş temsilleri benzerlik ilkelerine dayanılarak oluşturulur. Ayrıca optik, fotoğrafçılık ve tasarım gibi alanlarda da benzerlik kavramı; hem yapısal doğruluğun hem de estetik bütünlüğün korunmasına katkıda bulunur.

UYGULAYARAK ÖĞRENİYORUM

Amaç: Bu bölümde bilgilerinizi etkinlikler ve uygulamalarla pekiştirmenizi, öğrenmeyi daha kalıcı hâle getirmenizi amaçlıyoruz. Sorularda verilen adımları dikkatle uygulayınız. Çalışmanızı dikkatli ve düzenli bir şekilde yapınız.

ÖRNEK



Ahmet, 9. sınıfa giden kardeşine matematik dersinde yardımcı olabilmek için elindeki renkli lazerler ile ışık gösterisi yapmak istemektedir. İki lazeri zeminle aynı açı yapacak şekilde A ve B noktalarına, diğer lazeri de duvardaki D noktasına yerleştirmiştir. Duvardaki lazerden gelen ışığı yansıtması için zemindeki C noktasına bir ayna yerleştirmiştir. Bu kaynaklardan gelen ışıklar E noktasında kesişmektedir. Ahmet; kardeşine aynaya gelen ışığın ayna ile yaptığı açının aynadan yansıyan ışığın ayna ile yaptığı açıya eşit olduğu bilgisini vererek A ile B ve B ile C noktaları arası uzaklığı, C noktasının duvara ve D noktasının zemine uzaklığını kardeşinin ölçmesini istemektedir.

Ahmet'in kardeşi bu uzunlukları sırasıyla 140 , 130, 150 ve 180 santimetre olarak doğru ölçtüğüne göre

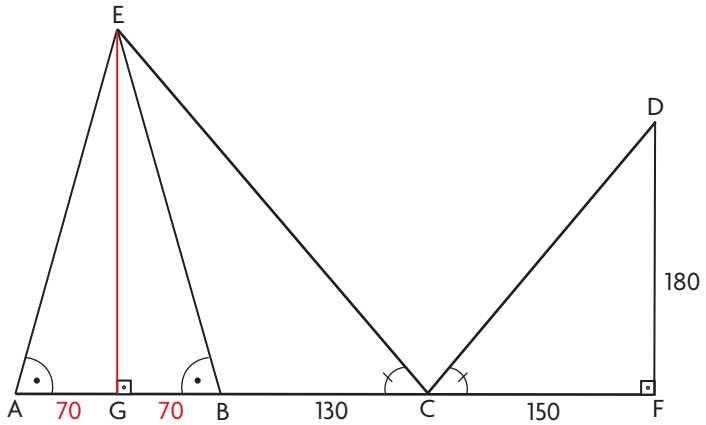
a) E noktasının zemine olan uzaklığını bulunuz. Problemin çözümünde kullandığınız teoremleri açıklayınız.

b) B ile E noktaları arasındaki uzaklığı bulunuz. Problemin çözümünde kullandığınız teoremleri açıklayınız.

ÇÖZÜM

a) $m(\widehat{EAB}) = m(\widehat{EBA})$ olduğundan EAB ikizkenar üçgen ve $|EA| = |EB|$ olur.

E noktasından [AB] kenarına çizilen yüksekliğin [AB] ile kesiştiği nokta G ile isimlendirilirse $|AG| = |GB| = 70$ cm olur.



EGC ve DFC üçgenlerinde iki açı ortak olduğu için Açı - Açı benzerliği vardır.

$\frac{|EG|}{|DF|} = \frac{|GC|}{|CF|}$ olduğundan

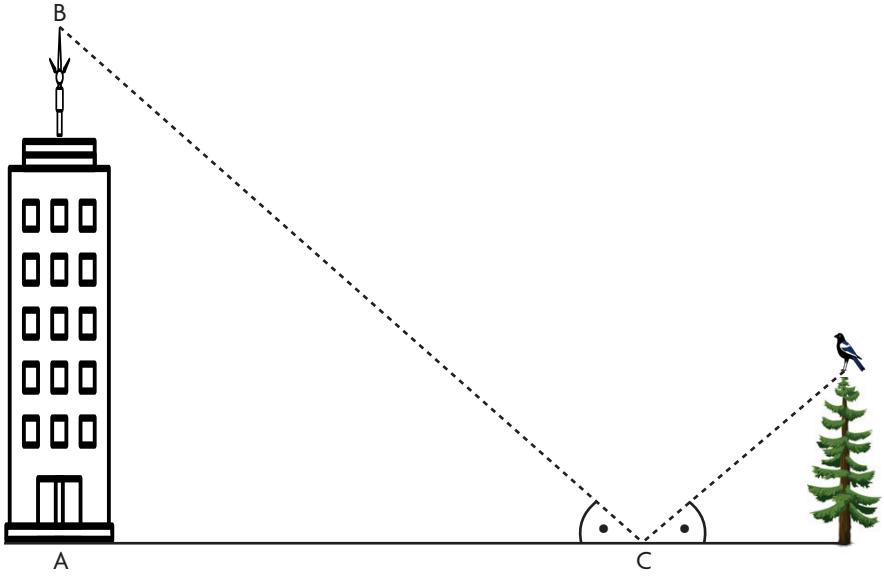
$\frac{|EG|}{180} = \frac{200}{150}$ olur ve $|EG| = 240$ cm bulunur.

b) $|EG| = 240$ cm bulunup EGB üçgeninde Pisagor teoremi uygulanırsa

7-24-25 özel üçgeninin 10 katı hesaplanarak hipotenüs uzunluğu $|EB| = 250$ cm bulunur.

SIRA SİZDE 1.

Paratoner, binaları ve diğer yapıları yıldırımın zararlı etkilerinden korumak için tasarlanmış bir güvenlik sistemidir. "Yıldırımsavar" olarak da bilinir. Temel amacı; bir yıldırım düşmesi durumunda yıldırımın yüksek enerjili elektriksel yükünü güvenli bir şekilde toprağa ileterek binaya, içindeki insanlara ve elektronik cihazlara zarar vermesini engellemektir.



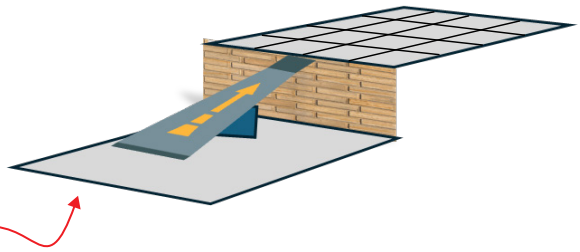
Şekilde zemine dik konumda bir ağaç ve bina, ağacın tepesinde bir kuş, binanın çatısında binaya dik konumda bir paratoner modellenmiştir. Paratonerin zemine dik izdüşüm noktası A noktasıdır. Kuş doğrusal hareketle zemindeki C noktasından yemini alıp paratonerin tepesine konmuştur. Ağacın yüksekliği 180 santimetre, ağacın zemine temas ettiği nokta ile C noktası arası uzaklık 2 metre, A ile C noktaları arası uzaklık 40 metre ve paratonerin yüksekliği 2 metredir.

Kuşun zemine geldiği açı ile paratonere doğru uçtuğu açı eşit olduğuna göre binanın yüksekliğini bulunuz.

ÖRNEK

Engelli rampası, tekerlekli sandalye kullanan veya yürüme güçlüğü çeken kişilerin seviye farkı olan yerlere kolayca erişimini sağlamak için tasarlanmış eğimli bir yüzeydir.

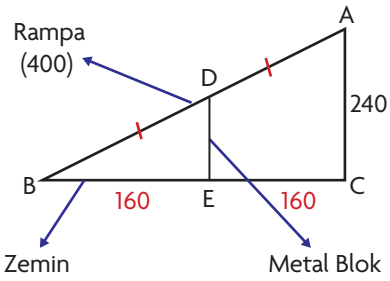




Şekilde zeminden 240 santimetre yüksekteki bina girişindeki platforma ulaşımı sağlayan, uzunluğu 4 metre olan bir engelli rampası görülmektedir. Rampanın altına, tam ortasına gelecek şekilde zemine dik ve kalınlığı önemsenmeyecek bir metal blok yerleştirilmiştir.

Buna göre metal blok bina girişine 40 santimetre daha yakın olsaydı bloğun yüksekliği nasıl değişirdi? Açıklayınız.

ÇÖZÜM



Rampa uzunluğu 4 metre = 400 santimetre olur.

ABC üçgeninde 3-4-5 özel üçgeninden |BC| = 320 cm bulunur.

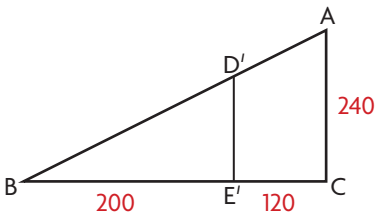
[DE]//[AC] olduğu için Tales teoreminden

$\frac{|BD|}{|DA|} = \frac{|BE|}{|EC|}$ 'dir.

Buradan |BE| = |EC| = 160 cm olur.

Temel orantı teoreminden $\frac{|BD|}{|BA|} = \frac{|DE|}{|AC|}$ 'dir.

Buradan |DE| = 120 cm bulunur.



Metal blok duvara 40 cm kadar yakınlaştırılırsa $|BE'| = 200$ cm, $|E'C| = 120$ cm olur.

Temel orantı teoreminden $\frac{|BE'|}{|BC|} = \frac{|D'E'|}{|AC|}$ yazılırsa $\frac{200}{320} = \frac{|D'E'|}{240}$

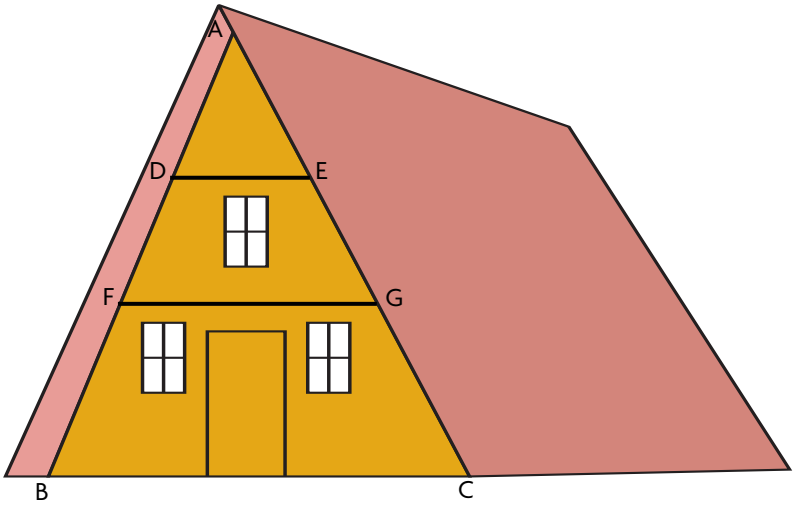
$|D'E'| = 150$ cm bulunur.

İlk durumda |DE| = 120 cm olduğu için ikinci durumda metal bloğun uzunluğu 150 – 120 = 30 cm daha yüksek olmalıdır.

SIRA SİZDE 2.

Şekilde üçgen prizma şeklinde ve önden görünümü üçgen olan bir ev modellenmiştir.

Bu ev giriş katı, birinci kat ve çatı katından oluşmaktadır.



Giriş katının tavanı ve birinci katın zemini FG seviyesindedir. Birinci katın tavanı ve çatı katının zemini DE seviyesindedir. Evin zemine oturan genişliği |BC| = 18 metredir.

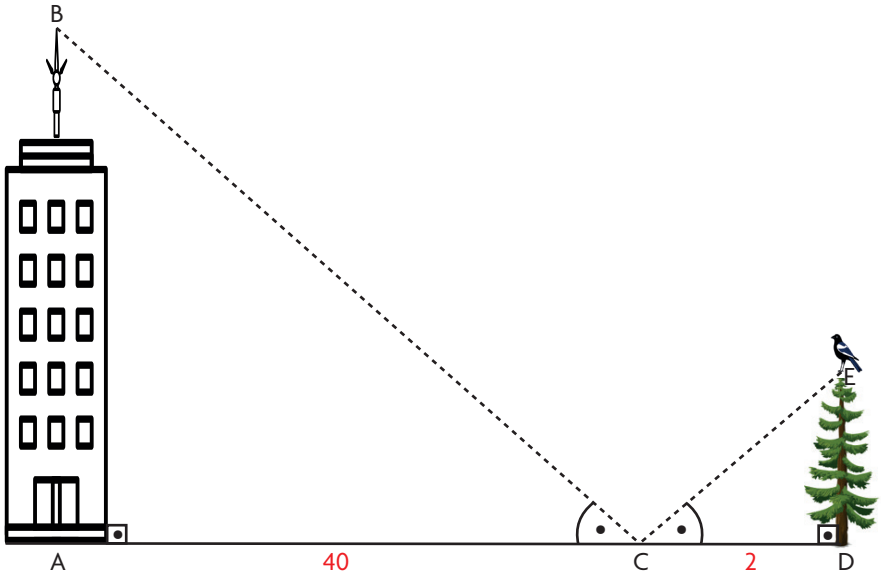
Tüm katların yüksekliği eşit olduğuna göre |FG| + |DE| toplamı kaç metredir?

GERİ BİLDİRİM

Bu geri bildirim sayesinde kendi cevabınızı kontrol edebilir, hatalarınızı düzelterek öğrenmenizi pekiştirebilirsiniz.

SIRA SİZDE 1.

ÇÖZÜM



BAC ve EDC üçgenlerinin iki açısı ortak olduğu için Açı - Açı benzerliği vardır.

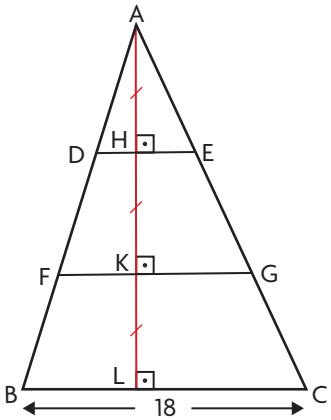
$\frac{|BA|}{|ED|} = \frac{|AC|}{|CD|}$ olduğundan

$\frac{x+2}{1,8} = \frac{40}{2}$ olur. İçler dışlar çarpımından

$2x + 4 = 72 \Rightarrow x = 34$ metre bulunur.

SIRA SİZDE 2.

ÇÖZÜM



Temel orantı teoreminden $\frac{|AH|}{|AL|} = \frac{|DE|}{|BC|}$'dir. $\frac{1}{3} = \frac{|DE|}{18}$ eşitliğinden $|DE| = 6$ metre bulunur.

Temel orantı teoreminden $\frac{|AK|}{|AL|} = \frac{|FG|}{|BC|}$'dir. $\frac{2}{3} = \frac{|FG|}{18}$ eşitliğinden $|FG| = 12$ metre olur.

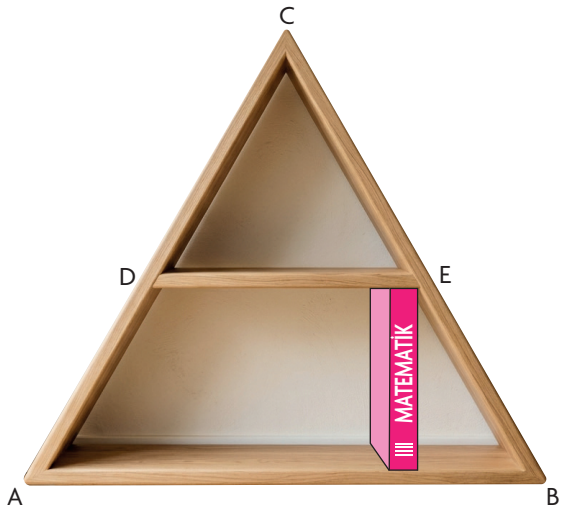
$|DE| + |FG| = 6 + 12 = 18$ metredir.

DEĞERLENDİRİYORUM

Amaç: Bu bölümde öğrendiklerinizi gözden geçirmenizi, kendi öğrenme sürecinizi değerlendirmenizi ve eksiklerinizi fark etmenizi amaçlıyoruz. Soruları dikkatle yanıtlayınız. Cevaplarınızı geri bildirimlerle karşılaştırarak eksik gördüğünüz noktaları tekrar ediniz.

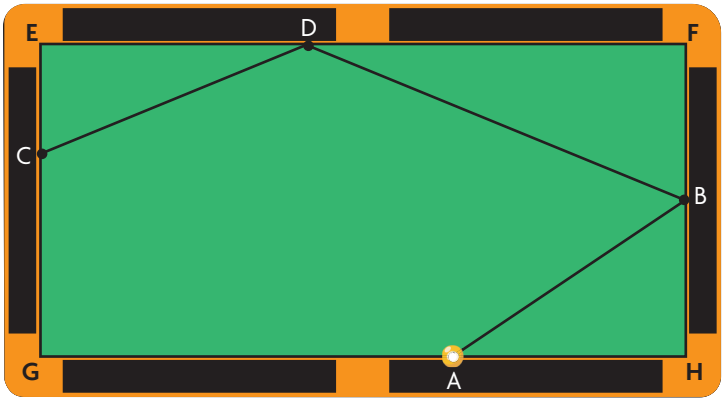
SORULAR

1. Aşağıda verilen ikizkenar üçgen şeklindeki kitaplığın rafları birbirine paralel ve rafların kalınlığı önemsizdir. Üstteki raf kitaplığı ortalayacak şekilde yerleştirilmiştir. Alttaki rafta bulunan kitap, rafa dik olacak şekilde konumlandırılmıştır.



|CA| = |CB| olduğuna göre kitabın A noktasına olan yatay uzaklığının B noktasına olan yatay uzaklığına oranını bulunuz.

2. Aşağıda dikdörtgen şeklindeki 3 top bilardo masasındaki sarı renkli topa vurulduktan sonra topun izlediği yol gösterilmiştir. Topun bir kenara gelme açısıyla o kenardan sekme açısı birbirine eşittir.



|AH| = 24 cm

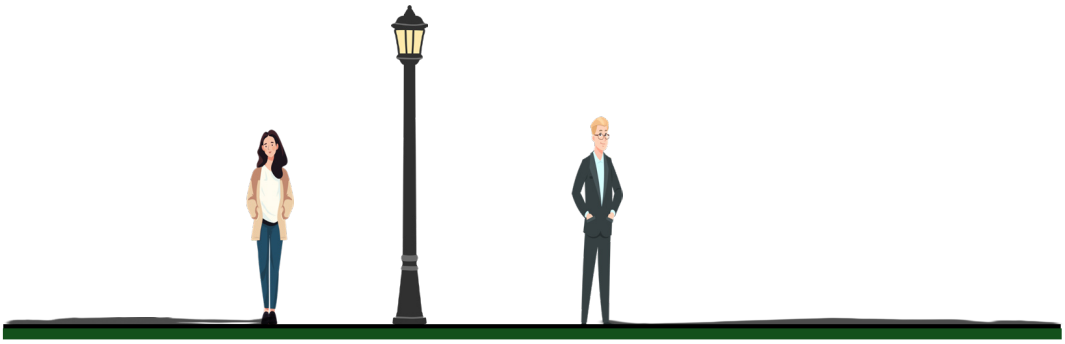
|BH| = 18 cm

|BF| = 12 cm

|EC| = 9 cm

Verilenlere göre topun A noktasından C noktasına kadar toplam kaç santimetre yol aldığını hesaplayınız.

3. Aşağıdaki görselde Arda Bey'in ve Deniz Hanım'ın doğrusal bir zemin üzerinde oluşan gölgeleri verilmiştir.

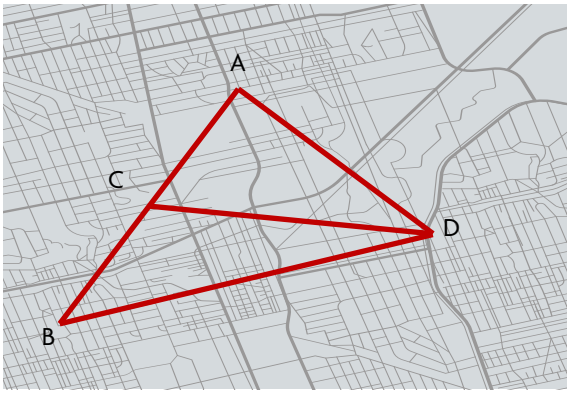


Arda Bey'in boyu 1,8 metre ve Deniz Hanım'ın boyu 1,65 metredir. Elektrik direğine Arda Bey'in uzaklığı 1,5 metre, Deniz Hanım'ın uzaklığı 1 metredir.

Arda Bey'in gölgesinin uzunluğu, Deniz Hanım'ın gölgesinin uzunluğunun 2 katıdır.

Buna göre Arda Bey'in gölgesinin uzunluğunun kaç metre olduğunu bulunuz.

4. Aşağıdaki şehir haritasında 4 nokta arasındaki doğrusal yollar gösterilmiştir.



$|AD| = 6$ cm

$|AC| = 4$ cm

$|CB| = 5$ cm

C ve D noktaları arasındaki mesafenin gerçek uzunluğu 800 metre olduğuna göre B ve D noktaları arasındaki mesafenin gerçek uzunluğu kaç metredir?

5. Aşağıda doğrusal bir yol izleyen teleferiğin üç farklı zamanda bulunduğu konumlar gösterilmiştir. Teleferiğin bulunduğu konumlardaki yerden yükseklikleri sırasıyla 70 metre, 40 metre ve 25 metredir.

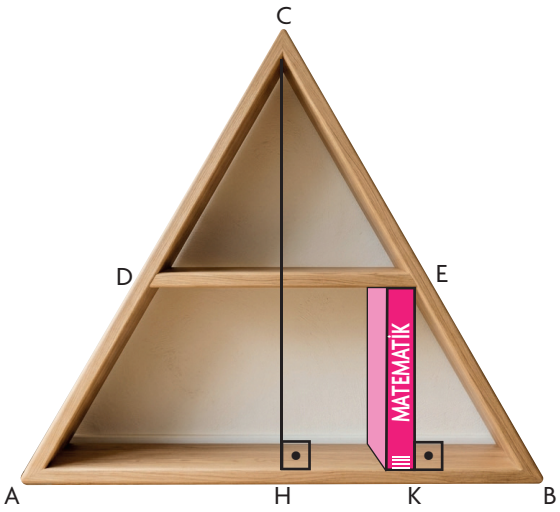


Buna göre teleferiğin en yüksekte bulunduğu konum ile ortada bulunduğu konum arasındaki yatay mesafenin ortada bulunduğu konum ile en alçakta bulunduğu konum arasındaki yatay mesafeye oranını bulunuz.

GERİ BİLDİRİM

Bu geri bildirim sayesinde kendi cevabınızı kontrol edebilir, hatalarınızı düzelterek öğrenmenizi pekiştirebilirsiniz.

ÇÖZÜM 1.



Üstteki raf kitaplığı ortalayacak şekilde yerleştirildiği için

$|CD| = |DA|$ ve $|CE| = |EB|$ dir.

C noktasından en alttaki rafa dikme indirilip dikmenin rafı kestiği nokta
H olarak isimlendirilirse [EK] // [CH] olur.

CHB üçgeninde temel orantı teoreminden

$\frac{|BE|}{|BC|} = \frac{|BK|}{|BH|}$ elde edilir.

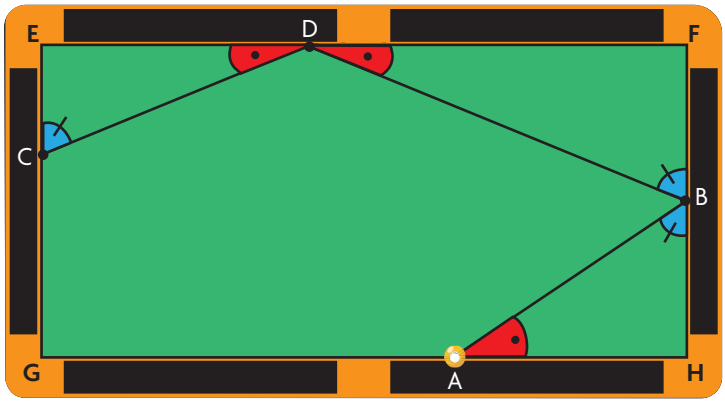
$|CE| = |EB|$ olduğu için $|BK| = |HK|$ olur.

$|CA| = |CB|$ verildiği için $|AH| = |HB|$ olur.

Buradan $|AK| = 3 \cdot |KB|$

$\frac{|AK|}{|KB|} = 3$ olur.

ÇÖZÜM 2.



Topun bir kenara gelme açısıyla o kenardan sekme açısı birbirine eşit olduğundan
$m(\widehat{BDF}) = m(\widehat{CDE})$ ve $m(\widehat{DBF}) = m(\widehat{ABH})$ olur.

Masa dikdörtgen şeklinde olduğu için her bir iç açısının ölçüsü 90 derecedir. Bu durumda kırmızı ve mavi renkli açıların toplamı 90° olur.

$m(\widehat{DCE}) = m(\widehat{DBF})$ ve $m(\widehat{BAH}) = m(\widehat{BDF})$ elde edilir.

Açı - Açı benzerliğinden
$(\widehat{ABH}) \sim (\widehat{DBF}) \sim (\widehat{DCE})$ yazılabilir. Buradan

$\frac{|HB|}{|BF|} = \frac{|AH|}{|DF|} = \frac{|AB|}{|BD|}$ ve $\frac{|FB|}{|EC|} = \frac{|DF|}{|ED|} = \frac{|DB|}{|CD|}$

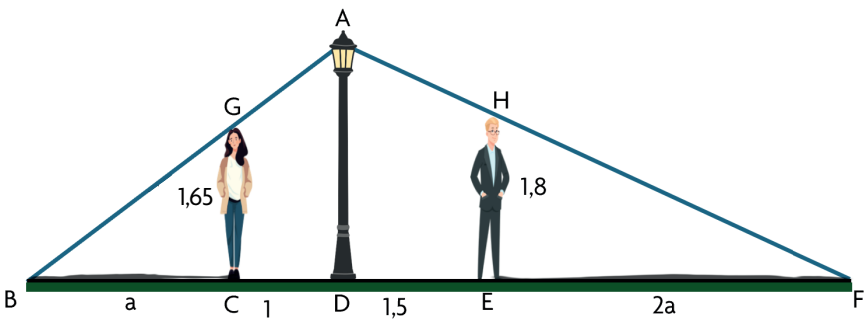
eşitlikleri yazılır.

$\frac{18}{12} = \frac{24}{|DF|}$ eşitliğinden $|DF| = 16$ cm ve $\frac{12}{9} = \frac{16}{|ED|}$ eşitliğinden $|ED| = 12$ cm olur.

ABH, DBF ve DCE üçgenlerinde dik kenarların uzunluklarının 3 ve 4'ün katları olduğu görülür.
Hipotenüs uzunlukları da 5'in aynı katı olmalı ve buradan $|AB|$, $|DB|$ ve $|CD|$ sırasıyla 30 cm, 20 cm ve 15 cm olur.

Buradan istenilen uzunluk 30 + 20 + 15 = 65 cm olarak bulunur.

ÇÖZÜM 3.



Soruda verilen uzunluklar yandaki görselde yerlerine yazılmıştır.

Deniz Hanım'ın gölgesinin boyuna a denildiğinde Arda Bey'in gölgesinin boyu 2a olur.

ADF üçgeninde temel orantı teoreminden

$\frac{|EF|}{|DF|}=\frac{|EH|}{|DA|} \Rightarrow \frac{2a}{2a+1,5}=\frac{1,8}{|DA|}$ eşitliği elde edilir.

ADB üçgeninde temel orantı teoreminden

$\frac{|BC|}{|BD|}=\frac{|GC|}{|AD|} \Rightarrow \frac{a}{a+1}=\frac{1,65}{|AD|}$ eşitliği elde edilir.

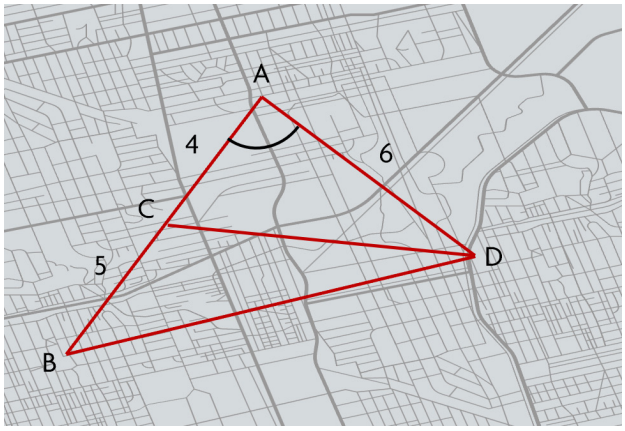
Elde edilen eşitlikler taraf tarafa bölünürse

$\frac{2a+2}{2a+1,5}=\frac{12}{11}$

$24a + 18 = 22a + 22$

$2a = 4$ metre bulunur.

ÇÖZÜM 4.



ACD ve ABD üçgenlerinde A açısı ortak açıdır ve

$\frac{|AD|}{|AB|}=\frac{|AC|}{|AD|} \Rightarrow \left(\frac{6}{9}=\frac{4}{6}\right)$ eşitliği vardır.

Kenar – Açı – Kenar benzerliğinden $(\widehat{ACD}) \sim (\widehat{ADB})$ dir.

$\frac{|AD|}{|AB|}=\frac{|AC|}{|AD|}=\frac{|CD|}{|BD|}=\frac{2}{3}$ olur.

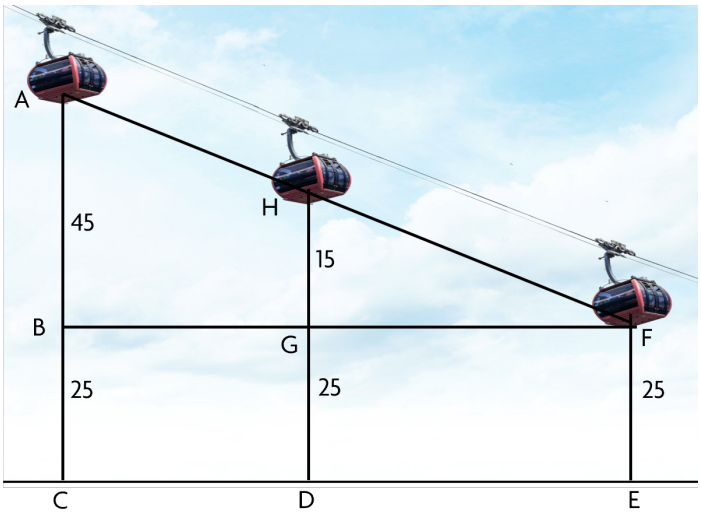
$|CD| = 2k$ alınırsa $|BD| = 3k$ olur.

$2k = 800$

$k = 400$

$|BD| = 3k = 1200$ metre bulunur.

ÇÖZÜM 5.



Teleferiklerin farklı konumları için yerden yükseklikleri yerleştirilip zemine paralel BF doğrusu çizildiğinde $|HG| = 15$ m ve $|AB| = 45$ m olur.

ABF üçgeninde temel orantı teoremi uygulanırsa

$\frac{|GF|}{|BF|} = \frac{|HG|}{|AB|}$ eşitliği elde edilir.

$\frac{|GF|}{|BF|} = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}$ olur.

$\frac{|BG|}{|GF|} = 2$ olur.

ÖĞRENDİKLERİM

Amaç: Bu bölümde öğrendiklerinizi özetlemenizi, günlük hayatta ve Türk-İslam sanatındaki kullanım alanlarını belirlemenizi amaçlıyoruz.

Aşağıdaki tabloya temanın anahtar kavramlarının temel özelliklerini kendi cümlelerinizle yazınız.

ANAHTAR KAVRAM	KISA TANIM VE KOŞULLAR
Eşlik	
Benzerlik	
Pisagor Teoremi	
Benzerlik Oranı	

Bu tablo, özellikle formüllerin ve sembolik gösterimlerin görselleştirilmesi veya özetlenmesi için oluşturulmuştur. Tablodaki boşlukları uygun ifadeler ile doldurunuz.

KAVRAM/KURAL	SEMBOLİK GÖSTERİM/FORMÜL	KULLANILDIĞI GEOMETRİK DURUM/ŞEKİL
Eşlik		
Benzerlik		
Pisagor Teoremi		
Benzerlik Oranı (k)		

Aşağıdaki tabloda, öğrendiğiniz kavramların günlük hayatta ve farklı disiplinlerde kullanıldığı bazı alanlar verilmiştir. Her satırda yer alan ilgili konu ve ilişkilendirilen alanı dikkate alarak üçüncü sütuna bu kavramın kullanımına ait bir uygulama örneği yazınız.

İLGİLİ KONU	İLİŞKİLENDİRİLEN ALAN	UYGULAMA ÖRNEĞİ
Benzerlik	Haritacılık	
Pisagor Teoremi	İnşaat/Mimari	
Eşlik	Üretim/Teknik Çizim	
Benzerlik	Optik/Fotoğrafçılık	
Benzerlik	Gölge Boyu Hesapları	

EŞLİK VE BENZERLİK

Geometrik Dönüşümler, Eşlik-Benzerlik ve Teoremlere Yönelik Yansıtıcı Yazı

Amaç: Bu çalışma, geometri problemlerini çözerken geometrik dönüşümleri, eşlik ve benzerlik kurallarını ile teoremleri (Thales, Öklid, Pisagor) nasıl kullandığınıza ve varsayımlarınızı nasıl genellemelere dönüştürdüğünüze yönelik farkındalık oluşturmak amacıyla hazırlanmıştır. Çalışma boyunca ispat ve problem çözme süreçlerinizde kullandığınız yöntemleri değerlendirmeniz beklenmektedir.

Aşağıdaki soruları, konuyla ilgili yaptığınız çıkarımlar, ispatlar ve problem çözümleri üzerine düşünerek yanıtlayınız. Sorulara kısa ve açık cümlelerle, kullandığınız gerekçeleri ve yöntemleri ifade etmeniz yeterlidir.

1. **Öğrendiğiniz bu temada sizin dikkatinizi çeken veya önemli bulduğunuz noktaları yazınız.**

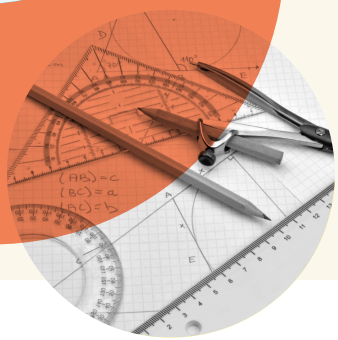
2. **Eşlik ve benzerlik ile ilgili çıkarım ve teoremleri içeren problemleri çözerken kullandığınız stratejileri gözden geçiriniz. Bu stratejilerden etkin olduğunu düşündüğünüz bir yöntemi adımları ile açıklayınız.**

3. **Bir üçgenden hareketle ona benzer yeni üçgenler oluştururken veya dönüşüm kurallarını uygularken; teorik bilginizi (kuralları) uygulama sürecine nasıl aktardınız?**

   - **Tales, Öklid ve Pisagor teoremlerinden geometrik problemlerin çözümünde nasıl yararlandığınızı kısaca açıklayınız.**

4. **Geometrik şekillerde eşlik, benzerlik ve geometrik dönüşüm özelliklerinden yararlanılarak açıklanabilecek gerçek yaşam durumlarına örnekler veriniz.**

Daha fazlası için karekodu okutunuz.



ALGORİTMİK DİL

BAŞLARKEN

Sevgili öğrencimiz, bu çalışma kartında sizlerin bireysel öğrenme yolculuğunuza destek sunmak amaçlanmaktadır. Çalışmalarınızı yürütürken "**Hazırlanıyorum**", "**İlişkilendiriyorum**", "**Uygulayarak Öğreniyorum**", "**Değerlendiriyorum**" bölümlerini sırası ile yapmanızı; her bölüm ve etkinlik sonundaki geri bildirimleri alarak ilerlemenizi; "**Öğrendiklerim**" bölümünde öğrenme sürecinizi gözden geçirmenizi bekliyoruz.

Bu çalışma kartında, algoritmik dilin (doğal dil, akış şeması, sözde kod) matematiksel problem çözmede nasıl kullanılabileceğini keşfedecek ve aşağıdaki soruları matematiksel gerekçelerle yanıtlayacaksınız.

- Bir problemi çözmek için izlenecek adımları nasıl sistemli hâle getirebilirsiniz?
- İşlem basamaklarını görsel, sözel veya sembolik biçimlerde nasıl ifade edebilirsiniz?
- Farklı çözüm yollarını algoritmik dille nasıl temsil edebilirsiniz?
- Oluşturduğunuz algoritmanın doğruluğunu nasıl test edebilirsiniz?
- Gerçek yaşamda kullanılan şifreleme, sıralama ya da arama işlemleri gibi süreçlerde algoritmaların nasıl bir rolü vardır?

Öğrenme sürecinin sonunda algoritmaların problem çözmede neden güçlü bir araç olduğunu, matematiğin bilgisayar bilimleriyle nasıl etkileşim içinde bulunduğunu ve algoritmik düşünmenin günlük yaşamda karşılaşılan durumlara nasıl uygulanabileceğini fark edeceksiniz.

HAZIRLANIYORUM

Amaç: Bu bölümde ön bilgilerinizi hatırlamanızı, temaya hazırlıklı hâle gelmenizi amaçlıyoruz.

Aşağıda yer alan ifadeler, bu temada tamamlanması hedeflenen öğrenme çıktısını ele almadan önce sahip olmanız gereken bazı temel becerileri içermektedir. Lütfen her bir ifadeyi dikkatlice okuyunuz.

- Eğer ifadedeki beceriye hâkim olduğunuzu düşünüyorsanız kutucuğu işaretleyiniz.
- Eğer beceriye yönelik eksikliklerinizin olduğunu düşünüyorsanız ya da bu beceri üzerine herhangi bir deneyiminiz yoksa kutucuğu boş bırakınız.

SORULAR	ÖN ÖĞRENME KONTROL LİSTESİ	
1	Tam sayıları tek, çift ve asal sayı şeklinde sınıflandırabilirim.	
2	Ardışık tam sayı örüntüleri oluşturabilirim.	
3	Bir doğal sayının asal olup olmadığını bilirim.	
4	Bir doğal sayının asal çarpanlarını bulabilirim.	
5	Bir doğal sayıyı basamak değerlerine göre çözümleyebilirim.	
6	Bir doğal sayının çarpanlarını ve katlarını belirleyebilirim.	
7	Bir bölme işleminde bölünen, bölen, bölüm ve kalan bileşenlerini belirleyebilirim.	
8	İki ya da daha çok doğal sayının ortak bölenlerini belirleyebilirim.	
9	İki ya da daha çok doğal sayının ortak katlarını belirleyebilirim.	
10	Bir problemin çözüm aşamalarını adım adım (algoritmik olarak) ifade edebilirim.	

"Ön Öğrenme Kontrol Listesi" ni doldurduktan sonra "Kontrol Noktası"ndaki etkinlikleri yapınız. Cevaplarınızı geri bildirim bölümünden doğrulayınız.

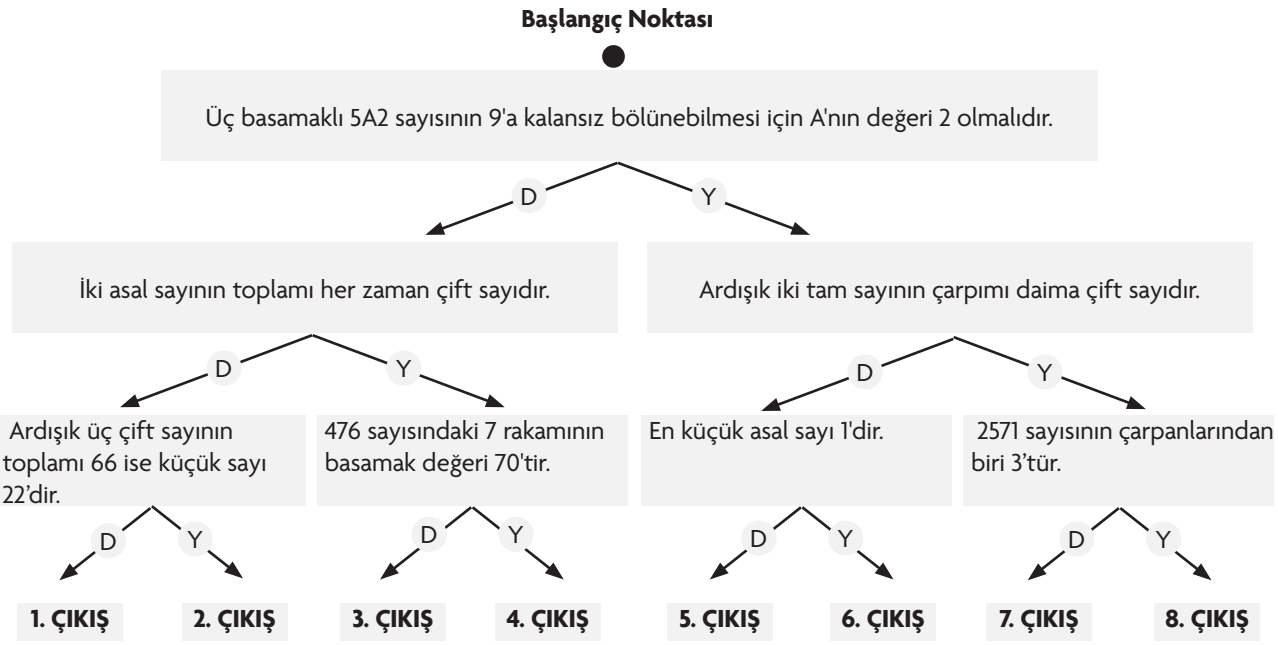
KONTROL NOKTASI

ETKİNLİK 1.

Bu etkinlik, temel matematiksel kavramlar hakkındaki becerilerinizi ve düşünme biçiminizi size yansıtmak için tasarlanmış bir öğrenme aracıdır.

Yönerge:

1. "Başlangıç Noktası"nın altındaki ilk ifadeyi dikkatlice okuyunuz.
2. İfadenin "Doğru" (D) ya da "Yanlış" (Y) olduğuna karar veriniz.
3. Kararınıza uygun olan okun ucundaki harfi (D veya Y) takip ederek bir sonraki ifadeye ilerleyiniz.
4. Ulaştığınız her yeni kutudaki ifade için aynı işlemleri tekrarlayınız.
5. Yaptığınız seçimler, sizi 1'den 8'e kadar numaralandırılmış çıkışlardan birine ulaştıracaktır.



Çıkış No.:

Geri bildirim bölümünden kontrolünüzü yapabilmek için çıkış numaranızı not ediniz.

ETKİNLİK 2.

Bir problemin çözümünde uygun yöntemi (stratejiyi) seçmek, doğru sonuca ulaşmak açısından büyük önem taşır.

Aşağıdaki problemler sütununda verilen her durumu, çözümünde kullanılması gereken en uygun matematiksel kavram ile eşleştiriniz.

	PROBLEMLER	KAVRAMLAR
1	Bir marangoz, 108 ve 144 cm uzunluğundaki iki farklı ahşap çıtayı hiç artmayacak şekilde keserek eşit uzunlukta parçalar elde edecektir. Bu parçalardan birinin uzunluğu en fazla kaç cm olabilir?	A) EKOK (En Küçük Ortak Kat) B) Bölünebilme Kuralları C) Sayı Çözümlemesi D) Asal Çarpanlara Ayırma E) EBOB (En Büyük Ortak Bölen) F) Aritmetik Ortalama
2	Bir okuldaki öğrenciler, altışarlı veya sekizerli gruplandırıldığında her seferinde 2 öğrenci ayakta kalmaktadır. Okuldaki öğrenci sayısının 100'den fazla olduğu bilindiğine göre bu okulda en az kaç öğrenci vardır?	
3	Bir kütüphaneci, 360 adet romanı her rafta eşit sayıda kitap olacak şekilde raflara dizmek istemektedir. Raf sayısının 10'dan fazla ve 20'den az olduğu bilindiğine göre kitaplar raflara kaç farklı şekilde dizilebilir?	
4	Elif, telefonunun şifresini dört basamaklı 257A olarak belirlemiştir. Bu şifre 6 ile tam bölünebildiğine göre A rakamı kaç olmalıdır?	
5	Bir öğrenci, iki basamaklı AB doğal sayısının sağına 3 rakamını yazarak AB3 üç basamaklı sayısını elde etmiştir. Elde edilen sayı, ilk sayıdan 408 fazla olduğuna göre AB iki basamaklı sayısının değeri kaçtır?	

Geri bildirim bölümünden kontrolünüzü yapabilmek için cevaplarınızı not ediniz. (Problem No/Eşleşen Kavram)

1. Problem	2. Problem	3. Problem	4. Problem	5. Problem

ETKİNLİK 3.

Bir problemin çözümünde doğru yöntemin (stratejinin) seçilmesi kadar işlem adımlarının doğru sırayla uygulanması da büyük önem taşır.
Aşağıda verilen problemi inceleyiniz. Harflerle adlandırılmış algoritmik çözüm adımlarını uygun şekilde sıralayınız. Yanda verilen tabloda boş bırakılan sütunu, adım numaralarına dikkat ederek uygun harflerle eşleştirip doldurunuz.

Problem: Bir sayının 3 katının 7 fazlası 22'dir. Bu sayı kaçtır?

Verilen problemi denklem yardımıyla çözmek isteyen bir öğrenci için hazırlanan algoritmik çözüm adımları aşağıda karışık olarak verilmiştir.

A) Sonucu belirt.

B) Verilen sözel ifadeyi denklem olarak yaz: 3x + 7 = 22

C) "x"i bulmak için eşitliğin her iki tarafını x in katsayısı olan 3'e böl.

D) Bilinmeyen sayıya "x" değişkenini ata.

E) "x" içeren terimi yalnız bırakmak için eşitliğin her iki tarafından 7 çıkar.

F) Bitir.

G) Başla.

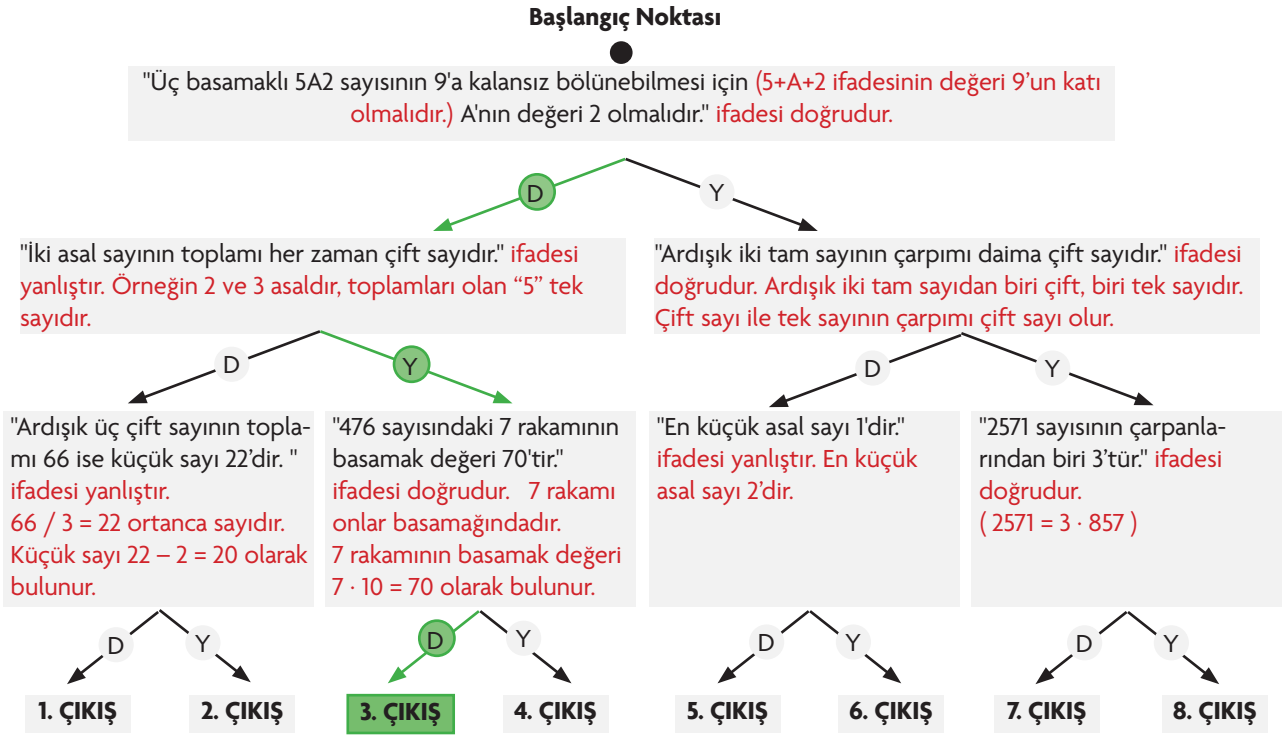
Çözüm Adımları	
1. Adım	
2. Adım	
3. Adım	
4. Adım	
5. Adım	
6. Adım	
7. Adım	

GERİ BİLDİRİM

Bu geri bildirim sayesinde kendi cevabınızı kontrol edebilir, hatalarınızı düzelterek öğrenmenizi pekiştirebilirsiniz.

KONTROL NOKTASI

ÇÖZÜM 1.



Aşağıda çıkış numaranıza ait dönütler yer almaktadır.

1. ÇIKIŞ: 9 ile bölünebilme kuralını doğru uyguladınız ancak asal sayıların toplamı ve ardışık çift sayıların toplamı ile ilgili problemlerde zorluk yaşıyor olabilirsiniz. Özellikle "her zaman" gibi genelleme ifadelerini ve problemdeki kilit noktaları (ortalama sayıyı bulma gibi) gözden kaçırmış olabilirsiniz.

2. ÇIKIŞ: Bölünebilme kuralı ve ardışık sayı problemlerinde doğru sonuca ulaştınız. Ancak asal sayıların istisnai özelliklerine odaklanmak faydalı olacaktır.

3. ÇIKIŞ: Tebrikler! Tüm adımları takip ederek ifadelerin doğruluk değerlerini hatasız belirlediniz.

4. ÇIKIŞ: Bölünebilme ve asal sayılarla ilgili temel kuralları biliyorsunuz. Ancak bir rakamın basamak değeri ile sayı değeri arasındaki farkı ayırt etmekte zorlanıyor olabilirsiniz. Bu, temel ama önemli bir kavram yanılgısıdır.

5. ÇIKIŞ: Ardışık sayıların çarpımının özelliklerini doğru yorumladınız. Ancak 9 ile bölünebilme kuralı ve asal sayı tanımı (1'in asal olmadığı) gibi iki temel konuda zorluk yaşıyor olabilirsiniz. "Bölünebilme Kuralları", "Asal Sayıların Tanımı ve Özellikleri"ni gözden geçirmenizi öneririz.

6. ÇIKIŞ: Ardışık sayıların özellikleri ve asal sayı tanımı konularında bilginiz doğru. Ancak ilk adım olan 9 ile bölünebilme kuralını hatalı uyguladığınız görülmektedir. "Bölünebilme Kuralları"nı gözden geçirmenizi öneririz.

7. ÇIKIŞ: Hem 9 ile bölünebilme kuralında hem de ardışık sayıların çarpımının çift sayı olma özelliğinde yanılgılarınız olabilir. "Bölünebilme Kuralları", "Tek ve Çift Sayıların Özellikleri"ni gözden geçirmenizi öneririz.

8. ÇIKIŞ: "Doğal Sayıların Temel Özellikleri (Tek/Çift, Ardışık Sayılar)" ve "Bölünebilme Kuralları" ile ilgili eksikleriniz olabileceği gözlenmiştir. Bu alanları tanımları ve temel ispatlarıyla birlikte tekrar etmeniz öğrenmenizi pekiştirecektir.

ÇÖZÜM 2.

1 → E (EBOB – En Büyük Ortak Bölen)

İki farklı uzunluktaki çıtayı artmayacak şekilde eşit parçalara bölmek, her iki uzunluğu da tam bölen en büyük sayıyı bulmayı gerektirir.

2 → A (EKOK – En Küçük Ortak Kat)

Öğrenci sayısının hem 6'ya hem 8'e göre belirli bir kalanı olduğunda sayının bu iki sayının ortak katlarıyla ilişkili olması gerekir.

3 → D (Asal Çarpanlara Ayırma)

360 sayısının farklı bölenlerini bulabilmek için sayıyı asal çarpanlarına ayırmak gerekir. Böylece olası raf sayıları belirlenebilir.

4 → B (Bölünebilme Kuralları)

Bir sayının 6 ile bölünebilmesi için 2 ve 3 ile bölünebilme kurallarını birlikte uygulamak gerekir.

5 → C (Sayı Çözümlemesi)

İki basamaklı bir sayıya yeni bir rakam eklenerek oluşan sayılar arasındaki farkı bulmak, sayının çözümlenmesine dayalı cebirsel bir işlemdir.

Bir problemin çözüm algoritmasını oluştururken öncelikle probleme en **uygun yöntemi belirlemek** esastır. Çünkü doğru yöntem, çözüm sürecinin hem doğruluğunu hem de verimliliğini doğrudan etkiler. Bu nedenle önce sorunun hangi matematiksel kavramla (örneğin; EBOB, EKOK, bölünebilme kuralları, asal çarpanlara ayırma, sayı çözümlemesi vb.) ilişkili olduğunu belirlemek gerekir.

Bu etkinlikte zorluk yaşadıysanız EBOB-EKOK ilişkisi, bölünebilme kuralları, asal çarpanlara ayırma ve sayı çözümlemesi konularını yeniden gözden geçirmeniz yararlı olacaktır. Bu kavramların problem çözümünde hangi durumlarda ve nasıl kullanıldığını örneklerle pekiştirmeniz, uygun yöntemi seçme ve yorumlama becerilerinizi geliştirecektir.

ÇÖZÜM 3.

Bir problemin çözüm algoritmasını oluştururken işlem adımlarının doğru sırada uygulanması büyük önem taşır. Çünkü **her adım bir öncekine dayalıdır** ve yapılan işlemler belirli bir mantık dizisini izler. Adımların yerinin değiştirilmesi, çözümün anlamını bozabilir veya yanlış sonuçlara yol açabilir. Bu nedenle algoritmik düşünmede **adımların sırasına dikkat** etmek; problemi sistemli, hatasız ve verimli biçimde çözmenin temel koşuludur.

Çözüm Adımları	
1. Adım	**G — Başla.** (Algoritmanın başlangıcıdır.)
2. Adım	**D — Bilinmeyen sayıya "x" değişkenini ata.** (Problemi değişkenle ifade etmek için önce bilinmeyeni tanımlamak gerekir.)
3. Adım	**B — Verilen sözel ifadeyi denklem olarak yaz: 3x + 7 = 22.** (Sorunun matematiksel modeli oluşturulur, üzerinde işlem yapılacak denklem elde edilir.)
4. Adım	**E — "x" içeren terimi yalnız bırakmak için eşitliğin her iki tarafından 7 çıkar.** (3x+7−7 = 22−7)
5. Adım	**C — x i bulmak için eşitliğin her iki tarafını x in katsayısı olan 3'e böl.** (3x/3 = 15/3)
6. Adım	**A — Sonucu belirt.** (Bulunan değeri açıkça yaz: x = 5)
7. Adım	**F — Bitir.** (Algoritma sona erer, istenirse sonuç kontrol edilir.)

İLİŞKİLENDİRİYORUM

Amaç:

Sevgili öğrencimiz, bu bölümde yeni öğreneceğiniz konuyu zihninizde var olan bilgileriniz, yaşantılarınız ve diğer derslerde öğrendiklerinizle ilişkilendirmenizi bekliyoruz.

Aşağıda Cezeri ve Euler'in çalışmalarıyla ilgili sunulan metinleri okuyup görselleri inceleyiniz.



Fil saati tablosu

Bu minyatür Kitabü'l-Hiyel adlı eserin Topkapı Müzesi III. Ahmed koleksiyonunda bulunan 3406 numaralı nüshasının 114a sayfasında yer almaktadır.

Cezeri ve Mekanik Sistemleri

Kendi kendine işleyen mekanik düzeneklerin (otomatların) öncülerinden kabul edilen **Cezeri** (1136–1206), su saatleri ve belirli bir düzen içinde çalışan makineler tasarlamıştır. Bu tasarımlarını meşhur eseri Kitabü'l-Hiyel'de (Mekanik Kitabı) bir araya getiren Cezeri; icatlarında fiziksel neden-sonuç ilişkilerine dayalı, **adım adım işleyen süreçler** kurgulamıştır.

Euler ve Königsberg'in Yedi Köprüsü Problemi

18. yüzyılda matematikçi Leonhard **Euler,** Königsberg kentindeki yedi köprüden her birinin yalnızca bir kez geçilerek dolaşılıp dolaşılamayacağını sorgulamıştır. Bu problem, **adım sırasına dayalı bir çözüm mantığı** gerektirmiş ve Euler bu düşünceden hareketle **çizge** (graf) teorisinin temelini atmıştır. Bugün aynı mantık; harita uygulamaları, ağ sistemleri ve ulaşım planlamasında kullanılmaktadır.



Algoritmalar, tarihsel olarak farklı bağlamlarda ortaya çıkan ve birbirinden bağımsız gelişen düşünme ve problem çözme yaklaşımlarını kapsar. Cezeri'nin mekanik düzenekleri, Euler'in Köprü Problemi, günümüzde yapay zekâ, siber güvenlik ve şifreleme alanlarında kullanılan algoritmalar; algoritmik düşüncenin farklı dönemlerde aldığı biçimleri göstermektedir. Tüm bu örneklerde ortak nokta, bir problemi çözmek için mantıksal bir işlem sırası oluşturma gereksinimidir.

🤔 **Günlük yaşamınızda algoritma mantığıyla çalışan sistem örneklerini düşününüz (örneğin otomatik kapı, telefon kilidi, trafik ışıkları vb.).**

Algoritmaların yalnızca bilgisayar programlarına değil düşünme biçimimize de yön veren bir yapı olduğunu unutmayınız. Yanıtınızı gözden geçirirken verdiğiniz örneklerin belirli bir sıra, mantık ve kural bütünlüğüne dayanıp dayanmadığını kontrol ediniz.

UYGULAYARAK ÖĞRENİYORUM

Amaç: Bu bölümde bilgilerinizi etkinlikler ve uygulamalarla pekiştirmenizi, öğrenmeyi daha kalıcı hâle getirmenizi amaçlıyoruz.

Problem ya da etkinliklerde verilen adımları dikkatle uygulayınız. Çalışmanızı güvenli ve düzenli bir şekilde yapınız.

Temsiller ve Matematiksel Yapılar Arasındaki İlişkiler

Problem çözme süreçlerinde, veriyi ve mantıksal adımları modellemek amacıyla liste, tablo, çizge ve algoritmik dil gibi çeşitli temsil biçimlerinden faydalanılır. Bununla birlikte her temsil biçimi, karşılaşılan her problem türü için eşdeğer bir analitik güç veya verimlilik sunmaz. Problemin yapısı, çözümde hangi temsili kullanacağınızı belirler.

ETKİNLİK 1.
Aşağıda verilen problemi inceleyiniz.
Problem:
Bir mobil egzersiz uygulaması, kullanıcılarını düzenli spor yapmaya teşvik etmek için bir "motivasyon puanı" sistemi geliştirmiştir.
Sisteme göre
- Kullanıcı ilk gün egzersiz yaptığında 15 puan kazanır.
- Her gün kazanılan puan miktarı, bir önceki güne göre 4 puan artmaktadır.

Bu kurala göre ilk 7 gün boyunca düzenli egzersiz yapan bir kullanıcının her gün kazandığı puan miktarını ve toplam motivasyon puanını hesaplayınız.
Her bölümde verilen yönergeleri dikkatlice takip ederek etkinliği adım adım tamamlayınız.

Bölüm 1: Problemin Sözel İfadeden Liste Temsiline Dönüştürülmesi

Listeler, problemlerdeki verilerin oluş sırasına göre ardışık biçimde dizildiği bir temsil biçimidir. Veriler arasındaki artış ya da azalış örüntüsünü (örneğin her gün 4 puan artması) hızlıca fark etmeyi sağlar.

Verilen problemde kullanıcının ilk 7 gün boyunca her gün kazandığı puan miktarını listeleyiniz.

PUAN LİSTESİ
1. Gün Kazanılan Puan: _____
2. Gün Kazanılan Puan: _____
3. Gün Kazanılan Puan: _____
4. Gün Kazanılan Puan: _____
5. Gün Kazanılan Puan: _____
6. Gün Kazanılan Puan: _____
7. Gün Kazanılan Puan: _____

Bölüm 2: Liste Temsilinden Tablo Temsiline Geçiş

Tablolar, verileri satır ve sütunlar hâlinde düzenleyerek değişkenler arasındaki ilişkiyi gösteren bir temsil biçimidir. Yandaki tablo, gün sayısı ile günlük kazanılan puan miktarı ve o güne kadar kazanılan toplam puan miktarı arasındaki ilişkiyi gözlemlemek amacıyla oluşturulmuştur.
Bu ilişkiyi dikkate alarak oluşturduğunuz listedeki verileri tabloya yerleştiriniz.

Gün	Günlük Kazanılan Puan Miktarı	Toplam Kazanılan Puan Miktarı
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		

Bir veri setindeki örüntülerin tespiti için tablo temsili avantaj sağlarken çözüm sürecinin belirli bir sıra ile izlenmesi gereken adımlarını hatasız tanımlamak için algoritmik dil daha üstün bir araçtır. Bu nedenle etkin bir problem çözme yaklaşımı, problemin doğasına **en uygun temsil biçimini** stratejik olarak **belirle**meyi gerektirir.

Bölüm 3: Liste/Tablo Temsilinden Algoritmik Dile Geçiş

Liste veya tablodaki bilgileri, problemin çözümüne ulaşmak için gerekli olan sıralı işlem adımlarına dönüştürünüz.
1. adım: Hesaplamaya 0 (sıfır) toplam puan ile başla.
2. adım: İlk günün kazancını 15 puan olarak belirle.
3. adım:.....
.....
.....
(Bu etkinliğin geri bildirimi 29. sayfadadır.)

Algoritmik Yaklaşım

Algoritmik yaklaşım; algoritmaların geliştirilmesi, değerlendirilmesi ve uygulanması için kullanılan kapsamlı bir problem çözme yöntemini tanımlar. Algoritmik yaklaşım yalnızca yazılım dünyasına ait teknik bir süreç değil karmaşık problemleri anlamlandırmak ve çözüme kavuşturmak için kullanılan temel bir yetkinliktir. Mantıksal akıl yürütme, problemi yönetilebilir parçalara ayırma ve çözüm adımlarını düzenleme esasına dayanan bu beceri; günlük yaşamda bir yemek tarifini uygulamaktan okula giden en kısa yolu bulmaya kadar pek çok alanda karşımıza çıkar. "Algoritma" terimi, 9. yy.da Bağdat'ta yaşamış ünlü matematikçi **Harizmi**'nin adından türemiştir. **Algoritma**, belirli bir amaca ulaşmak için tasarlanan **sıralı ve mantıklı adımlar bütünüdür.**
Bir algoritmanın üç temel özelliği vardır:

- **Kesinlik:** Her adım açık ve net olmalıdır.
- **Sonluluk:** Algoritma, belirli sayıda adımda tamamlanmalıdır.
- **Etkililik:** Her adım uygulanabilir ve anlamlı olmalıdır.

Bu özellikler, algoritmaların güvenilir ve tekrarlanabilir çözümler üretmesini sağlar.

ETKİNLİK 2.

Yeni satın alınan ve parçalar hâlinde teslim edilen bir kitaplığın montaj eylemi, girdilerin (parçalar, vidalar, aletler) belirli bir şemaya (talimatlara) göre dönüştürülerek bir çıktı (kullanıma hazır kitaplık) elde edildiği bir faaliyettir.

Bu faaliyetin "süreç" ve "işlem" kavramları açısından analizine yönelik sorulan soruları cevaplayınız.

1. **"Demonte bir kitaplığın montajını yapma" eyleminin baştan sona tamamlanmış hâli, süreç kavramına mı yoksa işlem kavramına mı daha uygun bir örnektir? Cevabınızı kısaca gerekçelendiriniz.**

2. **Kurulum şemasını takip ettiğiniz her bir adım (örneğin, bir vidayı tornavidayla sıkmak veya arka paneli çivilerle çakmak), "işlem" veya "süreç" kavramlarından hangisine karşılık gelmektedir?**

🤔 "Süreç" ve "İşlem" kavramları arasındaki fark nedir? İrdeleyiniz.
(Bu etkinliğin geri bildirimi 29. sayfadadır.)

Bir problemi algoritmik şekilde çözebilmek için algoritmanın temel yapı taşlarını bilmek önemlidir. Bu yapı taşlarının başında **işlem** ve **süreç** kavramları gelir.
İşlem; sürecin içinde yer alan, tek bir adımı temsil eden en küçük anlamlı birimdir. Başka bir deyişle işlemler, bir problemin çözümüne katkı sağlayan temel eylemleri ifade eder.
Süreç ise belirli girdilerin (verilerin) belirli çıktılara dönüştürülmesi amacıyla bir araya getirilen işlemler dizisidir. Dolayısıyla süreç, bir problemin çözümüne ulaşmak için izlenen genel akışı ifade eder.
Bir algoritmada süreç, işlemlerin sıralı bir şekilde bir araya gelmesiyle oluşur. Bu kavramları doğru anlamak, bir problemi sistemli biçimde çözmek için temel oluşturur.

ALGORİTMİK TASARIM UYGULAMASI

Amaç

Bu uygulamanın amacı; bir problemi çözmek için algoritma tasarlarken "Girdi", "Çıktı" ve "Süreç" bileşenlerinin nasıl belirlendiğini ve bir çözümün nasıl sıralı adımlardan oluştuğunu fark etmenizdir.

Yönerge

1. Tablonun sol sütununda verilen **örnek problemi** (Dikdörtgenin çevresini hesaplayan algoritma tasarımını) **inceleyiniz.**

2. Bu problemin **Girdi, Çıktı ve Süreç bileşenlerine** göre nasıl analiz edildiğine **dikkat ediniz.**

3. Tablonun sağındaki teorik açıklamalar ile soldaki örneği karşılaştırınız.

4. Girdileri kullanarak çıktıya ulaşmak için sürecin adım adım ve tutarlı biçimde nasıl yazıldığını inceleyiniz.

Verilen bir dikdörtgenin çevre uzunluğunu hesaplayan bir algoritmanın tasarlanması.	Bir problemin algoritmik çözümü, problemin temel bileşenlerine ayrıştırılmasıyla sistematik bir şekilde gerçekleştirilir. Bu bileşenler; hedeflenen sonuç olan **çıktı**, bu sonuca ulaşmak için gerekli olan başlangıç verileri olan **girdi** ve girdileri kullanarak çıktıyı üreten adımlar dizisi olan **süreç** olarak tanımlanır.
Çıktı: Dikdörtgenin çevre uzunluğunu (Ç) temsil eden pozitif bir reel sayı.	**1. Çıktının Tanımlanması:** Algoritmanın öncelikli hedefi, hesaplanması istenen nihai sonucun belirlenmesidir.
Girdi: Dikdörtgenin uzunluk belirten temel elemanları: Kısa kenar uzunluğu ($a \in \mathbb{R}^+$) Uzun kenar uzunluğu ($b \in \mathbb{R}^+$)	**2. Girdilerin Belirlenmesi:** Tanımlanan çıktıya ulaşabilmek için algoritmaya sağlanması gereken verilerin eksiksiz olarak saptanması gerekir.
Süreç: **Adım 1:** Girdi olarak verilen a ve b değerlerinin toplamını ara sonuç (c) olarak hesapla. Ara Sonuç (c)\c = a + b **Adım 2:** Adım 1'de elde edilen ara sonucu 2 sabiti ile çarparak çıktıyı elde et. Ç = 2 · c	**3. Sürecin Yapılandırılması**: Bu aşama, belirlenmiş girdilerden tanımlanmış çıktıya ulaşmayı sağlayan mantıksal ve matematiksel işlemlerin sıralı adımlar hâlinde tasarlandığı bölümdür.

ALGORİTMİK DİL
Algoritmalar; **doğal (günlük) dil, akış şeması ve sözde kod** gibi farklı gösterim biçimleriyle temsil edilebilir.
1. Algoritmik Doğal (Günlük) Dil
Algoritmik doğal dil; bir problemi çözme adımlarını günlük dili kullanarak sıralı, açık ve anlaşılır biçimde ifade eden bir yöntemdir. Bu yöntem, teknik ayrıntılardan uzak durarak herkesin anlayabileceği basit ve açıklayıcı ifadelerle algoritmanın nasıl işlediğini ortaya koyar.

ÖRNEK

Bilgisayar ortamında bir dikdörtgenin çevresini bulan algoritmanın işleyişi, doğal dille aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

Algoritmik Doğal Dil

1. adım: Başla.
2. adım: Girdilerin alınması
Dikdörtgenin uzun ve kısa kenarının uzunluklarını kullanıcıdan al.
3. adım: Çevrenin hesaplanması
Dikdörtgenin çevresi, uzun ve kısa kenarının uzunluklarının toplamının 2 katına eşittir. Bu işlemi gerçekleştir.
4. adım: Sonucun yazdırılması
Hesaplanan alanı kullanıcıya bilgi vermek amacıyla ekrana ya da bir dosyaya yazdır.
5. adım: Bitir.

Bir problemin çözümü algoritmik doğal dil ile ifade edilirken ilk adım "**Başla.**", son adım ise "**Bitir.**" olarak belirtilir.

2. Sözde Kod

Sözde kod; bir bilgisayar programının nasıl çalıştığını anlatan, **sade ve açıklayıcı bir dille yazılmış talimatlar dizisi**dir. Sözde kod, gerçek bir programlama dilinin karmaşık kurallarını içermez yalnızca algoritmanın mantığını basit biçimde ifade eder.

Söz dizimi; bir programlama dilinde komutların, ifadelerin ve verilerin nasıl yazılacağını ve düzenleneceğini belirleyen kurallar bütünüdür.

Algoritmalar sözde kod veya akış şemasıyla ifade edilirken çeşitli operatörlerden yararlanılabilir. **Operatörler,** değişkenler veya sabitler üzerinde matematiksel ve karşılaştırma işlemlerini yapan simgelerdir.

Aşağıda sunulan operatörler ve bunların işlevlerine ilişkin tabloları dikkatlice inceleyiniz.

Tablo 1: Aritmetik Operatörler ve İşlevleri

Aritmetik Operatörler	İşlevi
+	İki sayının toplamını hesaplar.
–	İki sayının farkını hesaplar.
*	İki sayının çarpımını hesaplar.
/	Bir sayının diğerine bölünmesini sağlar.
^	Bir sayının başka bir sayıya göre kuvvetini hesaplar.
%	Bir sayının diğerine bölümünden kalanı verir.

Tablo 2: Karşılaştırma Operatörleri ve Anlamları

Karşılaştırma Operatörleri	İşlevi
<	küçük
>	büyük
<=	küçük veya eşit
>=	büyük veya eşit
=	eşittir
!=	eşit değil

Tablo 3: Atama Operatörleri ve Anlamları

Atama Operatörleri
Değişkenlere değer atamak için " ← " ya da " = " sembolleri kullanılabilir.

ÖRNEK

Bir dikdörtgenin çevresini bulan algoritmanın işleyişi sözde kod ile aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

Sözde Kod

Girdi: kısa kenar uzunluğu , uzun kenar uzunluğu
Çıktı: çevre
Başla

çevre ⟵ 2 * (kısa kenar uzunluğu + uzun kenar uzunluğu)

Yazdır "Dikdörtgenin çevresi [çevre] birimdir."

Bitir

Algoritma, çevre çıktısına ulaşabilmek için kullanıcıdan dikdörtgenin kısa ve uzun kenar uzunluklarını alır. Girdiler, işlem yapılacak verileri temsil eder.

Algoritmanın başlangıcını ifade eder. Her algoritma "Başla" adımıyla başlar.

Bu adımda aritmetik işlem yapılır. Önce parantez içindeki toplama işlemi gerçekleştirilir ardından çıkan sonuç 2 ile çarpılır. Burada ⟵ sembolü atama işlemini temsil eder. Yani hesaplanan değer "çevre" değişkenine aktarılır.

Bu adım, sonucu kullanıcıya gösterir. Bilgisayar ekranına çevre değerini yazar.

Algoritmanın sona erdiğini belirtir.

Sözde kod, bir algoritmayı anlatırken uymanız gereken kesin kuralları olan bir dil değildir. Bu yüzden oldukça esnektir. Aynı algoritmanın işleyişi yandaki sözde kodlarla da ifade edilebilir. Bu esneklik sayesinde algoritmayı yazan kişi, aşina olduğu bir programlama diline (örneğin Python vb.) daha çok benzeyen bir yazım tarzı seçebilir. Bu da daha sonra bu sözde kodu gerçek bir programa dönüştürmeyi çok daha kolay hâle getirir.

Sözde kodların "Yazdır" ile başlayan satırlarında algoritmik doğal dil ve akış şemasından farklı bir yazım tercih edilmesinin nedeni, ekrana yazdırılacak ifadenin sabit bir metin mi yoksa bir değişkenin sayısal değeri mi olduğunu net bir şekilde ayırt etmektir. Örneğin, ekrana "çevre" kelimesini mi yazdıracağız yoksa bir hesaplama sonucu bulunan 30 sayısını mı? Bu ikisini karıştırmamak için farklı yazım şekilleri kullanılır. Kısacası **sözde kodun tek bir doğru yazım şekli yoktur.** Önemli olan, algoritmanın mantığını anlaşılır bir şekilde aktarmasıdır.

Sözde Kod

Girdi: uzun kenar uzunluğu,
kısa kenar uzunluğu
Çıktı: çevre
Başla

çevre =2*(uzun kenar uzunluğu +kısa kenar uzunluğu)

Yazdır "Dikdörtgenin çevresi", çevre, "birimdir."

Bitir

Sözde Kod

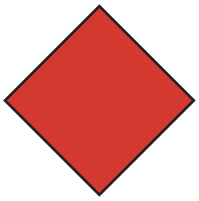
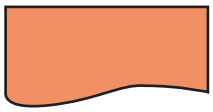
Girdi: uzun kenar uzunluğu (a),
kısa kenar uzunluğu (b)
Çıktı: Çevre (P)
Başla
c ⟵ a + b
P ⟵ 2 * c
Yazdır "Dikdörtgenin çevresi [P] birimdir."

Bitir

3. Akış Şeması
Akış şeması; bir iş sürecinin ya da algoritmanın işlem basamaklarının evrensel standartlara sahip **geometrik semboller** ve **bağlantı okları** kullanılarak ifade edildiği görsel bir modeldir. Sembollerin taşıdığı belirli anlamlar sayesinde çözüm mantığı, dilden bağımsız ve anlaşılır bir yapıya kavuşur.

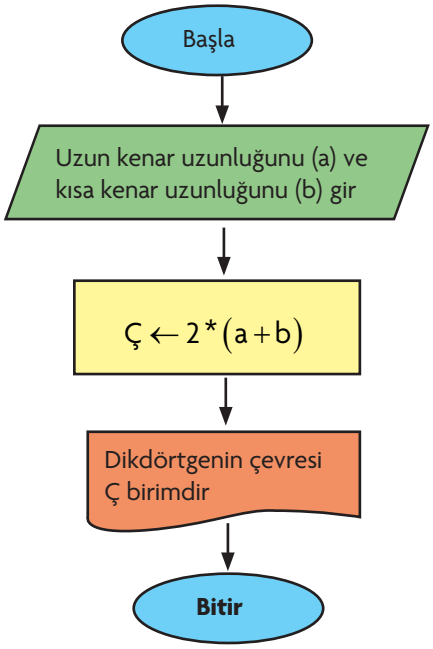
Aşağıdaki tablo, akış şemalarında kullanılan temel sembolleri ve anlamlarını özetlemektedir.

Tablo 4: Akış Şeması Sembol ve Anlamları

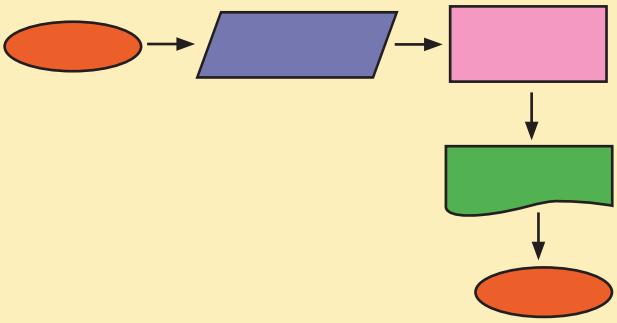
SEMBOL	ANLAMI
	**(Başla / Bitir)** Akış şemasının nerede başlayıp nerede bittiğini gösterir. Sürecin giriş ve çıkış kapılarıdır.
	**(Veri Girişi / Çıktısı)** Bu sembol, dışarıdan veri girişi yapılacağı (örneğin, kullanıcının klavyeden bir sayı girmesi) veya dışarıya bilgi aktarılacağı durumlarda kullanılır. Değişkenlerin başlangıç değerlerinin kullanıcı tarafından belirleneceği durumlarda da (örneğin, pi sayısı için kullanılacak yaklaşık değerin veya i değişkeninin ilk değerinin seçilmesi vb.) değer atamak amacıyla bu sembol kullanılır.
	**(İşlem)** Matematiksel hesaplamaların, değer atamalarının veya herhangi bir verinin işlendiği adımları temsil eder. Algoritmanın "iş yapan" kısmıdır.
	**(Karar)** Programın akışının dallandığı, bir koşulun kontrol edildiği kritik noktalardır. Bu şeklin içine "Evet" veya "Hayır" (ya da Doğru/Yanlış) ile cevaplanabilecek bir soru yazılır. Cevaba göre akış farklı bir yoldan devam eder. Örnek: "Y > 18" (Y değeri 18'den büyük mü?) **Not:** Bu şekil, bir işlemin tekrar edilmesini veya yinelenmesini sağlayan döngülerin kurulmasında önemli bir rol oynar.
	**(Akış Yönü)** Adımların hangi sırayla yapılacağını gösterir. Sürecin ilerleme yönünü belirtir.
	**(Yazdırma / Gösterme)** Bir işlemin sonucunu veya herhangi bir mesajı ekranda göstermek başka bir deyişle kullanıcıya sunmak için kullanılır.

ÖRNEK

Bir dikdörtgenin çevresini bulan ve sonucu bilgisayar ekranında yazan algoritmanın işleyişi akış şeması ile aşağıdaki gibi ifade edilebilir.



Akış şemasında kullanılan sembollerin renkleri önemli değildir. Ayrıca semboller, okların yönleri dikkate alınarak akış şeması içinde farklı konumlara yerleştirilebilir.



SIRA SİZDE 1.

Bilgisayar bilimlerinde bölme işlemi, temelde ardışık çıkarma işlemlerinin bir döngüsü olarak ifade edilebilir. İki doğal sayıdan biri (bölünen), diğerine (bölen) bölündüğünde kalanı bulmak için bölünen sayı; bölen sayıdan küçük kalana kadar bölen sayı sürekli olarak bölünen sayıdan çıkarılır.

Örneğin, 13 sayısının 4'e bölümünden kalanı bulmak için yapılan işlemler şu şekildedir:

1. Adım: 13 - 4 = 9 (Sonuç bölenden büyük, işleme devam edilir.)
2. Adım: 9 - 4 = 5 (Sonuç bölenden büyük, işleme devam edilir.)
3. Adım: 5 - 4 = 1 (Sonuç bölenden küçük, işlem sonlandırılır.)

Sonuç: Kalan 1'dir.

Yukarıdaki örnekte anlatılan "Çıkarma Yöntemiyle Kalan Bulma" mantığını baz alarak kullanıcıdan alınan iki doğal sayı (bölünen ve bölen) için işlemi gerçekleştiren ve sonucu (kalanı) ekrana yazdıran programın işleyişini veren algoritmayı algoritmik doğal dil ve akış şeması ile ifade ediniz.

Algoritmik Doğal Dil

1. adım: Başla.
2. adım:

Akış Şeması

(Bu etkinliğin geri bildirimi 29. sayfadadır.)

SIRA SİZDE 2.

Sağlıklı yaşam ve egzersiz çalışmalarında, egzersizin güvenli ve etkili bir şekilde yapılabilmesi için "Maksimum Kalp Hızı" (MKH) hesaplanır. MKH, bir kişinin yüksek yoğunluklu egzersiz sırasında ulaşabileceği en yüksek nabız değerini ifade eder. Bu değeri tahmin etmek için en yaygın kullanılan formül aşağıda verilmiştir.

$$MKH = 220 - Yaş$$

Akıllı saatler ve spor takip cihazları, bireyin anlık nabzını bu değerle karşılaştırarak hangi antrenman bölgesinde çalıştığını belirler. Antrenman bölgeleri, egzersiz yoğunluğunu ölçme yöntemleridir. Böylece sporcu, yaptığı egzersizin şiddetini güvenli sınırlar içinde takip edebilir.

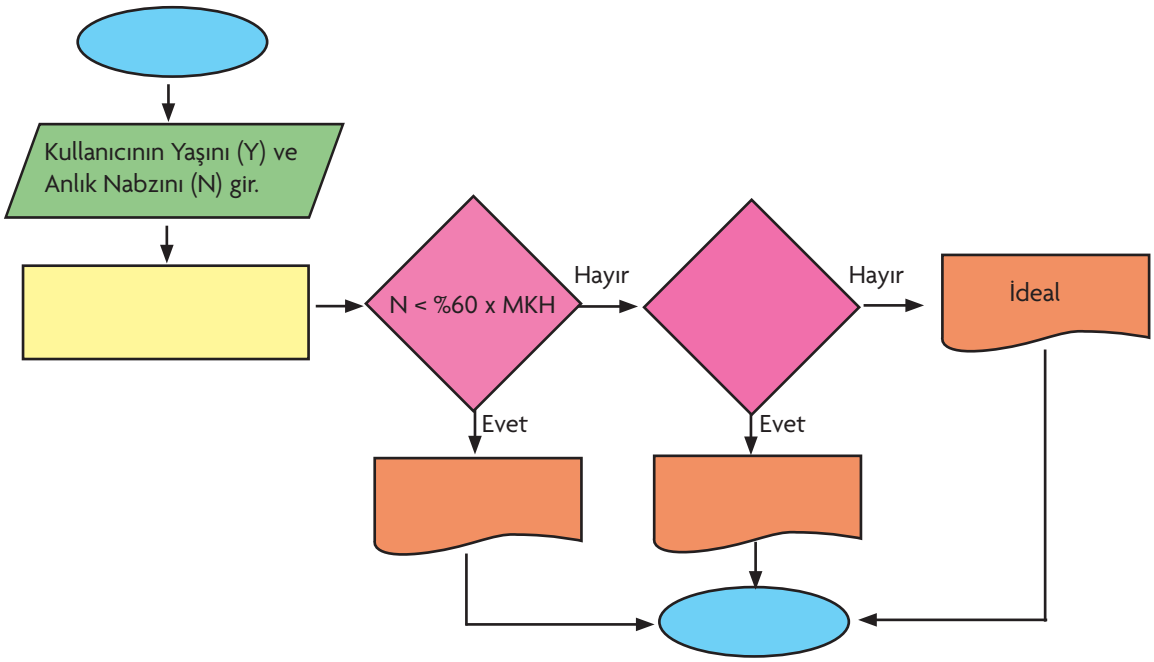
Aşağıdaki tabloda, MKH değerine göre yaygın olarak kullanılan nabız bölgeleri verilmiştir.

Nabız Durumu	Antrenman Bölgesi
Nabız < %60 x MKH	Isınma (Hafif)
%60 x MKH ≤ Nabız < %85 x MKH	Yağ Yakımı ve Kondisyon (İdeal)
Nabız ≥ %85 x MKH	Yüksek Performans (Zorlayıcı)

Buna göre aşağıdaki soruları cevaplayınız. (Bu etkinliğin geri bildirimi 30. sayfadadır.)

I. Aşağıda, sporcunun yaşını ve anlık nabzını alarak antrenman bölgesini belirleyen algoritmanın işleyişinin ifade edildiği akış şeması verilmiştir.

Şemada boş bırakılan alanları gerekli metin ve matematiksel ifadelerle tamamlayınız.



II. Algoritmanın işleyişini algoritmik doğal dil ile ifade ediniz.

Algoritmik Doğal Dil

1. adım: Başla.
2. adım:

III. Aşağıda verilen yaş ve nabız değerlerini kullanarak algoritmayı test ediniz. Tabloyu tamamlayınız.

Yaş	Nabız	MKH	Antrenman Bölgesi
14	110		
45	149		
30	120		

ÖRNEK

Bir doğal sayı, aralarında asal iki doğal sayıya tam bölünebiliyor ise bu sayıların çarpımına da bölünebilir.
Aşağıda bir doğal sayının 45 ile bölünüp bölünmediğini belirleyen bir algoritmanın işleyişi doğal (günlük) dil ile ifade edilmiştir.

618255'in 45'e tam bölünüp bölünmediğini algoritma üzerinde test ediniz.

Çözüm:

Algoritmik Doğal Dil

1. adım: Başla.

2. adım: Girdilerin alınması

Kullanıcıdan bir doğal sayı (x) al.

3. adım: 9 ile bölünebilme testi

Sayının basamaklarındaki rakamların toplamını (T) hesapla. Bu toplamın 9 ile bölümünden kalanı (k_1) bul.

4. adım: 5 ile bölünebilme testi

Sayının birler basamağında bulunan rakamın 5 ile bölümünden kalanı (k_2) bul.

5. adım: 45 ile bölünebilirliği inceleme

Üçüncü ve dördüncü adımda bulunan kalan değerlerinin her ikisi de 0 ise ekrana "Sayı 45 ile tam bölünür.",

aksi hâlde "Sayı 45 ile tam bölünemez." yazdır.

6. adım: Bitir.

Algoritmanın Çalışması

x=618255

T= 6 + 1 + 8 + 2 + 5 + 5 = 27

k_1 = 27 %9 = 0

k_2 = 5 %5 = 0

k_1 = 0 ve k_2 = 0'dır.

"618255 sayısı 45 ile tam bölünür."

SIRA SİZDE 3.

Bir doğal sayının 5'e tam bölünüp bölünmediğini orta okulda öğrendiğiniz bölünebilme kurallarından yararlanarak bulan algoritmanın işleyişini sözde kod ile ifade ediniz. 4882'in 5'e tam bölünüp bölünmediğini algoritma üzerinde test ediniz. (Bu etkinliğin geri bildirimi 31. sayfadadır.)

Sözde Kod

Girdi:
Çıktı:
Başla

Bitir

ÖRNEK

Bir belediye, pazar hariç haftanın 6 günü hizmet vererek geri dönüşüm atıklarını (cam, kâğıt, ambalaj vb.) 5 günlük periyotlarla toplamaktadır.

İlk toplama işlemi cuma günü gerçekleştirilmiştir.
Aşağıda ilk toplama günü, toplama aralığı ve istenen toplama sayısı girildiğinde ilgili toplama gününün haftanın hangi gününe denk geldiğini belirleyen bir algoritmanın sözde kod ile temsili verilmiştir.

Sözde Kod

Girdi: ilk toplama günü, toplama aralığı, hedef toplama
Çıktı: hedef toplama günü
Başla
günler ← ("0/pazartesi", "1/salı", "2/çarşamba", "3/perşembe", "4/cuma", "5/cumartesi")
ilk indeks ← [günler] içinde ilk toplama gününün indeksi (sıra numarası)
toplam gün ← (hedef toplama - 1) * (toplama aralığı)
hedef indeks ← (ilk indeks + toplam gün) %6
hedef toplama günü ← günler (hedef indekse karşılık gelen gün)
Yazdır "Geri dönüşüm atıkları [hedef toplama]. kez toplandığı gün [hedef toplama günü] günüdür."
Bitir

Algoritmanın işleyişini algoritmik doğal dil ile ifade ediniz. Geri dönüşüm atıkları 15. kez toplandığında haftanın hangi gününe denk geleceğini algoritmadan yararlanarak bulunuz.

ÇÖZÜM

Algoritmik Doğal Dil

1. Adım: Başla.
2. Adım: Girdilerin alınması
İlk toplama günü belirlenir.
Toplama aralığı belirlenir.
Hedef toplama sayısı belirlenir.
3. Adım: Toplam günün hesaplanması
Hedef toplama için geçen toplam gün sayısı hesaplanır.
Toplam gün = (hedef toplama – 1) × toplama aralığı.
4. Adım: İlk günün indeksinin bulunması
Günler listesi, {0: pazartesi, 1: salı, 2: çarşamba, 3: perşembe, 4: cuma, 5: cumartesi} olarak oluşturulur.
İlk toplama gününün listedeki indeksi bulunur.
5. Adım: Hedef gün indeksinin hesaplanması
Hedef indeks = (ilk indeks + toplam gün) %6 olacak şekilde hesaplanır.
6.Adım: Sonucun yazdırılması
Hedef indeksin karşılığı olan hedef toplama günü, günler listesinden alınarak yazdırılır.
7. Adım: Bitir.

Algoritmanın Çalışması
Girdilerin alınması
İlk toplama günü: cuma
Toplama aralığı: 5
Hedef toplama: 15
Toplam günün hesaplanması
Toplam gün = (15 – 1) × 5
Toplam gün = 14 × 5 = 70 gün
İlk günün indeksinin bulunması
İlk toplama günü cuma olduğuna göre ilk indeks = 4
Hedef indeksin hesaplanması
Hedef indeks = (ilk indeks + toplam gün) %6
Hedef indeks = (4 + 70) %6
Hedef indeks = 74 %6
74 = 12 × 6 + 2) kalan 2
Sonucun yazdırılması
Hedef indeks = 2 → gün listesinde çarşamba
Sonuç
"Geri dönüşüm atıkları 15. kez toplandığında günlerden Çarşamba olacaktır."

Şifreleme (Kriptoloji) Algoritmaları

Şifreleme, bir verinin ana anlamının (düz metnin) matematiksel yöntemler kullanılarak gizli bir formata (şifreli metne) dönüştürülmesi işlemidir. Bu işlem, bilginin yetkisiz kişilerin eline geçmesini engellemek ve veri güvenliğini sağlamak gibi pek çok amaç için kullanılabilir. Bilim tarihi çalışmaları, bilgi güvenliğinin her çağda kritik bir öneme sahip olduğunu ortaya koymuştur. **Eski Mısırlılar**ın, Milat'tan yaklaşık 2000 yıl önce standart harfler yerine özel semboller kullanarak bilgiyi gizleme tekniklerine başvurdukları bilinmektedir. **İslam medeniyetinde** ise "**Muamma**" adı verilen metinlerde, hem edebî hem de siyasi gerekçelerle çeşitli şifreleme yöntemleri geliştirilmiştir. Kriptoloji (şifreleme ve şifre çözme) alanında günümüze ulaşan en eski eser, ünlü filozof **El-Kindi'nin "Risâle fi'l-esmâ-i'l-mu-ammât"** (Kriptografik Mesajların Deşifresi Üzerine) adlı çalışmasıdır. Modern dönemde ise Amerikalı tarihçi **David Kahn**'ın "The Code Breakers ve On Codes" adlı eseri şifreleme tarihine dair önemli bir çalışmadır.

Kriptoloji ve Asal Çarpanlara Ayırma

Kriptoloji alanında sayıların asal çarpanlarına ayrılması, RSA gibi modern şifreleme yöntemlerinin temelini oluşturur. Rivest, Shamir ve Adleman tarafından geliştirilen RSA algoritması; büyük sayıların çarpımının kolay ancak çarpanlarına ayrılmasının klasik bilgisayarlar için işlemsel olarak çok zor olması ilkesine dayanır. Sayıların asal çarpanlarına ayrılması için kullanılan başlıca algoritmalar arasında deneme bölme algoritması, Pollard'ın rho algoritması ve kuantum bilgisayarlar için geliştirilen Shor algoritması yer alır. Özellikle Shor algoritması, kuantum bilgisayarların gelişimiyle birlikte RSA tabanlı şifreleme sistemlerinin güvenilirliğinin sorgulanmasını kaçınılmaz hâle getirmektedir.

ETKİNLİK 3.

Deneme bölme algoritması, bir sayının asal çarpanlarını bulmak için en küçük asal sayıdan başlayarak bölünebilirliği kontrol eden sistematik bir yöntemdir.

1. Adım: 2 ile Bölme İşleminin Kontrol Edilmesi

Deneme bölme algoritmasında ilk olarak en küçük asal sayı olan 2 ile başlanır.

- $60 \div 2 = 30 \longrightarrow$ 2 bir asal çarpandır. Sonuç: 30

Aynı asal sayı ile bölünebildiği sürece işlem tekrarlanır:

- $30 \div 2 = 15 \longrightarrow$ 2 bir kez daha asal çarpandır. Sonuç: 15

15 tek sayıdır, 2'ye bölünemez. Bir sonraki sayıya geçilir.

Asal çarpan listesi (şu ana kadar): [2, 2]

Asal çarpanlarının kümesi: {2}

2. Adım: 3 ile Bölme İşleminin Kontrol Edilmesi

- $15 \div 3 = 5 \longrightarrow$ 3 bir asal çarpandır. Sonuç: 5

5, 3'e bölünmez. Bir sonraki tek sayıya geçilir.

Asal çarpan listesi: [2, 2, 3]

Asal çarpanlarının kümesi: {2,3}

3. Adım: 5 ile Bölme İşleminin Kontrol Edilmesi

- $5 \div 5 = 1 \longrightarrow$ 5 bir asal çarpandır. Sonuç: 1

Sonuç 1 olduğunda işlem sona erer.

Asal çarpan listesi: [2, 2, 3, 5]

Asal çarpanlarının kümesi: {2,3,5}

Sonuç: 60 sayısı deneme bölme algoritması kullanılarak sırasıyla 2, 3 ve 5 asal sayılarına bölünür. Bu işlem sonucunda 60'ın asal çarpanları 2, 2, 3 ve 5 olarak bulunur;

$60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$ şeklinde ifade edilir.

İşlem adımlarını dikkatlice inceledikten sonra aşağıda verilen soruları cevaplayınız.

1. Bir sayının asal çarpanlarını bulan deneme bölme algoritmasının işleyişini algoritmik doğal dille ifade ediniz.

Algoritmik Doğal Dil

1. Adım: Başla.

2. Adım:

2. Algoritma yardımıyla 140 sayısının asal çarpanlar kümesini bulunuz. Ardından 140 sayısının asal çarpanlarını matematiksel yöntemlerle belirleyerek algoritmanın doğruluğunu test ediniz. (Bu etkinliğin geri bildirimi 32. sayfadadır.)

ETKİNLİK 4.

Sezar şifrelemesi, alfabedeki her harfin belirlenen bir sayı kadar (anahtar) ileri kaydırılması ilkesine dayanır.

Matematiksel olarak bu işlem şu fonksiyonla ifade edilir:

$f(x) = (x + k) \%n$

- x: Harfin alfabedeki sırası (0'dan başlayarak)
- k: Öteleme miktarı (Anahtar)
- n: Alfabedeki harf sayısı (Türkçe için 29)

Verilen bilgileri inceleyerek aşağıdaki soruları cevaplayınız. (Bu etkinliğin geri bildirimi 32. sayfadadır.)

a) Türk alfabesindeki harfleri sırasıyla yan yana yazınız ve her harfin altına, alfabetik sırada 3 adım sağa ötelenmiş (k=3) karşılıklarını yazarak şifreleme tablosunu oluşturunuz.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9																	
A	B	C	Ç	D																						
Ç	D																									

b) Hazırladığınız şifreleme tablosundan yararlanarak "ALGORİTMA" kelimesinin şifreli karşılığını bulunuz.

Düz Metin: ALGORİTMA

Şifreli Metin: Ç.....

c) Şifrelenmiş bir metnin çözülmesi (deşifre edilmesi) işleminin mantığını kendi cümlelerinizle açıklayınız. Ardından bu yöntemi kullanarak şifreli hâli "ÜLHTĞ" olan metnin orijinalini bulunuz.

Açıklama: .....

.....

Orijinal Metin: .....

SIRA SİZDE 4.

Vigenere şifreleme algoritması, çoklu alfabe tabanlı bir şifreleme yöntemidir. Şifreleme yönteminde bir anahtar kelime kullanılır. Bu algoritma, anahtar kelimeyi kullanarak düz metindeki harfleri birden fazla kaydırma miktarıyla şifreler.

Nasıl Çalışır?

1. Girdiler:

- Düz Metin: Şifrelenmek istenen mesajdır. Örneğin: MEBİ
- Anahtar Kelime: Her harfin ne kadar kaydırılacağını belirlemek için kullanılan kelimedir. Örneğin: DESTEK

2. Şifreleme İşlemi:

- Her harf, düz metindeki harfe karşılık gelen anahtar kelimenin harfi ile eşleştirilir. Anahtar kelime, düz metin kadar uzatılır veya kısaltılır.

M E B İ
↓ ↓ ↓ ↓
D E S T

- Alfabetik sırada A harfi 0, B harfi 1, ..., Z harfi 28 olacak şekilde numaralandırılır.

A	B	C	Ç	D	E	F	G	Ğ	H	I	İ	J	K	L	M	N	O	Ö	P	R	S	Ş	T	U	Ü	V	Y	Z
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28

- Kaydırma işlemi şu şekilde yapılır:

METİN HARFİ	M	E	B	İ
ANAHTAR HARFİ	D	E	S	T
METİN HARFİ KONUM	15	5	1	11
ANAHTAR HARFİ KONUM	4	5	21	23
KONUMLARIN TOPLAMI	19	10	22	34
TOPLAMIN 29 İLE BÖLÜMÜNDEN KALAN (ŞİFRELİ HARF KONUMU)	19	10	22	5
ŞİFRELİ HARF	P	I	Ş	E

Şifreli metin "PIŞE" olarak bulunur.

Verilen bilgileri inceleyerek aşağıdaki soruları cevaplayınız. (Bu etkinliğin geri bildirimi 33. sayfadadır.)

a) "ALGORİTMA" kelimesini "ADIM" anahtar kelimesini kullanarak Vigenere şifreleme algoritması ile şifreleyiniz.

b) Sezar ve Vigenere şifreleme algoritmalarını güvenlik düzeyleri açısından karşılaştırınız. Hangi yöntemin şifre çözümünde daha az deneme gerektirdiğini (daha kolay kırıldığını) nedenleriyle açıklayınız.

ETKİNLİK 5.

Aşağıdaki metni okuyunuz ve örnekleri inceleyiniz. Edindiğiniz bilgiler doğrultusunda soruları cevaplayınız.

Dijital çağda kişisel verilerin mahremiyeti ve siber güvenlik, kullandığımız şifrelerin gücüne bağlıdır. Sosyal medya hesaplarımıza veya bankacılık uygulamalarına giriş yaparken belirlediğimiz şifreler; harfler, sayılar ve sembollerden oluşur. Ancak bilgisayarlar, bu karakterleri bizim gördüğümüz gibi "harf" olarak değil sayısal kodlar olarak algılar ve işler.

Bilgisayarların verileri anlamlandırabilmesi için ortak bir dile ihtiyaç vardır. Bu ihtiyacı karşılamak amacıyla **ASCII** (American Standard Code for Information Interchange-Bilgi Değişimi İçin Amerikan Standart Kodlama Sistemi) geliştirilmiştir.

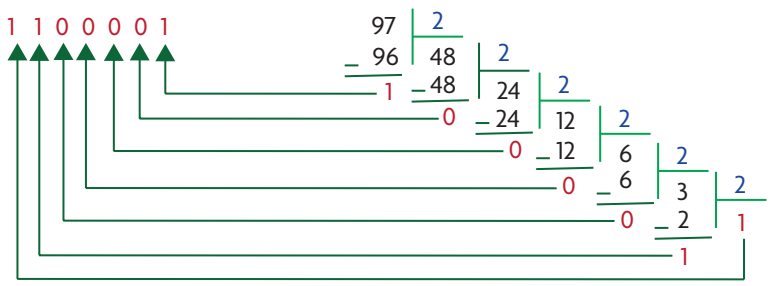
Siber Güvenlik Sistemlerinde ASCII Tablosu

Karakter	ASCII	Karakter	ASCII
@	64	•	96
A	65	a	97
B	66	b	98
C	67	c	99
D	68	d	100
E	69	e	101
F	70	F	102
G	71	g	103
H	72	h	104
I	73	i	105
J	74	j	106
K	75	k	107
L	76	l	108
M	77	m	109
N	78	n	110
O	79	o	111
P	80	p	112
Q	81	q	113
R	82	r	114
S	83	s	115
T	84	t	116
U	85	u	117
V	86	v	118
W	87	w	119
X	88	x	120
Y	89	y	121
Z	90	z	122
[	91	{	123
\	92	|	124
]	93	}	125
^	94	~	126
_	95		

•

Bu sistemde klavyedeki birçok karakterin (büyük harf, küçük harf, noktalama işaretleri vb.) sayısal bir karşılığı vardır. Örneğin; "A" harfi bilgisayar için 65 sayısına, "a" harfi ise 97 sayısına karşılık gelir.
ASCII tablosundaki sayısal değerler (Örnek: 65) "**Onluk Sayı Sistemi**"ne göredir. Ancak bilgisayar donanımı, verileri elektrik sinyalleriyle (açık veya kapalı) işlediği için sadece 1 ve 0 rakamlarından oluşan **İkili Sayı Sistemi'ni (Binary System)** kullanır. Bilgisayarlarda tüm veriler (harfler, sayılar, resimler gibi) 0'lar ve 1'ler olarak saklanır ve işlenir.
Gerçek siber güvenlik sistemlerinde parolalar, bilgisayarda doğrudan ASCII veya ikilik hâlleriyle saklanmaz. Bunun yerine, parolalar özel matematiksel işlemlerden (örneğin SHA-256 gibi algoritmalar) geçirilerek dönüştürülür ve sadece bu dönüştürülmüş hâli yani özeti sistemde saklanır.
Bir sayıyı onluk tabandan ikilik tabana çevirmek için sayı sürekli olarak 2'ye bölünür. Bölme işlemi, bölüm 1 olana kadar devam eder. En son elde edilen bölümden başlanarak geriye doğru kalanlar yan yana yazılır.
Örneğin a harfinin ASCII karşılığı 97'dir. Onluk sistemdeki 97 sayısını bilgisayar, 1100001 olarak saklar ve işler. Aşağıda 97 sayısının 1100001 sayısına dönüştürülme işlemi iki farklı yoldan verilmiştir.

1.yol



2.yol

Önce sayı, 2'nin farklı kuvvetlerinin toplamı şeklinde yazılır.

$97 = 64 + 32 + 1 = 26 + 25 + 20$

Daha sonra en büyük kuvvetten başlanarak bu kuvvetlerin sayının içinde olup olmamasına göre (Var=1, Yok =0) aşağıdaki gibi sayı oluşturulur.

64	32	16	8	4	2	1
Var	Var	Yok	Yok	Yok	Yok	Var
1	1	0	0	0	0	1

SORULAR

1. **En az bir büyük harf, bir küçük harf ve bir özel karakter içeren; ASCII dışı karakter içermeyen ve en az 4 karakterden oluşan bir şifre belirleyiniz.**

2. **Belirlediğiniz şifrenin ASCII tablosundaki karşılıklarından yararlanarak bilgisayar sistemindeki (İkili Sayı Sistemi) karşılığını bulunuz.**

3. **Onluk (10'luk) sayı sisteminde verilen bir sayının bilgisayarların kullandığı ikili sayı sistemine dönüştürülmesini sağlayan algoritmanın işleyişini, adımları sıralı olacak şekilde algoritmik doğal dil kullanarak yazınız.**

Algoritmik Doğal Dil

1. Adım: Başla.

2. Adım:

4. **Bilgisayar sistemindeki bir sayının onluk sisteme nasıl dönüştürülebileceğini düşününüz. İkili sistemde "100011" sayısının ASCII tablosunda hangi karaktere karşılık geldiğini bulunuz.**

(Bu etkinliğin geri bildirimi 33. sayfadadır.)

ASCII standardı, temelde İngiliz alfabesine göre tasarlandığı için Türkçe karakterler (ç, ğ, ş) veya farklı alfabeler (Çin, Arap) için yetersiz kalmıştır. Ayrıca günümüzde sıkça kullandığımız emojiler de ASCII tablosunda yer almaz. Bu sorunu çözmek için 1980'lerin sonunda Unicode sistemi geliştirilmiştir. Unicode; dünyada bilinen tüm dillerdeki karakterleri, matematiksel sembolleri ve emojileri kapsayan ve içinde 130000'den fazla karakterin tanımlı olduğu evrensel bir sistemdir.

Örneğin; 😂 emojisi, Unicode sisteminde U+1F923 koduyla tanımlanır.

Arama Algoritmaları

Arama algoritmaları, bilgisayar bilimlerinde bir veri kümesi içerisinde belirli bir elemanın (hedef değerin) varlığını kontrol etmek veya konumunu tespit etmek amacıyla kullanılan sistematik yöntemlerdir. Günlük hayatta bir kitapta sayfa ararken veya rehberde isim ararken farkında olmadan bu yöntemleri kullanırız.

En yaygın kullanılan arama yöntemi şunlardır:

1. Doğrusal Arama (Linear Search)

Veri kümesindeki elemanların baştan sona (veya sondan başa) sırasıyla tek tek kontrol edilmesidir. Veri sayısı arttıkça arama süresi doğru orantılı olarak uzar.

Bir öğrencinin aklından 1 ile 100 arasında bir sayı tuttuğu varsayılsın. Diğer öğrenci sırayla "1 mi?, 2 mi?, 3 mü?" diye sorarsa bu "doğrusal arama"dır. Çok yavaştır.

2. İkili Arama (Binary Search)

Sıralı bir veri kümesinde, aranan elemanı bulmak için her adımda arama aralığını yarıya indiren (böl ve yönet) yöntemdir.

Çok büyük veri kümelerinde bile sonuca çok hızlı (az adımda) ulaşır.

1-100 arası sayı tutma oyununda “Sayı 50’den büyük mü?” sorusunu sormak, ikili arama yöntemine örnektir. Verilen cevap “Evet” ise 1-50 aralığı elenir ve arama işlemi 51-100 aralığında sürdürülür. Bu yeni aralığın orta değeri olan 75 için aynı soru sorularak arama adım adım devam ettirilir.

3. Üçlü Arama (Ternary Search)

Arama uzayının (verilerin) her adımda ikiye değil üç eşit parçaya bölündüğü ve hedefin hangi parçada olduğunun tespit edilerek ilerlendiği yöntemdir. Genellikle bir karşılaştırma sonucunun üç farklı değer alabildiği (büyük, küçük, eşit/ağır, hafif, dengede) durumlarda kullanılır.

Elimizde 27 adet madenî para ve bir adet eşit kollu terazi olduğunu, paralardan birinin daha ağır olduğunu düşünelim.

Paraları 9-9-9 şeklinde üç gruba ayırırız. İki grubu teraziye koyarız. Dengede ise aranan para, dışarıdaki 9'lu grubun içindedir. Dengede değilse ağır gelen kefedeki 9'lu grubun içindedir. Kalan 9'u 3-3-3, son kalan grubu 1-1-1 ayırırız. 3 tartım yaparak daha ağır madenî para bulunabilir.

ETKİNLİK 6.

Bir bilye fabrikasında, üretim bandından çıkan çelik bilyelerin kalite kontrol süreci yapılmaktadır. Görünüşleri ve boyutları tamamen özdeş olan n adet bilye üretilmiştir. Ancak üretim sırasında oluşan teknik bir aksaklık nedeniyle bilyelerden sadece bir tanesinin içinde gözle görülmeyen bir hava boşluğu kalmıştır. Bu durum, hatalı bilyenin diğerlerinden daha hafif olmasına neden olmuştur.

Kalite kontrol mühendisinin elinde ölçüm yapmak için ağırlık takımı olmayan hassas bir eşit kollu terazi bulunmaktadır. Mühendisin amacı, üretimi durdurmamak için terazi kullanımını en aza indirerek hatalı (hafif) bilyeyi kesin olarak tespit etmektir.

Buna göre aşağıdaki soruları cevaplayınız. (Bu etkinliğin geri bildirimi 34. sayfadadır.)

1. **Özdeş görünüme sahip n tane çelik bilye içinden, hava boşluğu olan (hafif) bilye en az kaç tartım yapılarak kesin olarak bulunabilir? Varsayımlarınızı oluşturunuz.**

2. **n sayısının (bilye sayısının) alabileceği farklı tam sayı değerleri için varsayımlarınızı aşağıdaki tabloyu tamamlayarak doğrulayınız. Ardından bilye sayısı ile tartım sayısı arasındaki ilişkiye dair genellemeler oluşturunuz.**

n (Bilye Sayısı)	2	3	4	8	9	16	27	64	81	100
En Az Tartım Sayısı										

3. **Tablodan elde ettiğiniz verilerle varsayımlarınızı karşılaştırarak bilye sayısı (n) ile tartım sayısı (k) arasındaki ilişkiyi bir matematiksel önerme şeklinde ifade ediniz. (Örneğin "n sayısı şu aralıkta ise k tartım gerekir." gibi.)**

4. **Elde ettiğiniz önermelerden yola çıkarak n tane bilye içinden hatalı olanı bulmak için mühendisin izlemesi gereken adımları "Algoritmik Doğal Dil" ile aşağıdaki alana yazınız.**

Algoritmik Doğal Dil

1. Adım: Başla.

2. Adım:

5. **Hazırladığınız algoritmayı farklı n değerleri (örneğin, n = 50 ve n = 100) için uygulayınız. Her bir durum için gereken en az tartım sayısını hesaplayarak yazınız ve bu sonuçlara dayanarak algoritmanızın doğru çalışıp çalışmadığını açıklayınız.**

6. **Oluşturduğunuz algoritmanın işleyişi, farklı olan bilyenin hafif veya ağır olmasından ya da kullanılan terazinin türünden (dijital/eşit kollu) etkilenir mi? Açıklayınız.**

Çizge Kuramı ve Temel Kavramları

Günlük hayatta karşılaştığımız pek çok problem, aslında nesneler ve bu nesneler arasındaki ilişkilerden oluşur. Çizgeler (graflar), bu ilişkileri kâğıt üzerinde en sade hâliyle göstermemizi sağlayan yapılardır.

Bir çizge, karmaşık bir haritayı veya ilişki ağını sadece iki temel elemanla özetler.

1. **Düğüm (Nokta):** Problemdeki nesneleri, kişileri, şehirleri veya durumları temsil eden noktalardır.
2. **Ayrıt (Çizgi/Eğri):** Bu düğümler arasındaki bağlantıyı, yolu veya ilişkiyi temsil eden çizgilerdir.

Bir problemi çizgeye dökmek, gereksiz detayları (renkler, şekiller, isimler) atıp sadece "neyin, neye bağlı olduğuna" odaklanmanızı sağlar. Bu sayede karmaşık sözel problemler, çözülebilir görsel şemalara dönüşür.

Örnekler:

- Sosyal Yaşam: Siz ve arkadaşlarınız birer düğüm, tokalaşma veya hediye verme durumunuz ise birer ayrıttır.
- Metro Haritası: İstasyonlar düğüm, ray hatları ayrıttır.
- Kimya: Atomlar düğüm, kimyasal bağlar ayrıttır.

Küresel Sosyal Ağ Etkileşimleri



Şehir İçi Ulaşım Ağı Optimizasyonu



ÖRNEK

Okul spor kulübü, 9. sınıflar arasında bir futbol dostluk turnuvası düzenlemektedir. Turnuvaya katılan sınıflar; 9/A, 9/B, 9/C ve 9/D'dir.

Maç No	1. Takım	2. Takım
1	9/A	9/B
2	9/C	9/D
3	9/A	9/C
4	9/B	9/D

Turnuvanın ilk aşamasında oynanacak maçların listesi (eşleşme fikstürü) yandaki tabloda verilmiştir.

Bu turnuvadaki takımları "düğüm" (nokta), oynanacak olan maçları ise "ayrıt" (çizgi) kabul ederek turnuva fikstürünün çizge (graf) modelini çiziniz.

ÇÖZÜM

Bu problemin çizgeye dönüştürülmesinde izlenecek adımlar şunlardır:

1. Düğümlerin Belirlenmesi: Her bir sınıf bir takımı temsil ettiği için çizgemizde 4 adet düğüm (nokta) olmalıdır. Bu noktalar 9/A, 9/B, 9/C ve 9/D olarak isimlendirilir.
2. Ayrıtların (İlişkilerin) Çizilmesi: Tablodaki her bir maç, iki takım arasındaki ilişkiyi gösterir.

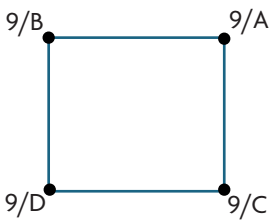
Buna göre:

1. Maç: 9/A ile 9/B arasına bir çizgi çizilir.

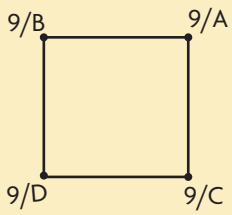
2. Maç: 9/C ile 9/D arasına bir çizgi çizilir.

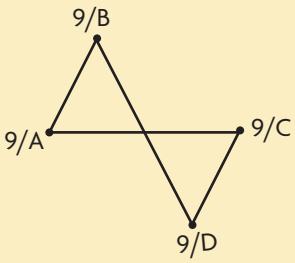
3. Maç: 9/A ile 9/C arasına bir çizgi çizilir.

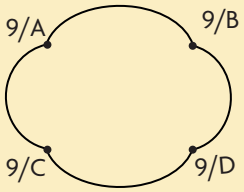
4. Maç: 9/B ile 9/D arasına bir çizgi çizilir.



Çizgelerde ayrıtların çizgi ya da eğri şeklinde olmasının bir önemi yoktur. Ayrıca düğümler, aralarındaki ilişkiler dikkate alınarak farklı konumlara yerleştirilebilir.







ETKİNLİK 7. (Park Güvenlik Rotası Problemi ve Çizge Modellemesi)

Şehrin ortasından geçen bir nehir üzerine kurulmuş, adacıklar ve köprülerden oluşan millet bahçesinin krokisi aşağıda verilmiştir. Parkın güvenliğinden sorumlu bir görevli, A noktasındaki güvenlik kulübesinden devriyeye başlayacaktır. Görevli, parktaki **tüm köprülerden yalnızca birer kez geçerek** başladığı A noktasına geri dönmeyi planlamaktadır.



Bu problemin çözülebilirliğini matematiksel modelleme kullanarak analiz ediniz.

1. **Yukarıdaki park görselinde yer alan kara parçalarını (bölgeleri) düğüm (A, B, C, D), bu bölgeleri birbirine bağlayan köprüleri ise ayrıt kabul ederek problemin matematiksel modelini (çizge hâlini) yandaki alana çiziniz.**

2. **Oluşturduğunuz çizge modeli üzerinde, bölgeleri temsil eden düğümlerin her birine bağlı köprü (ayrıt) sayılarını tespit ediniz. Bu sayıların tek veya çift olma durumlarını belirleyerek aşağıdaki tabloyu doldurunuz.**

Bölge (Düğüm)	Bağlı Olan Köprü Sayısı (Derecesi)	Sayının Durumu (Tek / Çift)
A (Başlangıç)		
B		
C		
D		

3. Tablodaki veriler ve yaptığınız çizim denemelerinden yararlanarak aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) Bir bölgeye (düğüme) bir köprüden girildiğinde o bölgeden çıkabilmek için başka bir köprüye daha ihtiyaç var mıdır? Bu durum, bir düğümdeki bağlantı sayısının tek veya çift olmasıyla nasıl ilişkilidir?

b) Başlangıç noktası olan A bölgesinden ayrılan görevlinin turunu tamamlayıp tekrar A'ya dönebilmesi için A düğümüne bağlı köprü sayısının niceliği (tekliği/çiftliği) hakkında ne söylenebilir? Açıklayınız.

4. Yaptığınız analizler sonucunda, bir çizgede tüm ayrıtların (köprülerin) yalnızca bir kez kullanılarak başlangıç noktasına geri dönülebilmesi için gerekli olan temel koşulu bir önerme cümlesi olarak yazınız.

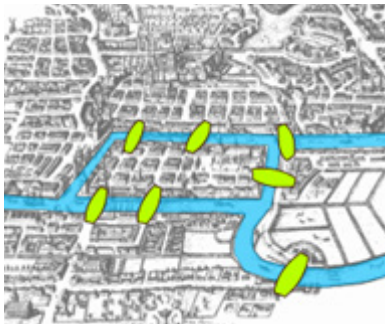
Önerme: Kapalı bir yürüyüş rotasının oluşturulabilmesi için çizgedeki tüm düğümlerin ayrıt sayılarının ..... (tek/çift) sayı olması gerekmektedir. Çünkü .....
.....

5. Güvenlik görevlisi planladığı rotayı mevcut şartlarda tamamlayamaz. Parka yeni bir köprü ekleyerek veya mevcut bir köprüyü iptal ederek parkurun tamamlanamaması sorununu çözünüz.

- Yapılan Değişiklik: .....
- Kanıt: Değişiklik sonrası çizgenin yeni hâlini çizerek rotanın tamamlanabilirliğini oklar yardımıyla gösteriniz.

(Bu etkinliğin geri bildirimi 35. sayfadadır.)

SIRA SİZDE 5.



18. yüzyılda, Prusya'nın Königsberg şehrinde (günümüzde Kaliningrad) yaşayan halk arasında popüler bir zekâ oyunu vardı. Şehir, Pregel Nehri tarafından iki yaka ve iki adacığa bölünmüştü ve bu parçalar birbirine 7 adet köprü ile bağlıydı. İnsanlar pazar yürüyüşlerinde şu sorunun cevabını arıyorlardı.

Şehrin herhangi bir noktasından başlayıp, 7 köprünün her birinden yalnızca bir kez geçerek tekrar başladığımız noktaya dönebilir miyiz?"

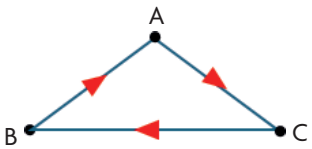
Dönemin ünlü matematikçisi Leonhard Euler, 1736 yılında bu soruya "**Hayır, imkânsızdır.**" cevabını verdi.

Buna göre aşağıdaki soruları cevaplayınız. (Bu etkinliğin geri bildirimi 36. sayfadadır.)

1. Yukarıdaki tarihi Königsberg haritasını inceleyiniz. Şehrin 4 kara parçasını (Kuzey Yaka, Güney Yaka, Büyük Ada, Doğu Adası) birer düğüm, bu parçaları bağlayan 7 köprüyü ise birer ayrıt kabul ederek problemin çizge modelini yandaki boş alana çiziniz.

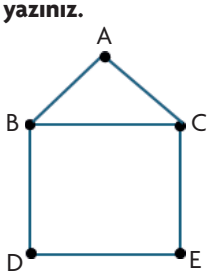
2. "Park Güvenliği" etkinliğinde keşfettiğiniz kuralı (tek/çift bağlantı sayısı) hatırlayınız. Çizdiğiniz model üzerindeki her bir düğüme bağlı köprü sayılarını inceleyerek Euler'in neden "Bu yürüyüş imkânsızdır." dediğini kendi cümlelerinizle açıklayınız.

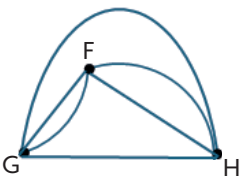
SIRA SİZDE 6.



Yandaki çizge; A, B ya da C düğümünden başlanıp, kalem hiç kaldırılmadan, her ayrıttan bir kez geçilmek şartıyla görseldeki oklar takip edilerek başlanan noktaya dönülecek biçimde kâğıt üzerine çizilebilir.

Aşağıda verilen çizge örneklerini bir başlangıç noktası belirledikten sonra kaleminizi hiç kaldırmadan ve her ayrıttan bir kez geçmek şartıyla boş bırakılan alana çiziniz. Çizilemeyen çizgeler için çizilememe nedenini gerekçelendirerek yazınız.



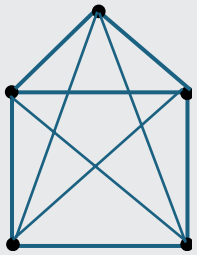


(Bu etkinliğin geri bildirimi 37. sayfadadır.)

Çizge Türleri ve Uygulama Alanları

Çizgeler, modelledikleri problemin yapısına göre farklılık gösterir. Aşağıda en yaygın kullanılan üç çizge türü ve kullanım alanları verilmiştir.

A) Yönsüz Çizge

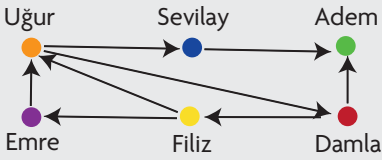


İlişkinin karşılıklı ve simetrik olduğu durumlarda kullanılır.

Örnek: Bir toplantıdaki beş kişinin birbiriyle birer kez tokalaşması durumunda oluşacak toplam tokalaşma sayısını bulmak için çizilen çizge yanda verilmiştir.

- **Görsel:** Kenarlarda ok işareti yoktur.

B) Yönlü Çizge

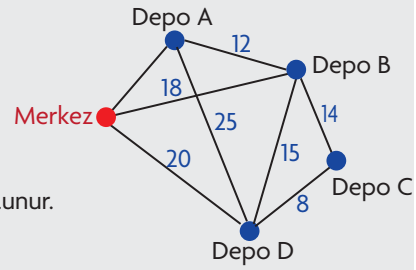


İlişkinin tek taraflı olduğu veya akış yönünün önemli olduğu durumlarda kullanılır.

Örnek: Sosyal medyada altı sınıf arkadaşının birbirini takip etme durumunu gösteren çizge yanda verilmiştir.

- **Görsel:** Kenarların ucunda ilişkinin yönünü gösteren oklar bulunur.

C) Ağırlıklı Çizge



Bağlantıların sadece "var olması" yetmez; o bağlantının bir maliyeti, süresi veya kapasitesi olduğunda kullanılır.

Örnek: Kargo aracının tüm depoları dolaşırken kat edeceği toplam mesafenin en az olmasını hedefleyen problemin çizge modeli yanda sunulmuştur.

- **Görsel:** Kenarların ya da düğümlerin üzerinde sayısal değerler (ağırlıklar) bulunur.

ETKİNLİK 7.

Verilen bilgileri inceleyerek aşağıdaki soruları cevaplayınız.

Bir lojistik firması, acil tıbbi malzemeleri trafikten etkilenmemek adına insansız hava aracı (drone) kullanarak teslim etmektedir. İnsansız hava aracı; şarj istasyonunun bulunduğu M (Merkez) noktasından havalanarak A, B ve C adlı üç farklı hastaneye malzeme bırakacak ve tekrar M noktasına dönecektir. İnsansız hava aracı, her hastaneyi yalnızca bir kez ziyaret etmek zorundadır.

Aşağıdaki tabloda merkez ve hastaneler arasındaki uçuş mesafeleri (birim) verilmiştir. İnsansız hava aracının sınırlı pil ömrü nedeniyle havada kalma süresini ve enerji tüketimini en aza indirmek için bu rotanın toplam mesafesinin **en az** olması istenmektedir.

Konumlar	M-A	M-B	M-C	A-B	A-C	B-C
Arasındaki Mesafe (birim)	80	150	90	120	110	60

Sorular

1. **Tablodaki verilerden yararlanarak, insansız hava aracının tüm hastaneleri ziyaret edip merkeze döndüğü olası rota seçeneklerini oluşturunuz. Her rota için toplam mesafeyi hesaplayarak en kısa rotayı belirleyiniz.**

2. **Tablodaki verileri kullanarak M, A, B ve C noktalarını düğüm; bu noktalar arasındaki uçuş mesafelerini ayrıt olarak gösteren bir ağırlıklı çizge çiziniz.**

3. **Toplam uçuş mesafesini en aza indiren algoritmanın çalışması için gerekli olan girdi verilerini ve bu algoritmadan elde edilmesi beklenen çıktıları tanımlayınız.**

4. **Toplam mesafeyi en aza indiren algoritmanın işleyişini, algoritmik doğal dil kullanarak adım adım yazınız.**

Algoritmik Doğal Dil

1. Adım: Başla.

2. Adım:

5. **Oluşturduğunuz çizge ve algoritmadan yararlanarak her rota için toplam mesafeyi hesaplayınız. Hesaplamalarınıza göre insansız hava aracının izlemesi gereken en verimli rotayı ve bu rotanın toplam mesafesini belirleyiniz.**

(Bu etkinliğin geri bildirimi 37. sayfadadır.)

GERİ BİLDİRİM

Bu geri bildirim sayesinde kendi cevabınızı kontrol edebilir, hatalarınızı düzelterek öğrenmenizi pekiştirebilirsiniz.

ETKİNLİK 1.

ÇÖZÜM

Bölüm 1: Problemin Sözel İfadeden Liste Biçimine Dönüştürülmesi

PUAN LİSTESİ
1. Gün Kazanılan Puan: **15**
2. Gün Kazanılan Puan: **19**
3. Gün Kazanılan Puan: **23**
4. Gün Kazanılan Puan: **27**
5. Gün Kazanılan Puan: **31**
6. Gün Kazanılan Puan: **35**
7. Gün Kazanılan Puan: **39**

Bölüm 2: Liste Temsilinden Tablo Temsiline Geçiş

Gün	Günlük Kazanılan Puan Miktarı	Toplam Kazanılan Puan Miktarı
1	15	15
2	19	34
3	23	57
4	27	84
5	31	115
6	35	150
7	39	189

Bölüm 3: Liste/Tablo Temsilinden Algoritmik Dile Geçiş

Liste veya tablodaki bilgileri sıralı işlem adımlarına dönüştürülmesi

1. Adım: Hesaplamaya 0 (sıfır) toplam puan ile başla.
2. Adım: İlk günün kazancını 15 puan olarak belirle.
3. Adım: Belirlenen günlük puanı, toplam puana ekle.
4. Adım: Bir sonraki gün için günlük puan miktarını 4 artır.
5. Adım: 7. güne gelene kadar 3 ve 4. adımları tekrarla.
6. Adım: Oluşan son toplam puanı yaz ve bitir.
(Verilen işlem adımları örnek niteliğindedir. Aynı anlamı taşıyan farklı ifadelerle de cevabınızı oluşturabilirsiniz.)

ETKİNLİK 2.

ÇÖZÜM

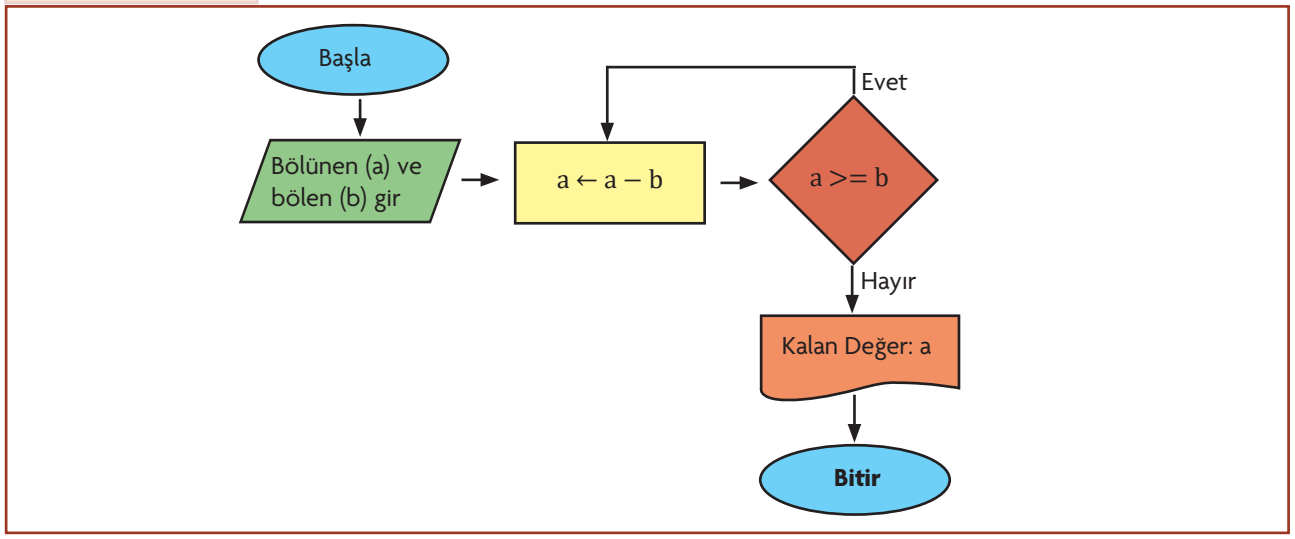
1. Demonte bir kitaplığın montajını yapma eyleminin bütünü süreç kavramına daha iyi bir örnektir. Çünkü süreç; bir ürünün ortaya çıkması amacıyla başlangıcı ve bitişi olan belirli bir hedef doğrultusunda art arda gerçekleştirilen birçok işlemden oluşur. Dolayısıyla daha geniş kapsamlı bir yapıdır. Kitaplığı kurma işi de çeşitli işlemlerin (vidalama, yerleştirme, sabitleme vb.) belirli bir sırayla yapılmasını gerektiren bütüncül bir faaliyet olan bir süreçtir.
2. Kurulum şemasındaki her bir adım işlem kavramına karşılık gelmektedir. Çünkü işlem; tek başına gerçekleştirilebilen, daha küçük ve belirli bir eylemi ifade eder. Bir vidayı sıkmak veya bir paneli çakmak gibi adımlar, süreci oluşturan bağımsız ve daha dar kapsamlı işlemlerdir.

SIRA SİZDE 1.
ÇÖZÜM

Algoritmik Doğal Dil

1. adım: Başla.
2. adım: Girdilerin alınması
Kullanıcıdan bölünen (a) ve bölen (b) al.
3. adım: Kalanın güncellenmesi
Bölünenden böleni çıkar ve kalan (k) olarak al.
4. adım: Koşulun kontrolü
Kalan, bölen sayıdan küçük ise (k < b) bitir; değilse kalan değeri bölünen (a) olarak ata ve 3. adıma git.
5. adım: Sonucun bulunması ve yazdırılması
Kalan olarak elde edilen ve koşulu sağlayan son değer (k) bölme işleminin kalanıdır. Kalanı ekrana yaz.
6. adım: Bitir.

Akış Şeması

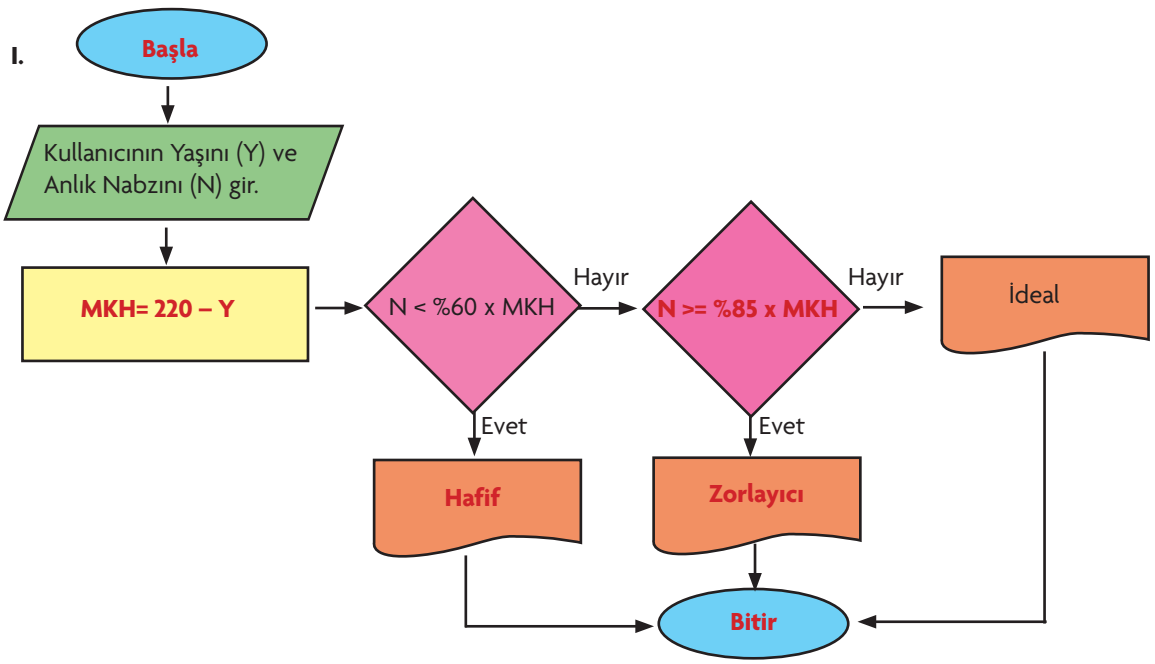


(Sunulan algoritmalar örnek niteliğindedir. Algoritmik mantık korunduğu sürece çözümünüzün buradaki ifadelerle birebir aynı olması gerekmez. Örneğin, bölünen ile bölen arasındaki büyüklük kontrolünün işlemden önce veya sonra yapılması gibi yapısal farklılıklar olabilir. Aynı işleyişe sahip alternatif çözümler de geçerlidir.)

SIRA SİZDE 2.

Nabız Durumu	Antrenman Bölgesi
Nabız < %60 x MKH	Isınma (Hafif)
%60 x MKH ≤ Nabız < %85 x MKH	Yağ Yakımı ve Kondisyon (İdeal)
Nabız ≥ %85 x MKH	Yüksek Performans (Zorlayıcı)

I.



II.

Algoritmik Doğal Dil

1. adım: Başla.
2. adım: Girdilerin alınması
Kullanıcıdan sporcunun yaşını (Y) ve anlık nabız değerini (N) al.
3. adım: Maksimum Kalp Hızı (MKH) hesaplanması
MKH değerini hesaplamak için 220'den yaş (Y) değerini çıkar.
4. adım: Nabız durumunun kontrol edilmesi ve sonucun yazdırılması
Eğer N değeri, MKH'nin %60'ından küçükse
Ekrana "Hafif" yazdır ve 5. adıma git.
Değilse eğer N değeri, MKH'nin %85'inden büyük ve eşitse
Ekrana "Zorlayıcı" yazdır ve 5. adıma git.
Değilse (Yukarıdaki şartlar sağlanmıyorsa)
Ekrana "İdeal" yazdır ve 5. adıma git.
5. adım: Bitir.

III.

Yaş	Nabız	MKH	Antrenman Bölgesi
14	110	206	Hafif
45	149	175	Zorlayıcı
30	120	190	İdeal

SIRA SİZDE 3.

ÇÖZÜM

Sözde Kod

Girdi: Pozitif bir tam sayı x
Çıktı: x in 5'e tam bölünüp bölünmediğine dair doğru ya da yanlış şeklinde bir çıktı

Başla

b ← x %10 (Sayının birler basamağını bul.)

b, 0 veya 5 ise
Yazdır DOĞRU (x, 5'e tam bölünür.)

b, 0 veya 5 değilse
Yazdır YANLIŞ (x, 5'e tam bölünmez.)

Bitir

Algoritmanın Çalışması

x=4882

4882 %10=2
b ← 2

b, 0 veya 5 olmadığı için
YANLIŞ
"4882 sayısı 5'e tam bölünemez."

ETKİNLİK 3.

ÇÖZÜM

Algoritmik Doğal Dil

1. adım: Başla.

2. adım: Girdi ve çıktıların belirlenmesi

Kullanıcıdan pozitif bir tam sayı (x) al.

Elde edilen asal çarpanları saklamak için "asal çarpanlar" adında boş bir liste oluştur.

3. adım: 2 ile bölme işlemi yapılması

x çift ise x 2'ye bölünebildiği sürece x i 2'ye böl ve x i sonuç olarak güncelle.

2'yi asal çarpanlar listesine ekle.

4. adım: Diğer asal sayılarla bölme işlemi yapılması

y değişkenini 3 olarak başlat.

y değeri, x in karekökünden küçük veya x in karekköküne eşit olduğu sürece

x, y ile tam bölünebiliyorsa

x i y ye böl ve sonucu x olarak güncelle.

x, y ile tam bölündüğü sürece işlemi tekrarla.

y yi asal çarpanlar listesine ekle.

Tek sayıları taramak için y yi 2 artır.

5. adım: Son çarpanın kontrol edilmesi

x, 1'den büyükse

x bir asal sayıdır ve asal çarpanlar listesine eklenmelidir.

6. adım: Çıktının yazdırılması

Asal çarpanlar listesini yazdır.

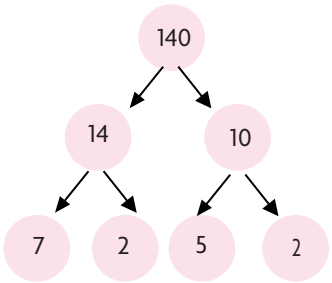
7. adım: Bitir.

..... Algoritmanın Çalışması .....

İşlem	x (Güncel Değer)	Asal Çarpanlar Kümesi
Girdi alınır.	140	{ }
2 ile tam bölünür.	70	{2}
2 ile tam bölünür.	35	{2}
3 ile tam bölünmez.	35	{2}
5 ile tam bölünür.	7	{2, 5}
7 ile tam bölünür.	1	{2, 5, 7}

Not: Algoritma yardımı ile sayının asal çarpanları bulunurken x=1 değerine ulaşılamasa bile sayının karekök değerine kadar olan sayılara bölünüp bölünmediğini kontrol etmek yeterlidir. Tüm değerler kontrol edildikten sonra x, 1'den büyükse x, bir asal sayıdır ve asal çarpanlar listesine eklenmelidir.

Aşağıda verilen çarpan ağacı ve bölen listesini inceleyiniz.



140	2
70	2
35	5
7	7
1	

Karşılaştırma: Klasik yöntemle bulduğumuz çarpanlar ile algoritmik yöntemle bulduğumuz liste birebir aynıdır.

ETKİNLİK 4.

ÇÖZÜM

a)

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
A	B	C	Ç	D	E	F	G	Ğ	H	I	İ	J	K	L	M	N	O	Ö	P	R	S	Ş	T	U	Ü	V	Y	Z
Ç	D	E	F	G	Ğ	H	I	İ	J	K	L	M	N	O	Ö	P	R	S	Ş	T	U	Ü	V	Y	Z	A	B	C

b) ALGORİTMA → ÇOIRTLVÖÇ

c) Şifre çözme (deşifre) işlemi, şifreleme fonksiyonunun tersinin uygulanmasıdır. Şifreleme aşamasında harfler anahtar değeri (k) kadar ileriye (sağa) ötelendiği için orijinal metne ulaşmak amacıyla şifreli harfler aynı değer kadar geriye (sola) ötelenir. ÜLHTĞ ← ŞİFRE

SIRA SİZDE 4.

ÇÖZÜM

a)

A	B	C	Ç	D	E	F	G	Ğ	H	I	İ	J	K	L	M	N	O	Ö	P	R	S	Ş	T	U	Ü	V	Y	Z
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28

- Kaydırma işlemi şu şekilde yapılır:

İşlem Adımı	1. Harf	2. Harf	3. Harf	4. Harf	5. Harf	6. Harf	7. Harf	8. Harf	9. Harf
Düz Metin	**A**	**L**	**G**	**O**	**R**	**İ**	**T**	**M**	**A**
Anahtar	A	D	I	M	A	D	I	M	A
Metin Değeri	0	14	7	17	20	11	23	15	0
Anahtar Değeri	0	4	10	15	0	4	10	15	0
Toplam	0	18	17	32	20	15	33	30	0
29 ile Bölümünden Kalan	0	18	17	3 (32-29)	20	15	4 (33-29)	1 (30-29)	0
Şifreli Metin	**A**	**Ö**	**O**	**Ç**	**R**	**M**	**D**	**B**	**A**

b) **Güvenlik Karşılaştırması**

Sezar şifrelemesi, metindeki tüm harfleri sabit bir sayı kadar ötelediği için dildeki harf kullanım sıklıklarını (frekanslarını) değiştirmez. Ayrıca Türk alfabesi için sadece 29 farklı anahtar denemesi yapılarak (Kaba Kuvvet Saldırısı/Brute-Force) şifre saniyeler içinde çözülebilir. Bu nedenle Sezar şifrelemesi çok daha kolay kırılır.

Vigenère şifrelemesi ise daha çok güvenlidir. Çünkü aynı harf (örneğin "A"), anahtar kelimenin o anki harfine bağlı olarak metnin farklı yerlerinde farklı harflere dönüşebilir. Bu durum, harf frekans analizini zorlaştırır ve şifreyi kırmak için daha karmaşık yöntemler gerektirir.

ETKİNLİK 5.

ÇÖZÜM

1. Şifre Belirleme: (Sorunun çözümü örnek olarak verilmiştir. Kendi belirlediğiniz şifre için benzer çözümü hazırlayabilirsiniz.)

Belirlenen Şifre: Age@

2. Şifrenin Bilgisayar Sistemindeki Karşılığı (İkili Sistem):

Şifrede yer alan karakterlerin önce ASCII tablosundaki onluk sistemdeki karşılıkları bulunur ve bunlar ikili (binary) sisteme çevrilir.

I. A (65): 64 + 1 → 1000001

II. g (103): 64 + 32 + 4 + 2 + 1 → 1100111

III. e (101): 64 + 32 + 4 + 1 → 1100101

IV. @ (64): 64(2'nin tam kuvveti) → 1000000

Bilgisayar Karşılığı: 1000001 1100111 1100101 1000000

3. Sunulan çözüm, onluk sayı sisteminden ikili sisteme dönüşümde kullanılan tekrarlı bölme yöntemine bir örnektir. Algoritmik mantık doğru kurgulandığı sürece çözümünüzü farklı yöntemlerle veya farklı ifadelerle de oluşturabilirsiniz.

Algoritmik Doğal Dil

1. adım: Başla.

2. adım: Girdilerin alınması ve hazırlık

Kullanıcıdan dönüştürülmek istenen onluk tabandaki sayı (n) alınır. Elde edilecek ikili basamakları (kalanları) saklamak için boş bir liste oluşturulur.

3. adım: Bölme ve kalan bulma döngüsü

Sayı (n), 0'dan büyük olduğu sürece aşağıdaki işlemler tekrarlanır:

- Sayının 2 ile bölümünden kalan bulunur.
- Bulunan kalan listeye eklenir.
- Sayı 2'ye bölünür ve elde edilen bölüm, yeni sayı değeri olarak güncellenir.

4. adım: Son bölümün eklenmesi

Döngü bittiğinde elde kalan son bölümü -ki bu sayı daima 1'dir- listenin en sonuna ekle.

5. adım: Sonucun düzenlenmesi

Elde edilen liste sondan başa doğru (ters sırada) dizilerek anlamlı ikili sayı oluşturulur.

6. adım: Sonucun yazdırılması

Oluşturulan ikili sayı karşılığı ekrana yazdırılır.

7. adım: Bitir.

4. İkilik sistemdeki sayıyı onluk sisteme çevirmek için sağdan sola doğru her basamak 2'nin kuvvetleri ile çarpılır (2^0, 2^1, 2^2...) ve sonuçlar toplanır.

64	32	16	8	4	2	1
Var	Yok	Yok	Yok	Yok	Var	Var
1	0	0	0	0	1	1

$1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$

$= 32 + 2 + 1 = 35$ olarak bulunur.

(Sunulan çözüm örnek niteliğindedir. Farklı yöntemlerle de sonuca ulaşılabilir.)

ETKİNLİK 6.

ÇÖZÜM

1. Bilyeler üç eşit gruba ayrılarak (eşit kollu terazi mantığıyla) tartım yapılmalıdır. Çünkü bir tartım işlemi bize üç olası sonuç verir: Sol kefe hafiftir, sağ kefe hafiftir veya terazi dengededir. Bu yöntemle her adımda bilye sayısı üçte birine düşürülerek en hızlı sonuca ulaşılır.

2. Verilen n değerlerine göre tablo aşağıdaki gibi doldurulmalıdır.

n (Bilye Sayısı)	2	3	4	8	9	16	27	64	81	100
En Az Tartım Sayısı	1	1	2	2	2	3	3	4	4	5

Genelleme: Bilye sayısı 3'ün kuvvetlerini geçtiği anda gereken tartım sayısı 1 artmaktadır.

3. Bilye sayısı (n) ile tartım sayısı (k) arasındaki ilişki şu şekilde ifade edilir:

Önerme: "n bilye sayısı olmak üzere $n \leq 3^k$ eşitsizliğini sağlayan en küçük k tam sayısı, gereken en az tartım sayısıdır."

4.

Algoritmik Doğal Dil

1. adım: Başla.

2. adım: Bilyeleri gruplandırma

Elindeki bilyeleri sayıca birbirine eşit (veya mümkün olan en yakın) üç gruba ayır (Grup A, Grup B, Grup C).

3. adım: Ağırlıkların tartılması

Eşit sayıda bilye bulunan Grup A ve Grup B'yi terazinin kefelerine koyarak tart.

4. adım: Terazi durumunum kontrol edilmesi

- Eğer terazi dengedeyse hatalı bilye terazide olmayan Grup C'dedir.
- Eğer dengede değilse hatalı bilye yukarı kalkan (hafif gelen) kefedeki gruptadır.

5. adım: Hatalı bilyenin bulunduğu grubun seçilmesi ve tekrar kararı

Hatalı bilyenin bulunduğu grubu al ve bilye sayısı 1'e düşene kadar 2. adımdan itibaren işlemleri tekrarla.

6. adım: Kalan son bilyeyi hatalı olarak belirle.

7. adım: Bitir.

5. Algoritmanın Test Edilmesi

- $n=50$ için $3^3 < 50 \leq 3^4$ sağlanır.

  Sonuç: 50 bilye için en az 4 tartım gerekir.
- $n=100$ için $3^4 < 100 \leq 3^5$ sağlanır.

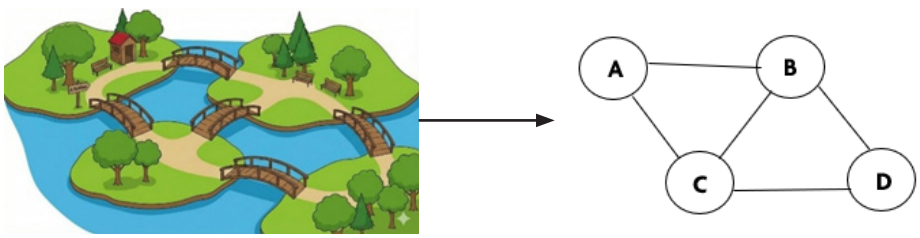
  Sonuç: 100 bilye için en az 5 tartım gerekir.

6. Değişkenlerin Etkisi

- **Hafif/Ağır Olma Durumu:** Farklı olan bilyenin niteliği (hafif veya ağır olması) önceden biliniyorsa algoritmanın temel bölme ve eleme mantığı değişmez yalnızca karar aşamasındaki seçim kriteri (yukarı kalkan veya aşağı inen kefe) farklılaşır. Ancak bilyenin kütlesinin farklı olduğu bilinmesine rağmen türü (Hafif mi, ağır mı?) bilinmiyorsa bu durum algoritmanın işleyişini doğrudan etkiler ve tespit için ilave tartım adımlarına ihtiyaç duyulur.
- **Terazi Türü (Dijital/Eşit Kollu):** Algoritmayı etkiler. Eşit kollu terazi "kıyaslama" (böl ve yönet) yapar. Dijital terazi ise sayısal "toplam ağırlık" verir. Dijital terazi kullanıldığında bu "üçlü gruplama" algoritması yerine farklı bir mantık kullanılması gerekir.

ETKİNLİK 7.

ÇÖZÜM



2.

Bölge (Düğüm)	Bağlı Olan Köprü Sayısı (Derecesi)	Sayının Durumu (Tek/Çift)
A (Başlangıç)	2	Çift
B	3	Tek
C	3	Tek
D	2	Çift

3. a) Bir düğümden sorunsuz geçilebilmesi (giren kişinin çıkabilmesi) için o düğüme bağlı yol sayısının çift olması gerekir. Tek sayı olduğunda (B ve C düğümlerindeki gibi) o bölgeye giren kişi içeride kalır veya çıkmak için aynı yolu ikinci kez kullanmak zorunda kalır.

b) Başlangıç noktası olan A düğümünün derecesi çifttir (2). Ancak parktaki tüm köprülerin tek seferde geçilip A'ya dönülebilmesi için sadece A'nın değil tüm düğümlerin çift olması gerekirdi. Mevcut durumda B ve C düğümleri "tek" olduğu için bu rota tamamlanamaz.

4. Önerme: Kapalı bir yürüyüş rotasının (başladığı yere dönen tur) oluşturulabilmesi için çizgedeki tüm düğümlerin ayrıt sayılarının çift sayı olması gerekmektedir. Çünkü bir bölgeye giriş yapan kişi, oradan ayrılmak için mutlaka bir çıkış yoluna ihtiyaç duyar.

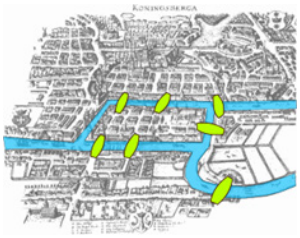
- Analiz sonucunda B ve C düğümlerinin derecelerinin tek sayı (3) olduğu ve sorunu bu iki düğümün yarattığı tespit edilmiştir.
- Yapılan Değişiklik: B ve C bölgeleri arasına yeni bir köprü eklenmelidir. (Veya B ve C arasındaki mevcut köprü iptal edilmelidir.)
- Kanıt:
  - Eğer B ve C arasına yeni bir köprü eklenirse her iki düğümün derecesi de 3'ten 4'e (çift sayıya) çıkar.
  - Tüm düğümlerden çift sayıda ayrıt çizildiği için A noktasından başlayan görevli tüm köprüleri birer kez geçerek tekrar A noktasına başarıyla dönebilir.

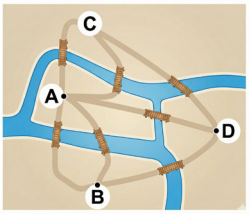
(Cevap örnek niteliğindedir.)

SIRA SİZDE 5.

ÇÖZÜM

1.



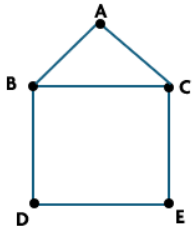


Merkezdeki Ada (Düğüm A): Toplam 5 köprü (ayrıt) bağlıdır.
Kuzey Yaka (Düğüm B): Toplam 3 köprü (ayrıt) bağlıdır.
Güney Yaka (Düğüm C): Toplam 3 köprü (ayrıt) bağlıdır.
Doğu Yakası (Düğüm D): Toplam 3 köprü (ayrıt) bağlıdır.

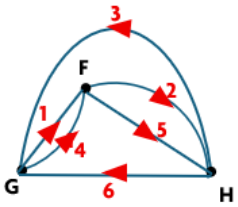
2. Tüm yolları yalnızca bir kez kullanarak tekrar başladığımız noktaya dönebilmek için tüm düğümlerin bağlantı sayısının (derecesinin) çift sayı olması gerekmektedir. Ancak Königsberg modelini incelediğimizde 4 bölgenin de köprü sayılarının tek sayı (3, 3, 3 ve 5) olduğu görülmektedir. Bu nedenle Euler'in de belirttiği gibi bu yürüyüşü tamamlamak matematiksel olarak imkânsızdır.

SIRA SİZDE 6.

ÇÖZÜM



B ve C düğümlerinde tek sayıda ayrıt bulunduğu (derecesi tek olduğu) için çizilemez.



Başlangıç Noktası

Cevap örnek niteliğindedir.

ETKİNLİK 7.

ÇÖZÜM

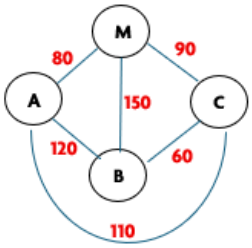
Konumlar	M-A	M-B	M-C	A-B	A-C	B-C
Arasındaki Mesafe (birim)	80	150	90	120	110	60

1. Rota Hesaplamaları

Olası tüm geçerli rotalar (M'den başlayıp tüm noktaları gezip M'ye dönen) hesaplanarak karşılaştırılır.

- 1. Rota (M →A → B → C →M): 80 + 120 + 60 + 90 = 350 birim
- 2. Rota (M → A →C →B →M): 80 + 110 + 60 + 150 = 400 birim
- 3. Rota (M →B → A →C →M): 150 + 120 + 110 + 90 = 470 birim
- 4. Rota (M → B → C → A → M): 150 + 60 + 110 + 80 = 400 birim
- 5. Rota (M → C → A → B → M): 90 + 110 + 120 + 150 = 470 birim
- 6. Rota (M → C → B → A → M): 90 + 60 + 120 + 80 = 350 birim

2. Ağırlıklı Çizge Modeli



3. Girdi Verileri: Teslimat noktaları (M, A, B, C) ve bu noktalar arasındaki tüm uçuş mesafeleri

Beklenen Çıktı: Toplam mesafeyi en aza indiren rota sıralaması ve toplam mesafe değeri

4.

Algoritmik Doğal Dil

1. adım: Başla.

2. adım: Girdilerin alınması

Merkez (M) ve hastaneler (A, B, C) arasındaki tüm uçuş mesafesi verilerini al.

3. adım: Olası rotaların oluşturulması

M noktasından başlayıp, diğer tüm noktaları (A, B, C) yalnızca bir kez ziyaret ederek tekrar M noktasına dönen tüm farklı rota sıralamalarını (permütasyonları) belirle.

4. adım: Toplam mesafelerin hesaplanması

Belirlenen her bir rota seçeneği için noktalar arasındaki mesafeleri toplayarak o rotanın toplam uzunluğunu hesapla.

5. adım: En kısa rotanın seçilmesi

Hesaplanan tüm toplam mesafeleri birbirleriyle karşılaştır ve sayısal olarak en küçük (minimum) değere sahip olan rotayı bul.

6. adım: **Sonucun yazdırılması**

Bulunan en verimli rotayı ve bu rotanın toplam mesafe değerini ekrana yazdır.

7. adım: Bitir.

5. Yapılan hesaplamalar sonucunda insansız hava aracının katettiği toplam mesafeyi en aza indiren en verimli rota M → A → B → C → M ve toplam mesafe 350 birimdir.

Geri bildirim bölümünde yer alan cevaplar, öğrenme yolculuğunuzda size rehberlik etmek için hazırlanmıştır. "Etkinlik" ve "Sıra Sizde" bölümlerindeki sorulara verdiğiniz cevaplarınızı kontrol ederken zorlandığınız kısımları aşağıdaki alana not alabilirsiniz. Ölçme ve değerlendirme aşamasına geçmeden önce, çalışma kartındaki ilgili konuları tekrar gözden geçirmeniz gelişiminize katkı sağlayacaktır. İnternet erişiminiz varsa **MEBİ** bireysel öğrenme platformundaki konu anlatım videolarından ve zengin içeriklerden de faydalanabilirsiniz.

DEĞERLENDİRİYORUM

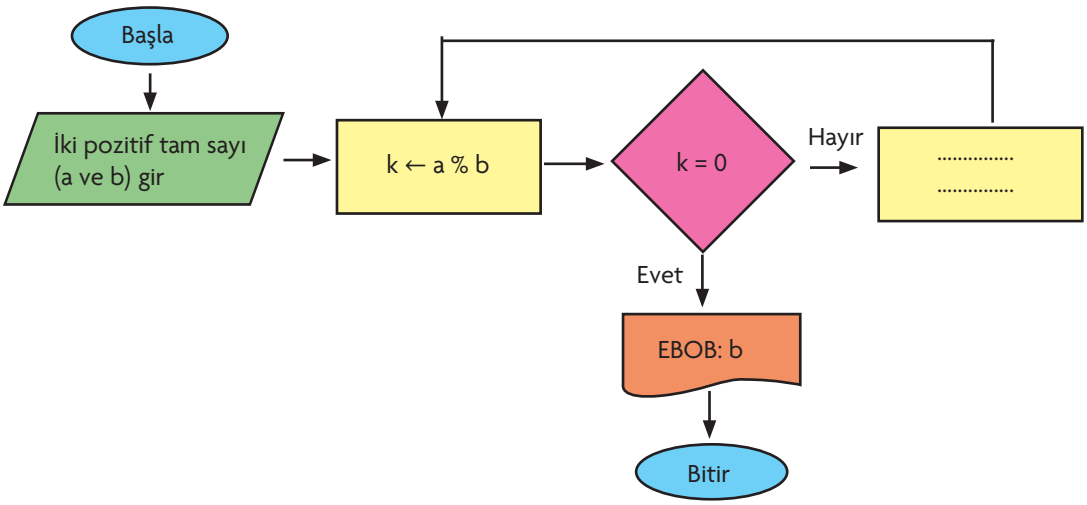
Amaç: Sevgili öğrencimiz; bu bölümde öğrendiklerinizi gözden geçirmenizi, kendi öğrenme sürecinizi değerlendirmenizi ve eksiklerinizi fark etmenizi amaçlıyoruz.

Soruları dikkatle yanıtlayınız. Cevaplarınızı geri bildirimlerle karşılaştırarak eksik gördüğünüz noktaları tekrar ediniz.

SORULAR

1. Öklid algoritması, iki pozitif tam sayının en büyük ortak bölenini (EBOB) bulmak için kullanılır. Algoritmanın işleyişi şu şekildedir:

1. İki pozitif tam sayı seçilir: a ve b
2. İki sayı birbirine bölünür ve kalan hesaplanır.
3. Eğer kalan sıfır ise bölen, a ve b sayılarının en büyük ortak bölenidir.
4. Eğer kalan sıfır değilse küçük sayı büyük sayı olarak, kalan ise küçük sayı olarak atanarak işlem tekrarlanır.



Verilen bilgileri ve Öklid algoritmasına ait akış şemasını inceleyerek aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) Şemanın "Hayır" kolunda yer alan ve algoritmanın döngüye girdiği işlem basamağı boş bırakılmıştır. Boş bırakılan kutucuğun içine yazılması gereken matematiksel atama işlemlerini yazınız.

b) Verilen akış şemasını temel alarak, algoritmayı algoritmik doğal dil kullanarak adım adım yazınız.

Algoritmik Doğal Dil

1. adım: Başla.
2. adım:

c) Algoritmanın doğruluğunu kontrol etmek için a = 120 ve b = 72 değerlerini sisteme giriniz. Değişkenlerin her adımda aldığı değerleri aşağıdaki tabloya yazarak sonucu bulunuz. Elde ettiğiniz sonucu, bildiğiniz EBOB yöntemlerinden biriyle (örneğin asal çarpanlara ayırma) doğrulayınız.

Adım/Döngü	Bölünen (a)	Bölen (b)	Kalan (k←a%b)	Karar (k=0 mı?)	Yeni Atama
Başlangıç	120	72	48	Hayır	a ← 72, b ← 48
1. Döngü	72	48	...	...	...
2. Döngü	...	...	...	...	...
Sonuç	Çıktı:				

Doğrulama: Klasik yöntemle EBOB(120, 72) = ...

Algoritma sonucu ile klasik yöntem sonucu aynı mı? ( ) Evet ( ) Hayır

2. Teneffüste bir araya gelen üç arkadaş: Deniz, Doğa ve Ayşe; zihinsel becerilerini yarıştırdıkları bir oyun tasarlarlar.

- **Deniz (Oyun Yöneticisi): 1'den n ye kadar olan tam sayılar arasından rastgele bir sayı tutar ve yönetici olur.**
- **Doğa ve Ayşe (Oyuncular): Deniz'in tuttuğu sayıyı en az tahminle bulmaya çalışırlar.**

Deniz, her tahmin sonrası yarışmacılara sadece şu üç cevaptan birini verir:

1. Daha BÜYÜK bir sayı söyle. (Yukarı çık.)
2. Daha KÜÇÜK bir sayı söyle. (Aşağı in.)
3. Tebrikler! Buldun.

Yarışmacılar şu stratejileri izler:

Doğa (Sıralı Arama): Şansa yer yok! 1, 2, 3... diye sırayla sorarım, elbet bulurum.

Ayşe (İkili Arama): Ben her adımda seçenekleri yarıya indiririm. Hep aralığın tam ortasını sorarım.

Buna göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) Deniz'in 1 ile 100 arasında bir sayı tuttuğu durumda Doğa ve Ayşe'nin stratejilerini "verimlilik" (hız/adım sayısı) açısından karşılaştırınız. Hangi stratejinin her durumda daha avantajlı olacağına dair varsayımınızı yazınız.

b) Farklı n (aralıktaki toplam sayı adedi) değerleri için Doğa ve Ayşe'nin "en kötü şansla" (sayıyı en zor bulacakları durumda) yapacakları maksimum tahmin sayılarını hesaplayarak tabloyu doldurunuz.

n (Sayı Aralığı)	10	50	100	500	1000
Doğa'nın Maksimum Tahmin Sayısı	10	.....	.....	.....	1000
Ayşe'nin Maksimum Tahmin Sayısı	4	.....	.....	.....	10

c) Tablodaki verilerden hareketle n (sayı adedi) ile Ayşe'nin ihtiyaç duyduğu k (maksimum tahmin sayısı) arasındaki ilişkiyi matematiksel bir önerme olarak ifade ediniz.

Önerme: 1 ile n arasındaki bir sayıyı, aralığı her seferinde ikiye bölerek bulmak için gereken adım sayısı k olmak üzere .....

.....

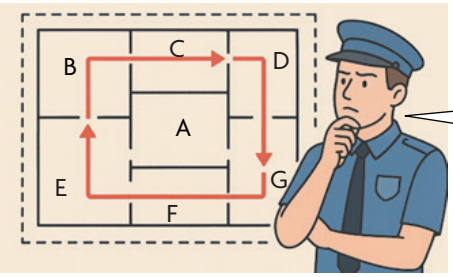
d) Ayşe'nin uyguladığı stratejiyi, bir bilgisayarın ya da başka bir kişinin kolayca takip edebileceği biçimde algoritmik doğal dil kullanarak adım adım yazınız.

Algoritmik Doğal Dil

1. adım: Başla.
2. adım:

3. Bir müzedeki güvenlik sistemi, odalar arası geçiş yapıldığında kapıyı otomatik olarak kilitlemektedir. Bu nedenle her kapıdan yalnızca bir kez geçilebilmektedir.

Güvenlik görevlisi şu sorunun cevabını aramaktadır:



Herhangi bir odadan başlayıp, tüm kapıları sadece bir kez kullanarak tekrar başladığım odaya dönebilir miyim?

Verilen müze krokisini inceleyerek soruları cevaplayınız.

a) Müze odalarını (A, B, C, D, E, F, G) düğüm (nokta), aralarındaki kapıları ise ayrıt (çizgi) kabul ediniz. Problemin çizge modelini boş bırakılan alana çiziniz.

b) Çizdiğiniz modeldeki düğümlerin bağlantı sayılarını inceleyiniz. Görevlinin başladığı odaya dönüp dönemeyeceğini nedenleriyle açıklayınız.

4. Yer değiştirme (transposition) şifreleme yöntemleri, harflerin kendisini değiştirmek yerine harflerin metin içindeki konumlarını belirli bir kurala göre değiştirerek şifre oluşturur. Bu yöntemlerden biri zikzak (rail fence) algoritmasıdır.

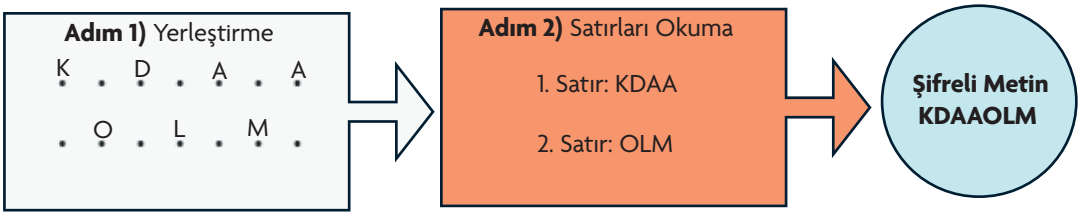
Algoritmanın Çalışma Prensibi

- **Giriş:** Şifrelenecek metin ve "anahtar sayı" (kullanılacak satır sayısı) belirlenir.
- **Yerleştirme:** Metindeki harfler; seçilen satır sayısı kadar aşağı doğru, ardından yukarı doğru eğik bir çizgi (zikzak) izleyerek sanal bir ızgaraya yerleştirilir.
- **Okuma (Çıktı):** Izgaradaki satırlar birinci satırdan son satıra doğru soldan sağa okunur ve birleştirilerek şifreli metin elde edilir.

Örnek Uygulama

Metin: KODLAMA

Anahtar: 2 (satır sayısı)



Verilen bilgilere göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) "ALGORİTMA" kelimesini, anahtar = 3 (3 Satır) olacak şekilde zikzak (rail fence) yöntemiyle şifreleyiniz.



Şifreli Mesaj:

b) Aşağıdaki şifreli metin, anahtar = 3 (3 Satır) kullanılarak zikzak (rail fence) yöntemiyle oluşturulmuştur.

Bu şifreli metni çözerek düz metni (orijinal kelimeyi) bulunuz.

Şifreli Metin: **GMEÜÜSMKLE**



Orijinal Metin:

GERİ BİLDİRİM

Bu geri bildirim sayesinde kendi cevabınızı kontrol edebilir, hatalarınızı düzelterek öğrenmenizi pekiştirebilirsiniz.

ÇÖZÜM 1.

a) Şemada "Hayır" kolunda yer alan ve döngünün devamlılığını sağlayan boş kutucuğa aşağıdaki değişken değiştirme (atama) işlemleri gelmelidir.

a ← b

b ← k

b)

Algoritmik Doğal Dil

1. adım: Başla.
2. adım: Girdilerin alınması
Kullanıcıdan EBOB hesabı yapılacak iki pozitif tam sayıyı (a ve b) alın.
3. adım: Kalanın hesaplanması
Büyük sayıyı küçük sayıya bölerek kalanı (k) elde edin. (a'nın b'ye bölümünden kalan).
4. adım: Kalanın kontrol edilmesi
Elde edilen kalanın (k) 0 olup olmadığını kontrol edin.
5. adım: Koşulun Sağlanması ve Atama İşlemleri
Eğer kalan (k) 0 değilse bölen sayıyı (b) yeni bölünen (a) yapın, kalanı (k) ise yeni bölen (b) yapın ve 3. adıma geri dönün.
6. adım: Sonucun yazdırılması
Eğer kalan (k) 0 ise eldeki bölen sayı (b) EBOB'dur. Sonucu ekrana yazdırın.
7. adım: Bitir.

c)

Adım/Döngü	Bölünen (a)	Bölen (b)	Kalan (k←a%b)	Karar (k=0 mı?)	Yeni Atama
Başlangıç	120	72	48	Hayır	a ← 72, b ← 48
1. Döngü	72	48	24	Hayır	a ← 48, b ← 24
2. Döngü	48	24	0	Evet	-
Sonuç	ÇIKTI: EBOB: 24				

Doğrulama: Klasik yöntemle EBOB(120, 72) = 24

Algoritma sonucu ile klasik yöntem sonucu aynı mı? **(X) Evet** **( ) Hayır**

ÇÖZÜM 2.

a) Doğa'nın izlediği "sıralı arama" yöntemi, sayı büyüdükçe çok fazla işlem gerektirir. Ayşe'nin izlediği "ikili arama" yöntemi ise her adımda seçeneklerin yarısını elediği için çok daha hızlı sonuca ulaşır. Bu nedenle Ayşe'nin stratejisi her durumda daha verimli ve avantajlıdır.

b)

n (Sayı Aralığı)	10	50	100	500	1000
Doğa'nın Maksimum Tahmin Sayısı	10	50	100	500	1000
Ayşe'nin Maksimum Tahmin Sayısı	4	6	7	9	10

c)

Önerme: 1 ile n arasındaki bir sayıyı, aralığı her seferinde ikiye bölerek bulmak için gereken adım sayısı k olmak üzere $n \leq 2^k$ eşitsizliğini sağlayan en küçük k pozitif tam sayısı, maksimum tahmin sayısını verir.

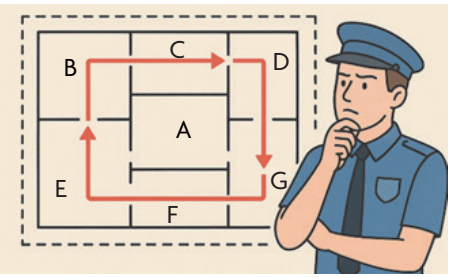
d)

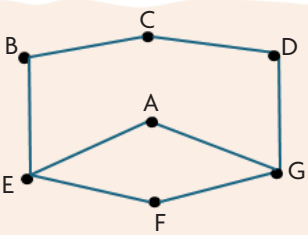
Algoritmik Doğal Dil

1. adım: Başla.
2. adım: Girdilerin ve sınırların belirlenmesi
Alt sınırı 1, üst sınırı n olarak belirleyin.
3. adım: Tahmin yapılması
Alt ve üst sınırın tam ortasındaki sayıyı (ortalama) bulun ve tahminî olarak söyleyin.
4. adım: Dönütlerin kontrol edilmesi
Deniz'in cevabını kontrol edin. Cevap "Buldun." ise 6. adıma gidin.
5. adım: Sınırların güncellenmesi ve döngü
Cevap "Daha BÜYÜK" ise alt sınırı (Tahmin + 1) yapın, cevap "Daha KÜÇÜK" ise üst sınırı (Tahmin - 1) yapın ve 3. adıma geri dönün.
6. adım: Bitir.

ÇÖZÜM 3.

a)





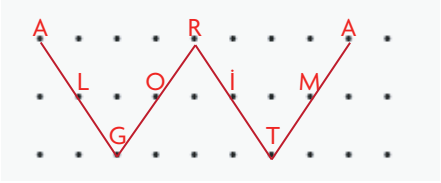
b)

Çizilen modelde E ve G düğümlerinin bağlantı sayıları (dereceleri) 3, diğer düğümlerin bağlantı sayıları (dereceleri) ise 2'dir. Çizgede tüm düğümlerin dereceleri çift olmadığından görevlinin herhangi bir odadan başlayıp tüm kapıları sadece bir kez kullanarak tekrar başladığı odaya dönmesi imkânsızdır. Ancak tek dereceli sadece iki düğüm olduğu için E odasından başlayarak G odasına veya G odasından başlayarak E odasına ulaştığı bir rota belirlenebilir.

ÇÖZÜM 4.

a)

"ALGORİTMA" kelimesi, anahtar = 3 (3 Satır) olacak şekilde zikzak (rail fence) yöntemiyle aşağıdaki gibi şifrelenir.

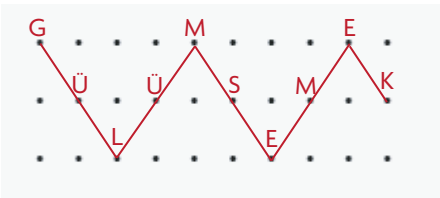


Şifreli Mesaj:
ARALOİMGT

b)

Bu şifreli metin çözülerek düz metin (orijinal kelime) aşağıdaki gibi bulunur.

Şifreli Metin: GMEÜÜSMKLE



Orijinal Metin:

GÜLÜMSEMEK

ÖĞRENDİKLERİM

Amaç: Bu bölümde öğrendiklerinizi özetlemenizi, günlük hayatta ve farklı derslerde kullanabileceğiniz bilgileri belirlemenizi amaçlıyoruz.

Aşağıda tanımlanan "Özet Çıkarma Algoritmaları"nın adımlarını sırasıyla uygulayarak metin içerisindeki temel kavramları, kuralları ve yöntemleri filtreleyiniz ve kendi sistematik özetinizi oluşturunuz.

ÖĞRENME SÜRECİNİ ALGORİTMA İLE ÖZETLEME

1. Algoritmik Doğal Dil ile Özetleme

Algoritmik Doğal Dil

1. adım: Başla.
2. adım: Temelleri hatırla
"İlişkilendiriyorum" bölümüne geri dön. Algoritma kelimesinin kökenini (Harizmi) ve tarihsel gelişimini (Cezerî, Euler) notlarına ekle.
3. adım: Yapı taşlarını tanımla
Bir algoritmanın olmazsa olmaz üç bileşenini (Girdi, Süreç, Çıktı) ve temel özelliklerini (Kesinlik, Sonluluk, Etkililik) birer cümle ile yaz.
4. adım: Temsil biçimlerini listele
Çalışma kartında kullandığın üç temsil yöntemini (Doğal Dil, Akış Şeması, Sözde Kod) ve akış şeması sembollerinin (Elips, Dikdörtgen, Paralelkenar...) anlamlarını özetle.
5. adım: Uygulama alanlarını sınıflandır
(Döngü) "Uygulayarak Öğreniyorum" bölümündeki her bir etkinliği düşün ve şu başlıkları not al:
- Matematik: Bölünebilme, Asal Çarpanlar, EBOB.
- Arama: Sıralı Arama vs. İkili Arama (Verimlilik farkı).
- Şifreleme: Sezar (Sabit öteleme), Vigenere (Anahtarlı), Zikzak (Yer değiştirme).
- Modelleme: Çizge Kuramı (Düğüm, Ayrıt, Euler Yolu).

6. adım: Kendini değerlendir (kontrol)
"Değerlendiriyorum" bölümündeki soruları (Öklid, Drone Rotası) tekrar gözden geçir. Çözüm mantığını kavradıysan 7. adıma git, kavramadıysan ilgili bölüme geri dön.
7. adım: Çıktıyı üret (sonuç)
Tüm notlarını "Algoritmik Düşünme Temelleri" başlığı altında birleştir.
8. adım: Bitir.

2. Sözde Kod ile Özetleme

Sözde kod içerisindeki 'YAZ' komutlarında verilen temel bilgileri, kendi öğrendiklerinizle zenginleştiriniz. Her bir konu başlığı altına, o konuyla ilgili **hatırlamanız gereken kritik noktaları** kısa cümleler hâlinde **ekleyiniz**.

Sözde Kod

```
BAŞLA
  GİRDİ: "Tamamlanmış Çalışma Kartı"
  LİSTE: Konular = ["Tarihçe", "Temsiller", "Arama", "Şifreleme", "Çizgeler"]

  HER "Konu" İÇİN (Kart bitene kadar TEKRARLA):

    EĞER (Konu = "Tarihçe") İSE:
      YAZ "Köken: Harizmi, Mekanik: Cezeri, Çizge: Euler"

    DEĞİLSE EĞER (Konu = "Temsiller") İSE:
      YAZ "Akış şemasındaki 'Baklava Dilimi' karar vermeyi sağlar."
      YAZ "Sözde kod, konuşma dili ile kodlama arasındadır."

    DEĞİLSE EĞER (Konu = "Şifreleme") İSE:
      YAZ "Bilgisayarlar veriyi 0 ve 1 (Binary) ile saklar."
      YAZ "ASCII ve Unicode karakter setleridir."

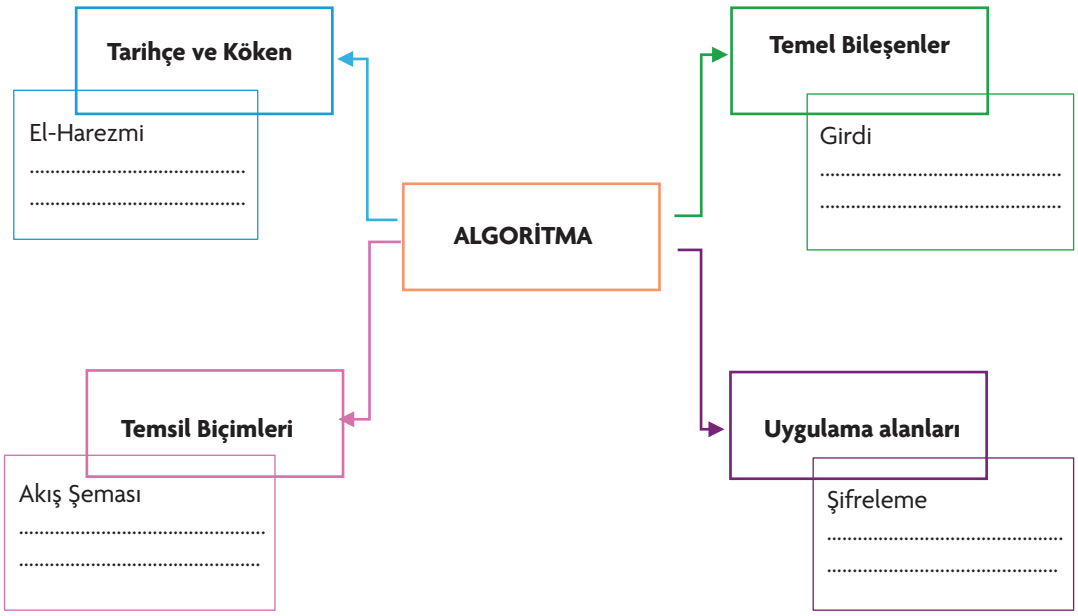
    DEĞİLSE EĞER (Konu = "Çizgeler") İSE:
      YAZ "Königsberg Köprüsü problemi, çizge kuramının doğuşudur."
      YAZ "Euler Yolu için düğüm dereceleri çift olmalıdır."

  DÖNGÜ SONU

  YAZDIR "Tebrikler! Algoritmik düşünme yolculuğunu tamamladınız."
BİTİR
```

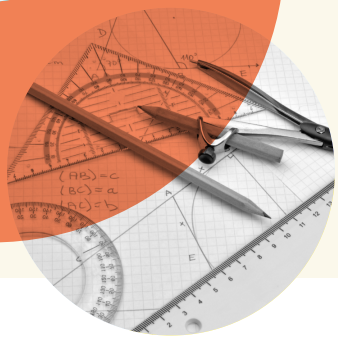
3. Kavram Haritası (Görsel Özet)

Öğrendiğiniz tüm kavramları bütüncül bir yapıda görmek için aşağıdaki şemayı inceleyiniz ve haritada gördüğünüz **eksiklikleri** kendi ifadelerinizle **tamamlayınız.**



ÖZETİM:

Daha fazlası için karekodu okutunuz.



MANTIK BAĞLAÇLARI VE NİCELEYİCİLERİN ÇÖZÜMLENMESİ

BAŞLARKEN

Sevgili öğrencimiz, bu çalışma kartında bireysel öğrenme yolculuğunuza destek sunmak amaçlanmaktadır. Çalışmalarınızı yürütürken "Hazırlanıyorum", "İlişkilendiriyorum", "Uygulayarak Öğreniyorum", "Değerlendiriyorum" bölümlerini sırası ile yapmanızı; her bölüm ve etkinlik sonundaki geri bildirimleri alarak ilerlemenizi; "Öğrendiklerim" bölümünde öğrenme sürecinizi gözden geçirmenizi bekliyoruz.

Bu çalışma kartında mantık bağlaçları ve niceleyicilerin algoritmalardaki işlevleri ve kullanımı hakkında bilgi sahibi olup aşağıdaki soruları cevaplayabileceksiniz.

- Ve, veya, ya da bağlaçları bilişim ve kodlama algoritmalarında nasıl bir işleve sahiptir?
- Mantık bağlaçları ve niceleyicilerin birlikte kullanımının sağladığı kolaylıklar nelerdir?

HAZIRLANIYORUM

Amaç: Bu bölümde ön bilgilerinizi hatırlamanızı ve temaya hazırlıklı hâle gelmenizi amaçlıyoruz. Aşağıda yer alan ifadeler, bu temada tamamlanması hedeflenen öğrenme çıktısını ele almadan önce sahip olmanız gereken bazı temel becerileri içermektedir. Bu çalışma notla değerlendirilmeyecek olup amacı temaya ne ölçüde hazır olduğunuzu belirlemektir.

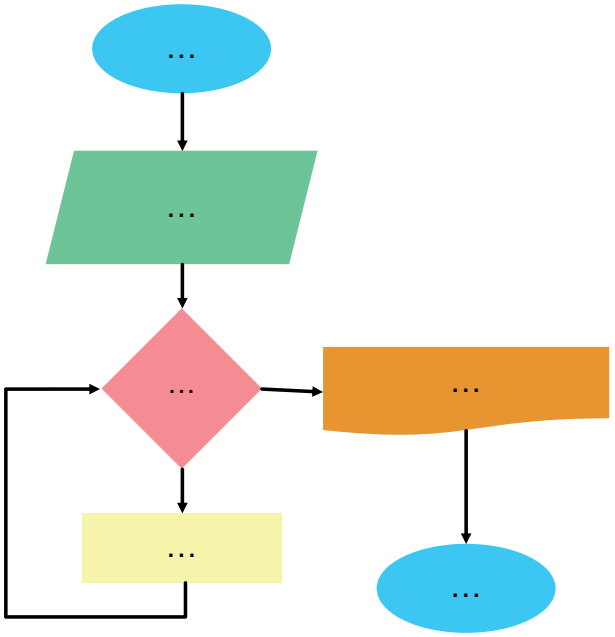
- Lütfen her bir ifadeyi dikkatlice okuyunuz.
- Eğer ifadedeki bilgiye hâkim olduğunuzu düşünüyorsanız kutucuğu işaretleyiniz.
- Eğer konuyu henüz tam olarak bilmediğinizi ya da hatırlamadığınızı düşünüyorsanız kutucuğu boş bırakınız.

SORULAR	ÖN ÖĞRENME KONTROL LİSTESİ	✓
1	Algoritmik akış şemasındaki bütün sembollerin anlamını bilirim.	☐
2	≥, ≤, ≠ gibi bazı matematiksel sembollerin algoritmadaki ifadelerinin farklı olduğunu bilirim.	☐
3	Algoritmik akış şemasında koşul sembolünden "evet" ve "hayır" olmak üzere 2 ok çıktığını bilirim.	☐
4	Sözde kod ve algoritmik doğal dil arasındaki farkları bilirim.	☐
5	Dikdörtgenin alanının hesaplanması gibi basit bir algoritmayı akış şeması, doğal dil ve sözde kod ile ifade edebilirim.	☐
6	Bağlaçların dilimizdeki işlevlerini bilirim.	☐

"Ön Öğrenme Kontrol Listesi"ni doldurduktan sonra aşağıda verilen "Kontrol Noktası" sorularını çözünüz ve cevaplarınızı kontrol ediniz.

KONTROL NOKTASI

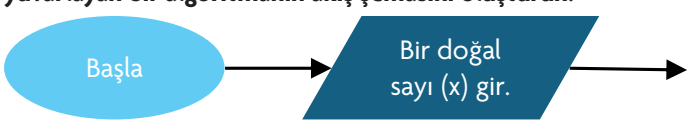
SORU 1. Aşağıda verilen algoritmik akış şemasında sembollere ait şekillerin içine sembollerin adlarını yazınız.



SORU 2. Aşağıda verilen matematiksel sembollerin ve ifadelerin algoritmadaki karşılıklarını yanına yazınız.

Matematiksel	Algoritma	Anlamı
≥	.....	Büyük eşittir.
≤	.....	Küçük eşittir.
≠	.....	Eşit değildir.
=	.....	Eşittir (karşılaştırma).
•	.....	Çarpma
:	.....	Bölme
Kalan bulma	.....	Kalan bulma
Üs alma	.....	Üs alma

SORU 3. Girilen bir doğal sayının 7'ye bölümünde bölümü, bölümün onda birler basamağına göre en yakın doğal sayıya yuvarlayan bir algoritmanın akış şemasını oluşturun.



KAREKODU OKUTUNUZ.

x in 7'ye bölümünde bölüm A ya yuvarlanır.

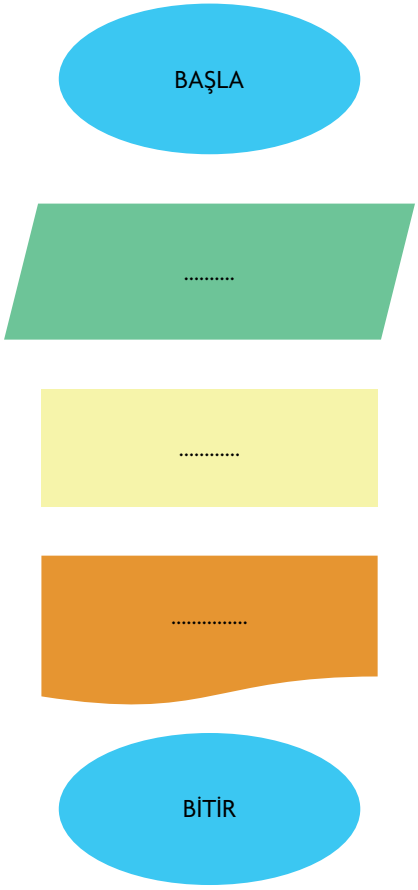
Bitir

SORU 4. Aşağıda bir algoritma sözde kod ile ifade edilmiştir. Bu algoritmayı algoritmik doğal dil ile yazınız.

Girdi: a ve b iki tam sayı
Çıktı: a ve b sayılarının farkının mutlak değeri
Başla
a ve b sayılarını kullanıcıdan al.
Eğer a > b ise x ← a – b
Değilse x ← b – a
Yazdır "a ve b sayılarının farkının mutlak değeri x olur."
Bitir

1. adım: Başla.
2. adım: Girdilerin alınması

SORU 5. Girilen iki tam sayının çarpımını bulan algoritmayı; algoritmik akış şeması, algoritmik doğal dil ve sözde kod ile gösteriniz.



Algoritmik Doğal Dil

1. adım: Başla
2. adım: .....
.....
3. adım: .....
.....
4. adım: .....
.....
5. adım: Bitir

Sözde Kod

Girdi: .....
Çıktı: .....
Başla
.....
.....
.....
.....
Bitir

SORU 6.1. Bir okulda, ilçe genelinde yapılacak yarışmalar için 9. sınıfların F, G ve H şubelerinden öğrenciler seçilecektir. Okul idaresi; şiir okuma yarışması için F şubesinden veya kız öğrencilerden, resim yarışması için ise H şubesindeki erkek öğrencilerden öğrenci seçilmesini istemiştir.

Buna göre

Şiir okuma yarışması için seçilecek öğrenci ile ilgili aşağıda verilen bilgilerden hangisi yanlıştır?

A) F şubesinde olan bir kız öğrenci olabilir.

B) F şubesinde olan bir erkek öğrenci olabilir.

C) G şubesinde olan bir kız öğrenci olabilir.

D) G şubesinde olan bir erkek öğrenci olabilir.

E) H şubesinde olan bir kız öğrenci olabilir.

Resim yarışması için seçilecek öğrenci ile ilgili hangisi doğrudur?

A) F şubesinde olan bir kız öğrenci olabilir.

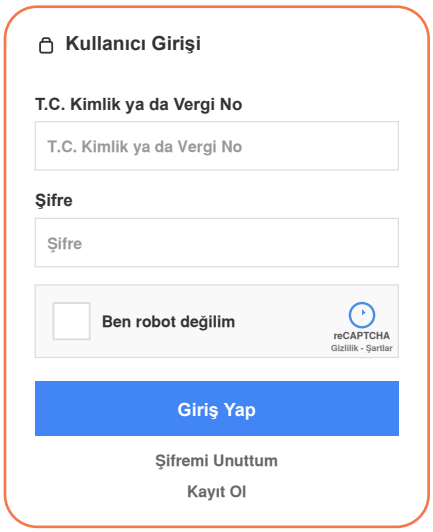
B) F şubesinde olan bir erkek öğrenci olabilir.

C) G şubesinde olan bir kız öğrenci olabilir.

D) H şubesinde olan bir kız öğrenci olabilir.

E) H şubesinde olan bir erkek öğrenci olabilir.

SORU 6.2. Yanda, bir belediyeye ait uygulamanın kullanıcı girişi ekranı gösterilmiştir. Bu ekrandaki iki kutucuk doldurulduktan sonra "Ben robot değilim." seçeneği işaretlenip, "Kullanıcı Girişi" butonuna tıklanarak sisteme giriş yapılır.



Bu ekrana göre kutucuklara girilecek bilgilerle ilgili

I. Üstteki kutucuğa vergi numarası ve alttaki kutucuğa şifre doğru girildiğinde sisteme giriş yapılır.

II. Üstteki kutucuğa T.C. kimlik numarası ve alttaki kutucuğa şifre doğru girildiğinde sisteme giriş yapılır.

III. Üstteki kutucuğa T.C. kimlik ile vergi numarası sırasıyla ve alttaki kutucuğa şifre doğru girildiğinde sisteme giriş yapılır.

ifadelerinden hangileri doğrudur?

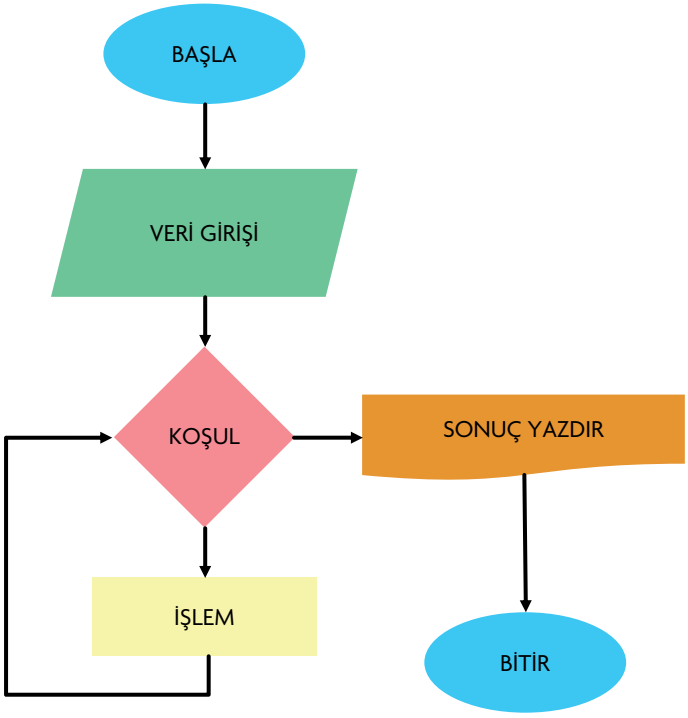
A) Yalnız I B) Yalnız III C) I ve II D) II ve III E) I, II ve III

GERİ BİLDİRİM

Bu geri bildirim sayesinde kendi cevabınızı kontrol edebilir, hatalarınızı düzelterek öğrenmenizi pekiştirebilirsiniz.

KONTROL NOKTASI

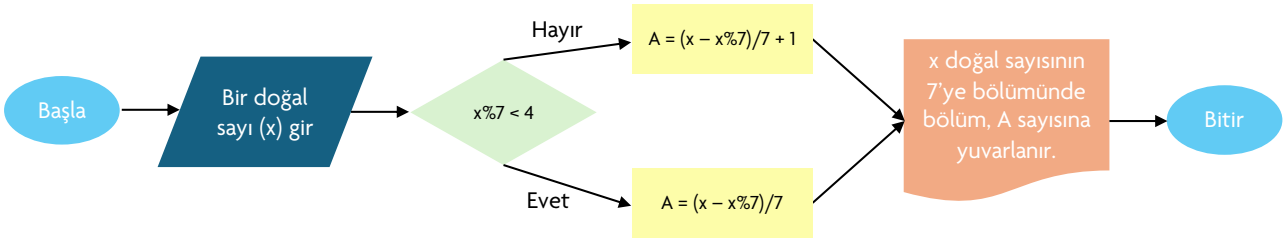
ÇÖZÜM 1.



ÇÖZÜM 2.

Matematiksel	Algoritma	Anlamı
≥	>=	Büyük eşittir
≤	<=	Küçük eşittir
≠	!=	Eşit değildir
=	= veya ←	Eşittir (karşılaştırma)
•	*	Çarpma
:	/	Bölme
Kalan bulma	%	Kalan bulma
Üs alma	^	Üs alma

ÇÖZÜM 3.



Oluşturduğunuz akış şemasında koşul sembolünün içine farklı ifadeler yazmış olabilirsiniz, örneğin x%7 <= 3 olabilir.

Ancak koşul sembolüne x%7 >= 3 gibi bir ifade yazdıysanız "Evet" ve "Hayır" çıkışlarının yönlendirdiği işlemlerin de değişmesi gerektiğine dikkat edin.

Koşul sembolünün içine, bölümün ondalık kısmındaki onda birler basamağını belirleyecek bir ifade de yazılabilir. Ancak böyle bir ifade kurmak, sadece kalanı tespit etmekten daha güçtür. Örneğin (10*x/7)%10<5 ifadesi, bölümün onda birler basamağını bulmaya yönelik bir koşulu göstermektedir. Aynı zamanda bu ifadede, kullanılan programlama diline göre "tam kısmını alma işlemi" gibi farklı işlemler de kullanmak gerekir.

Algoritmayı açıklayalım.

- x bir doğal sayı olduğu için x in 7'ye bölümünden kalan; 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 olabilir. Kalan; 0, 1, 2, 3 olduğunda (koşul sembolünün içinde gösterildiği gibi 4'ten küçük olduğunda) işlem sembolünün içinde x doğal sayısından x doğal sayısının 7'ye bölümünden kalan çıkarılıp, 7'ye kalansız bölünmesi sağlanarak bulunan bölüm A ya eşitlenir. Fakat kalan 4, 5, 6 olduğunda (koşul sembolünün içinde gösterildiği gibi olmadığında) diğer işlem sembolünden farklı olarak, bulunan bölüme 1 eklenerek A ya eşitlenir.
- Örneğin, x = 17 olursa 17 ÷ 7 ≅ 2,428 olduğundan onda birler basamağında 4 olduğu için bu sayıyı 2'ye yuvarlaması gerekir. Algoritma üzerinden kontrol edersek 17'nin 7'ye bölümünden kalan 3'tür. Bu durumda koşul sembolünden evet okunun gönderdiği işleme gidersek (17 – 17%7)/7 = (17 – 3)/7 = 14/7 = 2 olur. "17 doğal sayısının 7'ye bölümünde bölüm 2 sayısına yuvarlanır." yazdırılır.
- Şimdi de x = 18'i ele alalım. 18 ÷ 7 ≅ 2,571 olduğundan ondan birler basamağında 5 olduğu için bu sayıyı 3'e yuvarlaması gerekir. Algoritma üzerinden kontrol edersek 18'in 7'ye bölümünden kalan 4'tür. Bu durumda koşul sembolünden hayır okunun gönderdiği işleme gidersek (17 – 17%7)/7 + 1 = (17 – 3)/7 + 1 = 14/7 + 1 = 3 olur. "18 doğal sayısının 7'ye bölümünde bölüm 3 sayısına yuvarlanır." yazdırılır.

İki örnekte de görüldüğü gibi farklı x değerlerine göre çıktılar, doğru sonuçlar verdi.

ÇÖZÜM 4.

Girdi: a ve b iki tam sayı
Çıktı: a ve b sayılarının farkının mutlak değeri
Başla
a ve b sayılarını kullanıcıdan al.
Eğer a > b ise x ← a – b
Değilse x ← b – a
Yazdır "a ve b sayılarının farkının mutlak değeri x olur."
Bitir

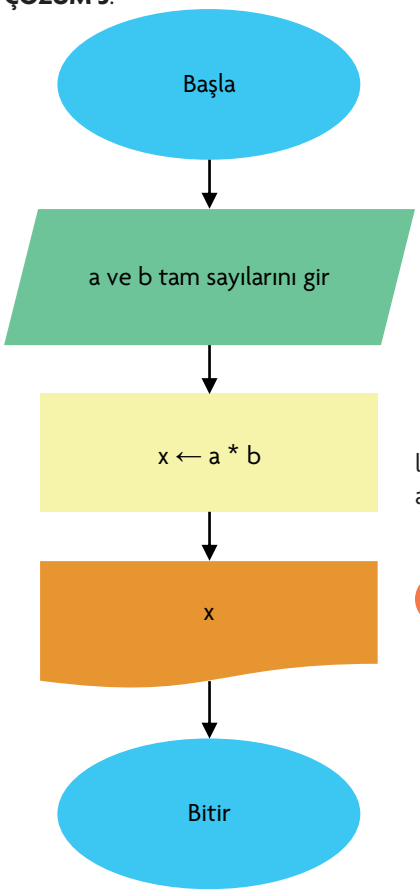
1. adım: Başla
2. adım: Girdilerin alınması
Kullanıcıdan a ve b sayılarını al.
3. adım: Farkın mutlak değerinin hesaplanması
Eğer a > b ise x ← a – b
Değilse x ← b – a
4. adım: Bulunan değerin yazdırılması
"a ve b sayılarının farkının mutlak değeri x olur." yazdır.
5. adım: Bitir

Burada verilen sözde kodda a ve b tam sayılarının farkının mutlak değeri bulunmuştur. Sözde kod ve algoritmik doğal dil birbirine çok benzer. Fakat ikisinin arasındaki farklar şöyledir:

- Sözde kodda, başlangıçta girdi ve çıktı satırları olur.
- Algoritmik doğal dilde adımlar numaralandırılır ve adımlara başlık yazılır, bu yönüyle algoritmik doğal dil sözde koddan daha açıktır.

Dolayısıyla verilen sözde koddaki satırlar aynı kaldığı hâlde adım numaraları ve başlıklar eklenerek algoritmik doğal dile dönüştürülmüş olur.

ÇÖZÜM 5.



Algoritmik Doğal Dil
1. adım: Başla
2. adım: Verilerin alınması
a ve b tam sayılarını gir.
3. adım: Çarpımın bulunması
x ← a * b
4. adım: Sonucun yazdırılması
x i yazdır
5. adım: Bitir

Sözde Kod
Girdi: a ve b tam sayıları
Çıktı: a ve b nin çarpımı
Başla
a ve b sayılarını kullanıcıdan al.
x ← a * b
Yazdır "x"
Bitir

Burada verilen gösterim şekillerinde x yerine, x i oluşturan işlemi ifade eden cümleler de yazılabilir. Örneğin, x yerine "a ve b sayılarının çarpımı" denilebilir. Ayrıca atama işlemi hem x ← a * b hem de x = a * b şeklinde gösterilebilir.

HATIRLATMA

Burada kullanılan ifadeler, gerçek bir programlama diline ait kodlar değildir. Bu nedenle algoritma adımlarını gösterilirken farklı işaretler, farklı sözcükler veya farklı ifadeler kullanılabilir. Bu konuda kendinize güvenerek algoritmalarınızı oluşturmaya çalışınız.

Ancak gerçek bir programlama dilinde kod yazarken en küçük bir nokta, boşluk ya da sembolün bile çok önemli olduğunu unutmayınız. Bu yüzden gerçek kod yazarken son derece dikkatli olunmalıdır.

ÇÖZÜM 6.1.

Şiir okuma ve resim yarışmalarına katılabilecek ve katılamayacak kişilerin tablosu aşağıda gösterilmiştir.

	9-F		9-G		9-H	
						
Şiir Okuma Yarışması	✓	✓	×	✓	×	✓
Resim Yarışması	×	×	×	×	✓	×

Şiir okuma yarışması için seçilecek öğrenci ile ilgili hangisi yanlıştır?

A) F şubesinde olan bir kız öğrenci olabilir.

B) F şubesinde olan bir erkek öğrenci olabilir.

C) G şubesinde olan bir kız öğrenci olabilir.

D) G şubesinde olan bir erkek öğrenci olabilir.

E) H şubesinde olan bir kız öğrenci olabilir.

Şiir okuma yarışması için F şubesinden bir öğrenci veya bütün şubelerden bir kız öğrenci istenmiştir. Bu durumda G şubesinden bir erkek öğrenci istenmediği için doğru cevap **D seçeneğidir.**

Resim yarışması için seçilecek öğrenci ile ilgili hangisi doğrudur?

A) F şubesinde olan bir kız öğrenci olabilir.

B) F şubesinde olan bir erkek öğrenci olabilir.

C) G şubesinde olan bir kız öğrenci olabilir.

D) H şubesinde olan bir kız öğrenci olabilir.

E) H şubesinde olan bir erkek öğrenci olabilir.

Resim yarışması için H şubesinden bir erkek öğrenci istendiğinden doğru cevap **E seçeneğidir.**

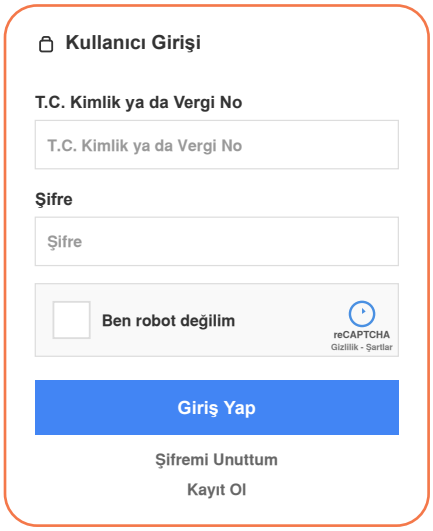
ÇÖZÜM 6.2.

Ekranda T.C. kimlik numarası ya da vergi numarası istendiği belirtilmiştir. "ya da" bağlacının kullanıldığı durumlarda, bağlanan ifadelerden yalnızca birinin geçerli olması yeterlidir.

I. Üstteki kutucuğa vergi numarası ve alttaki kutucuğa şifre doğru girildiğinde sisteme giriş yapılır.

II. Üstteki kutucuğa T.C. kimlik numarası ve alttaki kutucuğa şifre doğru girildiğinde sisteme giriş yapılır, öncülleri doğrudur.

Bu nedenle doğru cevap **C seçeneğidir.**



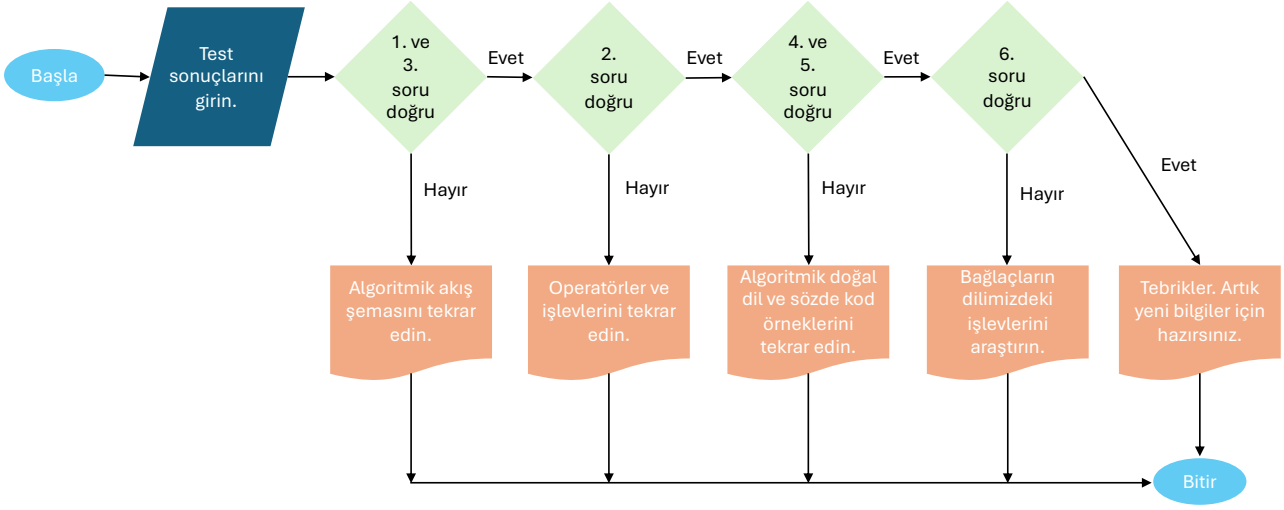
KONTROL LİSTEMİ DEĞERLENDİRİYORUM

"Hazırlanıyorum" kısmında yaptığınız "Ön Öğrenme Kontrol Listesi"nde verdiğiniz yanıtlar ile "Kontrol Noktası"ndaki elde ettiğiniz başarı durumu arasında bir fark var mı?

Bu fark, kendinizi değerlendirme sırasında ne kadar objektif olduğunuzu ve "Kontrol Noktası"ndaki başarınızla örtüşüp örtüşmediğini anlamak için önemlidir.

Peki kendinizi geliştirme ihtiyacı duyduğunuz noktalar var mı?

Konumuza geçmeden önce aşağıdaki akış şemasındaki yönergeleri takip edin.



İLİŞKİLENDİRİYORUM

Amaç: Bu bölümde yeni öğreneceğiniz konuyu; zihninizde var olan bilgileriniz, yaşantılarınız ve diğer derslerde öğrendiklerinizle ilişkilendirmenizi bekliyoruz.

Verilen metni dikkatle inceleyiniz. Bilgileri kendi yaşamınızdan ya da çevrenizden örneklerle çeşitlendiriniz.

Aşağıda, telefonda oynanan bir araba yarışı oyununun görseli ve oyunun oynama talimatları verilmiştir. Bu talimatlara göre oyunun algoritmasının hangi kısımlarında mantık bağlaçları kullanabilirsiniz? Söz konusu talimatları düzenlerken mantık bağlaçları ne gibi kolaylıklar sağlar?

Sağ, sol tuşları ile araç yönlendirilmekte; fren için A ya da X tuşuna, gaz için B veya Y tuşuna basılmaktadır. Vites değiştirmek için C tuşuna basarken ileri, geri yön tuşları kullanılmaktadır. B ve Y tuşlarına aynı anda basıldığında eğer aracın ilave ivmelenme hakkı varsa aracın ivmelenmesi 2 katına çıkmaktadır, eğer ilave ivmelenme hakkı yoksa sadece hızlanmaktadır. İlave ivmelenme hakkı; oyunun başlangıcında, ekranın üstündeki yeşil çizgi tam dolu olacak şekilde tanımlanır ve kullanım hakkı toplamda 15 saniyedir.



Bu oyunun algoritması oluşturulurken "Ya A tuşuna ya X tuşuna basıldığında araç fren yapar." yerine "Eğer A ya da X tuşuna basılıysa fren yap." yazılır.

Aynı şekilde "B ve Y tuşuna ayrı ayrı da birlikte de basıldığında aracı hızlandır ama birlikte basıldıysa ve aracın ilave hızlanma hakkı varsa 2 kat hızlandır." yerine

"Eğer aracın ilave ivmelenme hakkı varsa,

B ve Y tuşlarına basılıysa aracı 2 kat hızlandır.

Değilse B veya Y tuşlarına basılıysa aracı hızlandır." şeklinde yazarak algoritmik doğal dil veya sözde kod kullanabiliriz.

Aracın vites değişimlerini de Python programlama dilinde gösterelim.

```
def toggle_gear(self, keys):
    # C tuşu + Yukarı ok = İleri vites
    if keys[pygame.K_c] and keys[pygame.K_UP]:
        self.gear = 1
    # C tuşu + Aşağı ok = Geri vites
    elif keys[pygame.K_c] and keys[pygame.K_DOWN]:
        self.gear = -1
```

Python kodlarında "ve" bağlacı **and** olarak gösterilmiştir. Burada bağlaç kullanmadan yazabileceğimiz en kısa gösterimde dahi buradaki gösterimden daha fazla satır yazmak gerekirdi ve kodun anlaşılırlığı azalırdı. Mantık bağlaçları, bilişim ve kodlamanın her sahasında verilen örnekten de anlaşılacağı üzere işimizi kolaylaştırır.

UYGULAYARAK ÖĞRENİYORUM

Amaç: Bu bölümde bilgilerinizi etkinlikler ve uygulamalarla pekiştirmenizi, öğrenmeyi daha kalıcı hâle getirmenizi amaçlıyoruz.

"ve", "veya" ve "ya da" bağlaçları; dijital düşüncenin temel yapı taşlarıdır ve günlük karar süreçlerimizden profesyonel yazılım geliştirmeye kadar geniş bir yelpazede kritik rol oynarlar. Bu üç operatörün size şu alanlarda katkı sağlayacağı öngörülmektedir:

- **Kesin Koşul Tanımlama:** "ve" bağlacı, bir eylemin gerçekleşmesi için tüm koşulların aynı anda sağlanması gerektiği durumları ifade eder. Örneğin, "Kart okundu **ve** parmak izi doğrulandı." gibi güvenlik senaryolarında her iki faktörün de doğru olması zorunludur.
- **Esnek Seçenek Yönetimi:** "veya" bağlacı, birden fazla seçenekten en az birinin yeterli olduğu durumları tanımlar. Örneğin, "Öğrenci kartı **veya** kimlik kartı geçerlidir." kuralı, alternatifli erişim imkânı sunar.
- **Özel Durum Kontrolü:** "ya da" bağlacı ise karşılıklı seçimleri yönetir, iki durumdan yalnızca birinin doğru olabileceği senaryolarda kullanılır. Örneğin, "Kredi kartı **ya da** banka kartı kullanılabilir." kuralı, ödeme yöntemlerinden sadece birinin seçilebileceğini garanti eder.

Bu üç mantık operatörünü öğrenmek, hem günlük hayatta daha net kararlar vermenize hem de teknolojiyi daha etkin kullanmanıza olanak tanıyacaktır.

Problem ya da etkinliklerde verilen adımları uygulayınız. Çalışmanızı dikkatli ve düzenli bir şekilde yapınız.

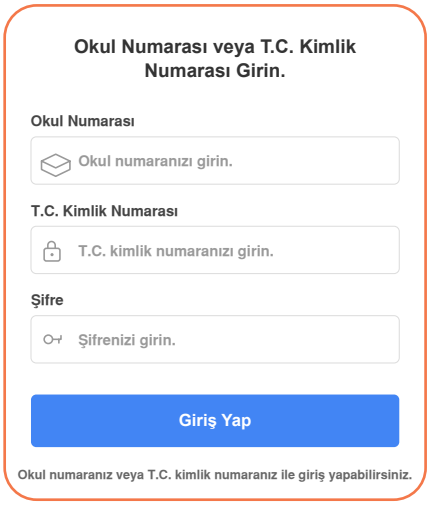
Mantık bağlaçlarını günlük hayatta nerelerde kullanıyoruz?

Aşağıda, bir okulun öğrencileri için geliştirdiği bir sistemin giriş ekranı görülmektedir.

Bu ekrana (okul numarası veya T.C. kimlik numarası) **ve** şifre girerek sisteme giriş yapılmaktadır.

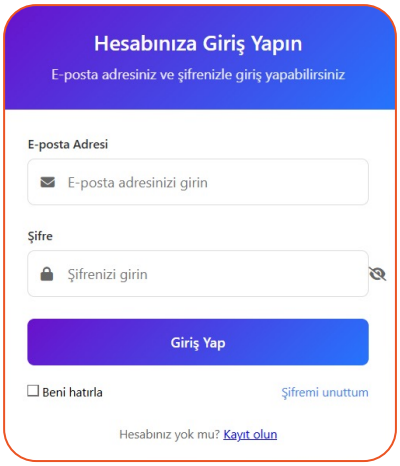
"veya" bağlacının işlevinden bahsedelim: Bu ekran görüntüsünde okul ve T.C. kimlik numarası kutucuklarının biri doldurulup diğeri boş bırakılsa da ikisi de doğru doldurulsa da olur.

"ve" bağlacının işlevinden bahsedelim: Bu ekran görüntüsünde okul ve T.C. kimlik numarası kutucuklarının her ikisi de doğru doldurulup şifre de doğru girilmelidir.



Şimdi de bu durumları bir tablo ile gösterelim.

	Okul Numarası	T.C. Kimlik Numarası	Şifre
1. Durum	Doğru girilmiş.	Boş bırakılmış.	Doğru girilmiş.
2. Durum	Boş bırakılmış.	Doğru girilmiş.	Doğru girilmiş.
3. Durum	Doğru girilmiş.	Doğru girilmiş.	Doğru girilmiş.



Algoritmik Yapılar İçerisindeki Mantık Bağlaçları ve Niceleyiciler

"ve" Bağlacı

Yanda bulunan ekran görüntüsünde e-posta adresi ve şifre ile giriş yapılabildiği belirtilmiş. Şöyle ki e-posta adresi ve şifre doğru yazılıp, "Giriş Yap" butonu tıklanarak hesaba giriş yapılabilir.

O zaman şöyle de denilebilir:

- E-posta adresi yanlış/boş, şifre doğru ise
- E-posta adresi doğru, şifre yanlış/boş ise
- E-posta adresi yanlış/boş, şifre yanlış/boş ise

giriş yapılamamaktadır.

Giriş yapılabilen tek durum; e-posta adresi ve şifrenin doğru girilmesidir.

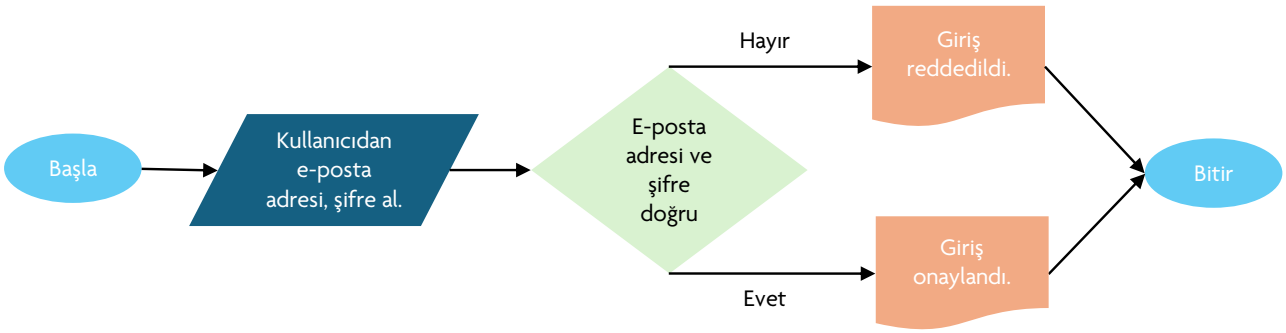
Bu durumu bir tablo ile gösterelim.

	E-posta Adresi	Şifre	Giriş
1. Durum	Doğru	Doğru	✓
2. Durum	Yanlış/Boş	Doğru	×
3. Durum	Doğru	Yanlış/Boş	×
4. Durum	Yanlış/Boş	Yanlış/Boş	×

ÖRNEK

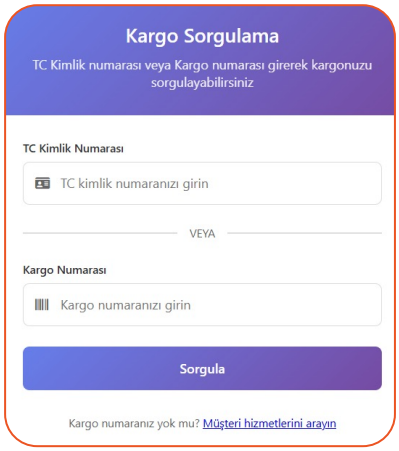
"ve" bağlacının işlevini öğrendiğinize göre burada verilen durumun algoritmik akış şemasını oluşturunuz.

ÇÖZÜM



"veya" Bağlacı

Yanda bulunan ekran görüntüsünde T.C. kimlik veya kargo numarası ile kargo sorgulanabildiği belirtilmiştir. T.C. kimlik veya kargo numarası doğru olarak yazıldığında sorgula butonu tıklanarak hesaba giriş yapılabilir.



O zaman şöyle de denilebilir:

- T.C. kimlik numarası boş, kargo numarası doğru ise
- T.C. kimlik numarası doğru, kargo numarası boş ise
- T.C. kimlik numarası doğru, kargo numarası doğru ise

sorgulama yapılabilir.

Sorgulama yapılamayan tek durum; T.C. kimlik ve kargo numarasının boş olmasıdır.

Bu durumu bir tablo ile gösterelim.

	T.C. Kimlik Numarası	Kargo Numarası	Sorgulama
1.Durum	Doğru	Doğru	✓
2.Durum	Boş	Doğru	✓
3.Durum	Doğru	Boş	✓
4.Durum	Boş	Boş	×

UYARI

Burada dikkat edilmesi gereken önemli nokta: Eğer kutucuklardan birine doğru, diğerine geçersiz bir numara yazılırsa güvenlik önlemleri gereği sistem sorgulama yapılmasına izin vermez.

Bu nedenle önceki örnekte olduğu gibi yanlış yazma durumuna burada yer verilmemiştir. Şimdi, geçersiz numara yazılması durumunu göstermek üzere bir tablo oluşturalım.

	T.C. Kimlik Numarası	Kargo Numarası	Sorgulama
1. Durum	Doğru/Boş	Doğru/Boş	✓
2. Durum	Geçersiz	Doğru/Boş	✓
3. Durum	Doğru/Boş	Geçersiz	✓
4. Durum	Geçersiz	Geçersiz	×

Tablodan anlaşılacağı üzere bu durum bir önceki örneğe benzemektedir. Mantık bağlaçları ile ifade edecek olursak T.C. kimlik veya kargo numarası numarası geçersiz ise sorgulama yapılmasına izin verilmez.

ÖRNEK

"veya" bağlacının işlevini öğrendiğinize göre burada verilen durumu algoritmik doğal dil ile ifade ediniz.

ÇÖZÜM

1. adım: Başla

2. adım: Verilerin alınması

Kullanıcıdan T.C. kimlik numarası, kargo numarası al.

3. adım: Geçersiz bilgi kontrolü

Eğer (T.C. kimlik numarası geçersiz.) veya (Kargo numarası geçersiz.) ise yazdır: "Girdiğiniz bilgileri kontrol edin."

Değilse 4. adıma git.

4. adım: Doğru bilgi kontrolü

Eğer (T.C. kimlik numarası doğru.) ve (Kargo numarası doğru.) ve (T.C. kimlik ve kargo numarası eşleşmiyorsa)

Yazdır "Girdiğiniz bilgileri kontrol edin."

Değilse eğer (T.C. kimlik numarası doğru.) veya (Kargo numarası doğru.) ise Sorgula.

Değilse yazdır "Lütfen bilgileri giriniz."

5. adım: Bitir

"ya da" Bağlacı

Yandaki ekran görüntüsünde, uzunluk birimi olarak kullanılan inç ile metre arasında dönüşüm yapılabildiği belirtilmiştir. Bu nedenle yalnızca inç veya metre kutucuğuna bir değer girilmesi gerekmektedir. Kullanıcı ya inç ya da metre kutucuğuna geçerli bir değer girip, "Hesapla" butonuna tıkladığında program diğer kutucuğu buna uygun şekilde dolduracaktır. Bu nedenle iki kutucuğa birden değer girilemez, yalnızca tek bir kutucuğa geçerli bir değer girilebilir.

O zaman şöyle denebilir:

Metre kutucuğu boş, inç kutucuğu dolu ise

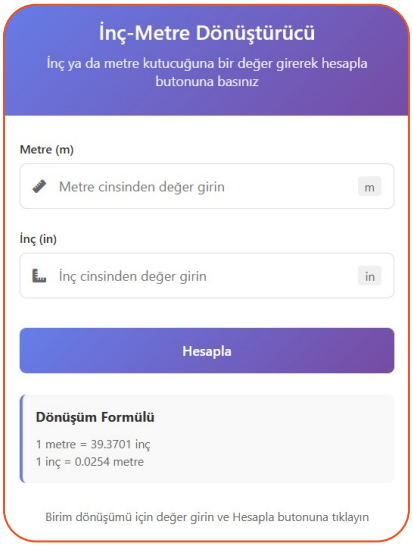
Metre kutucuğu dolu, inç kutucuğu boş ise

hesaplama yapılır.

Metre kutucuğu boş, inç kutucuğu boş ise

Metre kutucuğu dolu, inç kutucuğu dolu ise

hesaplama yapılmaz.



KAREKODU OKUTUNUZ.

	Metre	İnç	Hesaplama
1. Durum	Dolu	Dolu	✗
2. Durum	Boş	Dolu	✓
3. Durum	Dolu	Boş	✓
4. Durum	Boş	Boş	✗

ÖRNEK

"ya da" bağlacının işlevini öğrendiğinize göre yukarıda verilen durumun algoritmasını sözde kod ile gösteriniz.

ÇÖZÜM

Girdi: Metre ya da inç cinsinden bir uzunluk değeri

Çıktı: Girilen değerin diğer birimde karşılığı

Başla

metre değeri = a

inç değeri = b

Eğer "Hesapla" butonuna basıldıysa

Eğer metre kutucuğu ya da inç kutucuğu dolu ise

Eğer metre kutucuğu dolu ise inç kutucuğuna yazdır "a*39,3701"

Değilse metre kutucuğuna yazdır "b*0,0254"

Değilse yazdır "Lütfen yalnız bir kutucuğu doldurunuz!"

Bitir

Mantık Bağlaçları ve Niceleyicilerin Sembolleri

∧: "ve" bağlacı

∨: "veya" bağlacı

⊻: "ya da" bağlacı

∃: "bazı, herhangi bir, en az bir" anlamına gelen niceleyici

∀: "her, tüm, bütün" anlamına gelen niceleyici

SIRA SİZDE 1.

Bir firma, işe alım sürecinde çalışan adaylarına yazılı sınav ve yetenek sınavı uygulamaktadır. Bu sınavlara göre işe alım süreci aşağıdaki gibi ilerlemektedir.

- Yazılı sınavdan en az 70, yetenek sınavından en az 80 puan alan aday işe alınır.
- Yazılı sınavının ya da yetenek sınavının birinden yeterli puan alan, toplam puanı en az 150 olan adaya bir sınav hakkı daha verilir.
- Yazılı sınavdan veya yetenek sınavından geçemeyen ama toplam puanı en az 140 olan kişi mülakata alınır.

Buna göre işe alım sürecinin algoritmik akış şemasını çiziniz.

KAREKODU OKUTUNUZ.

ÖRNEK

Bir n pozitif tam sayısının ardışık tek sayıların toplamı olarak yazılabileceğini mantık bağlaçları ve niceleyiciler ile ifade ediniz.

ÇÖZÜM

m bir doğal sayı olmak üzere ilk terimi 2m + 1 olan k tane sayının toplamını hesaplayalım.

Toplam = (2m + 1) + (2m + 3) + (2m + 5) + ... + (2m + 2k – 1)

$\text{Toplam} = \frac{\text{Terim Sayısı} \cdot (\text{Son Terim} + \text{İlk Terim})}{2}$ formülüne göre

$n = \frac{k \cdot (2m + 2k - 1 + 2m + 1)}{2} = \frac{k \cdot (4m + 2k)}{2} = k \cdot (2m + k)$ bulunur.

n nin k ve m cinsinden eşiti $n = k \cdot (2m + k)$ olur.

Bunu niceleyiciler ile ifade edersek

$\exists\, k \in Z^+, \exists\, m \in N, n = k \cdot (2m + k)$ olur.

SIRA SİZDE 2.

"İki tam sayıdan en az biri çift sayı ise bu sayıların çarpımı da çifttir." **önermesini mantık bağlaçları ve niceleyiciler ile ifade ediniz.**

ÖRNEK

Bir üçgenin açılarına göre geniş açılı, dik açılı, dar açılı olduğunu tespit eden algoritmayı sözde kod ile yazınız. Üçgen çeşitlerini niceleyiciler ve mantık bağlaçları kullanarak gösteriniz.

KAREKODU OKUTUNUZ.

ÇÖZÜM

Sözde kod

Girdi: Üçgenin iç açılarının derece cinsinden ölçüsü (a, b, c)

Çıktı: Üçgenin çeşidi

Başla

Derece cinsinden üçgenin iç açılarının ölçülerini(a, b, c) kullanıcıdan al.

Eğer $(0 < a < 180) \wedge (0 < b < 180) \wedge (0 < c < 180) \wedge (a + b + c = 180)$ ise

Eğer $(a < 90) \wedge (b < 90) \wedge (c < 90)$ ise yazdır "Dar açılı üçgendir."

Değilse eğer $(a = 90) \veebar (b = 90) \veebar (c = 90)$ ise yazdır "Dik açılı üçgendir."

Değilse eğer $(a > 90) \veebar (b > 90) \veebar (c > 90)$ ise yazdır "Geniş açılı üçgendir."

Değilse yazdır "Açıları kontrol edin."

Bitir

Burada $\mathbf{(0 < a < 180) \wedge (0 < b < 180) \wedge (0 < c < 180) \wedge (a + b + c = 180)}$ ifadesiyle üçgen kontrolü yapıldığı için kodlarda kullanılan $\veebar$ bağlacı yerine $\vee$ bağlacı da kullanılabilirdi. Sizin yazdığınız kod bundan çok farklı görünebilir, yazdıklarınızın doğruluğunu kontrol etmek için yapay zekâ uygulamalarını kullanabilirsiniz.

Mantık Bağlaçları ve Niceleyiciler ile İfade

a, b, c bir üçgenin iç açılarının ölçüleri olsun.

Buna göre bu açıların bir üçgeni belirtmesi için $\forall x \in \{a, b, c\}, 0 < x < 180 \wedge (a + b + c = 180)$ şartı sağlanmalıdır.

Üçgen olma şartını sağlayan açılar için

- $\forall x \in \{a, b, c\}, x < 90$ olduğunda üçgen **dar** açılı üçgendir.
- $\exists x \in \{a, b, c\}, x = 90$ olduğunda üçgen **dik** açılı üçgendir.
- $\exists x \in \{a, b, c\}, x > 90$ olduğunda üçgen **geniş** açılı üçgendir.

SIRA SİZDE 3.

Açılarının ölçüsü derece cinsinden, kenar uzunlukları santimetre cinsinden verilmiş bir dörtgenin kare olup olmadığını kontrol eden bir algoritmayı sözde kod ile yazınız.

ETKİNLİK

Bir üçgenin açılarına göre dar açılı, dik açılı veya geniş açılı olduğunu tespit eden bir algoritma geliştiriniz. Bu algoritmayı farklı programlama dillerinde (HTML, Java, Python vb.) yazarak ve yapay zekâdan faydalanarak çalıştırınız.

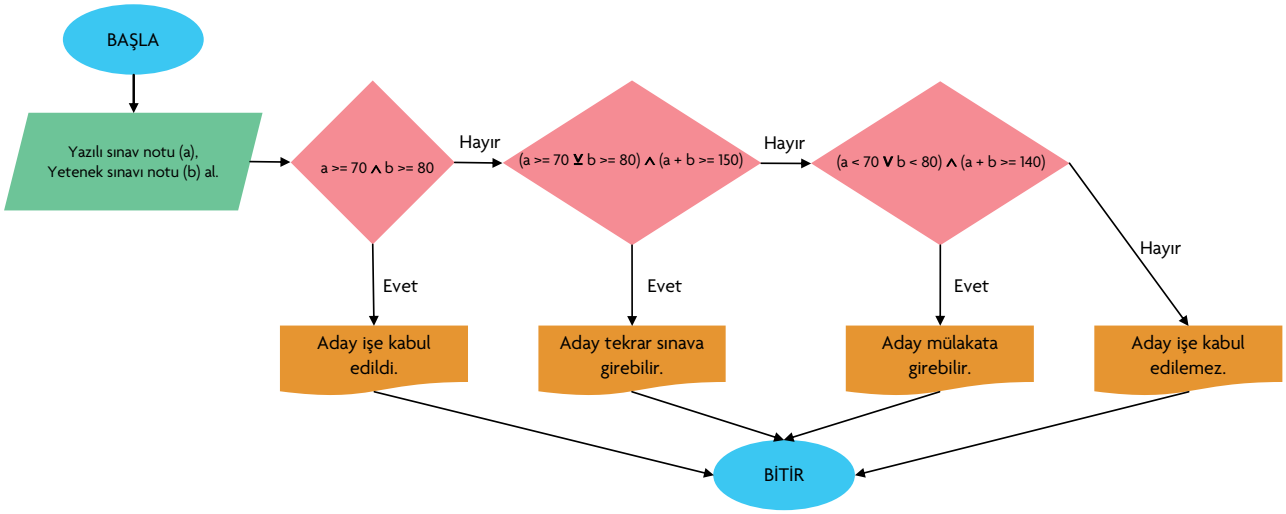
Çalıştırdıktan sonra kullandığınız programlama dilleri arasındaki temel farkları ve mantık bağlaçlarının kodlardaki gösterim biçimlerini arkadaşlarınızla tartışınız.

GERİ BİLDİRİM

Bu geri bildirim sayesinde kendi cevabınızı kontrol edebilir, hatalarınızı düzelterek öğrenmenizi pekiştirebilirsiniz.

SIRA SİZDE 1.

ÇÖZÜM



SIRA SİZDE 2.

ÇÖZÜM

$\forall a \in Z, (\exists b \in Z, [(\exists k \in Z : a = 2k) \vee (\exists m \in Z : b = 2m)] \Rightarrow (\exists n \in Z : a \cdot b = 2n)$

SIRA SİZDE 3.

ÇÖZÜM

Girdi: Kenar uzunlukları (a, b, c, d), köşelerinin açı ölçüleri (A, B, C, D)

Çıktı: Kare olup olmaması ile ilgili bir cümle

Başla

Eğer (a = b = c = d) ve (A = B = C = D = 90) ise

yazdır "Verdiğiniz bilgilere göre bu dörtgen karedir."

Değilse

yazdır "Verdiğiniz bilgilere göre bu, kare değildir."

Bitir

ETKİNLİK

Aşağıda bir kısmı verilen HTML kodlarında "veya" bağlacı "||" ile gösterilir, Pythonda ise "or" ile gösterilir.

HTML

```
if (angle1 === 90 || angle2 === 90 || angle3 === 90) {
            triangleType = "Dik Açılı Üçgen";
            cssClass = "dik";
        } else if (angle1 > 90 || angle2 > 90 || angle3 > 90) {
            triangleType = "Geniş Açılı Üçgen";
            cssClass = "genis";
        } else {
            triangleType = "Dar Açılı Üçgen";
            cssClass = "dar";
        }
        showResult(`Bu bir <strong>${triangleType}</strong> üçgendir!`, cssClass);
    }
```

Python

```
if angle1 == 90 or angle2 == 90 or angle3 == 90:
    return "Dik Açılı Üçgen", "dik"
elif angle1 > 90 or angle2 > 90 or angle3 > 90:
    return "Geniş Açılı Üçgen", "genis"
else:
    return "Dar Açılı Üçgen", "dar"
```

DEĞERLENDİRİYORUM

Amaç: Bu bölümde öğrendiklerinizi gözden geçirmenizi, kendi öğrenme sürecinizi değerlendirmenizi ve eksiklerinizi fark etmenizi amaçlıyoruz.

Soruları dikkatle yanıtlayınız. Cevaplarınızı geri bildirimlerle karşılaştırarak eksik gördüğünüz noktaları tekrar ediniz.

SORULAR

1. Bir pazarda satılan ürünler sebze veya meyve olabilir. Bazı ürünler hem organik hem de yerli üretimdir.

1. "Her ürün ya sebze ya da meyvedir."
2. "Bazı ürünler hem organik hem de yerli üretimdir."
3. "Her organik ürün aynı zamanda yerli üretimdir."

Buna göre yukarıdaki önermeleri mantık bağlaçları ve niceleyici kullanarak yazınız.

2. Bir otomotiv fabrikasının robotik montaj hattında bir parçanın kalite kontrolünden geçebilmesi için parça aynı anda sensörler yardımıyla "ağırlık, boyut ve renk testi"ne tabi tutulmaktadır.

Bunun için aşağıdaki kurallar belirlenmiştir:

- Bir parçanın kabul edilebilmesi için tüm testlerden geçmesi gerekir.
- Parça, ağırlık testinden geçmiş ve boyut testinden ya da renk testinden geçmezse, tamirata gönder.
- Parça, ağırlık testinden geçmezse ama diğer testlerden geçmişse, insan kontrolüne gönder.

Buna göre bu durumu gösteren algoritmanın akış şemasını oluşturunuz.

3. Marketler zincirinin merkezi A noktasında; şubeleri B, C, D ve E noktalarında yer almaktadır. Şubeler arasındaki tek yönlü yollar oklarla, yolların uzunlukları ise renkli olarak gösterilmiştir. Dağıtım elemanı, A noktasından başlayarak tüm şubelere dağıtım yaptıktan sonra tekrar A noktasına dönecektir. Aşağıda farklı durumlar verilmiştir.

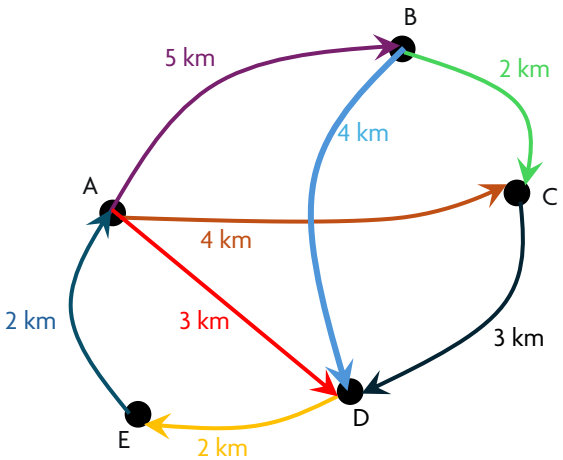
1. durum: B ve C noktasına uğrayarak güzergâhını tamamlar.

2. durum: B veya C noktasına uğrayarak güzergâhını tamamlar.

3. durum: B ya da C noktasına uğrayarak güzergâhını tamamlar.

4. durum: Her noktaya uğrayarak güzergâhını tamamlar.

5. durum: Bazı noktalara uğrayarak en kısa yoldan güzergâhını tamamlar.



a) 1, 2 ve 3. durumda alınabilecek en kısa yolları hesaplayınız.

b) 4 ve 5. durumda uğrayacağı noktaları mantık bağlaçları ve niceleyiciler ile gösteriniz.

GERİ BİLDİRİM

Bu geri bildirim sayesinde kendi cevabınızı kontrol edebilir, hatalarınızı düzelterek öğrenmenizi pekiştirebilirsiniz.

ÇÖZÜM 1.

Öncelikle ürünler kümesi belirleyelim, bu kümeyi **Ü** olarak isimlendirelim.

Şimdi de bu kümeye dâhil olan kümeleri isimlendirelim; **S** kümesinin içinde sebzeler olsun, **M** kümesinin içinde meyveler olsun. Organik ürünlerin bulunduğu kümenin adı **O,** yerli üretim ürünlerinin bulunduğu kümenin adı da **Y** olsun.

Siz burada gösterilenden farklı bir isimlendirme yapabilirsiniz.

Şimdi bu kümelere göre verilen önermeleri mantık bağlaçları ve niceleyiciler ile yazabiliriz.

“Her ürün ya sebze ya da meyvedir." $\forall x \in Ü, x \in S \veebar x \in M$

“Bazı ürünler hem organik hem de yerli üretimdir.” $\exists x \in Ü, x \in O \wedge x \in Y$

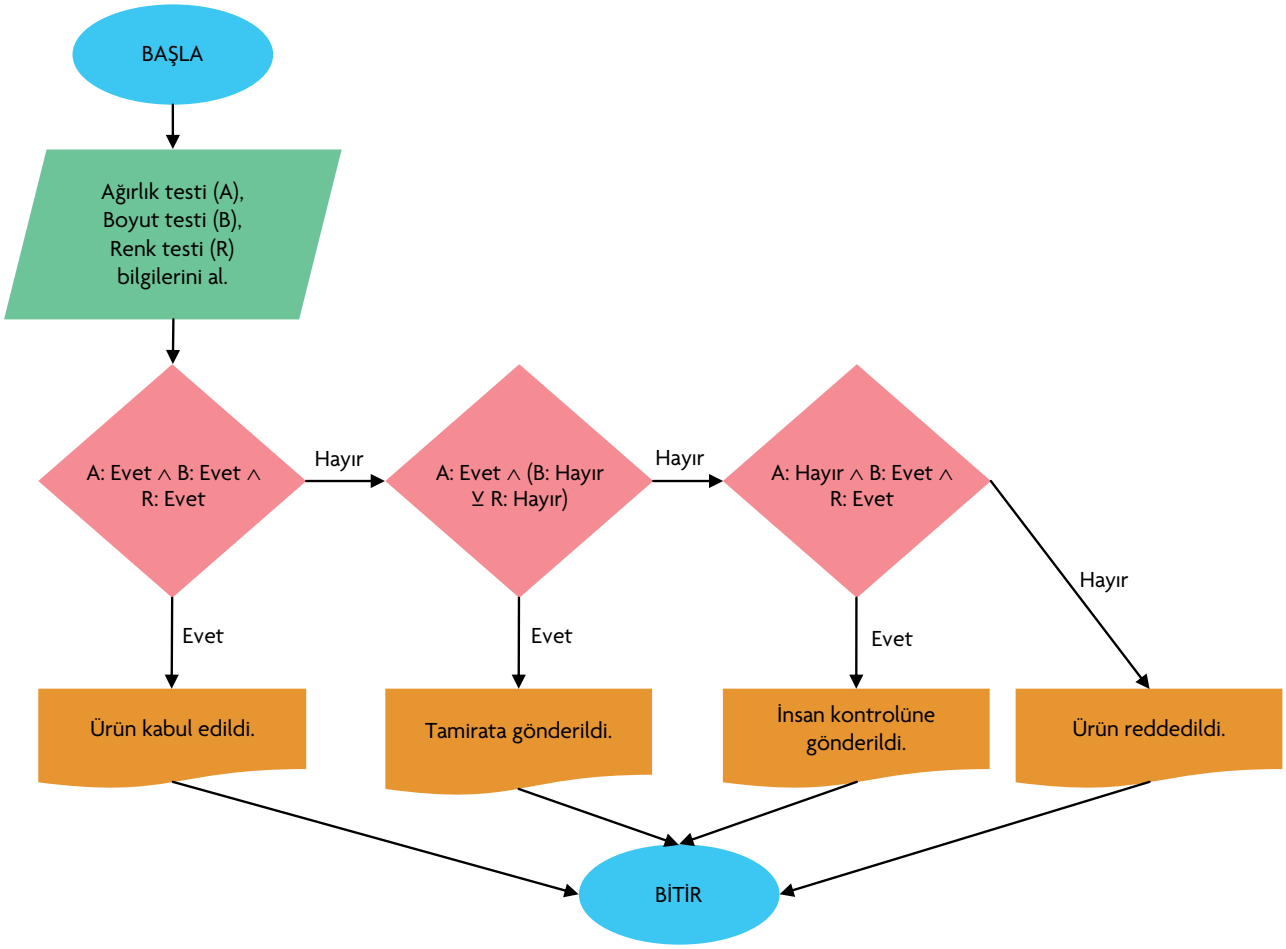
“Her organik ürün aynı zamanda yerli üretimdir.” $\forall x \in O, x \in Y$

ÇÖZÜM 2.

Veri girişi sembolünün içine yapılan testlerin hepsi yazıldıktan sonra her test için bir kısaltma kullanılır ki koşul sembolünün içine kısaca yazılabilsin.

Koşul sembollerinin içinde yazan **A: Evet** ifadesi ağırlık testinden geçtiğini gösterir. Siz, **Evet/Hayır** yerine **Geçti/Geçemedi** de yazabilirsiniz. Hatta kısaltmaları kullanmak istemezseniz ilk koşul sembolünün içine "**Ağırlık testinden geçti ve boyut testinden geçti ve renk testinden geçti.**" yazabilirsiniz. Açılımı uzun olacağı için bu şemada kısaltmalarla yazmak tercih edilmiştir.

Koşulları yazarken ilk koşul sembolünün içine "A: Evet ∧ B: Evet ∧ R: Evet" yazılmasının sebebi, sadece işleyişi anlamakta kolaylık sağlamasıdır çünkü en olumlu sonuç ürünün kabul edilmesidir. Böylelikle olumludan olumsuza bir sıralama yapılması, algoritmanın oluşturulmasını kolaylaştırır. Farklı bir sıralama da yapılabilirdi fakat dikkat edilmesi gereken koşulların birbirini dışlaması ve bütün koşulların bütün olası durumları kapsaması gerekir.



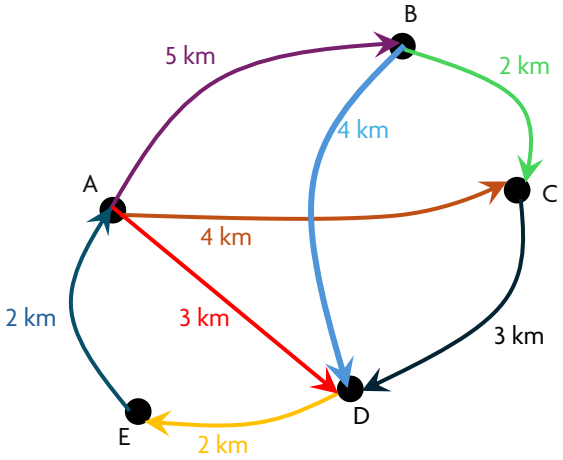
ÇÖZÜM 3.

a) 1. durumda "ve" bağlacı kullanıldığı için B ve C noktalarının ikisine de uğramak zorundadır. Bu durumda güzergâh sırasıyla A, B, C, D, E, A noktalarından geçer. Alabileceği tek bir yol vardır, o da 5 + 2 + 3 + 2 + 2 = 14 km'dir.

2. durumda "veya" bağlacı kullanıldığı için 3 farklı güzergâh oluşur:

- A, B, C, D, E, A
- A, C, D, E, A
- A, B, D, E, A

Bu güzergâhlardan en kısası A, C, D, E, A güzergâhıdır. Alınan toplam yol 4 + 3 + 2 + 2 = 11 km'dir.



3. durumda "ya da" bağlacı kullanıldığı için 2 farklı güzergâh oluşur:

- A, C, D, E, A
- A, B, D, E, A

Bu güzergâhlardan en kısası A, C, D, E, A güzergâhıdır. Alınan toplam yol 4 + 3 + 2 + 2 = 11 km'dir.

Görüldüğü gibi 2. durumda kullanılabilecek yollar, 1 ve 3. durumda kullanılabilecek yolların hepsini içerir.

b) 4. durumda her noktaya uğrayacağı için

$\forall x \in \{A, B, C, D, E\}, x \in$ Güzergâh

olarak gösterilir.

5. durumda bazı noktalara uğrayacağı için $\exists x \in \{A, B, C, D, E\}, x \in$ Güzergâh yazabiliriz. Fakat bazı noktalara uğranarak gidilen en kısa yolu bildiğimiz için (A, D, E, A güzergâhıdır, 7 km'dir.)

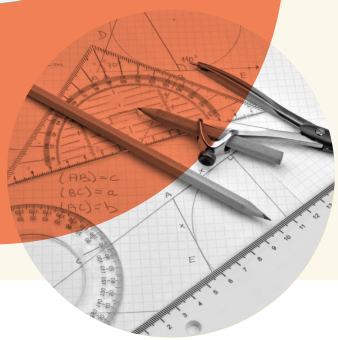
$\forall x \in \{A, D, E\}, x \in$ Güzergâh olarak da yazabiliriz.

ÖĞRENDİKLERİM

Amaç: Bu bölümde öğrendiklerinizi özetlemenizi, günlük hayatta ve farklı derslerde kullanabileceğiniz bilgileri belirlemenizi amaçlıyoruz.

Anahtar kavramları ve önemli bilgileri kendi cümlelerinizle yazınız. Gerekirse şema, tablo ya da kısa notlar kullanarak özetinizi hazırlayınız.

Daha fazlası için karekodu okutunuz.



MANTIK BAĞLAÇLARI VE NİCELEYİCİLERİN ALGORİTMADA KULLANIMI

BAŞLARKEN

Sevgili öğrencimiz, bu çalışma kartında sizlerin bireysel öğrenme yolculuğuna destek sunmak amaçlanmaktadır. Çalışmalarınızı yürütürken "Hazırlanıyorum", "İlişkilendiriyorum", "Uygulayarak Öğreniyorum", "Değerlendiriyorum" bölümlerini sırası ile yapmanızı; her bölüm ve etkinlik sonundaki geri bildirimleri alarak ilerlemenizi; "Öğrendiklerim" bölümünde öğrenme sürecinizi gözden geçirmenizi bekliyoruz.

Günlük hayatta karşılaştığımız birçok olay aslında matematiksel düşünceye dayanır. Bir bilgisayar programının verilen bir girdiye göre hangi koşullarda doğru sonucu vereceğini ya da fizik dersinde kullandığımız bir formülün hangi durumlarda geçerli olduğunu düşünelim.

Bu soruların cevaplarını bulmak, sadece işlem yapabilmekle ilgili değildir. Doğru cevaba ulaşabilmek, önermeler arasındaki ilişkileri anlayabilmeyi ve doğru bir mantık zinciri kurabilmeyi de gerektirir.

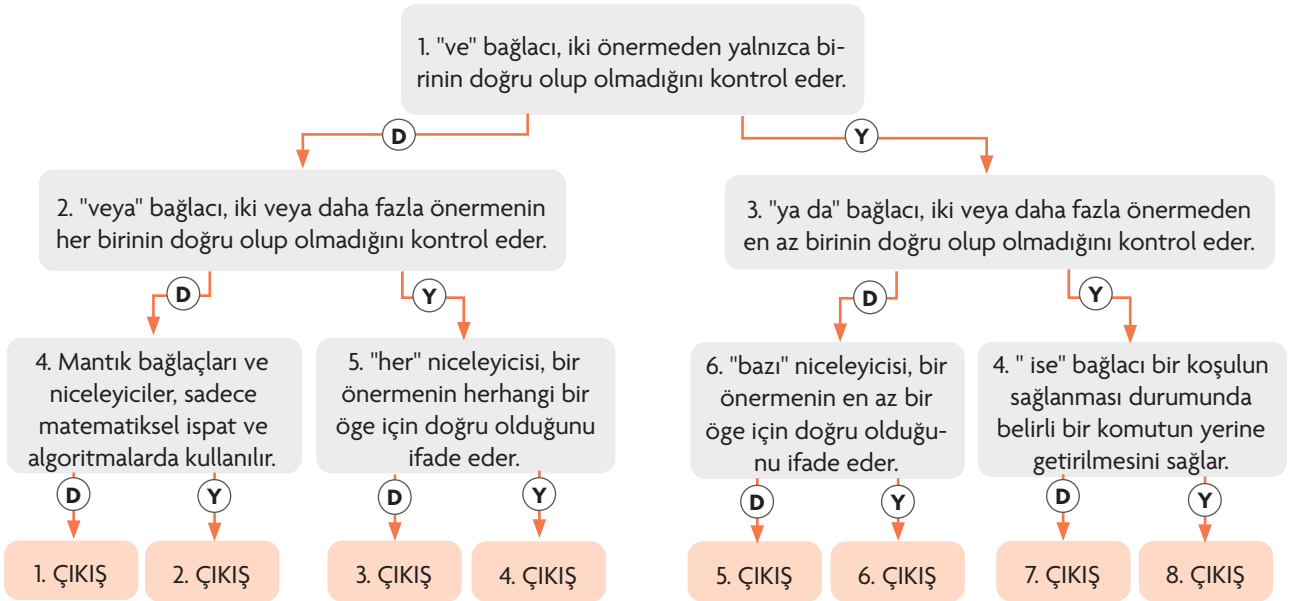
Bu çalışma kartında, mantık bağlaçlarının ve niceleyicilerin programların işleyişi ile matematiksel ispatların doğruluğunu nasıl şekillendirdiğini öğreneceksiniz.

HAZIRLANIYORUM

Amaç: Bu bölümde, işleyeceğimiz temayla ilgili ön bilgilerinizi hatırlamanızı ve temaya hazırlıklı hâle gelmenizi amaçlıyoruz.

Aşağıda algoritmik yapılar içinde kullanılan mantık bağlaçları, niceleyiciler ve bunların işlevleri ile ilgili Doğru (D)/Yanlış (Y) önermeleri içeren bir tanılayıcı dallanmış ağaç bulunmaktadır. Verilen önermenin doğru olduğunu düşünüyorsanız (D) seçeneğini, yanlış olduğunu düşünüyorsanız (Y) seçeneğini seçmeniz gerekmektedir. İlk önermeden başlayarak yapacağınız Doğru (D)/Yanlış (Y) seçimleri ile 8 farklı çıkış noktasından birine ulaşabileceksiniz.

Etkinliğin adımlarının herhangi bir aşamasında yanlış yaptığınızı fark ettiğinizde geriye dönerek farklı bir yol izleyebilirsiniz.



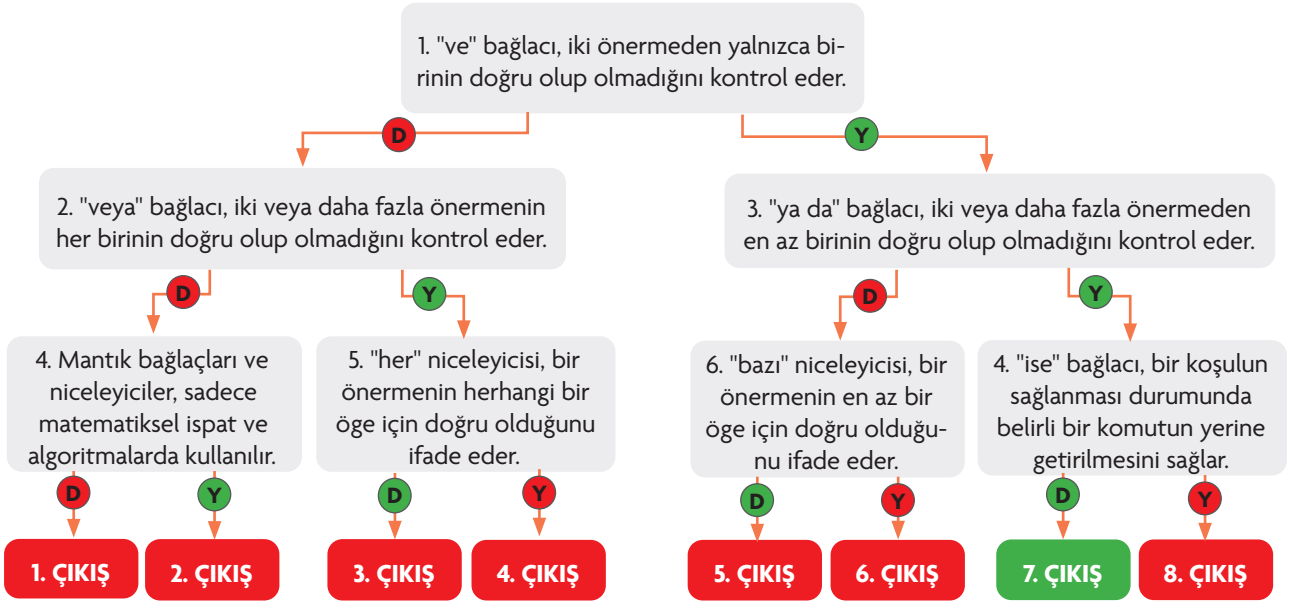
GERİ BİLDİRİM

Bu geri bildirim sayesinde kendi cevabınızı kontrol edebilir, hatalarınızı düzelterek öğrenmenizi pekiştirebilirsiniz.

Yeşil renkli işaretler uygun adımları göstermektedir.

Kırmızı renkli işaretler hatalı adımları göstermektedir.

Eğer kırmızı renkli çıkışlardan herhangi birine ulaştıysanız balonları okuyunuz.



1. Önerme

"**ve**" bağlacı, iki veya daha fazla önermenin **her birinin** doğru olup olmadığını kontrol eder.

2. Önerme

"**veya**" bağlacı, iki veya daha fazla önermeden **en az birinin** doğru olup olmadığını kontrol eder.

3. Önerme

"**ya da**" bağlacı, iki önermeden **yalnızca birinin** doğru olup olmadığını kontrol eder.

4. Önerme

Mantık bağlaçları ve niceleyiciler **elektronik** alanında ve **devre tasarımlarında** da kullanılır. Ayrıca günlük hayatta **karar alınması** ve **akıl yürütülmesi** gereken durumlarda mantık bağlaçları ve niceleyiciler önemli bir yere sahiptir.

İLİŞKİLENDİRİYORUM

Amaç: Burada, öğrendiğiniz bilgileri günlük hayatla ve farklı derslerde öğrendiğiniz kavramlarla ilişkilendirmenizi istiyoruz.



Günlük hayatta kullandığımız birçok sistem, aslında arka planda koşullara göre çalışan algoritmalardan oluşur. Peki hiç düşündünüz mü, ATM'den para çekerken cihaz hangi sırayla, hangi kararları veriyor? Telefonunuzun PIN kodunu yanlış girdiğinizde neden sistem hemen kilitleniyor? Pil seviyeniz düşerken telefon hangi anda "Düşük Pil" uyarısı göndermeye karar veriyor? Temassız ödeme limitleri, kargo takip bildirimleri, şifre güvenlik kontrolleri, yüz tanıma filtreleri, uygulamaların giriş onayı... Tüm bu işlemler yalnızca birkaç basit adımın sonucu olabilir mi? Bu tür sistemler gerçekten sadece "işlem yaparak" mı karar verir yoksa arkalarında daha farklı bir yapı mı vardır?

Örneğin; ATM'nin tüm koşullar aynı anda sağlanmadan para vermemesi, bir mantık bağlacının çalıştığını göstermez mi? Ya da telefonun pil seviyesinin düşmesiyle tahmini kullanım süresinin azalmasını aynı anda değerlendirmesi neden önemlidir? PIN doğrulamada, temassız ödemede, kimlik doğrulamada veya uygulama güvenliğinde kullanılan "Şu koşul doğruysa kabul et, değilse reddet." kararları hangi matematiksel yapıya dayanıyor?

Aslında bütün bu sistemler, doğru işlemesi gereken çok sayıda koşulu "ve", "veya", "ise" gibi mantık bağlaçlarıyla birleştirerek çalışır. Aynı anda gerçekleşmesi gereken koşullar mı var? O zaman uygun bağlaç seçilmezse sistem sizi koruyamaz. Alternatif durumların yeterli olduğu bir senaryo mu var? Yanlış bağlaç tercih edilseydi telefonunuz kritik uyarıları göndermeyi geciktirmez miydi?

Günlük hayatta fark etmeden karşılaştığınız tüm bu soruların cevabı, algoritmaların görünmez karar mekanizması olan mantık bağlaçlarında saklıdır. Şimdi bu görünmez yapının matematiksel temelini keşfedeceksiniz.

UYGULAYARAK ÖĞRENİYORUM

Amaç: Bu bölümde bilgilerinizi etkinlikler ve uygulamalarla pekiştirmenizi, öğrenmeyi daha kalıcı hâle getirmenizi amaçlıyoruz.

MANTIK BAĞLAÇLARI VE NİCELEYİCİLERİN ALGORİTMADA KULLANIMI

ETKİNLİK

Aşağıda verilen problem senaryosunu dikkatle inceleyerek görevleri sırasıyla tamamlayınız.

Problem Senaryosu: Bir ATM'nin para çekme işlemi, arka planda birden fazla koşulun art arda kontrol edildiği bir algoritma tarafından yönetilir. Kart takıldığı anda ATM şu soruları hızla cevaplamak zorundadır: Kart geçerli mi? Şifre doğru mu? Bakiye yeterli mi? Çekilecek tutar kurallara uygun mu? Bu soruların her biri birer "karar noktası"dır. Bu etkinliklerde adım adım bu kararları inceleyerek hem matematiksel ifadeleri yazacak hem de bir akış şeması oluşturacaksınız.

Görev 1: **ATM'nin bu dört koşulu hangi sırayla kontrol etmesi gerektiğini düşününüz. Aşağıda karışık verilen işlem adımlarını doğru biçimde sıralayınız**

SIRALAMA	DOĞRU SIRALAMA
1. Kart geçerli mi?	**1.**
2. Bakiye yeterli mi?	**2.**
3. Şifre doğru mu?	**3.**
4. Çekilecek tutar uygun mu?	**4.**

Görev 2: Bakiyenin yeterli olup olmadığını belirlemek için çekilecek tutar ve bakiye arasındaki matematiksel ilişkiyi belirleyiniz.

Görev 3: ATM, bir arıza nedeniyle çekilecek tutar TL cinsinden 30'un tam sayı katı olduğunda para vermektedir. Çekilecek tutarı matematiksel olarak ifade ediniz.

Görev 4: Her koşul için örnekteki gibi bir karar noktası yazınız.

Karar Noktaları

- Kart geçerliyse **devam et,** değilse **reddet.**
-
-
-

Görev 5: ATM'nin para vermesi için tüm koşulların sağlanması gerekmektedir. Aşağıda verilen ifadeyi inceleyerek kullanılan "ve" bağlacını, "veya" bağlacı ile değiştirirsek ortaya çıkabilecek iki sorunu örnekteki gibi yazınız.

"Kart geçerli **ve** şifre doğru **ve** bakiye ≥ çekilecek tutar **ve** çekilecek tutar = 30k (k ∈ ℤ) **ise** ATM para verir."

"veya" bağlacı kullanıldığında, koşulların en az bir tanesinin sağlanması ATM'nin para vermesini sağlar.

Örneğin,

- Bakiye yeterli olmasa bile çekilecek tutar TL cinsinden 30'un tam katı olduğunda ATM para verebilir.
-
-
-

Görev 6: Aşağıda ATM'nin para verme algoritmasının işleyişi algoritmik doğal dille ifade edilmiştir. Boş bırakılan yerleri uygun biçimde doldurunuz.

Algoritmik Doğal Dil

1. adım: .....
2. adım: .....

Kullanıcıdan kartı takması istenir.
Kullanıcıdan şifresini girmesi istenir.
Kullanıcıdan çekmek istediği tutarı girmesi istenir.

3. adım: Kartın durumunun kontrol edilmesi

Kart geçerliyse
bir sonraki adıma geçilir.
Kart geçersizse
"Kart geçersiz." mesajı verilir ve işlem sonlandırılır.

4**. adım: Şifrenin kontrol edilmesi**

Şifre .....
bir sonraki adıma geçilir.
Şifre .....
"Şifre hatalı." mesajı verilir ve işlem sonlandırılır.

5. adım: Bakiyenin kontrol edilmesi

Girilen tutar ile bakiye karşılaştırılır.
Bakiye çekilecek tutardan ..... veya bu tutara eşitse
işleme devam edilir.
Değilse
"Yetersiz bakiye." mesajı verilir ve işlem sonlandırılır.

6. adım: Çekilecek tutarın kontrol edilmesi

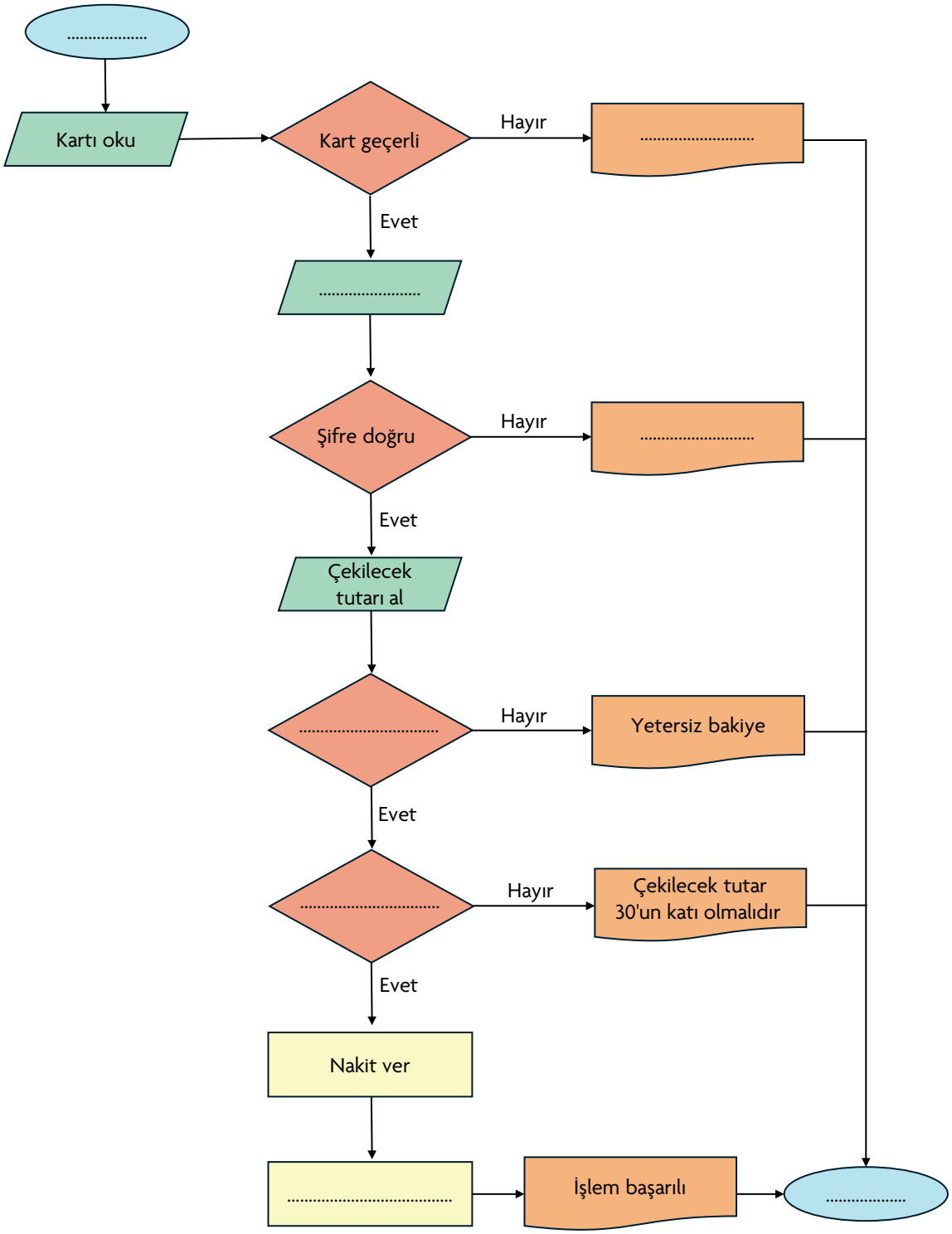
Tutar ..... ise
bir sonraki adıma geçilir.
Tutar ..... değilse
"Tutar ..... TL'nin katı olmalıdır." mesajı verilir ve işlem sonlandırılır.

7. adım: Paranın verilmesi

Tutar, kullanıcıya nakit olarak verilir.
Bakiye tutar kadar azaltılır.
"İşlem başarılı." mesajı ekrana yazdırılır.

8. adım: .....

Görev 7: Aşağıda ATM'nin para verme algoritmasının işleyişi akış şeması ile gösterilmiştir. Boş bırakılan yerleri doldurunuz.



GERİ BİLDİRİM

Görev 1

DOĞRU SIRALAMA
1. Kart geçerli mi?
2. Şifre doğru mu?
3. Bakiye yeterli mi?
4. Çekilecek tutar kurallara uygun mu?

Görev 2

Bakiye ≥ Çekilecek Tutar

Görev 3

Çekilecek Tutar = 30k ($k \in \mathbb{Z}$)

Görev 4

Karar Noktaları

- Kart geçerliyse **devam et,** değilse **reddet.**
- Şifre doğruysa **devam et,** değilse **reddet.**
- Bakiye ≥ Çekilecek Tutar ise **devam et**, değilse **reddet.**
- Çekilecek Tutar = 30k ($k \in \mathbb{Z}$) ise **devam et**, değilse **reddet.**

Görev 5

- Şifre doğru olmasa bile çekilecek tutar 30'un katı olduğunda ATM para verebilir.
- Geçersiz bir kart kullanılsa bile şifre doğru ise ATM para verebilir.

Görev 6

Algoritmik Doğal Dil

1. adım: Başla.
2. adım: **Girdilerin alınması**

Kullanıcıdan kartı takması istenir.
Kullanıcıdan şifresini girmesi istenir.
Kullanıcıdan çekmek istediği tutarı girmesi istenir.

3. adım: Kartın durumunun kontrol edilmesi

Kart geçerliyse
bir sonraki adıma geçilir.
Kart geçersizse
"Kart geçersiz." mesajı verilir ve işlem sonlandırılır.

4. adım: Şifrenin kontrol edilmesi

Şifre doğruysa
bir sonraki adıma geçilir.
Şifre yanlışsa
"Şifre hatalı." mesajı verilir ve işlem sonlandırılır.

5. adım: Bakiyenin kontrol edilmesi

Girilen tutar ile bakiye karşılaştırılır.
Bakiye çekilecek tutardan büyük veya bu tutara eşitse
işleme devam edilir.
Değilse
"Yetersiz bakiye." mesajı verilir ve işlem sonlandırılır.

6. adım: Çekilecek tutarın kontrol edilmesi

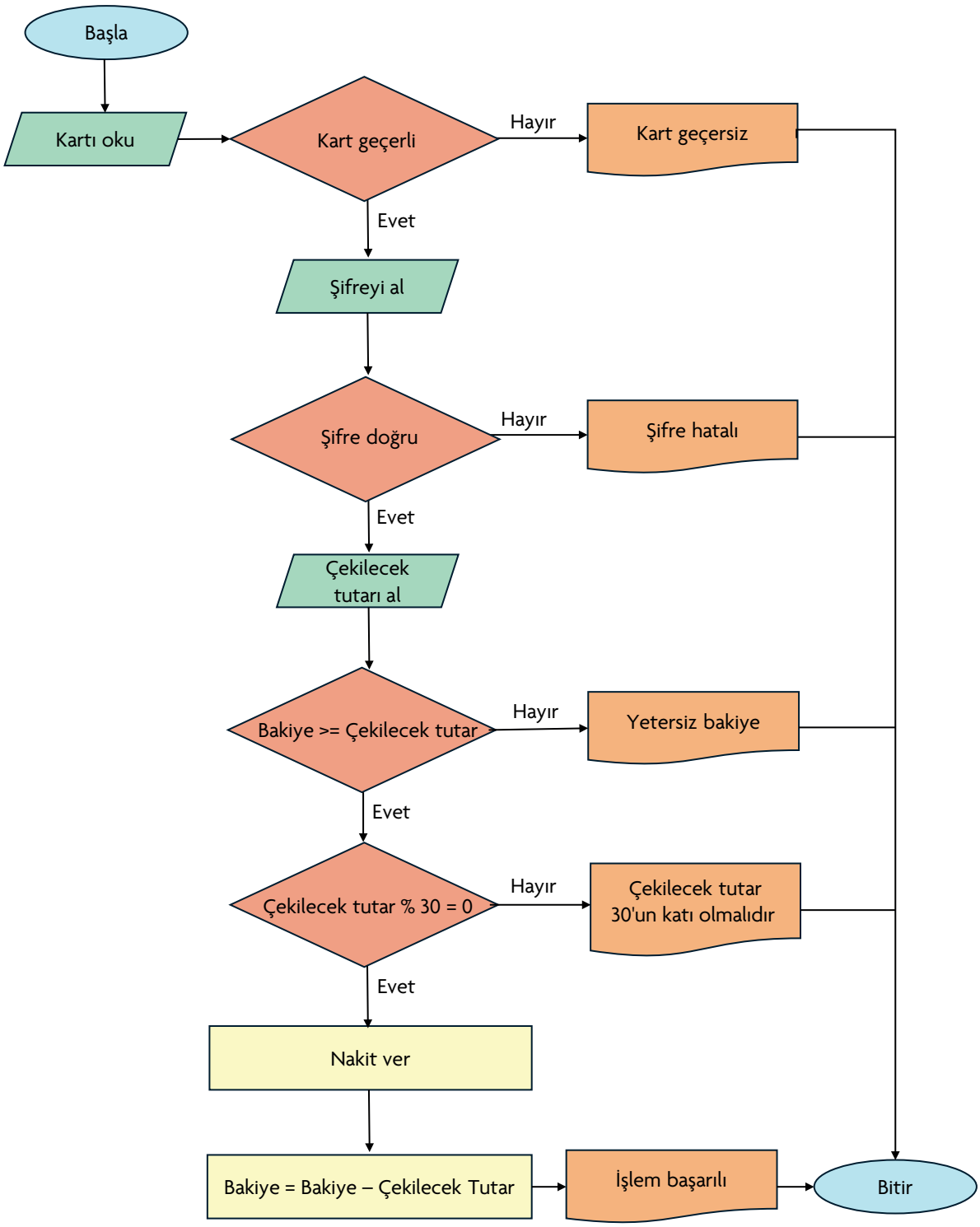
Tutar 30'un katı ise
bir sonraki adıma geçilir.
Tutar 30'un katı değilse
"Tutar 30 TL'nin katı olmalıdır." mesajı verilir ve işlem sonlandırılır.

7. adım: Paranın verilmesi

Tutar, kullanıcıya nakit olarak verilir.
Bakiye tutar kadar azaltılır.
"İşlem başarılı." mesajı ekrana yazdırılır.

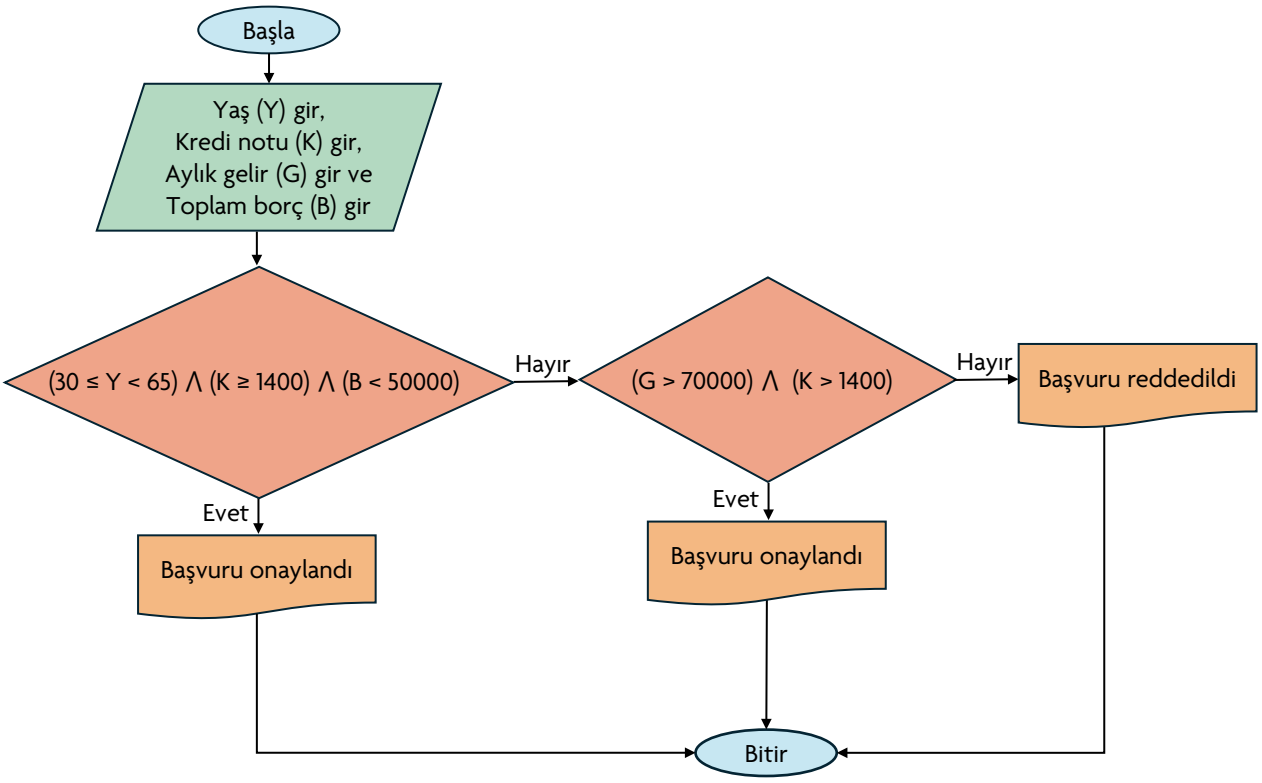
8. adım: Bitir.

Görev 7


Başla
Kartı oku
Kart geçerli
Hayır
Kart geçersiz
Evet
Şifreyi al
Şifre doğru
Hayır
Şifre hatalı
Evet
Çekilecek tutarı al
Bakiye >= Çekilecek tutar
Hayır
Yetersiz bakiye
Evet
Çekilecek tutar % 30 = 0
Hayır
Çekilecek tutar 30'un katı olmalıdır
Evet
Nakit ver
Bakiye = Bakiye – Çekilecek Tutar
İşlem başarılı
Bitir

ÖRNEK

Aşağıda bir bankanın müşterilerinin kredi başvurularını değerlendirmek için kullandığı algoritmanın sözde kodu ve bu bankaya kredi başvurusu yapan Deniz Hanım'ın bilgilerinin yer aldığı görsel verilmiştir.



MÜŞTERİ BİLGİ KARTI

Adı – Soyadı	Deniz *******
Yaş	40
Kredi Notu	1500
Aylık Gelir	80000 TL
Toplam Borç	85000 TL
Müşteri Tipi	Bireysel

KREDİ DURUMU: DEĞERLENDİRİLİYOR

Buna göre

a) Algoritmada kullanılan mantık bağlaçlarını yazınız.

b) Deniz Hanım'ın kredi başvurusunun onaylanıp onaylanmadığını belirleyiniz.

ÇÖZÜM

a)

- Başvurunun iki farklı koşuldan biriyle onaylanabilmesi nedeniyle süreç mantıksal olarak "veya" yapısı içerir.
- 2 koşulda da "ve" bağlacı ile birbirine bağlı durumlar kontrol edilmektedir.
- Koşullar sağlanıyor ise kredi başvurusu onaylanır.

b)

MÜŞTERİ BİLGİ KARTI

Adı – Soyadı	Deniz *******
Yaş	40
Kredi Notu	1500
Aylık Gelir	80000 TL
Toplam Borç	85000 TL
Müşteri Tipi	Bireysel

KREDİ DURUMU: DEĞERLENDİRİLİYOR

1. Koşul
- 30 ≤ Y < 65 ✓
- K ≥ 1400 ✓
- B < 50000 ✗

1. koşuldaki tüm durumlar birbirine "**ve**" bağlacı ile bağlıdır. Bu nedenle **tüm durumların** sağlanması gerekmektedir. Bir durum sağlanmadığı için Deniz Hanım'ın kredi başvurusu **onaylanmaz**.

2. Koşul
- G > 70000 ✓
- K > 1400 ✓

2. koşuldaki tüm durumlar birbirine "**ve**" bağlacı ile bağlıdır. Bu nedenle **tüm durumların** sağlanması gerekmektedir ve tüm durumlar sağlandığı için Deniz Hanım'ın kredi başvurusu **onaylanır**.

2 koşuldan **en az biri** sağlandığı için Deniz Hanım'ın kredisi **onaylanır**.

SIRA SİZDE 1.

Aşağıda, ABC üçgeninin açılarına göre hangi tür üçgen olduğunu belirleyen üç algoritmanın sözde kodu verilmiştir.

Sözde Kod

Girdi: Kenar uzunlukları (a, b, c)
Çıktı: Üçgenin türüne dair bir çıktı
Başla
Eğer $((a^2 > b^2 + c^2)$ ..... $(b^2 > a^2 + c^2)$ ..... $(c^2 > a^2 + b^2))$
ise
yazdır: "Geniş açılı üçgen."
Değilse
yazdır: "Geniş açılı üçgen değildir."
Bitir

1. Algoritma

Sözde Kod

Girdi: Kenar uzunlukları (a, b, c)
Çıktı: Üçgenin türüne dair bir çıktı
Başla
Eğer $((a^2 < b^2 + c^2)$ ..... $(b^2 < a^2 + c^2)$ ..... $(c^2 < a^2 + b^2))$
ise
yazdır: "Geniş açılı üçgen değildir."
Değilse
yazdır: "Dar açılı üçgen değildir."
Bitir

2. Algoritma

Sözde Kod

Girdi: Kenar uzunlukları (a, b, c)
Çıktı: Üçgenin türüne dair bir çıktı
Başla
Eğer $((a^2 = b^2 + c^2)$ ..... $(b^2 = a^2 + c^2)$ ..... $(c^2 = a^2 + b^2))$
ise
yazdır: "Dik açılı üçgendir."
Değilse
yazdır "Dik açılı üçgen değildir."
Bitir

3. Algoritma

Buna göre boş bırakılan yerlere yazılması gereken mantık bağlaçlarını belirleyiniz.

MANTIK BAĞLAÇLARI VE NİCELEYİCİLERİN MATEMATİKSEL İSPATLARDA KULLANIMI

ETKİNLİK

Aşağıda verilen problem senaryosunu dikkatle inceleyerek görevleri sırasıyla tamamlayınız.

Problem Senaryosu: Bir elektronik cihaz üretim fabrikasında çalışan Ali Bey, depolama ve sevkiyata hazırlık biriminde görev yapmaktadır. Fabrika, günlük olarak yüzlerce farklı parça üretmektedir. Bu parçalar siparişe göre kutulanır ve her kutu, tam olarak 12 ürün alacak şekilde tasarlanmıştır. Ali Bey'in çıkardığı raporlarda ürün sayıları farklı olsa bile her gün artan ürün sayısı hep 0, 4 veya 8 olarak görünmektedir.

Görev 1: Depoya gelen günlük ürün sayılarını matematiksel olarak ifade ediniz.

Görev 2: Depoya gelen ürünler, dörderli mini kutulara yerleştirilecektir. Verilen rapora göre ürünlerin tamamı kutulara yerleştirildiğinde artan ürün olup olmayacağını belirleyiniz.

Görev 3: İspatladığınız önermenin matematiksel temsilini yazınız.

Görev 4: Yaptığınız ispat adımları yardımıyla bir sayının 12'ye bölümünden kalan 0, 4 veya 8 ise sayının 4'e bölünüp bölünmediğini bulan algoritmanın akış şemasını oluşturunuz.

GERİ BİLDİRİM

Görev 1

$(12k\ (k \in \mathbb{Z})) \vee (12m + 4\ (m \in \mathbb{Z})) \vee (12t + 8\ (t \in \mathbb{Z}))$

Görev 2

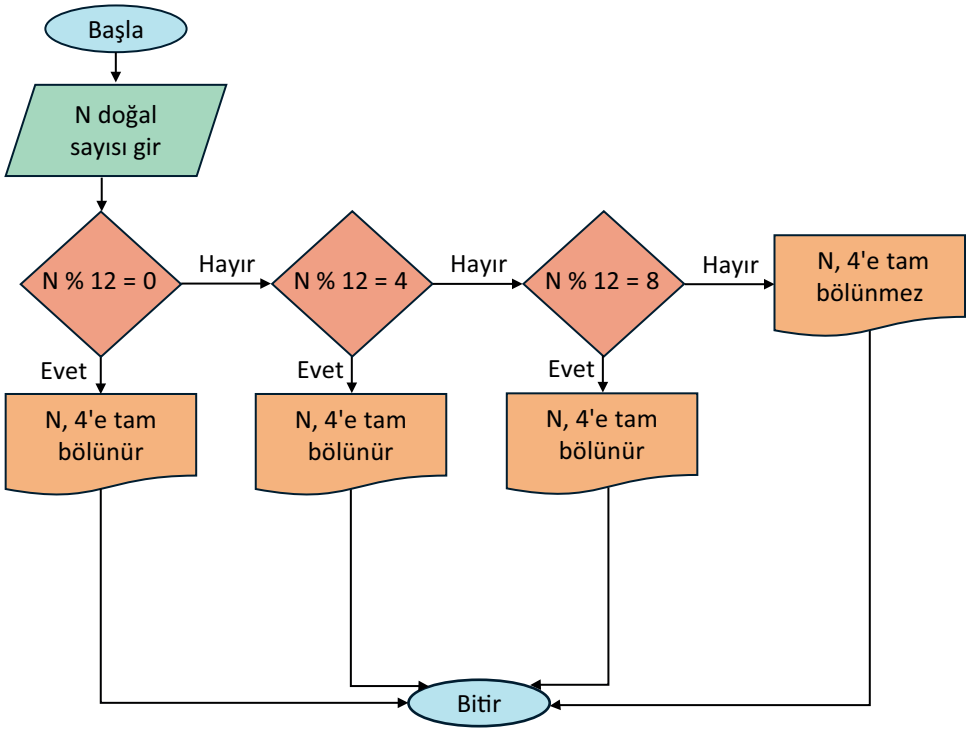
1. Durum	2. Durum	3. Durum
$12k = 4 \cdot (3k)$	$12m + 4 = 4 \cdot (3m + 1)$	$12t + 8 = 4 \cdot (3t + 2)$

3k, 3m + 1, 3t + 2 ifadeleri birer tam sayı olduğu için üç durumda da ürün sayısı 4'ün katı olur ve hiç ürün artmaz.

Görev 3

$((N = 12k\ (k \in \mathbb{Z})) \vee (N = 12m + 4\ (m \in \mathbb{Z})) \vee (N = 12t + 8\ (t \in \mathbb{Z}))) \Rightarrow N = 4p\ (p \in \mathbb{Z})$

Görev 4



ÖRNEK

"3'e bölünemeyen her tam sayının karesinin 1 eksiği 3'e bölünür." önermesi veriliyor.

Buna göre

a) Önermenin cebirsel ispatını yapınız.

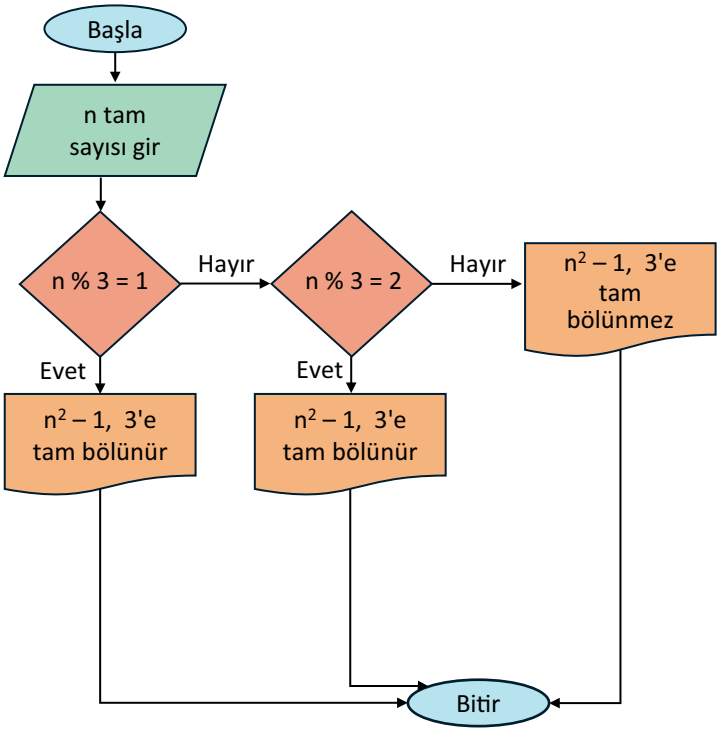
b) 3'e bölünemeyen her tam sayının karesinin 1 eksiğinin 3'e bölünüp bölünmediğini bulan bir algoritmanın işleyişini akış şeması ile ifade ediniz.

ÇÖZÜM

a)

- $k \in \mathbb{Z}$ için $n = 3k + 1$ veya $n = 3k + 2$
- $n^2 - 1 = (3k + 1)^2 - 1$ veya $n^2 = (3k + 2)^2 - 1$
- $n^2 - 1 = 9k^2 + 6k + 1 - 1$ veya $n^2 - 1 = 9k^2 + 12k + 4 - 1$
- $n^2 - 1 = 9k^2 + 6k$ veya $n^2 - 1 = 9k^2 + 12k + 3$
- $n^2 - 1 = 3 \cdot (3k^2 + 2k)$ veya $n^2 - 1 = 3 \cdot (3n^2 + 4n + 1)$
  olduğundan her iki durumda da n sayısı 3'ün katı değilken $n^2 - 1$ ifadesi 3'ün katıdır.

b)



SIRA SİZDE 2.

f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tanımlı f fonksiyonunun bire bir fonksiyon olduğu, "$\forall k, n \in \mathbb{R}$ için $f(k) = f(n) \Rightarrow k = n$" şeklinde ifade edilir.

Bu ifadeden faydalanarak

"$\forall a \in \mathbb{R}$ için $a \neq 0$ olmak üzere f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ şeklinde tanımlı doğrusal fonksiyon bire birdir."

önermesinin doğruluğunu ispatlayınız.

GERİ BİLDİRİM

Bu geri bildirim sayesinde kendi cevabınızı kontrol edebilir, hatalarınızı düzelterek öğrenmenizi pekiştirebilirsiniz.

SIRA SİZDE 1

ÇÖZÜM

Sözde Kod

Girdi: Kenar uzunlukları (a, b, c)
Çıktı: Üçgenin türüne dair bir çıktı
Başla
Eğer $((a^2 > b^2 + c^2) \vee (b^2 > a^2 + c^2) \vee (c^2 > a^2 + b^2))$
ise
yazdır "Geniş açılı üçgen"
değilse
yazdır "Geniş açılı üçgen değil"
Bitir

Sözde Kod

Girdi: Kenar uzunlukları (a, b, c)
Çıktı: Üçgenin türüne dair bir çıktı
Başla
Eğer $((a^2 < b^2 + c^2) \wedge (b^2 < a^2 + c^2) \wedge (c^2 < a^2 + b^2))$
ise
yazdır "Dar açılı üçgen"
değilse
yazdır "Dar açılı üçgen değil"
Bitir

Sözde Kod

Girdi: Kenar uzunlukları (a, b, c)
Çıktı: Üçgenin türüne dair bir çıktı
Başla
Eğer $((a^2 = b^2 + c^2) \vee (b^2 = a^2 + c^2) \vee (c^2 = a^2 + b^2))$
ise
yazdır "Dik açılı üçgen"
değilse
yazdır "Dik açılı üçgen değil"
Bitir

SIRA SİZDE 2

ÇÖZÜM

"$\forall a \in \mathbb{R}$ için $a \neq 0$ olmak üzere $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ şeklinde tanımlı doğrusal fonksiyon bire birdir."

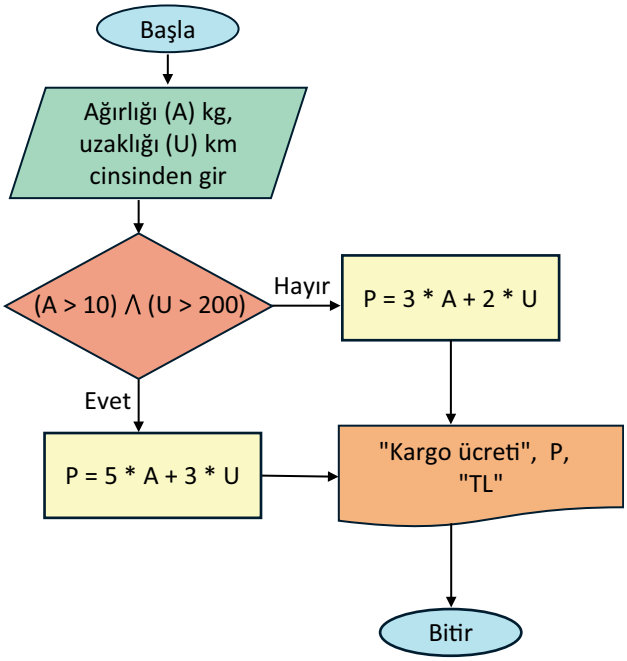
- Herhangi iki gerçek sayı alalım: $k, n \in \mathbb{R}$
- Diyelim ki $f(k) = f(n)$
- Fonksiyonun tanımından dolayı $a \cdot k + b = a \cdot n + b$
- Eşitliğin her iki tarafından b çıkarıldığında $a \cdot k = a \cdot n$
- İfadeler eşitliğin sol tarafında toplanırsa $a \cdot k - a \cdot n = 0$
- Ortak çarpan parantezine alındığında $a \cdot (k - n) = 0$
- Bu durumda $a = 0$ veya $k - n = 0$
- Önermede $a \neq 0$ verildiğine göre $k - n = 0$
- Ve eşitliğin iki tarafı n ile toplandığında $k = n$
- Yani $f(k) = f(n) \Rightarrow k = n$

DEĞERLENDİRİYORUM

Amaç: Bu bölümde öğrendiklerinizi gözden geçirmenizi, kendi öğrenme sürecinizi değerlendirmenizi ve eksiklerinizi fark etmenizi amaçlıyoruz.

SORULAR

1. Aşağıda bir kargo şirketinin ücret tarifesi için işleyen bir algoritmanın akış şeması verilmiştir.



Buna göre Selin Hanım, 15 kg ağırlığında bir paketi 200 km uzaktaki bir arkadaşına gönderirse kaç TL ücret öder?

2. Bir üniversitede, öğrencilerin dönem sonu başarılarını değerlendirmek için kullanılan dijital bir "Akademik Başarı Değerlendirme Sistemi" vardır.

Sistem, her öğrenci için üç temel veriyi okur.

- Not Ortalaması (G): 4'lük sistemde dönemlik genel not ortalaması
- Devamsızlık yaptığı gün sayısı(D): Derse katılmadığı gün sayısı
- Proje Skoru (P): Dönem boyunca yürütülen proje, sunum, rapor vb. çalışmaların puanı

Üniversitenin bilgi işlem merkezi, onur öğrencilerini seçmek için şu karar algoritmasını kullanmaktadır:
$[(G \geq 3{,}5) \vee (P > 20)] \wedge (D < 10)$

Buna göre onur öğrencilerini belirleyen algoritmayı akış şeması ile ifade ediniz.

3. "4'e bölümünden kalan 1 olan her tam sayının karesinin 8 ile bölümünden kalan 1'dir." **önermesini ispatlayınız.**

4. "Her tam sayının karesinin 5'e bölümünden kalan 0, 1 veya 4 olur." önermesi veriliyor.

Buna göre

a) Önermeyi ispatlayınız.

b) Her tam sayının karesinin 5'e bölümünden kalanın 0, 1 veya 4 olup olmadığını bulan algoritmanın işleyişini akış şeması ile gösteriniz.

GERİ BİLDİRİM

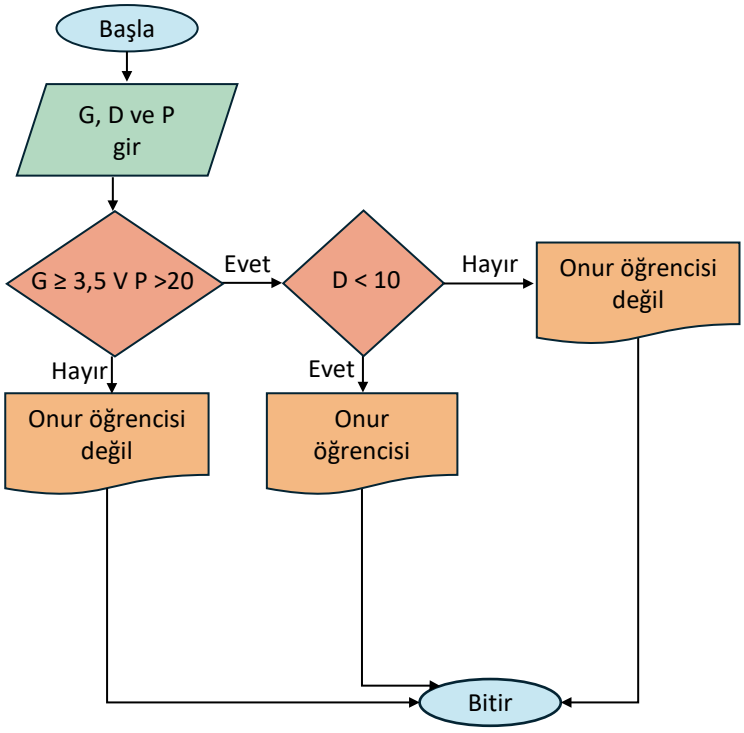
Bu geri bildirim sayesinde kendi cevabınızı kontrol edebilir, hatalarınızı düzelterek öğrenmenizi pekiştirebilirsiniz.

ÇÖZÜM 1.

- Algoritmanın karar aşamasında $(A > 10) \wedge (U > 200)$ koşulu bulunmaktadır.
- Girdi değerlerine göre koşul yanlış ise $P = 3 \cdot A + 2 \cdot U$ olacaktır.
- Girdi değerlerine göre koşul doğru ise $P = 5 \cdot A + 3 \cdot U$ olacaktır.
- Selin Hanım'ın kargo ücreti için girdi değerleri: $A = 15$ ve $U = 200$
- $A > 10 \wedge U > 200$ koşulunda "ve" bağlacı vardır. İki durum da sağlandığında koşul doğru olacaktır.
- $A = 15$ için $A > 10$ sağlanır, $U = 200$ için $U > 200$ sağlanmaz. Dolayısıyla $A > 10 \wedge U > 200$ koşulu yanlış olur.
- Selin Hanım'ın kargo ücreti $P = 3 \cdot A + 2 \cdot U$ şeklinde hesaplanacaktır.
- Girdi değerleri yerine yazılırsa $P = 3 \cdot 15 + 2 \cdot 200$

  $P = 445$ TL olur.

ÇÖZÜM 2.



ÇÖZÜM 3.

- $n, k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $n = 4k + 1$ olsun.
- $n^2 = (4k + 1)^2$
- $n^2 = 16k^2 + 8k + 1$
- $n^2 = 8(2k^2 + k) + 1$
- $(2k^2 + k) \in \mathbb{Z}$ olduğu için $n^2 = 8(2k^2 + k) + 1$ sayısının 8 ile bölümünden kalan 1'dir.

ÇÖZÜM 4.

a)

- $(n, k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $(n = 5k) \vee (n = 5k + 1) \vee (n = 5k + 2) \vee (n = 5k + 3) \vee (n = 5k + 4)$
- **n = 5k** ise $n^2 = (5k)^2$

  $= 25k^2$

  $= 5 \cdot 5k^2$

  $5k^2 \in \mathbb{Z}$ olduğu için $n^2 = 5 \cdot 5k^2$ sayısının 5 ile bölümünden kalan **0**'dır.
- **n = 5k + 1** ise $n^2 = (5k + 1)^2$

  $= 25k^2 + 10k + 1$

  $= 5 \cdot (5k^2 + 2k) + 1$

  $(5k^2 + 2k) \in \mathbb{Z}$ olduğu için $n^2 = 5 \cdot (5k^2 + 2k) + 1$ sayısının 5 ile bölümünden kalan **1**'dir.
- **n = 5k + 2** ise $n^2 = (5k + 2)^2$

  $= 25k^2 + 20k + 4$

  $= 5 \cdot (5k^2 + 4k) + 4$

  $(5k^2 + 4k) \in \mathbb{Z}$ olduğu için $n^2 = 5 \cdot (5k^2 + 4k) + 4$ sayısının 5 ile bölümünden kalan **4**'tür.
- **n = 5k + 3** ise $n^2 = (5k + 3)^2$

  $= 25k^2 + 30k + 9$

  $= 5 \cdot (5k^2 + 4k + 1) + 4$

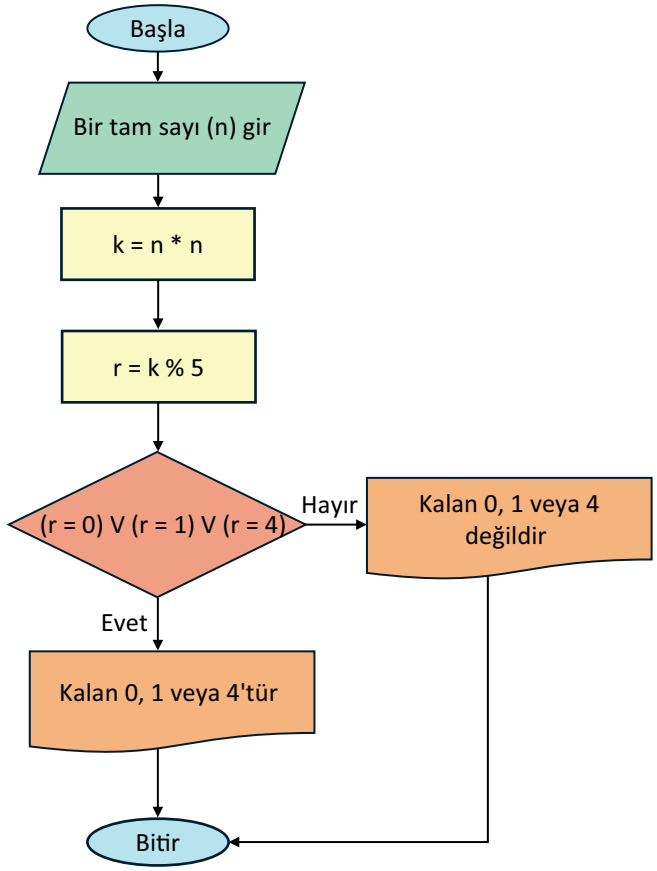
  $(5k^2 + 4k + 1) \in \mathbb{Z}$ olduğu için $n^2 = 5 \cdot (5k^2 + 4k + 1) + 4$ sayısının 5 ile bölümünden kalan **4**'tür.
- **n = 5k + 4** ise $n^2 = (5k + 4)^2$

  $= 25k^2 + 40k + 16$

  $= 5 \cdot (5k^2 + 8k + 3) + 1$

  $(5k^2 + 8k + 3) \in \mathbb{Z}$ olduğu için $n^2 = 5 \cdot (5k^2 + 8k + 3) + 1$ sayısının 5 ile bölümünden kalan **1**'dir.
- Bu durumda her tam sayının karesinin 5'e bölümünden kalan 0, 1 veya 4 olur.

b)


Başla
Bir tam sayı (n) gir
k = n * n
r = k % 5
(r = 0) V (r = 1) V (r = 4)
Hayır
Kalan 0, 1 veya 4 değildir
Evet
Kalan 0, 1 veya 4'tür
Bitir

ÖĞRENDİKLERİM

Amaç: Bu bölümde öğrendiklerinizi özetlemenizi, günlük hayatta ve farklı derslerde kullanabileceğiniz bilgileri belirlemenizi amaçlıyoruz.

Mantık bağlaçları ve niceleyicilerin algoritma ve matematiksel ispatlarda işlevleri ile ilgili önemli bilgileri kendi cümlelerinizle yazınız.

MANTIK BAĞLAÇLARI VE NİCELEYİCİLERİN MATEMATİKSEL İSPAT VE ALGORİTMALARDAKİ İŞLEVLERİ

Koşullara Göre Karar Verme

Adımları Birleştirme

Genelleme ve Özelleştirme

Sembolik İfadelerin Anlaşılması

ALGORİTMA ve BİLİŞİM

Algoritma Temelli Problem Çözme Yansıtıcı Öğrenme Notu

Amaç: Bu çalışma, problem çözerken algoritmik düşünmeyi ve matematiksel temsilleri nasıl kullandığınıza yönelik farkındalık oluşturmak amacıyla hazırlanmıştır. Çalışma boyunca kendi öğrenme sürecinizi gözden geçirerek kullandığınız yöntemleri değerlendirmeniz beklenmektedir.

Aşağıdaki soruları çözümleriniz üzerinde düşünerek yanıtlayınız. Sorulara kısa ve açık cümlelerle, kullandığınız yöntemi ve düşünme sürecinizi ifade etmeniz yeterlidir.

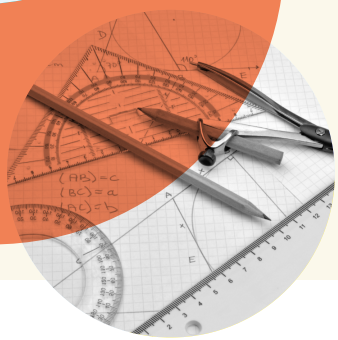
1. **Öğrendiğiniz bu temada sizin dikkatinizi çeken veya önemli bulduğunuz noktaları yazınız.**

2. **Algoritma temelli problem çözme stratejilerini ifade ediniz. Bu stratejilerden daha etkin olduğunu düşündüğünüz yöntemi ve düşüncenizin gerekçesini açıklayınız.**

3. **Matematiksel problemlerin çözümünde algoritmadan nasıl yararlandığınızı kısaca açıklayınız.**

4. **Algoritma temelli problem çözme yaklaşımlarını kullanabileceğiniz gerçek yaşam örnekleri oluşturunuz.**

Daha fazlası için karekodu okutunuz.



İSTATİSTİKSEL ARAŞTIRMA

BAŞLARKEN

Sevgili öğrencimiz, bu çalışma kartında bireysel öğrenme yolculuğunuza destek sunmak amaçlanmaktadır. Çalışmalarınızı yürütürken "Hazırlanıyorum", "İlişkilendiriyorum", "Uygulayarak Öğreniyorum", "Değerlendiriyorum" ve "Öğrendiklerim" bölümlerini sırası ile yapmanızı; her bölüm ve etkinlik sonundaki geri bildirimleri alarak ilerlemenizi; "Öğrendiklerim" bölümünde öğrenme sürecinizi gözden geçirmenizi bekliyoruz.

Bu çalışma kartında matematiğin günlük hayata olan katkılarına ilişkin çıkarımlarda bulunup aşağıdaki soruları yanıtlayabileceksiniz.

Bağlam içerisinde tek nicel değişkenli veri toplamayı gerektiren araştırma sorusunu oluşturmanın ölçütleri nelerdir?

İstatistiksel araştırma sorusu veya soruları doğrultusunda veri toplama planı nasıl yapılır?

Veriler analize hazır hâle nasıl getirilebilir?

Araştırma sorusu bağlamında toplanan verileri analiz etmek için hangi görselleştirme aracını seçmeliyim?

Nicel veriye dayalı istatistiksel araştırmalarda veri analizi yapılırken ve sonuçlar yorumlanırken nelere dikkat edilmelidir.

HAZIRLANIYORUM

Amaç: Bu bölümde ön bilgilerinizi hatırlamanızı ve temaya hazırlıklı hâle gelmenizi amaçlıyoruz.

Aşağıda yer alan ifadeler, bu temada tamamlanması hedeflenen öğrenme çıktısını ele almadan önce sahip olmanız gereken bazı temel becerileri içermektedir. Lütfen her bir ifadeyi dikkatlice okuyunuz.

☑ Eğer ifadedeki bilgiye hâkim olduğunuzu düşünüyorsanız kutucuğu işaretleyiniz.

☐ Eğer temayı henüz tam olarak bilmediğinizi ya da hatırlamadığınızı düşünüyorsanız kutucuğu boş bırakınız.

SORULAR	ÖN ÖĞRENME KONTROL LİSTESİ	
1	İstatiksel terimleri tanımlayabilirim.	☐
2	İstatistiksel araştırma sürecinin adımlarını aşamalar hâlinde ifade edebilirim.	☐
3	Betimsel ve karşılaştırma gerektiren araştırma soruları oluşturabilirim.	☐
4	Veri setlerini görselleştirebilirim.	☐
5	Verileri yorumlayabilirim.	☐

"Ön Öğrenme Kontrol Listesi"ni doldurduktan sonra aşağıda verilen "Kontrol Noktası" sorularını çözünüz ve cevaplarınızı kontrol ediniz.

KONTROL NOKTASI

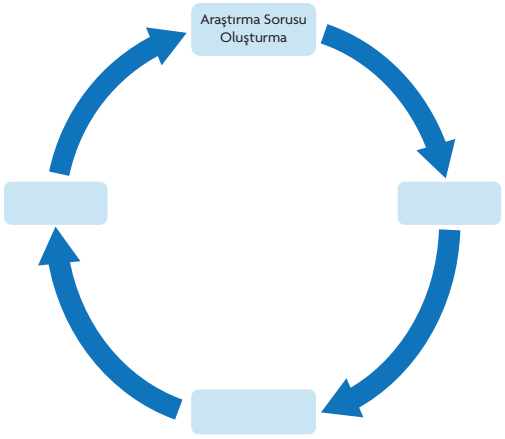
SORU 1.

Aşağıda verilen istatiksel terimleri tanımlarıyla eşleştiriniz.

İSTATİSTİKSEL TERİMLER	TANIMLAR
1 - NİCEL VERİ	A) Bir araştırmada toplanacak verilerin analizi ile elde edilecek sonuçların geçerli olacağı, yorumlanacağı gruptur.
2 - BİRİNCİL VERİ	B) Evren içinden belirlenen ve evreni temsil etmesi için verilerin toplandığı kümedir.
3 - HAZIR VERİ	C) Bir grubun özelliklerinin sayılması veya ölçülmesiyle elde edilen verilerdir.
4 - EVREN	Ç) Başkaları tarafından önceden toplanmış mevcut verilerdir.
5 - ÖRNEKLEM	D) Araştırmacıların kendileri tarafından gözlem, anket ve deney gibi araçlar ile doğrudan toplanan verilerdir.
	E) Bir evrenden eleman seçimi yapılırken her elemanın eşit olasılıkla seçilmesi durumudur.

SORU 2.

Aşağıda yer alan döngüsel şemada istatistiksel araştırma sürecinin dört temel adımından birincisi verilmiştir.



Diğer adımları istatistiksel araştırma sürecinin döngüsel yapısına uygun şekilde uygun boşluklara yazınız.

SORU 3.

Küresel iklim değişikliği tüm dünya ülkelerini ve toplumları ilgilendiren bir sorundur. Araştırmacılar, farklı toplumların iklim değişikliği problemine yönelik farkındalıklarının aynı olmadığını belirtmektedir. 2022 yılında yürütülen projelerden biri olan Türkiye'nin ilk dijital ve engelsiz platformu Çevre ve Çocuk Akademisi; gençlerin çevre, şehir ve iklim konularında bilinçlenmesini ve gençlerde bu konularda farkındalık oluşturulmasını hedeflemiştir. Bu proje, gençlerin 2053 Net Sıfır Emisyon ve Yeşil Kalkınma Devrimi hedeflerine ulaşabilmesi için hazırlanmıştır. Gençler; platformda yer alan "çevre", "şehircilik", "iklim değişikliği", "sıfır atık", "doğa ve sanat", "çevre ve iletişim" konularında istedikleri akademiye giriş yaparak seyrettikleri videolardan topladıkları puanlarla "çevre market" bölümünden bisiklet, scooter (sıkutır), kaykay gibi hediyeler kazanabilmiştir.

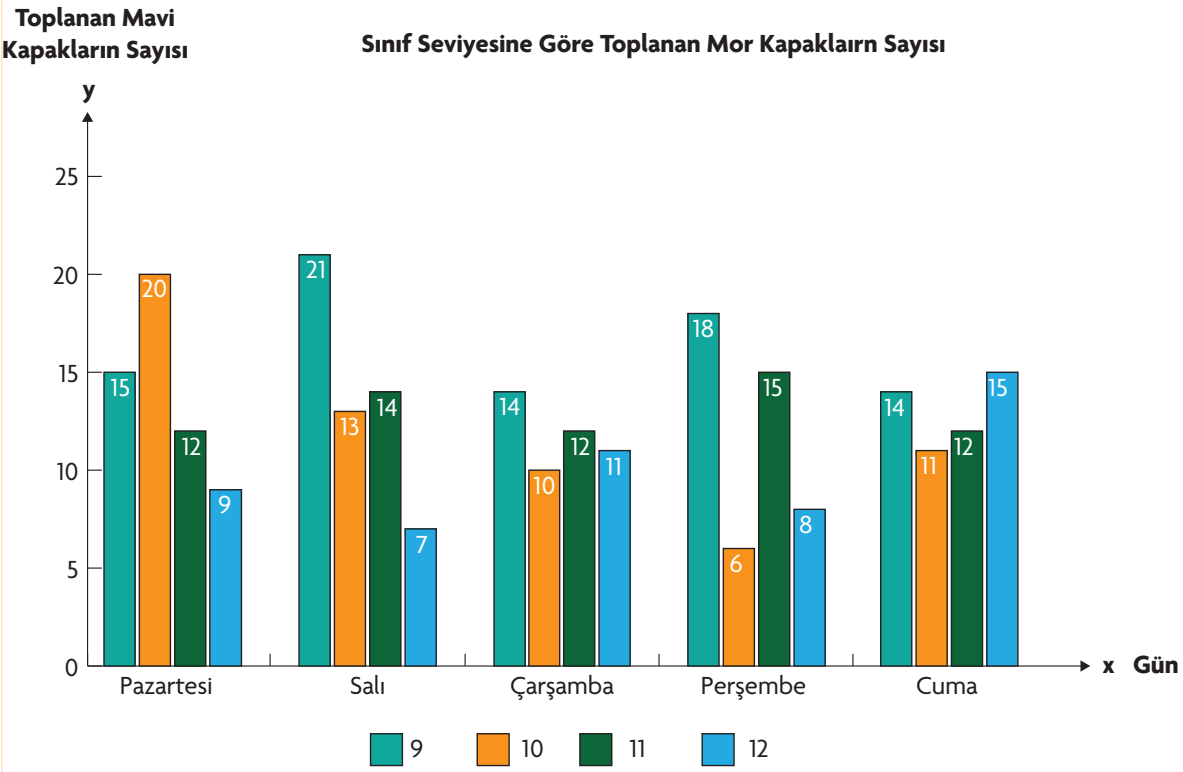
Bu bağlamda bir araştırmacı grubu, öğrencilerin iklim sorununa yönelik farkındalıklarını belirlemek için bir araştırma yapmak istemektedir. Aşağıda bu araştırma grubunun araştırmalarına yön verecek nicel veri toplamayı gerektiren araştırma soruları verilmiştir.

Buna göre verilen soruların yanlarına betimleyen ya da karşılaştıran araştırma sorusu türlerinden uygun olanı yazınız.

ARAŞTIRMA SORUSU	TÜRÜ
Ortaokul öğrencilerinin iklim değişikliği konusundaki bilgi düzeyleri nasıl bir eğilim gösterir?	
Çevre ve Çocuk Akademisi'ne katılan öğrencilerin iklim değişikliğiyle ilgili temel kavramları doğru bilme oranı nasıl bir eğilim gösterir?	
Dijital platformları kullanan öğrenciler ile kullanmayan öğrencilerin iklim değişikliği konusundaki farkındalık düzeyi nasıl bir eğilim gösterir?	
5. sınıf öğrencileri ile 8. sınıf öğrencilerinin iklim değişikliği konusundaki farkındalık düzeyinin eğilimi nasıldır?	
Çevre ve Çocuk Akademisi kapsamında video izleyen öğrencilerin ortalama izleme süresinin dakika cinsinden eğilimi nasıldır?	
Şehir merkezindeki öğrenciler ile kırsal bölgedeki öğrencilerin iklim değişikliğiyle ilgili doğru bilgiye sahip olma oranı nasıl bir eğilim gösterir?	
En az 5 video izleyen öğrenciler ile hiç izlemeyen öğrencilerin arasında iklim değişikliğiyle ilgili bilgi düzeylerindeki farklılık nasıl bir eğilim gösterir?	

SORU 4.

Sıfır Atık Projesi kapsamında A Lisesinde mavi kapak toplama kampanyası düzenlenmiştir. Kampanyanın danışmanı olan öğretmen, "Sınıf seviyelerine göre kampanyaya katılım (mavi kapak toplama sayısı) nasıl bir eğilim göstermektedir?" şeklinde bir araştırma sorusu oluşturmuş ve bu doğrultuda bir hafta boyunca hafta içi her gün veri toplayarak elde ettiği sonuçları görselleştirmiştir. A Lisesinde bu hafta boyunca topladıkları mavi kapakların sayıları ile ilgili grafik aşağıda verilmiştir.



Verilenlere göre

a) 9. sınıfların beş gün boyunca topladıkları mavi kapakların sayılarına ait veri dağılımının açıklığını, ortancasını, modunu ve ortalamasını bulunuz.

b) 10. sınıfların beş gün boyunca topladıkları mavi kapakların sayılarına ait veri dağılımının açıklığını, ortancasını, modunu ve ortalamasını bulunuz.

c) 11. sınıfların beş gün boyunca topladıkları mavi kapakların sayılarına ait veri dağılımının açıklığını, ortancasını, modunu ve ortalamasını bulunuz.

d) 12. sınıfların beş gün boyunca topladıkları mavi kapakların sayılarına ait veri dağılımının açıklığını, ortancasını, modunu ve ortalamasını bulunuz.

e) Her bir sınıf seviyesi için araştırma sonuçlarını yorumlayınız.

SORU 5.

Ayşe, evde farklı günlerde kek pişirmiş ve her seferinde pişirme süresini dakika cinsinden not etmiştir. Ortam sıcaklığı ve kullanılan malzeme çeşitliliği gibi etkenler nedeniyle süreler değişmiştir. Ayşe'nin not ettiği pişirme süreleri aşağıdaki gibidir.

42, 45, 40, 38, 47, 50, 43, 39, 41, 44, 46, 48, 37, 49, 36, 37, 41

Buna göre kek pişirme sürelerine ait veri grubunun aritmetik ortalamasını, mod ve medyan değerlerini bulunuz. Kek pişirme süreleri dakika cinsinden nasıl bir eğilim göstermektedir? Açıklayınız.

GERİ BİLDİRİM

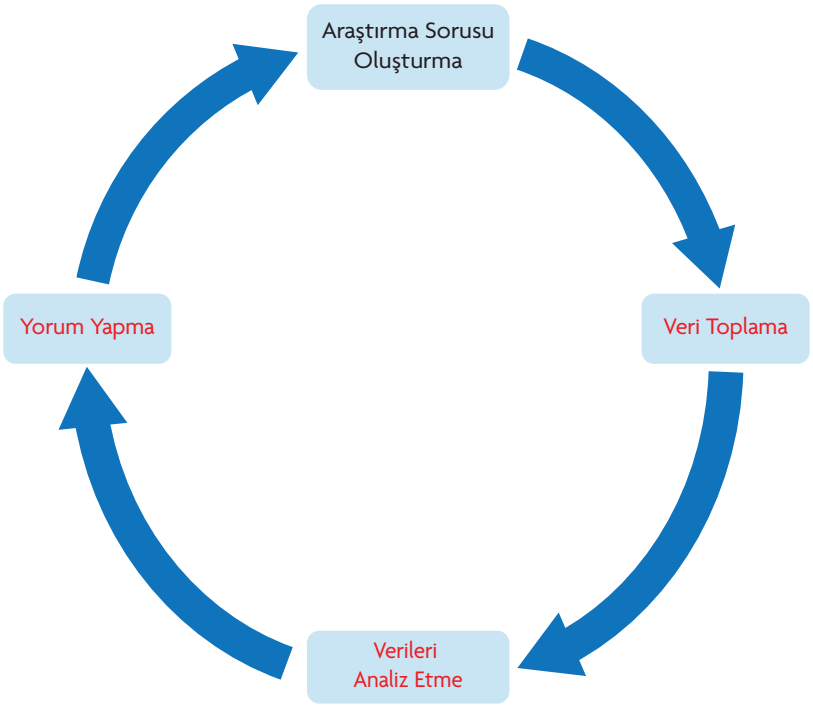
Bu geri bildirim sayesinde kendi cevabınızı kontrol edebilir, hatalarınızı düzelterek öğrenmenizi pekiştirebilirsiniz.

İnternet erişiminiz varsa eksik gördüğünüz konuları tamamlamak için MEBİ platformundaki içeriklerden de yararlanabilirsiniz.

ÇÖZÜM 1.

İSTATİKSEL TERİMLER	TANIMLAR
1	C
2	D
3	Ç
4	A
5	B

ÇÖZÜM 2.



ÇÖZÜM 3.

ARAŞTIRMA SORUSU	TÜRÜ
Ortaokul öğrencilerinin iklim değişikliği konusundaki bilgi düzeyleri nasıl bir eğilim gösterir?	Betimleyen araştırma sorusu
Çevre ve Çocuk Akademisi'ne katılan öğrencilerin iklim değişikliğiyle ilgili temel kavramları doğru bilme oranı nasıl bir eğilim gösterir?	Betimleyen araştırma sorusu
Dijital platformları kullanan öğrenciler ile kullanmayan öğrencilerin iklim değişikliği konusundaki farkındalık düzeyi nasıl bir eğilim gösterir?	Karşılaştıran araştırma sorusu
5. sınıf öğrencileri ile 8. sınıf öğrencilerinin arasında iklim değişikliği konusundaki farkındalık düzeyinin eğilimi nasıldır?	Karşılaştıran araştırma sorusu
Çevre ve Çocuk Akademisi kapsamında video izleyen öğrencilerin ortalama izleme süresinin dakika cinsinden eğilimi nasıldır?	Betimleyen araştırma sorusu
Şehir merkezindeki öğrenciler ile kırsal bölgedeki öğrencilerin iklim değişikliğiyle ilgili doğru bilgiye sahip olma oranı nasıl bir eğilim gösterir?	Karşılaştıran araştırma sorusu
En az 5 video izleyen öğrenciler ile hiç izlemeyen öğrencilerin iklim değişikliğiyle ilgili bilgi düzeylerindeki farklılık nasıl bir eğilim gösterir?	Karşılaştıran araştırma sorusu

ÇÖZÜM 4.

a) 9. sınıfların beş gün boyunca topladıkları mavi kapak sayılarına ait veri dağılımı şöyledir: 14, 14, 15, 18, 21.

Veri dağılımının en küçük değeri 14, en büyük değeri 21 olduğundan

açıklık 21 – 14 = 7,

ortanca değeri 15,

modu 14'tür,

aritmetik ortalaması ise (15 + 21 + 14 + 18 + 14) : 5 = 16,4 olur.

b) 10. sınıfların beş gün boyunca topladıkları mavi kapakların sayılarına ait veri dağılımı şöyledir: 6, 11, 10, 13, 20.

Veri dağılımının en küçük değeri 6, en büyük değeri 20 olduğundan

açıklık 20 – 6 = 14,

ortanca değeri 10,

modu yoktur,

aritmetik ortalaması ise (20 + 13 + 10 + 6 + 11) : 5 = 12 olur.

c) 11. sınıfların beş gün boyunca topladıkları mavi kapakların sayılarına ait veri dağılımı şöyledir: 12, 12, 12, 14, 15.

Veri dağılımının en küçük değeri 12, en büyük değeri 15 olduğundan

açıklık 15 – 12 = 3,

ortanca değeri 12,

modu 12,

aritmetik ortalaması ise (12 + 14 + 12 + 15 + 12) : 5 = 13 olur.

d) 12. sınıfların beş gün boyunca topladıkları mavi kapakların sayılarına ait veri dağılımı şöyledir: 7, 8, 9, 11, 15.

Veri dağılımının en küçük değeri 7, en büyük değeri 15 olduğundan

açıklık 15 – 7 = 8,

ortanca değeri 9,

modu yoktur,

aritmetik ortalaması ise (9 + 7 + 11 + 8 + 15) : 5 = 10 olur.

e) Mavi kapak toplama kampanyasında

9. sınıfların beş gün boyunca topladığı kapakların sayısını temsil eden sayı için ortanca değer 15,

10. sınıfların beş gün boyunca topladığı kapakların sayısını temsil eden sayı için ortanca değer 10,

11. sınıfların beş gün boyunca topladığı kapakların sayısını temsil eden sayı için ortanca değer 12,

12. sınıfların beş gün boyunca topladığı kapakların sayısını temsil eden sayı için ortanca değer 9 alınabilir.

Buradan da mavi kapak toplama kampanyasında en aktif 9. sınıflar, ikinci sırada 11.sınıflar, üçüncü sırada 10. sınıflar ve dördüncü sırada da 12. sınıfların yer aldığı söylenebilir.

ÇÖZÜM 5.

Kek pişirme sürelerine ait veri dağılımı küçükten büyüğe şöyle sıralanır: 36, 37, 37, 38, 39, 40, 41, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50.

Veri dağılımının modu en çok tekrarlanan 37 ve 41'dir.

Veri dağılımının medyanı, 17 terimin ortasındaki 9. terim olan 42'dir.

Veri dağılımın aritmetik ortalaması ise verilerin toplamının veri sayısına bölünmesiyle bulunur.

Kek pişirme sürelerinin dakika cinsinden nasıl bir eğilim gösterdiğini anlamak için medyan ve aritmetik ortalama değerine bakılır. Bu iki değer de birbirine yakın olduğundan kek pişirme süreleri yaklaşık 42 dakikadır.

İLİŞKİLENDİRİYORUM

Amaç: Bu bölümde yeni öğreneceğiniz temayı; zihninizde var olan bilgileriniz, yaşantılarınız ve diğer derslerde öğrendiklerinizle ilişkilendirmenizi bekliyoruz.

Verilen metinleri okuyunuz. Bilgileri kendi yaşamınızdan ya da çevrenizden örneklerle çeşitlendiriniz.

ÖĞRENME YOLCULUĞUNA BAŞLARKEN

Veri okuryazarlığı 21. yüzyılın edinilmesi gereken temel becerilerinden biri olarak ön plana çıkmaktadır. Ayrıca veri okuryazarlığı, günümüzde önemli görülen farklı okuryazarlık becerileri olan dijital okuryazarlık, medya okuryazarlığı ve finans okuryazarlığı vb. ile daima bir etkileşim hâlinde bulunmaktadır.

Veri okuryazarlığı; veriyi elde etme, elde edilen veriyi analiz etme, araştırma sonuçlarına ulaşma ve sonuçları yorumlama ve istatistiksel araştırma süreçlerini tartışma becerilerini içermektedir.

Veri okuryazarlığının beceri ve kavramlarından biri veri analizi yapabilmektir. Veri analizi; toplanan verinin tablo ya da grafiklerle görselleştirilmesini, merkezî eğilim ve yayılım ölçüleri ile özetlenmesini ifade etmektedir.

Gündelik Hayat ile İstatistiksel Araştırma Süreci

Bir arkadaş grubu, hangi kahve zincirinin daha hızlı servis yaptığını araştırmak istemektedir.

Araştırma Sorusu: A, B, C ve D kahve zincirlerinde verilen aynı kahve siparişinin servis süresi dakika cinsinden nasıl bir eğilim gösterir?

Veri Toplama: A, B, C ve D kahve zincirlerinin farklı şubelerinde aynı kahve siparişi verilir ve servis süresi dakika cinsinden ölçülür.

Veri Analizi: Ortalama servis süresi, açıklık ve çeyrekler açıklığı hesaplanır. Uygun görselleştirme aracı kullanılarak veriler görselleştirilir.

Sonuç Çıkarma: En hızlı servis yapan zincir belirlenir. Araştırmacı grup bundan sonra kahve için o zinciri tercih eder.

Fen Bilimleri ile İstatistik Araştırma Süreci

Fizik dersinde öğrenciler, farklı yüzeylerde sürtünme kuvvetini inceler.

Araştırma Sorusu: Aynı cismin farklı yüzeylerdeki sürtünme kuvvetinin değişimi nasıl bir eğilim gösterir?

Veri Toplama: Öğrenciler, aynı cismi farklı yüzeylerde (halı, parke, mermer) kaydırarak sürtünme kuvvetini ölçer.

Veri Analizi: Ölçülen kuvvet değerlerinin ortalaması, medyanı ve standart sapması hesaplanır. Uygun görselleştirme aracı kullanılarak veriler görselleştirilir.

Sonuç Çıkarma: Hangi yüzeyde sürtünme kuvveti etkisinin en fazla olduğu belirlenir. Bu sonuç, teorik sürtünme katsayılarıyla karşılaştırılır.

Sosyal Bilgiler/Coğrafya ile İstatistik Araştırma Süreci

Coğrafya dersinde öğrenciler, farklı şehirlerdeki günlük sıcaklık değişimlerini karşılaştırır.

Araştırma Sorusu: İstanbul, Ankara ve İzmir'de aynı hafta boyunca günlük sıcaklıkların °C cinsinden eğilimi nasıldır?

Veri Toplama: İstanbul, Ankara ve İzmir'de bir hafta boyunca günlük sıcaklıklar kaydedilir.

Veri Analizi: Ortalama sıcaklıklar, açıklık ve standart sapmalar hesaplanır. Grafiklerle şehirlerin sıcaklıkları karşılaştırılır. Uygun görselleştirme aracı kullanılarak veriler görselleştirilir.

Sonuç Çıkarma: Hangi şehrin sıcaklık değişimlerinin daha istikrarlı olduğu belirlenir. Bu sonuç iklim özellikleriyle ilişkilendirilir.

Sanat/Müzik ile İstatistik Araştırma Süreci

Müzik dersinde öğrenciler, farklı müzik türlerini dinlerken kalp atış hızlarını ölçer.

Araştırma Sorusu: Farklı müzik türlerinin kalp atış hızı üzerindeki etkisi nasıl bir eğilim gösterir?

Veri Toplama: Pop, klasik ve rock müzik dinlenirken kalp atış hızları kaydedilir.

Veri Analizi: Ortalama kalp atış hızları ve standart sapmalar hesaplanır. Uygun görselleştirme aracı kullanılarak veriler görselleştirilir.

Sonuç Çıkarma: Hangi müzik türünün daha sakinleştirici veya daha uyarıcı olduğu belirlenir. Bu sonuç, müziğin fizyolojik ve (ek araştırmalar yapılmak koşuluyla) psikolojik etkileri ile ilişkilendirilebilir.

UYGULAYARAK ÖĞRENİYORUM

Amaç: Bu bölümde bilgilerinizi etkinlikler ve uygulamalarla pekiştirmenizi, öğrenmeyi daha kalıcı hâle getirmenizi amaçlıyoruz.
Etkinliklerde verilen adımları uygulayınız. Çalışmanızı dikkatli, ve düzenli bir şekilde yapınız.

İstatistiksel Bağlam Oluşturma

Gerçek yaşam durumları için araştırmacılar araştırmak istediği, merak ettiği, ilgi duyduğu konularda tek nicel değişkenli veri toplamayı gerektiren bağlamlar oluşturabilir. Aşağıdaki tabloda ilgili gerçek yaşam durumları için tek nicel değişkenli veri toplamayı gerektiren örnek bağlamlar yer almaktadır. Bu bağlamlar istendiği kadar çoğaltılabilir.

GERÇEK YAŞAM DURUMLARI	TEK NİCEL DEĞİŞKENLİ VERİ TOPLAMAYI GEREKTİREN BAĞLAM
İklim Sorunu	• İklim değişikliği sebebiyle buzulların erime miktarındaki değişim • İklim değişikliğinin canlı türlerinin popülasyonu üzerindeki etkisi
Sağlık	• Bireylerin günlük attığı adım sayısı • Düzenli spor yapan bireylerin aile hekimliği uygulamasını kullanma sayısı
Uzay	• Farklı gezegenlerde bir günün süresinin saat cinsinden ifadesi • Farklı uyduların Dünya etrafındaki tam bir turu tamamlama süresinin dakika cinsinden ifadesi

Nicel veri dağılımları ile yürütülecek istatistiksel araştırma süreci tek nicel değişkene odaklanılarak gerçekleştirilebilir. Bu durumda istatistiksel araştırma soruları tek nicel değişkene uygun olarak hazırlanır. Hazırlanan sorular doğrultusunda veri toplama planı yapılır ve verilere ulaşılır. Ulaşılan veriler analiz edilerek yorumlanır.

İstatistiksel araştırmalarda **bağlam**, verilere dayalı bilgi üretme ihtiyacı duyulan gerçek yaşam durumlarıdır. İstatistiksel araştırma süreci, bağlama yönelik istatistiksel araştırma soruları oluşturmayla başlar. ve bağlam sürecin tamamında önemli bir rol oynar. Bu nedenle gerçek yaşam durumlarından yola çıkılarak istatistiksel araştırmanın bağlamının belirlenmesi ve istatistiksel araştırma sürecinin bağlam doğrultusunda oluşturulması gerekmektedir.

SIRA SİZDE 1.

Aşağıdaki tabloda verilen gerçek yaşam durumlarına yönelik tek nicel değişkenli veri toplamayı gerektiren bağlamlar oluşturarak ilgili sütuna yazınız. Boş bırakılan son satırdaki gerçek yaşam durumu kutucuğuna ise merak ettiğiniz, ilgi duyduğunuz bir gerçek yaşam durumunu anlatan ve bu gerçek yaşam durumuna yönelik tek nicel değişkenli veri toplamayı gerektiren bir bağlam yazınız.

GERÇEK YAŞAM DURUMLARI	TEK NİCEL DEĞİŞKENLİ VERİ TOPLAMAYI GEREKTİREN BAĞLAM
Ekonomi	
Doğa	
Spor	

Tek Nicel Değişkenli Veri Toplamayı Gerektiren Araştırma Sorusu Oluşturma

- İstatistiksel araştırmalarda **bağlam,** verilere dayalı bilgi üretme ihtiyacı duyulan gerçek yaşam durumlarıdır. İstatistiksel araştırma süreci, bağlama yönelik istatistiksel araştırma soruları oluşturmayla başlar ve bağlam sürecin tamamında önemli bir rol oynar. Bu nedenle gerçek yaşam durumlarından yola çıkılarak istatistiksel araştırmanın bağlamının belirlenmesi ve istatistiksel araştırma sürecinin bağlam doğrultusunda oluşturulması gerekmektedir.
- Belirli bir durumu ya da olayı ayrıntılı olarak incelemeyi hedefleyen araştırma sorusu **betimleyen araştırma sorusudur.** (Nasıl, ne, kim, ne zaman, kaç ve nerede gibi ifadeler içerir.)
- İki ya da daha fazla grup ya da durum arasındaki farklılıkları ortaya çıkarma amaçlayan araştırma sorusu **karşılaştıran araştırma sorusudur.** (Daha fazla, daha az, daha ... gibi ifadeler içerir.)

Evren: Araştırmanın kapsamında ele alınan araştırma sonuçlarının genellendiği topluluktur.

Değişken: Gözlemlenen elemanların birinden diğerine değişen veya farklılaşan özelliklerdir.

Değişebilirlik: Bir dağılımdaki değerlerin değişkenlerden kaynaklı olarak birbirinden farklılaşmasıdır.

ÖRNEK: Türkiye'de lise ve üniversite öğrencilerinin dijital eğitim platformları aracılığıyla çevre ve sürdürülebilir yaşam konularındaki bilgi düzeylerini artırmaya yönelik projeler yürütülmektedir. Bu projeler kapsamında gençler, çevre dostu davranışlar (geri dönüşüm, enerji tasarrufu, toplu taşıma kullanımı vb.) hakkında eğitim videoları izlemekte ve katılım puanları toplamaktadır. Bu bağlamda bir araştırmacı grubu, gençlerin çevre dostu davranışlara yönelik farkındalıklarını belirlemek için bir araştırma yapmak istemektedir.

1. Bu araştırma grubunun araştırmasına yön verecek nicel veri toplamayı gerektiren birer adet betimleyen ve karşılaştıran araştırma sorusu oluşturunuz. Oluşturduğunuz soruları yazınız.

Betimleyen Araştırma Sorunuz:

Karşılaştıran Araştırma Sorunuz:

2. Araştırma sorularınızı aşağıda verilen istatistiksel araştırma sorusu ölçütlerine göre değerlendiriniz.

- Araştırma sorusunun amacı net midir?
- Araştırmaya değer midir?
- İlgilenilen grup (evren) açıkça görülmekte midir?
- Değişken açıkça görülmekte midir?
- Veri toplanarak cevaplanabilir mi?
- Değişebilirliği yansıtmakta mıdır?
- Odaklanılan grup araştırma yapılmasına imkân vermekte midir?
- Nicel veri toplamayı gerektirir mi?

ÇÖZÜM:

1. Bu araştırma grubunun araştırmasına yön verecek nicel veri toplamayı gerektiren birer adet betimleyen ve karşılaştıran araştırma sorusu oluşturunuz. Oluşturduğunuz soruları yazınız.

Betimleyen Araştırma Sorunuz: Türkiye'de lise öğrencilerinin haftalık ortalama geri dönüşüm davranışlarının (örneğin plastik şişe toplama sayısı) nicel dağılımı nasıl bir eğilim gösterir?

Karşılaştıran Araştırma Sorunuz: Üniversite öğrencileri ile lise öğrencilerinin haftalık ortalama enerji tasarrufu davranışları (örneğin kapatılan ışık sayısı) arasındaki farkın eğilimi nasıldır?

2. Araştırma sorularınızı istatistiksel araştırma sorusu ölçütlerine göre değerlendiriniz.

- Araştırma sorusunun amacı net midir? Evet, amaç; gençlerin çevre dostu davranışlarını ölçmek ve karşılaştırmaktır.
- Araştırmaya değer midir? Evet. Araştırma sürdürülebilir yaşam için farkındalık düzeylerini anlamak açısından önemlidir.
- İlgilenilen grup (evren) açıkça görülmekte midir? Evet. İlgilenilen grup lise ve üniversite öğrencileridir.
- Değişken açıkça görülmekte midir? Evet. Değişken, geri dönüşüm davranışlarının (örneğin toplanan plastik şişe) sayısıdır.
- Veri toplanarak cevaplanabilir mi? Evet, anket veya gözlem yoluyla veri toplanabilir.
- Değişebilirliği yansıtmakta mıdır? Evet, öğrenciler arasında farklılıklar olabilir.
- Odaklanılan grup araştırma yapılmasına imkân vermekte midir? Evet, lise ve üniversite öğrencileri kolay ulaşılabilir bir gruptur.
- Nicel veri toplamayı gerektirir mi? Evet, sayısal ölçümler (adet, ortalama) üzerinden veri toplanabilir.

NOT

İstatistiksel araştırmalara yön verecek istatistiksel araştırma sorularını oluşturmak için dikkat edilmesi gereken ölçütler bulunmaktadır. Tek nicel değişkenli veri toplamayı gerektiren istatistiksel araştırma sorularında bulunması gereken ölçütler aşağıda yer almaktadır. Tek nicel değişkenli veri toplamayı gerektiren istatistiksel araştırma sorularında bu ölçütlerin görülmesi, istatistiksel araştırma sürecinin sonraki aşamalarının amaca uygun şekilde yürütülmesine katkıda bulunmaktadır.

1. Amacı net olmalıdır.

İstatistiksel araştırma sorularında amaç net olarak görülmelidir. Araştırma sorusunun amacı, sorunun "betimleyen" veya "karşılaştıran" türde olmasıyla ilgilidir.

2. Araştırmaya değer olmalıdır.

Araştırma sorusunun bir amacı vardır ve araştırmaya değer olmalıdır. Örneğin bir sınıftaki kızların ve erkeklerin boylarının karşılaştırıldığı bir araştırma sorusu bağlama göre anlamlı bilgiler verebilir. Ancak bir grup öğrencinin göz rengi ile saç teli uzunluklarını karşılaştırmak anlamlı bir araştırma olmayabilir.

3. İlgilenilen grup (evren) açık olmalıdır.

İstatistiksel araştırma sorusunda "Soru kimin hakkında?" ifadesinin cevabı görülmelidir.

4. Değişken açık bir şekilde görülmelidir.

İstatistiksel araştırma sorusunda "Soru hangi veriler hakkında?" sorusunun cevabı görülmelidir.

5. Veri toplanarak cevaplanabilmelidir.

Araştırma sorusu birincil veya ikincil verilerle cevaplanabilmelidir. Ayrıca ölçümün nasıl yapılacağı görülmelidir.

Birincil veriler, araştırma sorusunu cevaplamaya yönelik verilerin araştırmacılar tarafından toplanarak oluşturulur. Hazır veriler, başkaları tarafından önceden toplanmış mevcut verilerdir.

6. Değişebilirliği yansıtmalıdır.

Değişebilirlik kavramı, istatistiksel araştırma sürecinin merkezinde yer alır. İstatistiksel araştırmalarda toplanan verilerden yola çıkarak sonuçlara ulaşmak, değişebilirliği anlamak ve anlamlandırmakla ilgilidir. Değişebilirliğin dört farklı türü bulunmaktadır.

- Doğal ortamdan kaynaklı değişebilirlik
- Ölçümden kaynaklı değişebilirlik
- Müdahaleden kaynaklı değişebilirlik
- Örneklemden kaynaklı değişebilirlik

7. Odaklanılan grup araştırma yapılmasına imkân vermelidir.

Soru, verileri tek tek ya da veri dağılımını bütüncül olarak incelemeye yönelik analize imkân vermelidir. Örneğin bir grupta kimin en uzun olduğu şeklinde bir soru uygun değildir. Uygun olansa gruptaki öğrencilerin boylarının merkezinin nasıl eğilim gösterdiğine odaklanmaktır.

8. Nicel veri toplamaya uygun olmalıdır.

Tek nicel değişkenli veri toplamayı gerektiren araştırmalarda veriler, bir grubun belli bir özelliğinin sayılması veya ölçülmesiyle elde edilen veriler olmalıdır.

ÖRNEK: Aşağıdaki tabloda boş bırakılan bölümleri verilen durumlarda ortaya çıkabilecek değişebilirlik türlerini belirleyerek doldurunuz.

DURUM	DEĞİŞEBİLİRLİK TÜRÜ VE GEREKÇESİ
Bir kişinin kronometre ile aynı yükseklikten 50 kez bırakılan bir cismin düşme süresini belirlemesi	
İki gruba ayrılan aynı türden 40 balığın tuzluluk oranları farklı iki akvaryumda gelişimlerinin gözlemlenmesi	
500 kişilik bir gruptan rastgele belirlenen ellişer kişilik iki gruba aynı ölçeğin uygulanması	
Bir şehirdeki doğal su kaynaklarının kirlilik derecesini belirlemek için 70 farklı doğal su kaynağından alınan su numunelerindeki kirlilik derecesinin belirlenmesi	

ÇÖZÜM:

DURUM	DEĞİŞEBİLİRLİK TÜRÜ VE GEREKÇESİ
Bir kişinin kronometre ile aynı yükseklikten 50 kez bırakılan bir cismin düşme süresini belirlemesi	(Ölçüm kaynaklı değişebilirlik) Aynı koşullar altında bile kronometre kullanımı ve çevresel etkenler küçük zaman farklarına yol açabilir.
İki gruba ayrılan aynı türden 40 balığın tuzluluk oranları farklı iki akvaryumda gelişimlerinin gözlemlenmesi	(Müdahaleden kaynaklı değişebilirlik) Ortam koşulları (tuzluluk oranı) faklıdır.
500 kişilik bir gruptan rastgele belirlenen ellişer kişilik iki gruba aynı ölçeğin uygulanması	(Örneklem kaynaklı değişebilirlik) Rastgele seçilen gruplar farklı bireylerden oluştuğu için sonuçlar arasında farklılıklar olabilir.
Bir şehirdeki doğal su kaynaklarının kirlilik derecesini belirlemek için 70 farklı doğal su kaynağından alınan su numunelerindeki kirlilik derecesinin belirlenmesi	(Doğal ortamdan kaynaklı değişebilirlik) Her su kaynağının bulunduğu çevre farklıdır, bu da kirlilik düzeylerinde değişkenliğe neden olur.

SIRA SİZDE 2.

Aşağıdaki durumlarda ortaya çıkabilecek değişebilirlik türünü belirleyerek tabloyu doldurunuz.

DURUM	DEĞİŞEBİLİRLİK TÜRÜ VE GEREKÇESİ
Bir paketin ağırlığının 10 kez aynı tartı ile ölçülmesi	
Farklı şehirlerdeki hava sıcaklıklarının aynı gün içinde karşılaştırılması	
Aynı türden 20 bitkinin farklı ışık koşullarında büyüme hızlarının gözlemlenmesi	
Bir okulda rastgele seçilen öğrencilerin boy uzunluklarının ortalamaları	
Aynı yaş grubundaki bireylerin günlük su tüketim miktarlarının belirlenmesi	

ÖRNEK: Bir belediye, şehirdeki park kullanım alışkanlıklarını incelemek ve yeni yeşil alan projelerini planlamak amacıyla bir araştırma başlatmıştır. Bu kapsamda, farklı yaş gruplarından bireylerin parkta geçirdikleri haftalık ortalama süreler ölçülerek, şehir sakinlerinin açık alanlara olan ilgisi değerlendirilecektir. Bu araştırma doğrultusunda A ilçesinde yaşayan bireylerin parklarda geçirdikleri süre (dakika) ölçülmüştür. Buna yönelik belirlenen araştırma soruları aşağıdaki gibidir.

a) A ilçesinde yaşayan bireylerin parkta geçirdikleri haftalık ortalama sürelerin dakika cinsinden eğilimi nasıldır?

b) 18-25 yaş arası bireyler ile 50 yaş üstü bireylerin haftalık ortalama parkta geçirdikleri süreler arasında anlamlı bir fark var mıdır?

Buna göre oluşturulan soruları istatistiksel araştırma sorusunda olması gereken ölçütlere göre inceleyiniz. Sorularda ilgili ölçütlerde uygun olmayan ifadeler bulunduğunu düşünüyorsanız soruları yeniden oluşturunuz.

ÇÖZÜM:

a) Bağlamda verilen amaç doğrultusunda "A ilçesinde yaşayan bireylerin parkta geçirdikleri haftalık ortalama sürelerin dakika cinsinden eğilimi nasıldır?" şeklinde oluşturulan istatistiksel araştırma sorusunun ilgili ölçütlere göre incelemesi aşağıda verilmiştir.

ARAŞTIRMA SORUSU ÖLÇÜTLERİ	SORUNUN İLGİLİ ÖLÇÜTÜ KARŞILAYIP KARŞILAMADIĞINA DAİR FİKİRLERİNİZ
Amaç açık mıdır?	Amaç açıktır. Bireylerin parkta geçirdiği süreyi betimlemek ve yaş gruplarını karşılaştırmak amaçlanmıştır.
Araştırmaya değer midir?	Şehir planlaması ve yeşil alan ihtiyacının belirlenmesi açısından oldukça değerlidir.
İlgilenilen grup (evren) açıkça görülmekte midir?	İlgilenilen evren açıktır; "A ilçesinde yaşayan bireyler" açıkça belirtilmiştir.
Değişken açıkça görülmekte midir?	Haftalık parkta geçirilen süre (dakika veya saat cinsinden) açık bir nicel değişkendir.
Veri toplanarak cevaplanabilir mi?	Soru birincil verilerle cevaplanabilecek yapıdadır. Anket, gözlem veya mobil uygulama verileriyle kolayca toplanabilir.
Değişebilirliği yansıtmakta mıdır?	Bireylerin yaşam tarzı, yaşı ve alışkanlıkları sürelerde doğal değişkenlik yaratır.
Odaklanılan grup araştırma yapılmasına imkân vermekte midir?	A ilçesindeki bireylere ulaşmak mümkündür; araştırma uygulanabilir.
Nicel veri toplamayı gerektirir mi?	Süre ölçümleri sayısal veri gerektirir; bu da nicel veri toplamayı zorunlu kılar.

"A ilçesinde yaşayan bireylerin parkta geçirdikleri haftalık ortalama sürelerin dakika cinsinden eğilimi nasıldır?" sorusunun istatistiksel araştırma sorusu ölçütlerinin tamamını yansıttığı görülmektedir.

b) Bağlamda verilen amaç doğrultusunda 18-25 yaş arası bireyler ile 50 yaş üstü bireylerin parkta geçirdikleri haftalık ortalama süreler arasında anlamlı bir fark var mıdır?" şeklinde oluşturulan istatistiksel araştırma sorusunun ilgili ölçütlere göre incelemesi aşağıda verilmiştir.

ARAŞTIRMA SORUSU ÖLÇÜTLERİ	SORUNUN İLGİLİ ÖLÇÜTÜ KARŞILAYIP KARŞILAMADIĞINA DAİR FİKİRLERİNİZ
Amaç açık mıdır?	Bireylerin parkta geçirdiği süreyi betimlemek ve yaş gruplarını karşılaştırmak amaçlanmıştır.
Araştırmaya değer midir?	Şehir planlaması ve yeşil alan ihtiyacının belirlenmesi açısından oldukça değerlidir.
İlgilenilen grup (evren) açıkça görülmekte midir?	İlgilenilen grup park ziyaretinde bulunan bireylerdir ancak bu bireylerin tek bir ilçeden mi belirleneceği belli değildir. Ölçümün nasıl yapılacağı görülmemektedir. Örneğin soruya eklenecek "... kaç dakikadır?" ifadesi ölçümle ilgili fikir verecektir.
Değişken açıkça görülmekte midir?	Parkta haftalık geçirilen süre (dakika veya saat cinsinden) açık bir nicel değişkendir.
Veri toplanarak cevaplanabilir mi?	Soru birincil verilerle cevaplanabilecek yapıdadır. Anket, gözlem veya mobil uygulama verileriyle kolayca toplanabilir.
Değişebilirliği yansıtmakta mıdır?	Bireylerin yaşam tarzı, yaşı ve alışkanlıkları sürelerde doğal değişkenlik yaratır.
Odaklanılan grup araştırma yapılmasına imkân vermekte midir?	Soru, 18-25 yaş ve 50 yaş üstü bireylerin park ziyaret sürelerinin karşılaştırılması için parkta geçirilen zaman ölçümü ile elde edilen verilerin tamamını analiz etmeye yöneliktir.
Nicel veri toplamayı gerektirir mi?	Süre ölçümleri sayısal veri gerektirir, bu da nicel veri toplamayı zorunlu kılar.

"18-25 yaş arası bireyler ile 50 yaş üstü bireylerin parkta geçirdikleri haftalık ortalama süreler arasında anlamlı bir fark var mıdır?" sorusunun istatistiksel araştırma sorusu ölçütlerinin tamamını yansıtmadığı görülmektedir. Soru, bu ölçütlere uygun olarak aşağıdaki gibi yeniden oluşturulabilir.

"A ilçesinde yaşayan 18-25 yaş arası ve 50 yaş üzeri bireylerin parkta geçirdikleri haftalık ortalama süreler, dakika cinsinden nasıl bir farklılık göstermektedir?"

NİCEL VERİ TOPLAMA PLANI YAPMA, VERİLERİ TOPLAMA VE ANALİZE HAZIR HÂLE GETİRME

İstatistiksel araştırma sürecinde ikinci aşama, oluşturulan istatistiksel araştırma sorusu veya soruları doğrultusunda veri toplama planı yapma ve verileri analize hazır hâle getirme aşamasıdır. Bu aşamada dikkat edilmesi gereken bazı özellikler aşağıda yer almaktadır.

Araştırma sorularına cevap bulmayı sağlayacak veri toplama araçları belirlenmelidir.

İstatistiksel araştırma sürecinde istatistiksel araştırma soruları oluşturulduktan sonra bu soruları cevaplamaya yönelik veri toplama araçlarını belirlemesi gerekmektedir. Bu doğrultuda, birincil verilerle çalışılacaksa anket oluşturulabilir, görüşmeler yapılabilir ya da başka araştırmacılar tarafından geliştirilen anket, ölçek veya görüşme formları kullanılabilir. İkincil verilerle çalışılacaksa başka araştırmacılar tarafından elde edilen veri setlerine ulaşılabilir.

Evren ve örneklem belirlenmelidir.

Evren ve evreni yansıtacak örneklemin belirlenmesi, veri toplama planında dikkat edilmesi gereken bir durumdur. Örneğin Türkiye'deki lise öğrencilerinin üniversite sınavı motivasyon düzeylerinin araştırıldığı bir çalışmada Türkiye'deki tüm lise öğrencileri evreni oluşturur. Bu çalışmada zaman, maliyet, iş gücü gibi nedenlerden dolayı evrenin tamamına ulaşmak zor olacağından Türkiye'deki öğrenciler arasından belli ölçütlere göre belirlenen öğrenciler örneklemi oluşturur. Örneklemin örneklem belirleme ölçütlerine göre seçilmesi önemlidir.

- Rastgelelik sağlanmalıdır.

  Bir evrenden örneklem seçerken evrendeki her elemanın seçilme olasılığının eşit olmasını sağlamak önemlidir. Bunun en kolay yollarından biri basit rastgele örneklemedir. Basit rastgele örneklemede örneklem için seçilen her birimin seçilme olasılığı eşittir. Örneğin evrende yer alan elemanların isimlerinin yazılı olduğu kâğıtlar veya elemanlara verilen numaraların yazılı olduğu kâğıtlar bir torbaya konur. Örneklem için belirlenen sayı kadar kâğıt çekilerek örneklem belirlenebilir.

Değişkenler belirlenmelidir.

İstatistiksel bir araştırmada araştırılmak istenen değişkeni etkileyecek farklı değişkenlerin neler olduğunu belirlemek gerekir. Genellikle deney yoluyla veri toplanan çalışmalarda bu duruma dikkat edilir.

Verilerin nerede, ne zaman, nasıl ve kimler tarafından toplanacağı belirlenmelidir.

Verilerin nerede, hangi zaman diliminde, ne kadar sürede, kimler tarafından ve ne şekilde (yüz yüze, çevrim içi) toplanacağı belirlenmelidir.

Verilerin nasıl kaydedileceği belirlenmelidir.

Verilerin hangi araçlarla, ne şekilde kayıt altına alınacağı belirlenmelidir.

Verilerin gizliliğine dikkat edilmeli, dürüst ve nesnel olunmalıdır.

Veri toplama aracında kişisel verilerin korunmasına dikkat edilmeli, kişilerin haklarını ihlal edecek veriler toplanmamalıdır.

DİKKAT! İnsanların ve diğer canlıların sağlığını tehlikeye sokacak çalışmalar yapılmamalıdır. Araştırma için gerekliyse ilgili makamlardan resmî izin alınmalıdır. Ayrıca araştırmaya katılacak reşit olmayan katılımcının yasal vasisinden onay alınmalıdır. Araştırmacı veriler üzerinde oynama yapmamalı ve beklentisi doğrultusunda verileri değiştirmemelidir.

ÖRNEK: Bir ilçede bulunan ilçe sağlık müdürlüğü, gençlerin sağlıklı yaşam alışkanlıklarını geliştirmek amacıyla bir araştırma başlatmak istemektedir. Müdürlük, ilçedeki bir lisenin rehber öğretmenleriyle iş birliği yaparak 9. sınıf öğrencilerinin günlük kahvaltı yapma durumlarını incelemeyi planlamaktadır. Araştırmada öğrencilerin kahvaltı yapma sıklığı ile gün içindeki derslere odaklanma düzeyleri arasındaki ilişkiyi belirlemek amaçlanmaktadır. A Lisesinde öğrenim gören 9. sınıf öğrenci sayısı 540'tır. İlçe Sağlık Müdürlüğünce kurulan ekip, gerçekleştirilecek araştırma doğrultusunda araştırma sorularını aşağıdaki şekilde belirlemiştir.

"A Lisesinde öğrenim gören 9. sınıf öğrencilerinin haftalık kahvaltı yapma sıklıkları nasıl bir eğilim göstermektedir?"

"A Lisesinde öğrenim gören 9. sınıf öğrencilerinin kahvaltı yapma sıklıkları ile derslerde odaklanma düzeyleri arasında nasıl bir ilişki vardır?"

İlçe Sağlık Müdürlüğü, araştırma kapsamında 120 öğrenciye ulaşarak veri toplamak istemektedir.

Buna göre veri toplama planında bulunması gereken özellikleri dikkate alarak araştırmaya yönelik bir veri toplama planı hazırlayınız.

ÇÖZÜM:

Araştırmanın amacı ve veri toplama planında bulunması gereken özellikler dikkate alınarak veri toplama planı aşağıdaki gibi oluşturulabilir.

1. Adım: Araştırma sorularına cevap bulmayı sağlayacak veri toplama aracının belirlenmesi

Araştırmada biri betimleyen, diğeri karşılaştıran iki adet istatistiksel araştırma sorusu bulunmaktadır. Araştırma, birincil veriler kullanılarak gerçekleştirilebilir. Bu amaçla araştırma sorularına cevap almaya yönelik bir anket, veri toplama aracı olarak kullanılabilir. Araştırma soruları doğrultusunda öğrencilerin kahvaltı yapma sıklıkları ve derse odaklanma düzeyinin öğrenilmesi gerekmektedir. Bu doğrultuda anket aşağıdaki gibi oluşturulabilir.

Haftada kaç gün kahvaltı yapıyorsunuz? (0-7 gün)

Cevabınız:

Kahvaltı yaptığınız günlerde derslere odaklanma düzeyinizi nasıl değerlendirirsiniz?

Çok düşük ( ) Düşük ( ) Orta ( ) Yüksek ( ) Çok yüksek ( )

2. Adım: Evren ve örneklemin belirlenmesi

Araştırma, A Lisesinde öğrenim gören 9. sınıf öğrencilerine yönelik olarak gerçekleştirilecektir. Bu nedenle araştırmanın evreni bu okulda 9. sınıf seviyesinde öğrenim gören öğrencilerin tamamıdır. Örneklemi ise bu öğrenciler arasından belirlenen 120 öğrencidir.

3. Adım: Rastgeleliğin sağlanması

İstatistiksel araştırmalarda örneklemin evreni temsil etmesi gerekmektedir. Okulda bulunan tüm öğrencilere anketi uygulamak zaman, maliyet ve iş gücü bakımından mümkün olmayabilir ancak 540 öğrenci içinden örneklem olarak 120 öğrencinin belirlenmesinde rastgeleliğin sağlanması önemlidir. Zira seçilecek öğrencilerden elde edilecek sonuçların tüm okuldaki öğrencileri temsil etmesi gerekmektedir. Öğrencilerin isimlerinin veya numaralarının yazılı olduğu kâğıtların bir torbaya konulması ve bu kâğıtlardan rastgele 120 tanesinin çekilmesiyle örneklem belirlenebilir.

4. Adım: Verilerin nerede, ne zaman, nasıl ve kimler tarafından toplanacağının belirlenmesi

Veriler, yüz yüze uygulama ile anket formları kullanılarak ya da dijital anket araçları ile toplanabilir. Veri toplama türüne uygun bir yöntemle verilecek yönergeyle öğrencilere araştırmanın amacı ve uygulama süreci hakkında bilgi verilir. Örneklemdeki öğrenci sayısı göz önünde bulundurularak verilerin toplanması planlanabilir.

5. Adım: Verilerin kaydedilmesi

Veriler elektronik tablolama programına, istatistik yazılımlarına kaydedilebilir.

6. Adım: Verilerin gizliliğinin sağlanması, nesnel ve dürüst olunması

Veri toplama aşamasında kişisel verilerin korunmasına dikkat edilmeli, kişilerin haklarını ihlal edecek verilerin toplanmasından kaçınılmalıdır. Ayrıca toplanan veriler araştırmacının beklentileri doğrultusunda değiştirilmemelidir.

SIRA SİZDE 3.

Lise öğrencilerinin hafta içi günlük ekran süresi (dakika cinsinden) ile ilgili bir araştırma yapılacaktır.

a) Bu araştırmaya yönelik birer adet betimleyen ve karşılaştıran istatistiksel araştırma sorusu yazınız. Sorularınızı yazarken istatistiksel araştırma sorusu ölçütlerini dikkate alınız.

Betimleyen istatistiksel araştırma sorunuz:

Karşılaştıran istatistiksel araştırma sorunuz:

b) Araştırma sorularınız doğrultusunda grubunuzla veri toplama planınızı hazırlayınız.

Veri Toplama Planı:

NOT

NİCEL VERİYE DAYALI İSTATİSTİKSEL ARAŞTIRMALARDA VERİ ANALİZİ YAPMA VE SONUÇLARI YORUMLAMA

İstatistiksel araştırma sorusu veya soruları doğrultusunda toplanan verileri analiz edebilmek için merkezî eğilim ve merkezî yayılım ölçüleri kullanılır.

Merkezî Eğilim Ölçüleri

Verilerin hangi değer etrafında toplandığını gösterir.

Mod (Tepe Değer)

Veri grubunda en çok tekrar eden değerdir.

➢ Bir sayı dizisindeki sayılar birbirinden farklı ise bu sayı dizisinin modu yoktur.

➢ Bir sayı dizisindeki verilerin hepsi aynı sayıda tekrarlanıyorsa bu sayı dizisinin modu yoktur.

➢ Bir sayı dizisinde en çok tekrar eden sayılar aynı sayıda olmasına rağmen art arda değilse bu sayı dizisinin birden fazla modu vardır.

Medyan (Ortanca)

Veriler sıralandıktan sonra veri sayısı tek ise tam ortadaki terim, veri sayısı çift ise ortadaki iki terimin toplamının yarısı **medyandır (Ç2).**

Aritmetik Ortalama

Bir sayı dizisindeki elemanların toplamının eleman sayısına bölünmesi ile elde edilir.

Çeyreklikler

Veriler küçükten büyüğe sıralandığında ortancadan küçük olan değerlerin ortancası birinci çeyrek (alt çeyrek), (Ç1); ortanca ikinci çeyrek (Ç2); ortancadan büyük olan verilerin ortancası üçüncü çeyrek (üst çeyrek), (Ç3) değeridir.

Merkezî Yayılım Ölçüleri

Verilerin birbirlerinden ne kadar uzak olduklarını gösterir.

En Büyük, En Küçük Değer

Bir sayı dizisindeki sayılar küçükten büyüğe doğru sıralandığında en küçük sayıya **en küçük değer**, en büyük sayıya da **en büyük değer** denir.

Açıklık

Bir veri grubundaki en büyük değer ile en küçük değer arasındaki farka **açıklık** denir.

Ortalama Mutlak Sapma

Bir dağılımdaki her bir verinin ortalamadan ne kadar saptığına odaklanır. Bu sapmaların mutlak değerlerinin ortalaması ortalama mutlak sapma değerini verir. Ortalama mutlak sapma, dağılımdaki verilerin nasıl yayıldığına ilişkin bilgi verse de dağılımın bütününü temsil etmekte yetersiz kalabilir. Bu noktada verilerin nasıl yayıldığını belirleyebilmek için dağılımdaki tüm verileri dikkate alarak daha hassas bir özetleme aracı olan standart sapma kullanılabilir.

Standart Sapma

Verilerin ortalamaya göre yayılımını gösteren istatistiksel bir ölçüdür.

Standart sapmayı bulurken sırasıyla aşağıdaki adımlar izlenir.

1. Her bir verinin aritmetik ortalamadan farkının karesi alınır ve toplanır.

2. Bulunan toplam, veri sayısının bir eksiğine bölünür ve elde edilen sonucun karekökü alınır.

Çeyrekler Açıklığı

Sıralanmış bir veri dizisinin ortanca etrafında toplanmış %50'sini diğer bir deyişle Ç3 ile Ç1 aralığını (Ç3-Ç1) gösteren bir yayılım ölçüsüdür.

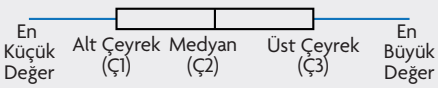
NOT

İstatistikte kullanılan veri görselleştirme araçları veriyi sadeleştirerek daha hızlı ve kolay yorumlanmasını sağlar.

Grafikler

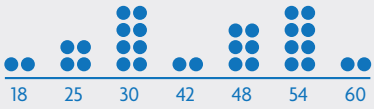
Kutu Grafiği

Bir dağılımın en küçük değer, alt çeyrek değer (Ç1 veya %25'lik dilim), ortanca (Ç2 veya %50'lik dilim), üst çeyrek değer (Ç3 veya %75'lik dilim) ve en büyük değerden oluşan beş sayılı özetinin görselleştirilmesi için kullanılan grafik türüdür.



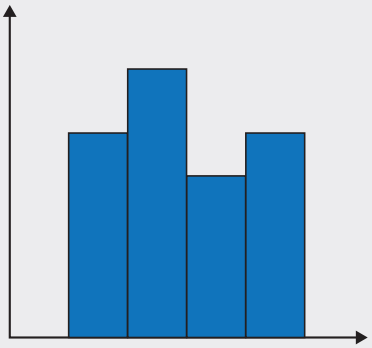
Nokta Grafiği

Veri değerlerini sayı doğrusu üzerinde noktalarla gösteren bir görselleştirme aracıdır. Her bir veri, o değerin üzerine bir nokta olarak yerleştirilir. Aynı değerden birden fazla varsa noktalar üst üste dizilir.

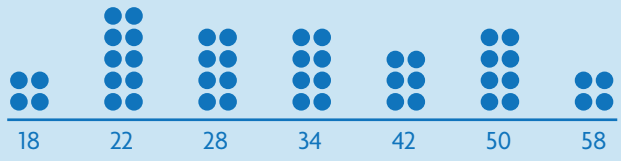


Histogram

Verilerin belli aralıklardaki sıklığını sütunlarla gösteren bir veri görselleştirme aracıdır.



ÖRNEK: İlerleyen günlerde yapılacak belediye başkanlığı seçiminde aday olacak A adayı, seçim kampanyasının odak noktasını belirlemek için hangi yaş grubundaki seçmenler üzerinde daha etkili olduğunu öğrenmek istemektedir. Bunun için "Belediye başkanlığı seçiminde A adayına oy verecek seçmenlerin yaşları nasıl bir eğilim gösterir?" araştırma sorusu oluşturulmuştur. Bu soru doğrultusunda toplanan nicel veri dağılımı aşağıdaki grafikte verilmiştir.



a) Veri grubunun modunu (tepe değeri), medyanını (ortanca) ve aritmetik ortalamasını bulunuz.

b) Veri grubunun en büyük değerini, en küçük değerini, açıklığını ve çeyreklerini bulunuz.

c) A adayına oy verecek seçmen yaşlarına ait veri dağılımı yaş cinsinden nasıl bir eğilim göstermektedir?

ç)A adayına oy verecek seçmen yaşlarına ait veri dağılımının merkezine yığılan yaşlar hangi aralıklarda yoğunlaşmaktadır?

d) A adayına oy verecek seçmen yaşlarının 5 yıllık zaman aralıklarındaki yoğunluğu nasıldır?

ÇÖZÜM:

a) Veri grubunun modu (tepe değeri) en fazla tekrarlanan 22'dir.

Veri grubunun medyanı (ortanca) için 48 adet veriyi küçükten büyüğe dizdiğimizde

18	18	18	18	22	22	22	22	22	22	22	22	22	22	28	28
28	28	28	28	28	28	34	34	34	34	34	34	34	34	42	42
42	42	42	42	50	50	50	50	50	50	50	50	58	58	58	58

olur. Ortada kalan 34 ve 34'ün toplamının yarısı olan 34 veri grubunun medyanıdır.

Aritmetik ortalama ise ---- olarak bulunur.

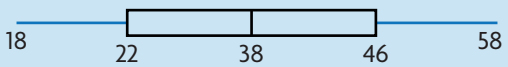
b) Veri grubunun en küçük değeri 18, en büyük değeri ise 58'dir. Dolayısıyla açıklığı 58 – 18 = 40'tır.

Birinci çeyrek (alt çeyrek) ilk 24 verinin ortancası olduğundan Ç1 = (22 + 22) : 2 = 22,

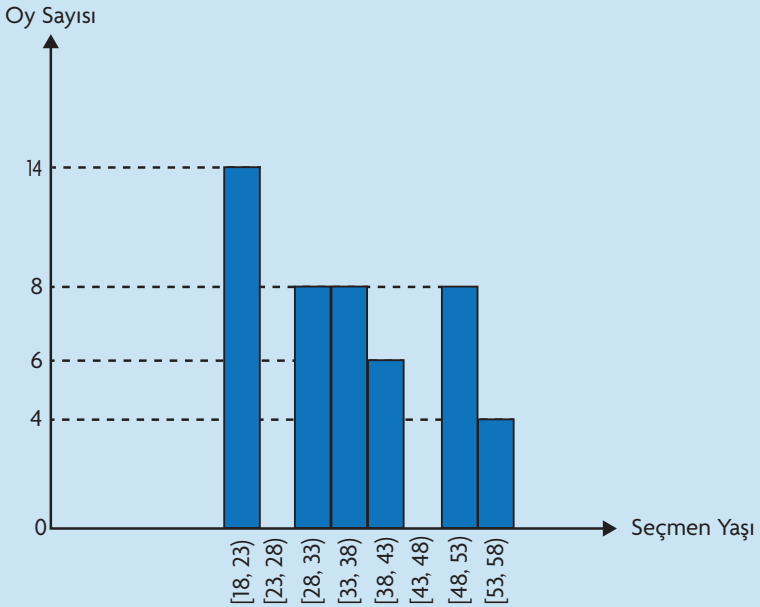
üçüncü çeyrek (üst çeyrek) ise son 24 verinin ortancası olduğundan Ç3 = (42 + 50) : 2 = 46'dır.

c) A adayına oy verecek seçmen yaşlarına ait veri dağılımının yaş cinsinden nasıl bir eğilim gösterdiğini anlamak için merkezî eğilim ölçülerinden aritmetik ortalama ve ortanca değerine bakılmalıdır. Veri grubuna ait medyan 34, aritmetik ortalama 34,83'tür. Aritmetik ortalama uç değerlerden etkilenir, medyan uç değerlerden etkilenmez. Dolayısıyla A adayına oy verecek seçmenleri temsil eden yaş için ortanca değeri olan 34 tercih edilebilir.

ç) A adayına oy verecek seçmenlerin yaşlarına ait veri dağılımının merkezine yığılan yaşların hangi aralıklarda yoğunlaştığını görebilmek için kutu grafiği incelenmelidir. Veri dağılımına ait kutu grafiği aşağıdaki gibidir.



d) A adayına oy verecek seçmen yaşlarının 5 yıllık zaman aralıklarında nasıl yoğunlaştığını görebilmek için incelenmesi gereken veri görselleştirme aracı histogram grafiğidir. Veri dağılımının 5 yıllık zaman aralıklara göre histogram grafiği aşağıdaki gibidir.



Grafiğe göre A adayına oy verecek 14 seçmen 18 ile 23, 8 seçmen 28 ile 33, 8 seçmen 33 ile 38, 6 seçmen 38 ile 43, 8 seçmen 48 ile 53, 4 seçmen 53 ile 58 yaşları arasındadır. Ayrıca 23 ile 28 ve 43 ile 48 yaşları arasında oy verecek seçmen bulunmamaktadır.

SIRA SİZDE 4.

Boğaziçi Kıtalar Arası Yüzme Yarışması'na hazırlanan bir sporcu antrenmanlarını aynı parkurda yapmıştır. Sporcunun antrenörü, sporcunun antrenmanlarda parkuru tamamlama sürelerini (dakika cinsinden) aşağıdaki şekilde kaydetmiştir.

56	56	55	54	55	56	55	53	53	52	53	54	56	51	52	51	53	53	54	54	53	51	52	53	55	55	56	55	54	52

Yüzme kulübü, sporcuya ait 30 antrenmandaki parkuru tamamlama sürelerinden yola çıkarak aşağıdaki soruları hazırlamıştır. Hazırlanan soruları uygun görselleştirme ve/veya özetleme araçlarını seçerek cevaplayınız.

a) Sporcunun yaptığı 30 antrenmanda parkuru tamamlama süreleri arasında en düşük performans ile en yüksek performans arasındaki fark kaç saniyedir?

b) Sporcunun parkuru tamamlama süreleri dakika cinsinden nasıl bir eğilim göstermektedir? Açıklayınız.

c) Sporcunun parkuru tamamlama sürelerine ait veri dağılımının merkezine yığılan süreler, dakika cinsinden hangi aralıklarda yoğunlaşmaktadır?

ç) Sporcunun parkuru tamamlama süreleri 1 dakikalık zaman aralıklarında nasıl yoğunlaşmaktadır? Açıklayınız.

GERİ BİLDİRİM:

Bu geri bildirim sayesinde kendi cevabınızı kontrol edebilir, hatalarınızı düzelterek öğrenmenizi pekiştirebilirsiniz.

SIRA SİZDE 1.

ÇÖZÜM

Aşağıdaki tabloda verilen gerçek yaşam durumlarına yönelik tek nicel değişkenli veri toplamayı gerektiren bağlamlar oluşturarak ilgili sütuna yazınız. Boş bırakılan gerçek yaşam durumu kutucuğuna merak ettiğiniz, ilgi duyduğunuz bir gerçek yaşam durumunu ve bu gerçek yaşam durumuna yönelik tek nicel değişkenli veri toplamayı gerektiren bir bağlam yazınız.

GERÇEK YAŞAM DURUMLARI	TEK NİCEL DEĞİŞKENLİ VERİ TOPLAMAYI GEREKTİREN BAĞLAM
Ekonomi	Aylık ortalama kira fiyatlarının değişimi
Doğa	Yaz mevsiminde günlük ölçülen sıcaklık değerlerinin değişimi
Spor	Voleybol milli takımının maç başına doğrudan sayı kazandırdığı servis sayısı
Sağlık	Hastaneleri ziyaret eden hasta sayısı

SIRA SİZDE 2.

ÇÖZÜM

DURUM	DEĞİŞEBİLİRLİK TÜRÜ VE GEREKÇESİ
Bir paketin ağırlığının 10 kez aynı tartı ile ölçülmesi	(Ölçüm kaynaklı değişebilirlik) Tartının hassasiyeti ölçümü etkileyebilir.
Farklı şehirlerdeki hava sıcaklıklarının aynı gün içinde karşılaştırılması	(Doğal ortamdan kaynaklı değişebilirlik) Şehirlerin bulunduğu farklı coğrafi konumlardan dolayı sıcaklık farkı oluşur.
Aynı türden 20 bitkinin farklı ışık koşullarında büyüme hızlarının gözlemlenmesi	(Müdahaleden kaynaklı değişebilirlik) Ortam koşulları (ışık miktarı) faklıdır.
Bir okulda rastgele seçilen öğrencilerin boy uzunluklarının ortalamaları	(Örneklemden kaynaklı değişebilirlik) Rastgele seçilen öğrencilerin yaş veya cinsiyete bağlı olarak boy uzunlukları değişebilir.
Aynı yaş grubundaki bireylerin günlük su tüketim miktarlarının belirlenmesi	(Müdahaleden kaynaklı değişebilirlik) Beslenme alışkanlıkları, sağlık durumu ve kişisel tercihler su tüketiminde farklılık yaratır.

SIRA SİZDE 3.

ÇÖZÜM

a)

Betimleyen istatistiksel araştırma sorunuz:

A Lisesi 9. sınıf öğrencilerinin hafta içi geçirdikleri günlük ekran süreleri (dakika) nasıl bir dağılım göstermektedir?

Karşılaştıran istatistiksel araştırma sorunuz:

A Lisesi 9. sınıf öğrencilerinin hafta içi geçirdikleri günlük ekran süreleri, cinsiyete göre dakika cinsinden nasıl farklılık göstermektedir?

b)

Araştırma sorularınız doğrultusunda grubunuzla veri toplama planınızı hazırlayınız.

Veri Toplama Planı

1. Veri Toplama Aracı

   Anket Formu Örneği:

   • Cinsiyetiniz: Kız ( ) Erkek ( )

   • Hafta içi bir günde ortalama kaç dakika ekran başında vakit geçiriyorsunuz? (Telefon, bilgisayar, tablet vb.)

   Cevabınız: ..... dakika

2. Evren ve Örneklem

   Evren: A Lisesindeki tüm 9. sınıf öğrencileri

   Örneklem: Basit rastgele örnekleme ile seçilecek 100 öğrenci

3. Rastgelelik Yöntemi

   Öğrencilerin numaraları bir listeye yazılır. Bilgisayar programı veya kura yöntemiyle 100 öğrenci rastgele seçilir.

4. Değişkenler

   Günlük ekran süresi (dakika)

5. Veri Toplama Süreci

   • Yüz yüze uygulama: Sınıfta rehber öğretmen eşliğinde

   • Dijital uygulama: Google Form veya okulun dijital platformu

   • Bilgilendirme: Katılımcılara araştırmanın amacı açıklanır.

6. Verilerin Kaydedilmesi

   Excel veya istatistik yazılımına şu alanlarla girilir:

   • Öğrenci kodu

   • Cinsiyet

   • Günlük ekran süresi (dk.)

7. Gizlilik ve Etik

   • İsim yerine kod kullanılır.

   • Veriler şifreli dosyada saklanır.

   • Katılım gönüllülük esasına dayanır.

   • Veriler üzerinde değişiklik yapılmaz.

SIRA SİZDE 4.

ÇÖZÜM

a) Sporcunun antrenmanlarındaki parkuru tamamlama süreleri değerlendirilirken en büyük değer olan en düşük performans ile en küçük değer olan en yüksek performans arasındaki farkı belirlemek için yayılım ölçülerinden açıklık değerine bakılmalıdır. Veri dağılımının en büyük değeri 56, en küçük değeri 51 olduğundan açıklık 56 – 51 = 5'tir.

b)Sporcunun antrenmanlarındaki parkuru tamamlama sürelerini yaklaşık olarak belirleyebilmek için merkezî eğilim ölçülerinden aritmetik ortalama ve ortanca değerine bakılmalıdır.

Sporcunun yaptığı antrenmanlarda parkuru tamamlama sürelerine ait veri dağılımı şöyledir:

51	51	51	52	52	52	52	53	53	53	53	53	53	53	54	54	54	54	54	55	55	55	55	55	55	56	56	56	56	56

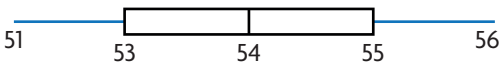
Veri dağılımının medyanı (ortanca), 30 terim olduğundan 15 ve 16. terimlerin toplamının yarısına eşittir. Buradan medyan (54 + 54) / 2 = 54'tür.

Veri dağılımının aritmetik ortalaması ..... dakikadır. Sporcunun parkuru tamamlama süresi yaklaşık 54 dakikadır.

c)Sporcunun antrenman sürelerine ait veri dağılımının merkezine yığılan sürelerin dakika cinsinden hangi aralıklarda yoğunlaştığını görebilmek için kutu grafiği incelenmelidir.

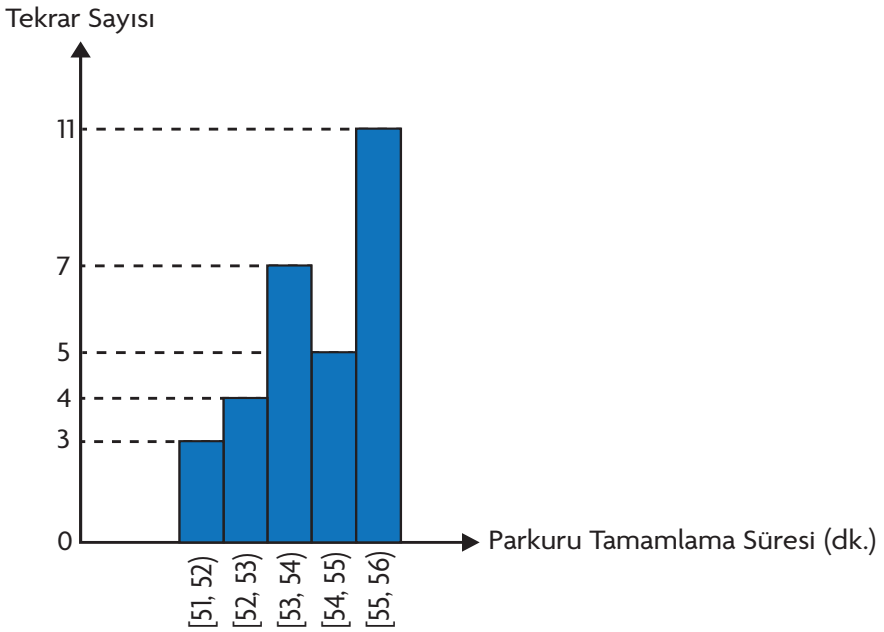
Veri dağılımının en küçük değeri 51, birinci çeyrek (alt çeyrek) 53 (İlk 15 terimin ortası olan 8. terimdir.), ortanca değer 54, üçüncü çeyrek (üst çeyrek) 55 (Son 15 terimin ortası olan 23. terimdir.), en büyük değer 56'dır.

Veri dağılımına ait kutu grafiği aşağıdaki gibidir.



Kutu grafiğine göre alt çeyrek ve üst çeyrek arasında 18 terim bulunduğundan terimlerin %60'ı bu aralıkta yoğunlaşmaktadır. Bu durumda merkeze yığılan dakikalar 53 ile 55 arasında yoğunlaşmaktadır.

ç) Sporcunun antrenman sürelerinin 1 dakikalık zaman aralıklarında nasıl yoğunlaştığını görebilmek için incelenmesi gereken görselleştirme aracı histogram grafiğidir. Veri dağılımının 1 dakikalık zaman aralıklarına göre histogram grafiği aşağıdaki gibidir.



Grafiğe göre sporcu; 3 kere 51 ile 52 dakika arasında, 4 kere 52 ile 53 dakika arasında, 7 kere 53 ile 54 dakika arasında, 5 kere 54 ile 55 dakika arasında ve 11 kere 55 ile 56 dakika arasında parkuru tamamlamıştır.

DEĞERLENDİRİYORUM

Amaç: Bu bölümde öğrendiklerinizi gözden geçirmenizi, kendi öğrenme sürecinizi değerlendirmenizi ve eksikliklerinizi fark etmenizi amaçlıyoruz.

Soruları dikkatle yanıtlayınız. Cevaplarınızı geri bildirimlerle karşılaştırarak eksik gördüğünüz noktaları tekrar ediniz.

SORULAR

1) Bir araştırma şirketi, A şehrindeki çevre kirliliğiyle ilgili bir araştırma yapmak istemektedir. Bu amaçla aşağıdaki soruları oluşturmuştur.

Bu sorulardan hangilerinin nicel veri toplamayı gerektiren araştırma sorusu olduğunu belirleyiniz. Araştırma sorusu olmadığını düşündüğünüz soruları uygun hâle getirerek tekrar yazınız.

I. **A şehrindeki sanayi tesislerine komşu olan parklar ile sanayiden uzak açık alanlarda bulunan parklardan alınan toprak örneklerinde bulunan ağır metal oranı (mg/kg) nasıl farklılık göstermektedir?**

II. **A şehrinde kaç tane su arıtma olduğunu bulunuz.**

III. **A şehrinde bulunan sıfır atık kutu (cam, metal, plastik, pil) sayısı sayısını bulunuz.**

IV. **A şehrindeki hastanelerin çevresindeki gürültü seviyeleri desibel cinsinden nasıl bir eğilim göstermektedir? Açıklayınız.**

2) Bir araştırmacı, Türkiye'deki üniversite öğrencilerinin yapay zekâ teknolojilerine olan ilgisini incelemek istemektedir.

Bu araştırmada veri toplanırken evren ve örneklem olarak aşağıdakilerden hangisinin seçilmesi uygun olur?

	Evren	**Örneklem**
A)	Türkiye'deki tüm bireyler	Türkiye'deki tüm üniversite öğrencileri
B)	Türkiye'deki tüm üniversite öğrencileri	İstanbul'daki üniversite öğrencileri
C)	İstanbul'daki üniversite öğrencileri	İstanbul'da bulunan A üniversitesindeki öğrencileri
D)	Türkiye'deki tüm üniversite öğrencileri	Türkiye'deki 500 üniversite öğrencisi
E)	Türkiye'deki tüm bireyler	Türkiye'deki 500 teknoloji çalışanı

3) Aşağıda verilen durumlarda ortaya çıkabilecek değişebilirlik durumunu işaretleyiniz.

a) Bir ortamın sıcaklığının aynı zamanda 10 farklı termometre ile ölçülmesi

☐ Doğal ortamdan kaynaklı değişebilirlik. ☐ Ölçümden kaynaklanan değişebilirlik.
☐ Müdahaleden kaynaklı değişebilirlik. ☐ Örneklemden kaynaklı değişebilirlik.

b) Bir okulda 7. sınıf öğrencilerinden rastgele seçilen 20 kişiye aynı sınavın uygulanması

☐ Doğal ortamdan kaynaklı değişebilirlik. ☐ Ölçümden kaynaklanan değişebilirlik.
☐ Müdahaleden kaynaklı değişebilirlik. ☐ Örneklemden kaynaklı değişebilirlik.

c) Farklı bölgelerde bulunan güneş panellerinin verimliliklerinin ölçülmesi

☐ Doğal ortamdan kaynaklı değişebilirlik. ☐ Ölçümden kaynaklanan değişebilirlik.
☐ Müdahaleden kaynaklı değişebilirlik. ☐ Örneklemden kaynaklı değişebilirlik.

d) Bir öğretmenin iki farklı sınıfa aynı konuyu farklı yöntemlerle anlatması

☐ Doğal ortamdan kaynaklı değişebilirlik. ☐ Ölçümden kaynaklanan değişebilirlik.
☐ Müdahaleden kaynaklı değişebilirlik. ☐ Örneklemden kaynaklı değişebilirlik.

e) Aynı yaş grubundaki bireylerden rastgele seçilen iki gruba aynı fiziksel aktivitenin uygulanması

☐ Doğal ortamdan kaynaklı değişebilirlik. ☐ Ölçümden kaynaklanan değişebilirlik.
☐ Müdahaleden kaynaklı değişebilirlik. ☐ Örneklemden kaynaklı değişebilirlik.

4) "60 yaş üstü bireylerin televizyon izleme süreleri saat cinsinden nasıl bir eğilim gösterir?" **sorusunun nicel veri toplamayı gerektiren istatistiksel araştırma sorusu ölçütlerinden hangilerini sağladığını Evet ve Hayır sütunlarından uygun olanı işaretleyerek doldurunuz.**

NİCEL VERİ TOPLAMAYI GEREKTİREN İSTATİSTİKSEL ARAŞTIRMA SORUSU ÖLÇÜTLERİ	EVET	HAYIR
Amaç açıktır. Betimlemeye veya karşılaştırmaya yönelik bir araştırma sorusudur.		
Araştırmaya değerdir.		
İlgilenilen grup (evren) açıkça görülmektedir.		
Değişken açıkça görülmektedir.		
Veri toplanarak cevaplanabilmektedir.		
Değişebilirliği yansıtmaktadır.		
Odaklanılan grup araştırma yapılmasına imkân vermektedir.		
Nicel veri toplamayı gerektirmektedir.		

5) Bir markette "Sıfır Atık Projesi" kapsamında ekim ayında toplanan günlük atık yağ miktarlarına (litre cinsinden) ait veriler aşağıda verilmiştir.

4	5	6	6	7	7	7	8	8	9	9	9	10	10	10	10	11	11	12	12	12	12	12	13	13	13	14	15	15	17	24

Buna göre markette toplanan atık yağ miktarına ait veri dağılımına ait kutu grafiğini çizerek veri dağılımının merkezine yığılan değerin litre cinsinden hangi aralıklarda yoğunlaştığını belirleyiniz.

GERİ BİLDİRİM
Bu geri bildirim sayesinde kendi cevabınızı kontrol edebilir, hatalarınızı düzelterek öğrenmenizi pekiştirebilirsiniz.

ÇÖZÜM 1.

I. Nicel veri toplamayı gerektiren araştırma sorusudur. (Nicel veri, toplamayı gerektiren istatistiksel araştırma ölçütlerinin hepsini sağlar.)

II. Nicel veri toplamayı gerektiren araştırma sorusu değildir. Soruyu aşağıdaki şekilde düzenleyebiliriz.

A şehrinde bulunan atık su tesislerinin yıllık toplam arıtma kapasitesi ile şehrin yıllık toplam atık su üretimi metreküp cinsinden nasıl farklılık gösterir?

III. Nicel veri toplamayı gerektiren araştırma sorusu değildir. Soruyu aşağıdaki şekilde düzenleyebiliriz.

A şehrinde bulunan sıfır atık kutularını (cam, metal, plastik, pil) kullanma alışkanlığı nasıl bir eğilim gösterir?

IV. Nicel veri toplamayı gerektiren araştırma sorusudur. (Nicel veri toplamayı gerektiren istatistiksel araştırma ölçütlerinin hepsini sağlar.)

ÇÖZÜM 2.

	Evren	**Örneklem**
D)	Türkiye'deki tüm üniversite öğrencileri	Türkiye'deki 500 üniversite öğrencisi

ÇÖZÜM 3. Aşağıda verilen durumlarda ortaya çıkabilecek değişebilirlik durumunu işaretleyiniz.

a) Bir ortamın sıcaklığının aynı zamanda 10 farklı termometre ile ölçülmesi

- ☐ Doğal ortamdan kaynaklı değişebilirlik.
- ☑ Ölçümden kaynaklanan değişebilirlik.
- ☐ Müdahaleden kaynaklı değişebilirlik.
- ☐ Örneklemden kaynaklı değişebilirlik.

b) Bir okulda 7. sınıf öğrencilerinden rastgele seçilen 20 kişiye aynı sınavın uygulanması

- ☐ Doğal ortamdan kaynaklı değişebilirlik.
- ☐ Ölçümden kaynaklanan değişebilirlik.
- ☐ Müdahaleden kaynaklı değişebilirlik.
- ☑ Örneklemden kaynaklı değişebilirlik.

c) Farklı bölgelerde bulunan güneş panellerinin verimliliklerinin ölçülmesi

- ☑ Doğal ortamdan kaynaklı değişebilirlik.
- ☐ Ölçümden kaynaklanan değişebilirlik.
- ☐ Müdahaleden kaynaklı değişebilirlik.
- ☐ Örneklemden kaynaklı değişebilirlik.

d) Bir öğretmenin iki farklı sınıfa aynı konuyu farklı yöntemlerle anlatması

- ☐ Doğal ortamdan kaynaklı değişebilirlik.
- ☐ Ölçümden kaynaklanan değişebilirlik.
- ☑ Müdahaleden kaynaklı değişebilirlik.
- ☐ Örneklemden kaynaklı değişebilirlik.

e) Aynı yaş grubundaki bireylerden rastgele seçilen iki gruba aynı fiziksel aktivitenin uygulanması

- ☐ Doğal ortamdan kaynaklı değişebilirlik.
- ☐ Ölçümden kaynaklanan değişebilirlik.
- ☐ Müdahaleden kaynaklı değişebilirlik.
- ☑ Örneklemden kaynaklı değişebilirlik.

ÇÖZÜM 4.

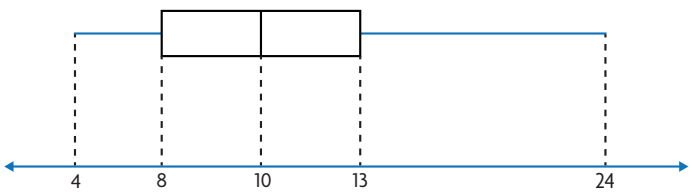
NİCEL VERİ TOPLAMAYI GEREKTİREN İSTATİSTİKSEL ARAŞTIRMA SORUSU ÖLÇÜTLERİ	EVET	HAYIR
Amaç açıktır. Betimlemeye veya karşılaştırmaya yönelik bir araştırma sorusudur.	Š	
Araştırmaya değerdir.	Š	
İlgilenilen grup (evren) açıkça görülmektedir.		×
Değişken açıkça görülmektedir.	Š	
Veri toplanarak cevaplanabilmektedir.	Š	
Değişebilirliği yansıtmaktadır.	Š	
Odaklanılan grup araştırma yapılmasına imkân vermektedir.	Š	
Nicel veri toplamayı gerektirmektedir.	Š	

ÇÖZÜM 5. Veri dağılımına ait kutu grafiğini incelemeliyiz. Veri dağılımı

4	5	6	6	7	7	7	8	8	9	9	9	10	10	10	10	11	11	12	12	12	12	12	13	13	13	14	15	15	17	24

şeklindedir.
Veri grubunun en küçük değeri 4'tür.
Veri grubunun en büyük değeri 24'tür.
Veri grubunun ortanca değeri 16. terim olan 10'dur.
Veri grubunun birinci çeyrek (alt çeyrek) değeri, ilk 15 terimin ortancası olan 8'dir. (Ç1 = 8)
Veri grubunun üçüncü çeyrek (üst çeyrek) değeri son 15 terimin ortancası olan 13'tür. (Ç3 = 13)

Veri grubunun kutu grafiği aşağıdaki gibidir.



Kutu grafiğine göre alt çeyrek ve üst çeyrek arasında 19 terim bulunduğundan terimlerin yaklaşık %61'i bu aralıkta yoğunlaşmaktadır. Bu durumda markette toplanan atık yağ miktarına ait veri dağılımının merkezine yığılan miktar 8 ile 13 litre arasında yoğunlaşmaktadır.

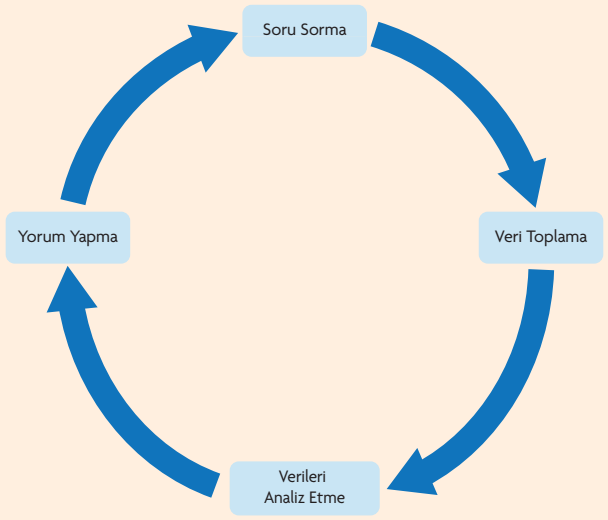
ÖĞRENDİKLERİM

Amaç: Bu bölümde öğrendiklerinizi özetlemenizi, günlük hayatta ve farklı derslerde kullanabileceğiniz bilgileri belirlemenizi amaçlıyoruz.

Verilen bilgileri dikkatle okuyunuz. Konunun temel kavramlarını, önemli noktalarını ve bağlantılarını gözden geçirerek öğrenmenizi pekiştiriniz.

TEK NİCEL DEĞİŞKENLİ VERİ DAĞILIMLARI

İstatistiksel araştırma sürecinin döngüsel yapısı aşağıdaki gibidir.



SORU SORMA

İstatistiksel araştırmalara yön verecek istatistiksel araştırma sorularını oluşturmak için dikkat edilmesi gereken ölçütler bulunmaktadır. Tek nicel değişkenli veri toplamayı gerektiren istatistiksel araştırma sorularında bulunması gereken ölçütler aşağıda verilmiştir.

1. Amacı net olmalıdır.
2. Araştırmaya değer olmalıdır.
3. İlgilenilen grup (evren) açık olmalıdır.
4. Veri toplanarak cevaplanabilmelidir.
5. Değişebilirliği yansıtmalıdır.
7. Odaklanılan grup araştırma yapılmasına imkân vermelidir.
8. Nicel veri toplamaya uygun olmalıdır.

VERİ TOPLAMA

İstatistiksel araştırma sürecinde veri toplama planında bulunması gereken özellikler şunlardır:

- Araştırma sorularına cevap bulmayı sağlayacak veri toplama aracı belirlenmelidir. Veri toplama aracı araştırmacı tarafından oluşturulabilir veya araştırma sorusuna hizmet ediyorsa başkaları tarafından hazırlanan veri toplama araçları kullanılabilir.
- Evren ve örneklem belirlenmelidir.
- Rastgelelik sağlanmalıdır.
- Değişkenler belirlenmelidir.
- Verilerin nerede, ne zaman, nasıl ve kimler tarafından toplanacağı belirlenmelidir.
- Verilerin nereye kaydedileceği belirlenmelidir.
- Verilerin gizliliği sağlanmalıdır. Verilere nesnel yaklaşılmalı, müdahale edilmemelidir.

VERİLERİ ANALİZ ETME

İstatistiksel araştırma sorusu veya soruları doğrultusunda toplanan verileri analiz edebilmek için özetleme ve/veya görselleştirme araçları kullanılır.

Özetleme aracı olan merkezî eğilim ve merkezî yayılım ölçüleri aşağıdaki gibidir.

1) Merkezî Eğilim Ölçüleri

- Mod(Tepe Değer)
- Medyan(Ortanca)
- Aritmetik Ortalama
- Çeyreklikler

2) Merkezî Yayılım Ölçüleri

- En Büyük ve En Küçük Değer
- Açıklık
- Çeyrekler Açıklığı
- Ortalama Mutlak Sapma
- Standart Sapma

Görselleştirme araçları veriyi sadeleştirerek daha hızlı ve kolay yorumlanmasını sağlar.

Histogram: Verilerin belli aralıklardaki sıklığını sütunlarla gösteren bir veri görselleştirme aracıdır.

Kutu Grafiği: Bir dağılımın alt uç (minimum) değer, alt çeyrek değer (Ç1 veya %25'lik dilim), ortanca (Ç2 veya %50'lik dilim), üst çeyrek değer (Ç3 veya %75'lik dilim) ve üst uç (maksimum) değerden oluşan beş sayılı özetinin görselleştirilmesi için kullanılan grafik türüdür.

VERİLERİ YORUMLAMA

- Verilerin nasıl yayıldığını belirleyebilmek için dağılımdaki tüm verileri dikkate alarak daha hassas bir özetleme aracı olan standart sapma kullanılabilir. Standart sapma ne kadar küçükse veriler o kadar homojen dağılmıştır.
- Veri grubunun merkezine yığılan terimlerin hangi aralıkta olduğunu görebilmek için kutu grafiği kullanılır.
- Aritmetik ortalama veri dağılımının aykırı değerlerinden etkilenirken medyan (ortanca) aykırı değerlerden etkilenmez.

İSTATİSTİKSEL ARAŞTIRMA SÜRECİ:

Tek Nicel Verilerle İstatistiksel Araştırmaya Yönelik Yansıtıcı Yazı

Amaç: Bu çalışma, tek nicel değişkene dayalı veriler kullanılarak gerçek yaşam durumlarını inceleme sürecinde istatistiksel bir araştırmayı nasıl yürüttüğünüze ve verilerle çalışma becerilerinize yönelik farkındalık oluşturmak amacıyla hazırlanmıştır.

Aşağıdaki soruları çözerken kullandığınız yöntemi, verileri nasıl analiz ettiğinizi ve ulaştığınız sonuçları göz önünde bulundurarak yanıtlayınız Kısa ve açık cümlelerle kullandığınız yöntemi ve öne sürdüğünüz gerekçeleri ifade etmeniz yeterlidir.

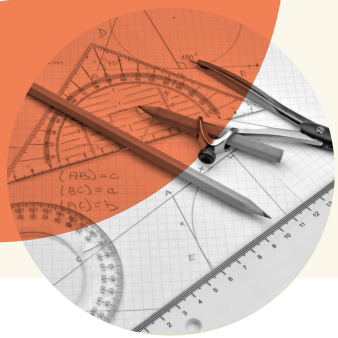
1. Öğrendiğiniz bu temada dikkatinizi çeken veya önemli bulduğunuz noktaları yazınız.

2. Tek nicel değişkenli veri dağılımları ile çalışabilme ve tek nicel değişken içeren veriye dayalı karar verebilme becerinizi gözden geçiriniz. Bu süreçte daha etkili olduğunu düşündüğünüz yaklaşımı belirtiniz ve bu tercihinizin gerekçesini açıklayınız.

3. Tek nicel değişken içeren verilerle yürütülen istatistiksel araştırma sürecinde elde edilen istatistiksel görsel, özet ve sonuçları nasıl kullandığınızı; bu sonuçlara dayalı yorum, çıkarım veya tahminlerinizi hangi gerekçelerle oluşturduğunuzu kısaca açıklayınız.

4. Tek nicel değişkenli verilerle yapılan istatistiksel çalışmalarda edindiğiniz deneyimin gerçek yaşamda karşılaştığınız durumlara, günlük yaşama ya da matematiğin farklı alanlarına nasıl yansıtılabileceğini örneklerle ifade ediniz.

Daha fazlası için karekodu okutunuz.



TEK NİCEL DEĞİŞKENLİ VERİ DAĞILIMLARI

BAŞLARKEN

Sevgili öğrencimiz, bu çalışma kartında bireysel öğrenme yolculuğunuza destek sunmak amaçlanmaktadır. Çalışmalarınızı yürütürken "Hazırlanıyorum", "İlişkilendiriyorum", "Uygulayarak Öğreniyorum", "Değerlendiriyorum" bölümlerini sırası ile yapmanızı; her bölüm ve etkinlik sonundaki geri bildirimleri alarak ilerlemenizi; "Öğrendiklerim" bölümünde öğrenme sürecinizi gözden geçirmenizi bekliyoruz.

İstatistik, insanların bilinçli kararlar almalarına yardımcı olur. Hükümetler, kuruluşlar ve işletmeler; ilerlemeyi takip etmelerine, performansı ölçmelerine ve sorunları analiz etmelerine yardımcı olmak için istatistiki (istatistiksel) bilgiler toplar. Dolayısıyla istatistik matematiğin önemli bir uygulamalı dalıdır.

Bu çalışma kartında matematiğin günlük hayata olan katkılarına ilişkin çıkarımlarda bulunup aşağıdaki soruları yanıtlayabileceksiniz.

- Başkaları tarafından oluşturulan istatistiksel araştırma süreçlerine eleştirel bakabilir misiniz?
- Nicel veri dağılımlarına ilişkin istatistiksel araştırma süreçlerini yorumlayabilir misiniz?
- Günlük hayatta basılı yayın organları ve sosyal medya gibi dijital ortamlarda başkaları tarafından oluşturulan istatistiksel bilgileri eleştirel bir bakış açısıyla inceleyebilir misiniz?

HAZIRLANIYORUM

Amaç: Bu bölümde ön bilgilerinizi hatırlamanızı ve temaya hazırlıklı hâle gelmenizi amaçlıyoruz.

- **Eğer ifadedeki bilgiye hâkim olduğunuzu düşünüyorsanız kutucuğu işaretleyiniz.**
- **Eğer temayı henüz tam olarak bilmediğinizi ya da hatırlamadığınızı düşünüyorsanız kutucuğu boş bırakınız.**

Bu çalışma notla değerlendirilmeyecek olup amacı temaya, ne ölçüde hazır olduğunuzu belirlemektir.

SORULAR	ÖN ÖĞRENME KONTROL LİSTESİ	✓
1	Veri toplama planları yaparken araştırma sorularına cevap bulmayı sağlayacak veri toplama araçlarını belirleyebilirim.	☐
2	Okulumda düzenlenecek bir temsilci seçimi öncesi hangi adayın daha çok tercih edileceği ile ilgili bir anket hazırlayabilirim.	☐
3	Hazırladığım bir anketin sonuçlarını istatistiksel görselleştirme araçları ile sunabilirim.	☐
4	Başkalarının yürüttüğü istatistiksel araştırma süreçlerini izleyebilirim.	☐
5	Başkaları tarafından toplanmış veri setlerini analiz edebilirim.	☐
6	Araştırma sorusunun kapsamındaki evrene uygun örneklem belirleyebilirim.	☐

"Ön Öğrenme Kontrol Listesi"ni doldurduktan sonra aşağıda verilen "Kontrol Noktası" sorularını çözünüz ve cevaplarınızı kontrol ediniz.

Aşağıdaki soruları dikkatle inceleyiniz. Yanıtlarınız üzerinde düşünerek yeni öğrenmeleriniz için zemin oluşturunuz.

KONTROL NOKTASI

SORU 1. Aşağıda istatistiksel bir araştırma sürecine ait aşamalar karışık olarak verilmiştir.

I. Veri toplama planı yapma

II. Bağlamı belirleme

III. Verileri analize hazır hâle getirme

IV. Bağlama yönelik soru sorma

V. Verileri analiz etme ve sonuçları yorumlama

Buna göre yukarıda verilen istatistiksel araştırma sürecinin bileşenlerinin doğru sıralamasını yazınız.

SORU 2. Aşağıda istatistiksel araştırma sorularına ait bazı özellikler tabloda verilmiştir. İstatistiksel bir araştırma sürecinde kullanılan araştırma sorularının istatistiksel araştırma sorusu olabilmesi için belirli özellikler taşıması gerekir.

Buna göre tablodaki özelliklerden, yukarıda belirtilen şartları karşılayanların karşısına (✓) koyunuz.

	✓
Amacın net olması	
Araştırmaya değer olması	
İlgilenilen grubun (evrenin) açık olması	
Değişkenlerin açık bir biçimde görülmesi	
Veri toplanarak cevaplanabilmesi	
Değişebilirliği (doğal ortamdan kaynaklı, müdahaleden kaynaklı, ölçümden kaynaklı örneklemden kaynaklı) yansıtması	
Odaklanılan grubun araştırmaya imkân vermesi (veri setindeki verileri tek tek ya da veri dağılımını bütüncül olarak incelemeye yönelik analize imkân vermesi)	
Nicel veri toplamaya uygun olması	

SORU 3. Bir üniversitenin Deniz Bilimleri ve Çevre Planlaması Bölümü; Hazar Denizi kıyılarında yapılması planlanan eko turizm, su sporları ve deniz canlılarının yaşam koşulları ile ilgili bir araştırma yürütmektedir. Araştırmanın amacı; deniz suyunun yıl boyunca sıcaklık değişimini inceleyerek

- yüzme ve su sporları için en uygun ayları belirlemek,
- bazı deniz canlılarının yaşam döngülerini analiz etmek,
- kıyı tesislerinin (iskele, dalış merkezi vb.) kullanım takvimini planlamaktır.

Bu amaçla araştırmacılar, Hazar Denizi'nin bir yıl boyunca ölçülen aylık ortalama deniz suyu sıcaklıklarını aşağıdaki sıklık tablosunda toplamışlardır.

Tablo: *Hazar Denizi'nin bir yıl boyunca ölçülen aylık ortalama deniz suyu sıcaklıkları*

Aylar	Ocak	Şubat	Mart	Nisan	Mayıs	Hazi-ran	Tem-muz	Ağus-tos	Eylül	Ekim	Kasım	Aralık
Derece	6 °C	9 °C	9 °C	12 °C	16 °C	22 °C	25 °C	25 °C	21 °C	14 °C	12 °C	9 °C

a) Araştırmacılar, deniz suyunda en sık görülen sıcaklık değerini belirleyerek bu değerin hangi sıcaklık aralığında yoğunlaştığını incelemek istemektedir.

Buna göre veri grubunun tepe değerini (modunu) bulunuz ve bu değerin araştırma açısından ne ifade ettiğini açıklayınız.

b) Deniz canlılarının sıcaklığa bağlı davranışlarını analiz eden bir ekip, yılın orta koşullarını temsil eden bir değere ihtiyaç duymaktadır.

Buna göre veri grubunun ortanca değerini (medyanını) bulunuz ve neden bu değerin tercih edildiğini açıklayınız.

c) Turizm planlamacıları, yıl boyunca deniz suyunun genel sıcaklık düzeyini tek bir sayı ile ifade etmek istemektedir.

Buna göre veri grubunun aritmetik ortalamasını hesaplayınız ve bu değerin kullanım amacını yorumlayınız.

d) Çevre mühendisleri, yıl içindeki sıcaklık değişiminin büyüklüğünü inceleyerek ekosistem üzerindeki etkilerini değerlendirmek istemektedir.

Buna göre veri grubunun açıklığını bulunuz ve bu sonucun deniz ekosistemi açısından ne anlama geldiğini yorumlayınız.

SORU 4. Bir lise yönetimi, 11. sınıf öğrencilerinin günlük ders çalışma süreleri ile matematik dersi başarıları arasında bir ilişki olup olmadığını araştırmak istemektedir.

Bu amaçla yapılan istatistiksel araştırma sürecine ait bazı adımlar, aşağıda karışık olarak verilmiştir.

I. Öğrencilerin günlük ders çalışma süreleri ile matematik sınav puanlarının tablo ve grafikler hâline getirilmesi
II. Araştırmanın hangi konuya odaklanacağının ve amacının belirlenmesi
III. "Günlük ders çalışma süresi arttıkça matematik dersi başarısı artar mı?" sorusunun oluşturulması
IV. Öğrencilerden anket ve sınav sonuçları yoluyla verilerin toplanması
V. Elde edilen veriler kullanılarak ortalama, dağılım ve ilişki yorumlarının yapılması

Buna göre yukarıda verilen istatistiksel araştırma sürecinin bileşenlerinin doğru sıralamasını yazınız.

GERİ BİLDİRİM

Bu geri bildirim sayesinde kendi cevabınızı kontrol edebilir, hatalarınızı düzelterek öğrenmenizi pekiştirebilirsiniz.

ÇÖZÜM 1. İstatistiksel bir araştırma sürecine ait aşamalar karışık olarak aşağıda verilmiştir.

I. Veri toplama planı yapma
II. Bağlamı belirleme
III. Verileri analize hazır hâle getirme
IV. Bağlama yönelik soru sorma
V. Verileri analiz etme ve sonuçları yorumlama

Buna göre istatistiksel araştırma sürecinin bileşenlerinin doğru sıralaması;
Bağlamı belirleme (II),
Bağlama yönelik soru sorma (IV),
Veri toplama planı yapma (I),
Verileri analize hazır hâle getirme (III),
Verileri analiz etme ve sonuçları yorumlama (V)
bileşenlerini içerecek şekilde olmalıdır. Böylece II-IV-I-III-V olarak sıralanır.

ÇÖZÜM 2.

	✓
Amacın net olması	✓
Araştırmaya değer olması	✓
İlgilenilen grubun (evrenin) açık olması	✓
Değişkenlerin açık bir biçimde görülmesi	✓
Veri toplanarak cevaplanabilmesi	✓
Değişebilirliği (doğal ortamdan kaynaklı, müdahaleden kaynaklı, ölçümden kaynaklı örneklemden kaynaklı) yansıtması	✓
Odaklanılan grubun araştırmaya imkân vermesi (veri setindeki verileri tek tek ya da veri dağılımını bütüncül olarak incelemeye yönelik analize imkân vermesi)	✓
Nicel veri toplamaya uygun olması	✓

ÇÖZÜM 3.

Tablo: *Hazar Denizi'nin bir yıl boyunca ölçülen aylık ortalama deniz suyu sıcaklıkları*

Aylar	Ocak	Şubat	Mart	Nisan	Mayıs	Hazi-ran	Tem-muz	Ağus-tos	Eylül	Ekim	Kasım	Aralık
Derece	6 °C	9 °C	9 °C	12 °C	16 °C	22 °C	25 °C	25 °C	21 °C	14 °C	12 °C	9 °C

a) Veriler incelendiğinde en çok tekrar eden değerin 9 olduğu görülmektedir. Bu değer tepe değerdir. Ortaya çıkan sonuç, deniz suyu sıcaklığının yıl boyunca en sık yaklaşık 9 °C olarak ölçüldüğünü göstermektedir. Söz konusu sıcaklık değerinin özellikle kış aylarında yoğunlaştığı anlaşılmaktadır.

b) Ortanca değerini bulmak için verileri küçükten büyüğe doğru sıralamalısınız.

6, 9, 9, 9, 12, 12, 14, 16, 21, 22, 25, 25

$\frac{12 + 13}{2} = 13$

Medyan (ortanca değer), aşırı düşük (6°C) ve yüksek (25°C) değerlerden etkilenmeden yılın orta koşullarını temsil eder. Deniz canlılarının genel yaşam koşullarını analiz etmek için uygun bir ölçüdür.

c) Aritmetik Ortalama $= \frac{6 + 9 + 9 + 9 + 12 + 12 + 14 + 16 + 21 + 22 + 25 + 25}{12}$

$= \frac{180}{12}$

$= 15$

Bu değer, yıl boyunca deniz suyunun genel sıcaklık düzeyini temsil eder ve turizm ya da kıyı tesislerinin yıllık planlamasında kullanılabilir.

d) Açıklık = 25 – 6 = 19

Deniz suyunun yıl içinde geniş bir sıcaklık aralığında değiştiğini gösterir. Bu durum, ekosistem üzerinde mevsimsel etkilerin belirgin olduğunu ortaya koyar.

HATIRLATMA

Mod (Tepe Değer): Veri dizisi içinde en çok tekrarlanan veriye tepe değer (mod) denir. Bir veri grubunun tepe değeri olmayabilir ya da birden fazla tepe değeri olabilir.

Medyan (Ortanca): Bir veri dizisindeki verileri küçükten büyüğe ya da büyükten küçüğe sıraladığımızda tam ortadaki sayıdır. Veri dizisinde çift adet sayı varsa tam ortada iki sayı olacağından ikisinin aritmetik ortalaması ortancayı verir.

Aritmetik Ortalama: Bir veri dizisindeki verilerin toplamının veri sayısına oranına aritmetik ortalama denir.

Açıklık: Veri grubunun en büyük ve en küçük değeri arasındaki farka açıklık denir.

ÇÖZÜM 4.

Bir lise yönetimi, 11. sınıf öğrencilerinin günlük ders çalışma süreleri ile matematik dersi başarıları arasında bir ilişki olup olmadığını araştırmak istemektedir.

Bu amaçla yapılan istatistiksel araştırma sürecine ait bazı adımlar aşağıda karışık olarak verilmiştir.

I. Öğrencilerin günlük ders çalışma süreleri ile matematik sınav puanlarının tablo ve grafikler hâline getirilmesi

II. Araştırmanın hangi konuya odaklanacağının ve amacının belirlenmesi

III. "Günlük ders çalışma süresi arttıkça matematik dersi başarısı artar mı?" sorusunun oluşturulması

IV. Öğrencilerden anket ve sınav sonuçları yoluyla verilerin toplanması

V. Elde edilen veriler kullanılarak ortalama, dağılım ve ilişki yorumlarının yapılması

Buna göre istatistiksel araştırma sürecinin bileşenlerinin doğru sıralaması;
Araştırmanın hangi konuya odaklanacağının ve amacının belirlenmesi (II),
"Günlük ders çalışma süresi arttıkça matematik dersi başarısı artar mı?" sorusunun oluşturulması (III),
Öğrencilerden anket ve sınav sonuçları yoluyla verilerin toplanması (IV),
Öğrencilerin günlük ders çalışma süreleri ile matematik sınav puanlarının tablo ve grafikler hâline getirilmesi (I),
Elde edilen veriler kullanılarak ortalama, dağılım ve ilişki yorumlarının yapılması (V)
bileşenlerini içerecek şekilde olmalıdır. Böylece II-III-IV-I-V olarak sıralanır.

İLİŞKİLENDİRİYORUM

Amaç: Bu bölümde ele alacağınız içerikleri; zihninizde var olan bilgileriniz, yaşantılarınız ve diğer derslerde öğrendiklerinizle ilişkilendirmenizi bekliyoruz. Verilen örneği okuyunuz. Ardından soruları yanıtlayınız. Cevaplarınızı kendi yaşamınızdan ya da çevrenizden örneklerle destekleyiniz.

Türkiye'de Turizm

TÜİK verilerine göre Türkiye'nin 2020 yılında turizm gelirlerinin aylara göre dağılımını içeren tablo aşağıda verilmiştir.

Tablo: *Türkiye'nin 2020 yılına ait turizm gelirlerinin aylara göre dağılımı*

Aylar	Ocak	Şubat	Mart	Nisan	Mayıs	Hazi-ran	Tem-muz	Ağus-tos	Eylül	Ekim	Kasım	Aralık
2020 Yılı Turizm Gelirleri (x1000 Dolar)	2 085 858	1 682 608	895 926	175 638	196 363	275 473	711 042	2 054 698	2 356 564	2 301 315	1 178 102	903 685

Bu tabloya göre aşağıda verilen soruları cevaplayınız.

a) Türkiye'nin 2020 yılı turizm gelirleri incelendiğinde turizm gelirinin en düşük ve en yüksek olduğu aylar arasındaki fark kaç dolardır?

b) Türkiye'nin 2020 yılı turizm geliri nasıl bir eğilim göstermektedir?

c) Türkiye'nin turizm geliri genel olarak ilerleyen yıllarda da aynı aralıkta mı yoğunlaşmaktadır? Yorumlayarak yazınız.

d) Türkiye'nin turizm gelirleri, ilerleyen yıllarda da aynı aralıkta mı yoğunlaşmaktadır? Yorumlayarak yazınız.

GERİ BİLDİRİM

Bu geri bildirim sayesinde kendi cevabınızı kontrol edebilir, hatalarınızı düzelterek öğrenmenizi pekiştirebilirsiniz.

a) 2 356 564 – 175 638 = 2 180 926x 1000 = 2 180 926 000 dolar

b) Ağustos, Eylül, Ekim ve Ocak aylarında turizm gelirlerinin diğer aylara göre daha yüksek olduğu görülmektedir. Ancak bu gözlem tek başına yeterli değildir. Gelirlerin yıl içindeki genel eğilimini daha sağlıklı değerlendirebilmek için tepe değer, ortanca, aritmetik ortalama ve açıklık gibi merkezî eğilim ve yayılım ölçülerine dayalı yorumlar yapılmalıdır. Veriler küçükten büyüğe doğru sıralandığında ortada yer alan iki değer Kasım ve Aralık aylarına ait turizm gelirleridir. Bu nedenle ortanca değer, bu iki ayın gelirlerinin aritmetik ortalaması alınarak hesaplanır.

Ortanca değer = 1 040 893 500 dolar

Aritmetik ortalama = 14 817 272000 / 12 = 1 234 772 666 dolar

Açıklık = 2 356 564 – 175 638 = 2 180 926 000 dolar

Açıklık değerinin yüksek olması, turizm gelirlerinin aylara göre büyük değişkenlik gösterdiğini ortaya koymaktadır. Bu tür durumlarda aşırı yüksek veya düşük değerlerden daha az etkilendiği için ortanca değer, turizm gelirini temsil etmede aritmetik ortalamaya göre daha güvenilir bir sonuç, ölçüm sunar.

c) Hayır, yorumlanamaz. Çünkü verilen veriler yalnızca tek bir yıla ait turizm gelirlerini göstermektedir. Gelecek yıllarda turizm gelirinin aynı aralıkta yoğunlaşıp yoğunlaşmayacağına ilişkin çıkarım yapabilmek için birden fazla yıla ait karşılaştırmalı veriye ihtiyaç vardır. Bu nedenle tek bir veri setine dayanarak veri ötesi yorum yapılamaz.

d) Tek bir veri seti üzerinden veri ötesini yorumlamaya dayandığı için cevap verilemez.

UYGULAYARAK ÖĞRENİYORUM

Amaç: Bu bölümde bilgilerinizi etkinlikler ve uygulamalarla pekiştirmenizi, öğrenmeyi daha kalıcı hâle getirmenizi amaçlıyoruz.

Etkinliklerde verilen adımları dikkatle uygulayınız. Çalışmanızı dikkatli ve düzenli bir şekilde yapınız.

ETKİNLİK 1. En Sevilen Spor

1) Aşağıda Elif ve Mert arasında geçen bir konuşma verilmiştir.

Elif: Bu yıl düzenlenen "En Sevilen Spor Anketi"nin sonucunu biliyorum. Kesinlikle basketbol "ilk sırada gelecek!" ya da "en çok tercih edilen olacak!"

Mert: Neden bu kadar emin konuşuyorsun?

Elif: Okuldaki spor kulübünden 12 kişiyle konuştum. Bu 12 kişinin 9'u basketbolu seçtiğini söyledi.

Buna göre

a) İstatistiksel araştırma süreci aşamalarını göz önünde bulundurarak Elif ve Mert arasında geçen konuşmayı inceleyiniz. Elif'in basketbolun en çok tercih edilen spor dalı olacağına yönelik yorumunun dayanağı sizce nedir?

b) Elif'in yorumuna ilişkin tespit ettiğiniz bir hata veya yanlılık var mıdır? Gerekçelendirerek yazınız.

c) Mert, belirlediğiniz bir hata varsa bu hatayı çürütmek veya kabul etmek için Elif'e ne söylemelidir? Açıklayınız.

ETKİNLİK 2. Başarılı Sınıf

Bir öğretmen, 30 öğrencinin bir sınavdan aldığı puanlara ait bazı istatistiksel ölçümleri paylaşmıştır.

Sınavın

- aritmetik ortalaması 68,
- medyanı 75,
- çeyrekler açıklığı 20'dir.

Öğretmen, bu değerlere dayanarak sınıfın genel başarısının yüksek olduğunu ve öğrencilerin puanları arasındaki farkın az olduğunu ifade etmiştir.

Buna göre öğretmenin yorumunu inceleyiniz ve aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) Öğretmenin yaptığı yorumu verilen istatistiksel sonuçlara dayanarak istatistiksel açıdan temellendiriniz.

b) Öğretmenin yorumunda varsa hata veya yanlılıkları var mıdır? Açıklayınız.

c) Yapılan yorumun doğru olup olmadığını belirleyiniz. Cevabınızı gerekçeleriyle açıklayınız.

GERİ BİLDİRİM

Bu geri bildirim sayesinde kendi cevabınızı kontrol edebilir, hatalarınızı düzelterek öğrenmenizi pekiştirebilirsiniz.

ÇÖZÜM

ETKİNLİK 1. En Sevilen Spor

a) Elif'in yorumunun dayanağı nedir? (İstatistiksel temellendirme)

Elif, basketbolun birinci olacağı sonucunu yalnızca spor kulübündeki 12 kişiden topladığı tek nicel değişkene dayandırmaktadır. Elde ettiği veri dağılımında 12 kişiden 9'unun basketbolu seçmesi, örneklem içinde baskın bir tercih olduğunu göstermektedir. Bu nedenle Elif, bu küçük örneklemdeki dağılıma dayanarak genelleme yapmaktadır.

b) Elif'in yorumundaki hata/yanlılık nedir?

- Elif'in örneklemi **evrensellik ilkesine uygun değildir.** Bu örneklem sadece spor kulübündeki öğrencilerden oluşmaktadır.
- Spor kulübü öğrencilerinin basketbola ilgisi ortalamadan daha yüksek olabilir. Bu durum **seçim yanlılığına** neden olur.
- Örneklem büyüklüğü oldukça küçüktür, bu nedenle sonuç **genellenebilir** değildir.

Bu hatalar Elif'in yorumunun güvenilirliğini düşürmektedir.

c) Mert bu hatayı çürütmek veya kabul etmek için ne söylemelidir?

Mert, Elif'in sonucunu **çürütmek** için şöyle diyebilir:

"Seçtiğin grup tüm okulu temsil etmiyor. Spor kulübündeki çoğu kişi zaten sporla ilgilenen bir grup olduğu için basketbolu daha çok seçmiş olabilir. Daha geniş ve rastgele seçilmiş bir örneklem olmadan en doğru sonuca ulaşamayız."

Eğer Elif'in gerekçesi daha geniş verilerle desteklenirse o zaman **kabul edilebilir** ancak mevcut veride böyle bir temsil olmadığı için Mert'in yorumu ÇÜRÜTME yönünde olur.

ÇÖZÜM

ETKİNLİK 2. Başarılı Sınıf

a) İstatistiksel temellendirme yapınız.

Öğretmenin yorumu, verilen istatistiksel ölçütlerle karşılaştırıldığında şu şekilde temellendirilebilir:

Medyan (75), ortalamadan (68) daha yüksek olduğundan puanların çoğunluğunun 75'e yakın olduğu ve dağılımın üst kısma doğru yığıldığı düşünülebilir. Bu durum, öğrencilerin önemli bir bölümünün görece yüksek puan aldığı şeklinde yorumlanabilir.

Çeyrekler açıklığının 20 olması, puanların orta kısmındaki %50'lik bölümün 20 puanlık bir aralıkta toplandığını gösterir. Bu da orta bölgedeki öğrencilerin puanlarının çok aşırı dağılmadığına işaret edebilir.

Bu nedenle öğretmenin **"başarı yüksek"** ve **"puanlar yakın"** yorumunu tamamen olmasa da kısmen destekleyen bazı istatistiksel göstergeler mevcuttur.

b) Varsa hata veya yanlılıkları tespit ediniz.

Öğretmenin yorumunda bazı istatistiksel hatalar veya aşırı genellemeler bulunmaktadır.

Ortalama (68) yüksek değildir.

Ölçek tam bilinmese de (örneğin 100 üzerinden olduğu varsayıldığında) 68 puan yüksek başarıyı doğrudan göstermemektedir. Medyanın yüksek olması, tüm öğrencilerin yüksek başarı gösterdiği anlamına gelmez.

Çeyrekler açıklığının 20 olması, geniş bir aralık sayılabilir.

Dağılımın ortasındaki öğrencilerin puanları 20 puanlık farkla ayrılıyorsa bu, "birbirine çok yakın" bir dağılım değildir.

Örneğin $Ç_1 = 65$ ve $Ç_3 = 85$ ise öğrenciler arasında kayda değer bir fark vardır.

Dağılımın şekli hakkında yeterli bilgi yoktur.

sadece üç ölçüye dayalıdır. Standart sapma, minimum-maksimum değerler, uç değerler bilinmeden "puanlar birbirine çok yakın" demek yanıltıcı olabilir.

Medyan ve ortalama arasındaki fark göz ardı edilmiştir.

Medyanın ortalamadan 7 puan yüksek olması, dağılımın asimetrik olduğunu gösterir. Bu da tüm grubun yüksek başarı göstermediği anlamına gelebilir.

c) Yapılan yorumu gerekçelerini açıklayarak kabul ediniz ya da çürütünüz.

Bu yorum **tamamen kabul edilemez** ancak **kısmen** desteklenebilir.

Çürütme Gerekçesi

Ortalama başarı yüksek değildir, bu nedenle "genel başarı oldukça yüksek" ifadesi **aşırı genellemedir.**

Çeyrekler açıklığının 20 olması, puanların birbirine "çok yakın" olmadığını gösterir.

Veriler, öğrenciler arasında belirgin farklılıklar olabileceğine işaret etmektedir.

Kısmen Kabul Gerekçesi

Medyanın yüksek olması, öğrencilerin yarısının nispeten daha yüksek puan aldığına işaret edebilir.

Puanların orta kısmının %50'sinin aşırı dağılmaması, tamamen heterojen bir dağılım olmadığını gösterebilir.

Sonuç:

- Öğretmenin yorumu istatistiksel olarak **büyük ölçüde temelsizdir** ve **dağılımdaki gerçek durumu olduğundan daha olumlu göstermektedir.**
- Bu nedenle yorum **çürütülmelidir**.

HATIRLATMA

Çeyrekler Açıklığı

İstatistikte, çeyrekler açıklığı küçükten büyüğe ya da büyükten küçüğe sıralanmış bir veri dizisinin orta yarısını (%50'sini) kapsayan, üçüncü dörtte birlik ve birinci dörtte birlik aralığını veya farkını ($Ç_3 - Ç_1$) gösteren bir istatistiksel yayılma ölçüsüdür.

Çeyrekler arası açıklık nasıl hesaplanır?
Küçükten büyüğe doğru sıralanmış bir veri grubunun medyanı, bu veri grubunu 2 eşit parçaya böler.
Oluşan iki parçadan sol taraftaki ilk yarı grubunun medyanı $Ç_1$ ve sağ taraftaki ilk yarı grubunun medyanı $Ç_3$ olarak bulunur. $Ç_3 - Ç_1$ farkını aldığımızda çeyrekler açıklığını elde ederiz.

DEĞERLENDİRİYORUM

Amaç: Bu bölümde öğrendiklerinizi gözden geçirmenizi, kendi öğrenme sürecinizi değerlendirmenizi ve eksiklerinizi fark etmenizi amaçlıyoruz.

Soruları dikkatle yanıtlayınız. Cevaplarınızı geri bildirimlerle karşılaştırarak eksik gördüğünüz noktaları tekrar ediniz.

SORULAR

1. Aşağıda Can ve Nehir arasında geçen bir konuşma verilmiştir.

Can: Nehir, okul temsilcisi seçimlerini kimin kazanacağını biliyorum. Kesinlikle Ayşe kazanacak!

Nehir: Neden bu kadar eminsin Can?

Can: Ben 9-A sınıfındaki 10 kişiyle konuştum. Bu on kişiden sekizi, oyunu Ayşe'ye vereceğini söyledi.

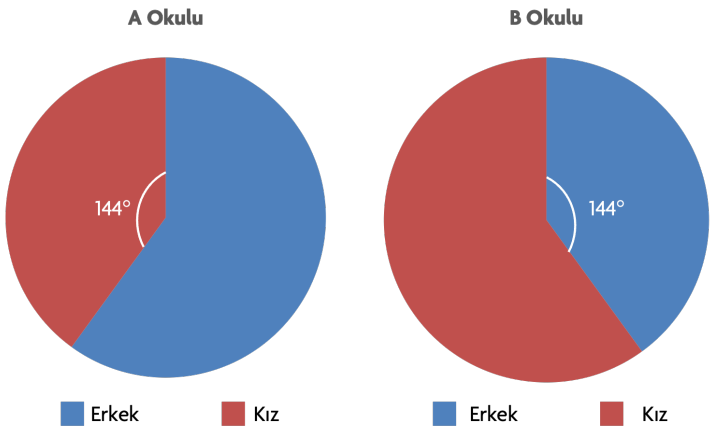
Buna göre

a) İstatistiksel araştırma süreci aşamalarını dikkate alarak Can ve Nehir arasında geçen konuşmayı inceleyiniz. Can'ın Ayşe'nin kazanacağına yönelik tahmininin dayanağını yazınız.

b) Can'ın tahmininde bir hata bulunup bulunmadığını belirleyiniz. Hata varsa gerekçesiyle açıklayınız.

c) Hata tespit etmeniz durumunda, bu hatayı düzeltmek amacıyla Nehir'in Can'a söylemesi gereken ifadeyi yazınız.

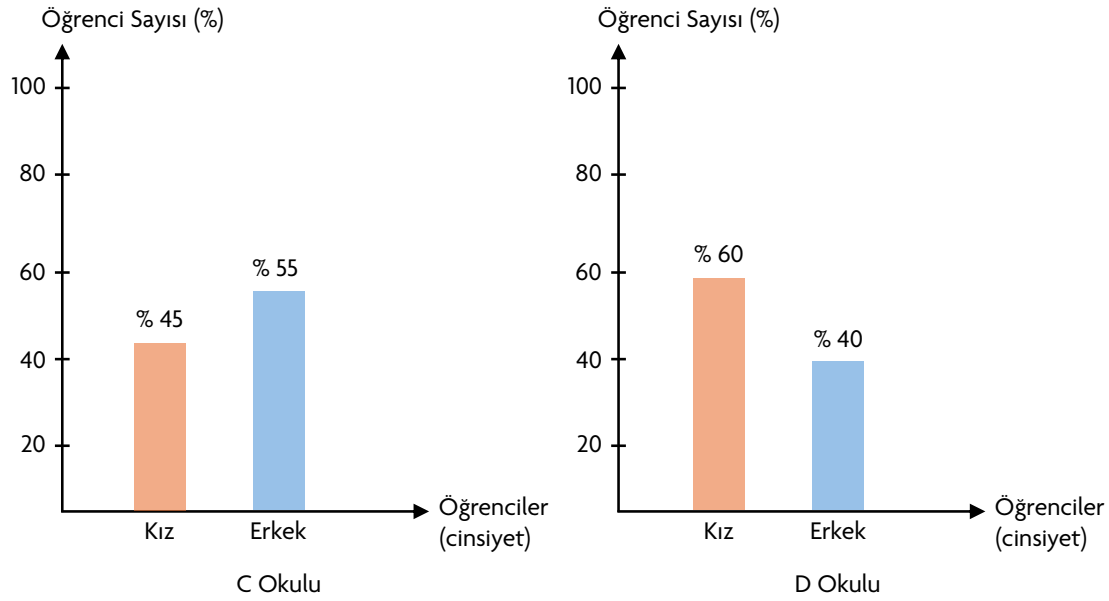
2. 500 öğrencisi olan A okulunun ve 750 öğrencisi olan B okulunun kız ve erkek öğrenci sayılarına ait daire grafikleri aşağıdaki gibidir.



Grafiklere bakan Emre; A Okulundaki erkek öğrenci sayısının B Okuluna göre daha fazla, B Okulundaki kız öğrenci sayısının ise A okuluna göre daha fazla olduğunu belirtmiştir.

Buna göre Emre'nin yorumu doğru mudur? Doğru değilse nerede hata yapmıştır?

3. Toplam 600 öğrencili olan C Okulu ile 900 öğrencisi olan D Okulunun kız ve erkek öğrenci dağılımları aşağıdaki sütun grafiklerinde gösterilmiştir.



Grafiklere bakan Zeynep,

"C Okulunda erkek öğrenci sayısı, D Okulundaki erkek öğrenci sayısından fazladır. D Okulunda ise kız öğrenci sayısı, C Okulundaki kız öğrenci sayısından fazladır."

şeklinde bir yorum yapmıştır.

Buna göre Zeynep'in yorumu doğru mudur? Doğru değilse hatasının kaynağını açıklayınız.

GERİ BİLDİRİM

Bu geri bildirim sayesinde kendi cevabınızı kontrol edebilir, hatalarınızı düzelterek öğrenmenizi pekiştirebilirsiniz.

ÇÖZÜM 1.

a) Can'ın Ayşe'nin kazanacağına dair tahmininin dayanağı, yaptığı küçük çaplı bir anketin sonucudur. Can, 9-A sınıfındaki 10 öğrenciyle konuşarak veri toplamıştır. Bu konuşma yapılan 10 kişi, Can'ın örneklemini oluşturur. Örneklemdeki 10 kişinin 8'i yani %80'i, Ayşe'ye oy vereceğini belirtmiştir. Can, bu %80'lik oy oranını okuldaki öğrencilerin hepsine genellemektedir. Can'a göre örneklemden elde edilen bu yüksek sonucun benzeri, tüm okulun katıldığı seçimde de benzer bir sonuç (Ayşe'nin kesin kazanacağı) çıkacaktır.

b) Can'ın tahminindeki temel istatistiksel hata, örneklem hatasıdır. Can'ın seçtiği örneklem, hedef kitleyi (tüm okulu) doğru bir şekilde temsil etmemektedir. 10 kişilik bir grup, bir okuldaki seçim sonucunu tahmin etmek için çok küçüktür. Can sadece 9-A sınıfından öğrenciler ile görüşmüştür. Farklı sınıfların (örneğin 10 veya 11. sınıfların) oy tercihleri, 9-A sınıfındakilerden çok farklı olabilir. Örneklem, okulun tamamını (farklı sınıf seviyelerini) yansıtmamaktadır.

c) Nehir, Can'ın yanlı genellemesini çürütmek için aşağıdaki ifadeleri kullanmalıdır. "Can, 9-A sınıfındaki 10 kişi tüm okulu temsil etmez. Oylama sonuçlarının doğru tahmin edilebilmesi için okuldaki tüm sınıf seviyelerinden ve farklı gruplardan rastgele seçilmiş, çok daha büyük bir örneklem gereklidir. Örneğin 12. sınıfların tercihleri, 9. sınıflarınkinden tamamen farklı olabilir ve senin örneklemin bunu yansıtmıyor. Sadece 10 kişiye bakarak Ayşe'nin kesin kazanacağını söylemek yanlış olur."

ÇÖZÜM 2.

Grafiklere bakan Emre, A Okulundaki erkek öğrenci sayısının B Okulundakine göre daha fazla, B Okulunda ise kız öğrenci sayısının A Okulundakine göre daha fazla olduğu yorumunu yapmıştır.

A Okulunun erkek öğrenci sayılarını temsil eden daire diliminin derecesi, $360° - 144° = 216°$ dir.

Bu durumda A Okulundaki erkek öğrenci sayısı, $500 \cdot \frac{216°}{360°} = 500 \cdot \frac{3}{5} = 300$'dür. A Okulunda ki kız öğrencilerin sayısı da $500 - 300 = 200$'dür.

B okulunun erkek öğrenci sayısı, $750 \cdot \frac{144°}{360°} = 750 \cdot \frac{2}{5} = 300$'dür. B Okulundaki kız öğrencilerin sayısı da $750 - 300 = 450$'dir.

A ve B Okulundaki erkek öğrenci sayıları eşit olduğundan Emre'nin "A Okulundaki erkek öğrenci sayısı, B Okulundaki erkek öğrenci sayısından fazladır." yorumu yanlıştır.

Emre'nin yorumundaki hata, öğrenci sayısını dikkate almadan A ve B okulundaki erkek öğrenci sayısını temsil eden daire dilimlerinin derecelerini kıyaslamasından kaynaklanmaktadır.

B Okulundaki kız öğrenci sayısı, A Okulundaki kız öğrenci sayısından fazla olduğundan Emre'nin "B okulundaki kız öğrenci sayısı, A Okulundaki kız öğrenci sayısından fazladır." yorumu doğrudur.

ÇÖZÜM 3.

Grafiklere bakan Zeynep,

"C Okulundaki erkek öğrenci sayısı, D Okulundaki erkek öğrenci sayısından fazladır. D Okulunda ise kız öğrenci sayısı, C Okulundaki kız öğrenci sayısından fazladır."

şeklinde bir yorum yapmıştır.

Bu durumda C Okulundaki erkek öğrenci sayısı, $600 \cdot \frac{55}{100} = 330$'dur. C Okulundaki kız öğrencilerin sayısı da $600 - 330 = 270$'tir.

D Okulunun erkek öğrenci sayısı, $900 \cdot \frac{40}{100} = 360$'tır. D Okulundaki ki kız öğrencilerinin sayısı da $900 - 360 = 540$'tır.

Zeynep'in yorumunu inceleyelim.

"C Okulundaki erkek öğrenci sayısı, D Okulundakinden fazladır."

C: 330 erkek

D: 360 erkek

X Bu yorum yanlıştır.

"D Okulundaki kız öğrenci sayısı, C Okulundakinden fazladır."

D: 540 kız

C: 270 kız

✓ Bu yorum doğrudur.

Zeynep'in yorumu kısmen yanlıştır.

Zeynep; **yüzdelik dilimleri, toplam öğrenci sayıları farklı olan okullarda** doğrudan karşılaştırma hatası yapmıştır.

Grafikler **oran** gösterir, **mutlak sayı** karşılaştırması yapabilmek için toplam öğrenci sayıları mutlaka dikkate alınmalıdır.

ÖĞRENDİKLERİM

Amaç: Bu bölümde öğrendiklerinizi özetlemenizi, günlük hayatta ve farklı derslerde kullanabileceğiniz bilgileri belirlemenizi amaçlıyoruz.

Verilen bilgileri dikkatle okuyunuz. Temanın temel kavramlarını, önemli noktalarını ve bağlantılarını gözden geçirerek öğrenmenizi pekiştiriniz.

TEK NİCEL DEĞİŞKENLİ VERİ DAĞILIMLARINA AİT İSTATİSTİKSEL SONUÇ VE YORUMLARI TARTIŞMA

Tek Nicel Değişkenli Veri Nedir?
Nicel Değişken: Sayısal değerlerle ifade edilen değişkendir.
Örnek: sınav puanı, boy uzunluğu, günlük ekran süresi...
Tek Nicel Değişkenli Veri:
Sadece **bir nicel değişken** incelenir.
✓ Öğrencilerin matematik sınav puanları
✓ Bir sınıftaki öğrencilerin boyları

Tek Nicel Değişkenli Veri Dağılımı:
Bir veri grubundaki değerlerin **nasıl yayıldığını** gösterir.
Yaygın Gösterimler:
- Sütun grafiği
- Histogram
- Nokta grafiği
- Kutu grafiği

İSTATİSTİKSEL ÖLÇÜLER (TEMEL KAVRAMLAR)

a) Merkezi Eğilim Ölçüleri

Ölçü	Anlamı
Aritmetik Ortalama	Tüm değerlerin toplamının veri sayısına bölümü
Medyan	Ortadaki değer
Mod	En sık tekrar eden değer

b) Yayılım Ölçüleri

Ölçü	Anlamı
Açıklık	En büyük değer – En küçük değer
Çeyrekler açıklığı	Ortadaki %50'lik veri aralığı

ÖĞRENDİKLERİM

Hata ve Yanlılıkları Tespit Etme
Sık Yapılan Hatalar
- **Sadece ortalamaya bakmak**
- **Veri sayısını göz ardı etmek**
- **Grafikte oran-sayı karışıklığı yaşamak**
- **Bağlamdan kopuk yorum yapmak**

Örnek Yanlılık:
"Bu sınıf daha başarılı çünkü ortalaması daha yüksek."
! Ancak:
Veri sayıları farklı olabilir.
Dağılımlar çok farklı olabilir.

İstatistiksel Yorumları Kabul Etme veya Çürütme
Bir yorum:
✓ **Verilerle destekleniyorsa → Kabul edilir.**
✗ **Eksik veya hatalı çıkarım içeriyorsa → Çürütülür.**
Çürütme İçin Kullanılabilecek İfadeler:
"Sadece ortalama verilmiştir, yayılım dikkate alınmamıştır."
"Örneklem büyüklüğü farklı olduğu için karşılaştırma geçerli değildir."
"Grafik oran gösteriyor, mutlak sayılarla yorum yapılamaz."

Son Özet
✓ Tek nicel değişken = tek sayısal özellik olmalı.
✓ Yorum **her zaman veriye dayanmalı.**
✓ Ortalama tek başına yeterli değildir.
✓ Her istatistiksel yorum sorgulanabilir.

İSTATİSTİKSEL ARAŞTIRMA SÜRECİ: Tek Nicel Verilerle İstatistiksel Araştırmaya Yönelik Yansıtıcı Yazı

Amaç

Bu çalışma, tek nicel değişkene dayalı veriler kullanılarak gerçek yaşam durumlarını inceleme sürecinde istatistiksel bir araştırmayı nasıl yürüttüğünüze ve verilerle çalışma becerilerinize yönelik farkındalık oluşturmak amacıyla hazırlanmıştır.

Aşağıdaki soruları çözerken kullandığınız yöntemi, verileri nasıl analiz ettiğinizi ve ulaştığınız sonuçları göz önünde bulundurarak yanıtlayınız Kısa ve açık cümlelerle kullandığınız yöntemi ve öne sürdüğünüz gerekçeleri ifade etmeniz yeterlidir.

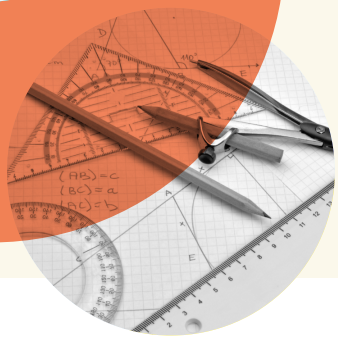
1. Öğrendiğiniz bu temada dikkatinizi çeken veya önemli bulduğunuz noktaları yazınız.

2. Tek nicel değişkenli veri dağılımları ile çalışabilme ve tek nicel değişken içeren veriye dayalı karar verebilme becerinizi gözden geçiriniz. Bu süreçte daha etkili olduğunu düşündüğünüz yaklaşımı belirtiniz ve bu tercihinizin gerekçesini açıklayınız.

3.Tek nicel değişken içeren verilerle yürütülen istatistiksel araştırma sürecinde elde edilen istatistiksel görsel, özet ve sonuçları nasıl kullandığınızı; bu sonuçlara dayalı yorum, çıkarım veya tahminlerinizi hangi gerekçelerle oluşturduğunuzu kısaca açıklayınız.

4. Tek nicel değişkenli verilerle yapılan istatistiksel çalışmalarda edindiğiniz deneyimin gerçek yaşamda karşılaştığınız durumlara, günlük yaşama ya da matematiğin farklı alanlarına nasıl yansıtılabileceğini örneklerle ifade ediniz.

Daha fazlası için karekodu okutunuz.



DENEYSEL OLASILIK

BAŞLARKEN

Sevgili öğrencimiz, bu çalışma kartında bireysel öğrenme yolculuğunuza destek sunmak amaçlanmaktadır. Çalışmalarınızı yürütürken "Hazırlanıyorum", "İlişkilendiriyorum", "Uygulayarak Öğreniyorum", "Değerlendiriyorum" bölümlerini sırası ile yapmanızı; her bölüm ve etkinlik sonundaki geri bildirimleri alarak ilerlemenizi; "Öğrendiklerim" bölümünde öğrenme sürecinizi gözden geçirmenizi bekliyoruz.

Bu çalışma kartında matematiğin günlük hayata olan katkılarına ilişkin çıkarımlarda bulunup aşağıdaki soruları yanıtlayabileceksiniz.

- Bir spor müsabakasının sonucunda kazanan, en doğruya yakın nasıl tahmin edilebilir?
- Meteorolojik tahminlerin doğru yapılabilmesi için kullanılan yöntemler nelerdir?
- Bir ayakkabı mağazası bir sezon için satacağı ürünleri seçerken bazı verilerden yararlanıyor olabilir mi?

HAZIRLANIYORUM

Amaç: Bu bölümde ön bilgilerinizi hatırlamanızı ve temaya hazırlıklı hâle gelmenizi amaçlıyoruz.

Aşağıda yer alan ifadeler, bu temada tamamlanması hedeflenen öğrenme çıktısını ele almadan önce sahip olmanız gereken bazı temel becerileri içermektedir.

- **Eğer ifadedeki bilgiye hâkim olduğunuzu düşünüyorsanız kutucuğu işaretleyiniz.**
- **Eğer konuyu henüz tam olarak bilmediğinizi ya da hatırlamadığınızı düşünüyorsanız kutucuğu boş bırakınız.**

Bu çalışma notla değerlendirilmeyecek olup amacı temaya ne ölçüde hazır olduğunuzu belirlemektir.

SORULAR	ÖN ÖĞRENME KONTROL LİSTESİ	
1	Bir sayı küpü atma deneyi sonucunda istenen olayın teorik olasılık sonucunu hesaplayabilirim.	
2	Bir sayı küpü atma deneyinin çıktılarını bilirim.	
3	Bir para atma deneyinin örnek uzayının elemanlarını yazabilirim.	
4	Deneysel olasılık ile teorik olasılık arasındaki farkı bilirim.	
5	Göreli sıklık ile sıklık arasındaki farkı bilirim.	
6	Deneysel olasılık değerini hesaplayabilirim.	
7	Teorik olasılık değerini hesaplayabilirim.	

"Ön Öğrenme Kontrol Listesi"ni doldurduktan sonra aşağıda verilen "Kontrol Noktası" sorularını çözünüz ve cevaplarınızı kontrol ediniz.

KONTROL NOKTASI

SORU 1. Aşağıdaki kavramları uygun tanımlarla eşleştiriniz.

Kavramlar	Tanımlar
1. Deney	A. Bir olayın gerçekleşme sayısının toplam deneme sayısına oranı
2. Deneme	B. Sonucu önceden kesin olarak bilinmeyen, tekrar edilebilen işlem
3. Olay	C. Deneyin her bir uygulanışı
4. Göreli sıklık	D. Örnek uzayın bir alt kümesi
5. Örnek uzay	E. Tüm olası çıktıların kümesi

SORU 2. Aşağıdaki kavramları uygun tanımlarla eşleştiriniz.

Kavramlar	Açıklamalar
1. Deneysel olasılık	A. Deneme sayısı arttıkça göreli sıklığın belirli bir değere yaklaşması
2. Teorik olasılık	B. Deney yapmadan hesaplanan olasılık
3. Kararlılık	C. Gözleme dayalı olarak hesaplanan olasılık
4. Rastgelelik	D. Sonuçların önceden tahmin edilememesi

SORU 3. Bir torbada 3 kırmızı, 2 mavi ve 1 yeşil bilye bulunmaktadır. Torbadan rastgele bir bilye çekilmesi deneyi yapılacaktır. **Buna göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.**

a) **Deney, örnek uzay ve çıktıları belirtiniz.**

b) **"Kırmızı bilye çekilmesi" ve "mavi bilye çekilmesi" olayları ayrık olay mıdır? Gerekçenizle açıklayınız.**

c) **Kırmızı bilye çekilme olayının teorik olasılığını bulunuz.**

d) **Kırmızı bilye çekilme olayının tümleyeninin olasılığını bulunuz.**

e) **Bulduğunuz olasılıkların toplamının 1 olduğunu gösteriniz.**

GERİ BİLDİRİM

Bu geri bildirim sayesinde kendi cevabınızı kontrol edebilir, hatalarınızı düzelterek öğrenmenizi pekiştirebilirsiniz.

ÇÖZÜM 1.

Kavramlar	Tanımlar
1. Deney	A. Bir olayın gerçekleşme sayısının toplam deneme sayısına oranı
2. Deneme	B. Sonucu önceden kesin olarak bilinmeyen, tekrar edilebilen işlem
3. Olay	C. Deneyin her bir uygulanışı
4. Göreli sıklık	D. Örnek uzayın bir alt kümesi
5. Örnek uzay	E. Tüm olası çıktıların kümesi

1 – B, 2 – C, 3 – D, 4 – A, 5 – E

Deneysel Olasılık: Bir olayın yapılan deneyler sonucunda elde edilen verilere dayanarak tahmin edilen olasılığıdır.

$$\text{Deneysel Olasılık} = \frac{\text{Olayın gerçekleşme sayısı}}{\text{Toplam deneme sayısı}}$$

Göreli Sıklık: Bir olayın gerçekleşme sayısının toplam deneme sayısına oranıdır. Deneysel olasılık ile aynı anlamda kullanılır.

ÇÖZÜM 2.

Kavramlar	Açıklamalar
1. Deneysel olasılık	A. Deneme sayısı arttıkça göreli sıklığın belirli bir değere yaklaşması
2. Teorik olasılık	B. Deney yapmadan hesaplanan olasılık
3. Kararlılık	C. Gözleme dayalı olarak hesaplanan olasılık
4. Rastgelelik	D. Sonuçların önceden tahmin edilememesi

1 – C, 2 – B, 3 – A, 4 – D

Teorik Olasılık: Bir olayın deney yapmadan tüm çıktıların eş olasılıklı olduğu varsayımıyla hesaplanan olasılığıdır.

$$\text{Teorik Olasılık} = \frac{\text{İstenen durum sayısı}}{\text{Tüm olası sonuçların sayısı}}$$

Kararlılık: Deneme sayısı arttıkça göreli sıklığın belirli bir değere yaklaşmasıdır.

Rastgelelik: Deney sonuçlarının önceden tahmin edilememesi ve her denemede farklı sonuçlar ortaya çıkabilmesidir.

ÇÖZÜM 3.

a) Deney-örnek uzay-çıktı

- **Deney:** Torbadan bir bilye çekilmesi
- **Çıktılar:** Kırmızı, mavi, yeşildir.
- **Örnek uzay:** A = { kırmızı, mavi, yeşil }

b) Ayrık olay durumu

"kırmızı bilye çekilmesi " ve "mavi bilye çekilmesi" olayları aynı anda gerçekleşemediğinden ayrık olaylardır.

c) Kırmızı bilye çekilme olasılığı

Toplam bilye sayısı: 3 + 2 + 1 = 6

$$P(K)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$ bulunur.

d) Tümleyen olayın olasılığı

Tümleyen olay: Kırmızı olmayan bir bilyenin çekilmesi olasılığı $P(K')=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ 'dir. 1'den istenmeyen durumun olasılığı çıkarılarak $1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ şeklinde de bulunabilir.

Tümleyen: Örnek uzaydaki bir A olayının elemanı olan sonuçlar dışında kalan sonuçları içeren olaya A olayının tümleyeni denir ve bu olay A′ ile gösterilir.

e) **Olasılıkların toplamı:** $P(K)+P(K')=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$ bulunur.

İLİŞKİLENDİRİYORUM

Amaç: Bu bölümde yeni öğreneceğiniz temayı; zihninizde var olan bilgileriniz, yaşantılarınız ve diğer derslerde öğrendiklerinizle ilişkilendirmenizi bekliyoruz.

İki arkadaş, havaya atılan madenî para oyununda paranın hangi yüzünü seçerlerse daha avantajlı olabilirler? Başka bir deyişle yazı ya da tura demeleri kazanma olasılığını değiştirir mi? Oyunda tek atış yerine birden fazla atış yapılırsa kazanma olasılığı değişir mi? Atış sayısının artması sonuçları hangi değere yaklaştırır?

Aşağıda verilen örneği okuyunuz. Ardından soruları yanıtlayınız. Cevaplarınızı kendi yaşamınızdan ya da çevrenizden örneklerle destekleyiniz.

SORU

Bir yazı tura atma deneyinde, kullanılacak madenî paranın hilesiz olup olmadığı ve yazı gelme olasılığının gerçekten %50 olup olmadığı incelenecektir. Bu nedenle deney farklı aşamalarda tekrarlanmış ve elde edilen sonuçlar aşağıdaki tabloda gösterilmiştir.

Deneme Sayısı	Yazı Gelme Sayısı	Tura Gelme Sayısı
10	6	4
50	27	23
100	52	48
500	248	252

Tablodaki veriler doğrultusunda aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) Yazı gelme olayının her aşamadaki göreli sıklık değerini hesaplayınız.

b) Deneme sayısı arttıkça yazı gelme olayının göreli sıklığında nasıl bir değişim gözlemlenmektedir? Yorumlayınız.

c) Deney sonuçlarına dayanarak paranın hilesiz olup olmadığı hakkında nasıl bir yargıya varılabilir? Açıklayınız.

ÇÖZÜM

a) Göreli sıklık değerleri aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Deneme Sayısı	Yazı Sayısı	Göreli Sıklık
10	6	0,60
50	27	0,54
100	52	0,52
500	248	0,496

b) Çıkarım (Tekrar sayısı-göreli sıklık ilişkisi)

Deneme sayısı arttıkça göreli sıklık 0,5 değerine yaklaşmaktadır.

Az denemede sonuçlar değişken iken çok denemede sonuçlar daha kararlı hâle gelmiştir.

c) Yargı (Oyunun adilliği)

Yazı gelme olasılığı yaklaşık 0,5 olduğundan yazı ve tura gelme olayları eşit olasılıklıdır.

Bu nedenle kullanılan madenî para hilesiz kabul edilebilir.

HATIRLATMA

Göreli Sıklık: Bir olayın gerçekleşme sayısının toplam deneme sayısına oranıdır. Deneysel olasılık ile aynı anlamda kullanılır.

$$\text{Göreli Sıklık} = \frac{\text{Olayın gerçekleşme sayısı}}{\text{Toplam deneme sayısı}}$$

SORU

Bir biyoloji öğretmeni, öğrencilerine kan gruplarının dağılımını kullanarak olayların olasılığının gözleme dayalı olarak nasıl tahmin edilebileceğini göstermek istemektedir.

Bu amaçla okulda yapılan bir çalışmada, farklı sınıflardan seçilen öğrencilerin kan grupları kaydedilmiştir. İlk aşamada 40 öğrenci, daha sonra ise 120 öğrenci incelenmiştir. Elde edilen sonuçlar aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Kan Grubu	40 Öğrenci	120 Öğrenci
A	18	54
B	10	33
AB	4	12
0	8	21

Bu verileri inceleyen bir öğrenci aşağıdaki yorumları yapmıştır.

I. İncelenen öğrenciler arasından rastgele seçilen birinin A kan grubuna sahip olma olasılığı, göreli sıklık kullanılarak tahmin edilebilir.

II. Öğrenci sayısı arttıkça kan gruplarının göreli sıklıkları daha güvenilir hâle gelmiştir.

III. Bu verilere dayanarak okulda kan grubu A olan öğrenci sayısının her zaman diğerlerinden fazla olduğu kesin olarak söylenebilir.

Buna göre yukarıdaki yorumlardan hangileri istatistiksel olarak doğrudur?

ÇÖZÜM

Öğrenme Çıktılarıyla İlişkilendirme

I. Yorum-Doğru

- A kan grubunun oranı, göreli sıklık (Kan grubu A olan öğrenci sayısı/toplam öğrenci sayısı) ile hesaplanır.
- Göreli sıklık, olayların olasılığını deney yoluyla veri toplayarak tahmin etme becerisine karşılık gelir.

II. Yorum-Doğru

- Öğrenci sayısı 40'tan 120'ye çıktığında oranların daha dengeli hâle geldiği görülür.
- Deney tekrar sayısı arttıkça göreli sıklıkların kararlılığı artar.

III. Yorum-Yanlış

- Veriler yalnızca örneklem grubuna aittir.
- Tüm okul için kesin ve genelleyici bir yargı oluşturulamaz.

UYGULAYARAK ÖĞRENİYORUM

Amaç : Bu bölümde bilgilerinizi etkinlikler ve uygulamalarla pekiştirmenizi, öğrenmeyi daha kalıcı hâle getirmenizi amaçlıyoruz. Etkinliklerde verilen adımları dikkatle uygulayınız. Çalışmanızı güvenli ve düzenli bir şekilde yapınız.

ETKİNLİK 1. BİLİM KULÜBÜ

Bir bilim kulübü, bir oyun küpü kullanarak deneyler yapmaktadır. Kulüp üyeleri, küp havaya atıldığında **üst yüzüne 4 gelmesi** olayını incelemişlerdir.

Deneyler farklı deneme sayılarıyla tekrarlanmış ve elde edilen **göreli sıklıklar** aşağıdaki tabloda gösterilmiştir.

Deneme Sayısı	Göreli Sıklık
10	0,30
50	0,18
200	0,16

Kulüp üyeleri bu sonuçları değerlendirerek deney sayısının olasılık tahminlerini nasıl etkilediğini tartışmak istemektedir.

Tablodaki veriler doğrultusunda aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) Deneme sayısı arttıkça "üst yüze 4 gelmesi" olayına ait göreli sıklığın nasıl bir değişim gösterdiğini açıklayınız.

b) Göreli sıklığın bu şekilde değişmesinin nedeni ne olabilir? Açıklayınız.

ETKİNLİK 2. HİLESİZ PARALAR

Bir lise öğrencisi, olasılık konusunu daha iyi anlayabilmek için hilesiz **bir madenî para** ile deneyler yapmaktadır.

Öğrenci, para atma deneyini çok kez tekrar ederek **"yazı gelmesi"** olayını incelemiş ve deney sonuçlarını belirli aşamalarda kaydetmiştir.

Elde edilen veriler aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Toplam Deneme Sayısı	Yazı Sayısı	Yazı Gelme Göreli Sıklığı
50	27	a
100	b	0,52
200	101	c
500	d	0,498
1000	502	e

Tablodaki veriler doğrultusunda aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) Tablodaki a, c ve e harflerinin belirttiği göreli sıklık değerlerini hesaplayınız.

b) Göreli sıklığı verilen satırlarda b ve d harflerinin belirttiği yazı sayısını bulunuz.

c) Deneme sayısı arttıkça göreli sıklığın nasıl değiştiğini tabloya bakarak açıklayınız.

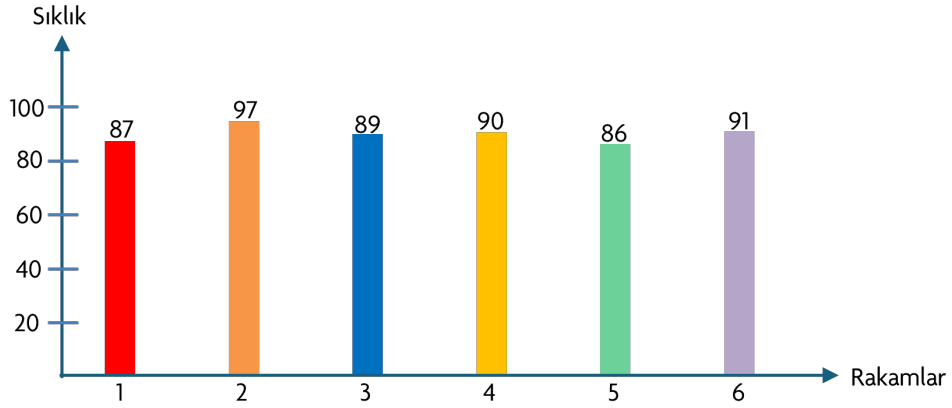
d) Bu deney sonuçlarına dayanarak "yazı gelmesi" olayının olasılığı hakkında nasıl bir yargıya varılabilir? Gerekçenizi yazınız.

ETKİNLİK 3. DENEYDEN TEORİYE

Bir matematik öğretmeni, öğrencilerinin deneysel olasılık ile teorik olasılık arasındaki ilişkiyi daha iyi anlamalarını sağlamak amacıyla bir sınıf etkinliği planlamıştır. Bu etkinlikte, her bir yüzünde 1'den 6'ya kadar olan rakamlardan farklı biri yazılı, hilesiz bir sayı küpü kullanılmıştır.

Sınıfça yapılan deneylerde sayı küpü çok kez havaya atılmış ve her bir rakamın üst yüze gelme sıklığı kaydedilmiştir. Elde edilen sonuçlar aşağıdaki sütun grafiğinde gösterilmiştir.

Öğretmen, bu verilerden yararlanarak öğrencilerden deney sonuçlarını yorumlamalarını istemektedir.



Sütun grafiğinde verilen bilgilere göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) Sayı küpü toplam kaç kez havaya atılmıştır?

b) Üst yüze 4 gelme olayının sıklığı kaçtır?

c) Üst yüze 4 gelme olayının göreli sıklığını bulunuz.

ç) Üst yüze 4 gelme olayının olasılık değerini tahmin ediniz.

d) Üst yüze asal sayı gelme olayının olasılık değerini bulunuz.

e) Sayı küpü 3000 kez havaya atılsaydı sıklık dağılımı sizce nasıl değişirdi? Açıklayınız.

f) Deneme sayısı arttıkça deneysel olasılık ile teorik olasılık arasındaki ilişki hakkında ne söylenebilir? Açıklayınız.

GERİ BİLDİRİM

Bu geri bildirim sayesinde kendi cevabınızı kontrol edebilir, hatalarınızı düzelterek öğrenmenizi pekiştirebilirsiniz.

ETKİNLİK 1.

ÇÖZÜM

a) Gözlem:

Deneme sayısı arttıkça göreli sıklık değerleri 0,30 → 0,18 → 0,16 şeklinde azalmış ve daha kararlı bir değere yaklaşmıştır.

b) Açıklama:

Az sayıda denemede rastgelelik etkisi fazladır. Deneme sayısı arttıkça rastgelelik azalır ve göreli sıklık olayın gerçek olasılığına yaklaşır.

ETKİNLİK 2.

ÇÖZÜM

Toplam Deneme Sayısı	Yazı Sayısı	Yazı Gelme Göreli Sıklığı
50	27	a
100	b	0,52
200	101	c
500	d	0,498
1000	502	e

a) Göreli sıklıkların hesaplanması

50 deneme için $a = \frac{27}{50} = 0,54$ bulunur.

200 deneme için $c = \frac{101}{200} = 0,505$ bulunur.

1000 deneme için $e = \frac{502}{1000} = 0,502$ bulunur.

b) Yazı sayılarının bulunması

100 deneme için $b = 0,52 \cdot 100 = 52$ bulunur.

500 deneme için $d = 0,498 \cdot 500 = 249$ bulunur.

c) Deneme sayısı-göreli sıklık ilişkisi

Deneme sayısı arttıkça göreli sıklık 0,5 değerine yaklaşmakta ve daha kararlı hâle gelmektedir.

d) Olasılık hakkında yargı

Yazı gelme olasılığı yaklaşık 0,5'tir. Çok sayıda deneme sonucu elde edilen göreli sıklıklar bu değeri desteklemektedir.

ETKİNLİK 3.

ÇÖZÜM

a) Sayı küpü toplam kaç kez havaya atılmıştır?

87 + 97 + 89 + 90 + 86 + 91 = 540

Sayı küpü **540** kez havaya atılmıştır.

b) Üst yüze **4 gelme** olayının sıklığı kaçtır?

Tablodaki değerdir. 4 gelme sıklığı 90'dır.

c) Üst yüze **4 gelme** olayının göreli sıklığını bulunuz.

4 gelme olayının göreli sıklığı $\frac{272}{540} \approx 0,50$ olarak hesaplanır.

Göreli sıklık yaklaşık **0,16**'dır.

ç) Üst yüze **4 gelme** olayının olasılık değerini tahmin ediniz.

Deneysel olasılık, göreli sıklığa eşittir.

4 gelme olayının deneysel olasılığı yaklaşık **0,16**'dır.

d) Üst yüze **asal sayı** gelme olayının olasılık değerini bulunuz.

Asal sayı gelme olayının olasılığı

Asal sayılar : **2, 3, 5**

Toplam sıklık : 97 + 89 + 86 = 272 olur.

Göreli sıklık : $\frac{272}{540} \approx 0,50$ olarak hesaplanır.

Asal sayı gelme olasılığı yaklaşık **0,50**'dir.

e) Sayı küpü 3000 kez havaya atılsaydı sıklık dağılımı sizce nasıl değişirdi? Açıklayınız.

Deneme sayısı arttıkça her bir yüzün sıklıkları birbirine daha da yaklaşır. Dağılım daha dengeli olur ve rastgelelikten kaynaklanan sapmalar azalır.

f) Deneme sayısı arttıkça deneysel olasılık ile teorik olasılık arasındaki ilişki hakkında ne söylenebilir?

Deneme sayısı arttıkça deneysel olasılık, teorik olasılığa yaklaşır. Hilesiz bir sayı küpü için her bir sayının teorik olasılığı **1/6**'dır.

DEĞERLENDİRİYORUM

Amaç: Bu bölümde öğrendiklerinizi gözden geçirmenizi, kendi öğrenme sürecinizi değerlendirmenizi ve eksiklerinizi fark etmenizi amaçlıyoruz. Soruları dikkatle yanıtlayınız. Cevaplarınızı geri bildirimlerle karşılaştırarak eksik gördüğünüz noktaları tekrar ediniz.

SORULAR

1. Bir madenî para 40 kez atılmıştır. Yazı gelme sayısı 18 olarak kaydedilmiştir.

Buna göre

a) Yazı gelme olayının göreli sıklığını hesaplayınız.

b) Göreli sıklık değerinin yazı gelme olasılığı hakkında ne ifade ettiğini açıklayınız.

2. Bir torbadan rastgele çekilen bir bilyenin mavi olma olayı incelenmiştir. Deney sonuçları aşağıda verilmiştir.

Deneme Sayısı	Mavi Bilye Sayısı
20	7

Tablodaki verilere göre

a) Mavi bilye çekilme olayının göreli sıklığını bulunuz.

b) Bu sonuca göre mavi bilye çekilme olasılığı hakkında tahminde bulununuz.

3. Aşağıdaki cümlelerde boş bırakılan yerlere uygun kavramları yazınız.

1. Sonucu önceden kesin olarak bilinmeyen ve tekrar edilebilen işleme _____ denir.
2. Bir deneyin her bir uygulanışına _____ adı verilir.
3. Bir deneyde elde edilebilecek tüm sonuçların kümesine _____ denir.
4. Örnek uzayın bir alt kümesi olan ve incelenen duruma _____ denir.
5. Bir olayın gerçekleşme sayısının toplam deneme sayısına oranı _____ olarak adlandırılır.
6. Deney sonuçlarına dayalı olarak hesaplanan olasılığa _____ denir.
7. Deneme sayısı arttıkça göreli sıklığın belirli bir değere yaklaşmasına _____ denir.
8. Az sayıda denemede elde edilen sonuçlar _____ etkisinden daha çok etkilenir.
9. Deney sonuçlarına bakılarak yapılan mantıklı değerlendirmeye _____ denir.
10. Çıkarımlara dayanarak verilen genel sonuca _____ denir.

4. Aşağıda verilen cümlelerde boş bırakılan yerleri temsil eden harflerle boşluklara gelmesi gereken ifadeleri doğru eşleştiriniz.

- Deney → ....A.... → Göreli Sıklık → ....B.... → Yargı
- Deneme sayısı ....C.... ise ....D.... artar
- Gözlem → ....E.... → Yorum

Boşluklara Gelecek İfadeler		
1. Göreli sıklık kararlılığı	**4.** Veri	**7.** Yargı
2. Çıkarım	**5.** Artar	
3. Tahmin	**6.** Azalır	

A-	B-	C-	D-	E-

5. Aşağıdaki tabloda hilesiz iki sayı küpünün havaya atılması deneyinde üst yüze gelen sayıların toplamının sıklığı ve deneyin tekrar sayısı verilmiştir.

Tekrar Sayısı	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
50	1	2	4	6	5	10	7	6	5	2	2
100	2	5	8	14	9	17	15	12	9	5	4
500	12	28	42	69	58	86	75	62	41	18	9
1000	27	54	83	138	112	167	142	119	93	43	22

Tablodaki verilere göre

a) 50, 100, 500 ve 1000 tekrar için elde edilen sıklıklara ait sütun grafiklerinin nasıl olacağını açıklayınız.

b) Üst yüze gelen sayıların toplamının 6 olması olayının deneysel olasılık değerlerini 50, 100, 500 ve 1000 tekrar için bulunuz.

c) Üst yüze gelen sayıların toplamının 6 olması olayının teorik olasılık değerlerini bulunuz.

ç) Tekrar sayısı arttıkça sıklık dağılımında ve deneysel olasılık değerlerinde ne gibi değişiklikler gözlemlenmektedir? Açıklayınız.

6. Bir meteoroloji kulübü, bir bölgede "yağmur yağması" olayını incelemek için geçmiş 20 günün verilerini kullanmıştır. Daha sonra bu gözlemi 60 ve 120 gün boyunca genişletmiştir.

Gün Sayısı	Yağmurlu Gün
20	11
60	29
120	58

Tablodaki verilere göre

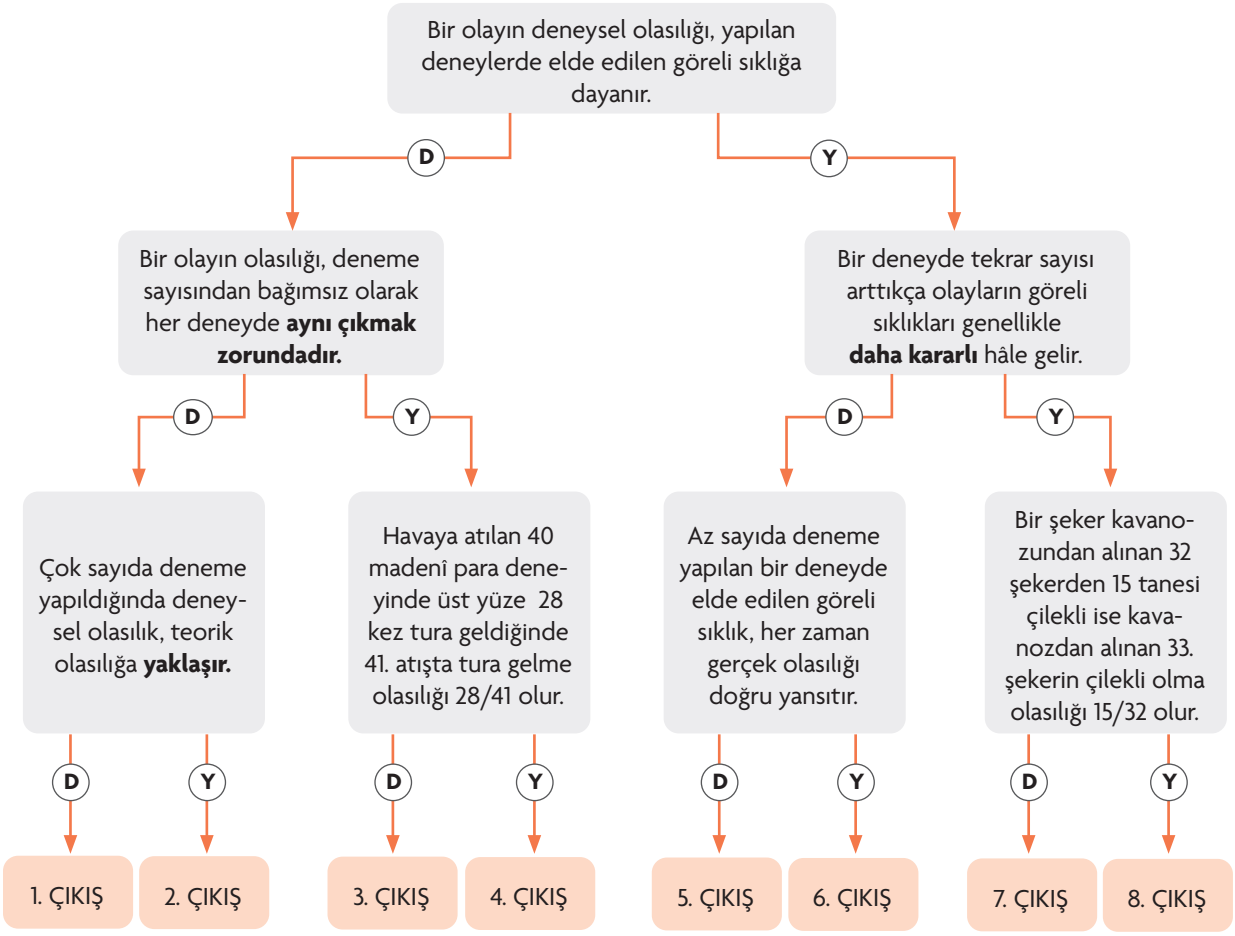
a) Yağmur yağması olayının göreli sıklığını bulunuz.

b) Gün sayısı arttıkça göreli sıklıkta nasıl bir değişim vardır? Açıklayınız.

c) Bu verilere göre bu bölgede yağmur yağma olasılığı hakkında ne söylenebilir? Açıklayınız.

7. Aşağıda deneysel olasılık–göreli sıklık-deneme sayısı ile ilgili Doğru (D)/Yanlış (Y) eşitlikleri içeren tanılayıcı dallanmış ağaç verilmiştir. Verilen eşitliğin doğru olduğunu düşünüyorsanız (D) seçeneğini, yanlış olduğunu düşünüyorsanız (Y) seçeneğini seçerek ilerlemeniz gerekmektedir. İlk eşitlikten başlayarak yapacağınız Doğru (D)/Yanlış (Y) seçimleriyle sekiz farklı çıkış noktasından birine ulaşabileceksiniz.

Buna göre her adımda uygun seçimlerle ilerlendiğinde hangi çıkışa ulaşılacağını bulunuz.



GERİ BİLDİRİM

Bu geribildirim sayesinde kendi cevabınızı kontrol edebilir, hatalarınızı düzelterek öğrenmenizi pekiştirebilirsiniz.

ÇÖZÜM 1.

Verilen:

- Deneme sayısı = 40
- Yazı gelme sayısı = 18

a) Göreli Sıklık: $\frac{18}{40} = 0,45$

b) Yorum:

Yazı gelme olayının göreli sıklığı 0,45'tir. Bu sonuç, yazı gelme olasılığının yaklaşık %45 civarında olduğunu gösterir. Deneme sayısı artırılırsa bu değerin 0,5'e yaklaşması beklenir.

ÇÖZÜM 2.

Deneme sayısı = 20

Mavi bilye sayısı = 7

a) Göreli Sıklık: $\frac{7}{20} = 0,35$

b) Yorum:

Mavi bilye çekilme olasılığı yaklaşık 0,35 olarak tahmin edilebilir.

Deneme sayısı az olduğu için bu tahmin kesin değildir, deney tekrarlandıkça değişebilir.

ÇÖZÜM 3.

1. Sonucu önceden kesin olarak bilinmeyen ve tekrar edilebilen işleme deney denir.
2. Bir deneyin her bir uygulanışına deneme adı verilir.
3. Bir deneyde elde edilebilecek tüm sonuçların kümesine örnek uzay denir.
4. Örnek uzayın bir alt kümesi olan ve incelenen duruma olay denir.
5. Bir olayın gerçekleşme sayısının toplam deneme sayısına oranı göreli sıklık olarak adlandırılır.
6. Deney sonuçlarına dayalı olarak hesaplanan olasılığa deneysel olasılık denir.
7. Deneme sayısı arttıkça göreli sıklığın belirli bir değere yaklaşmasına kararlılık denir.
8. Az sayıda denemede elde edilen sonuçlar rastgelelik etkisinden daha çok etkilenir.
9. Deney sonuçlarına bakılarak yapılan mantıklı değerlendirmeye çıkarım denir.
10. Çıkarımlara dayanarak verilen genel sonuca yargı denir.

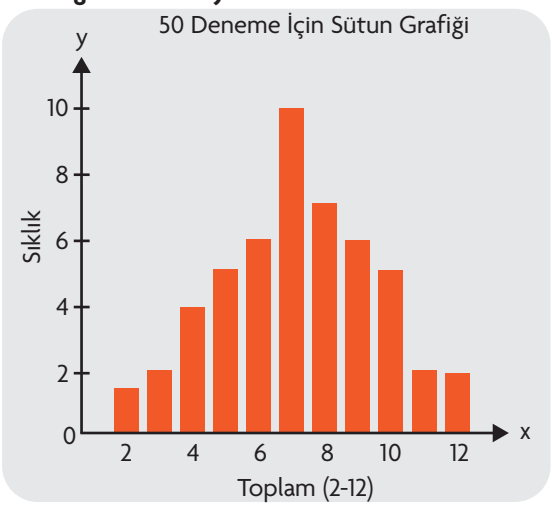
ÇÖZÜM 4.

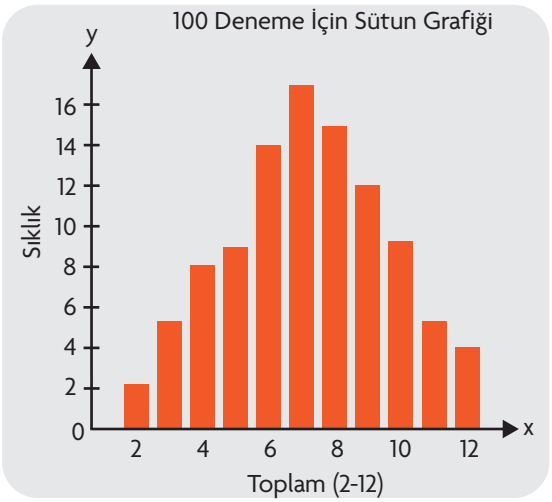
- Deney → ....A.... → Göreli Sıklık → ....B.... → Yargı
- Deneme sayısı ....C.... ise ....D.... artar
- Gözlem → ....E.... → Yorum

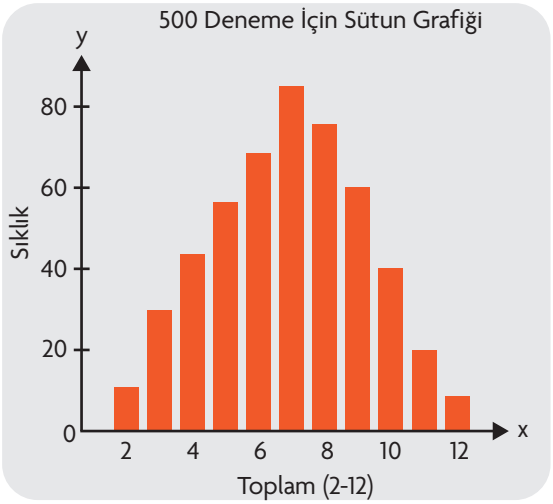
A-4	B-2	C-5	D-1	E-3

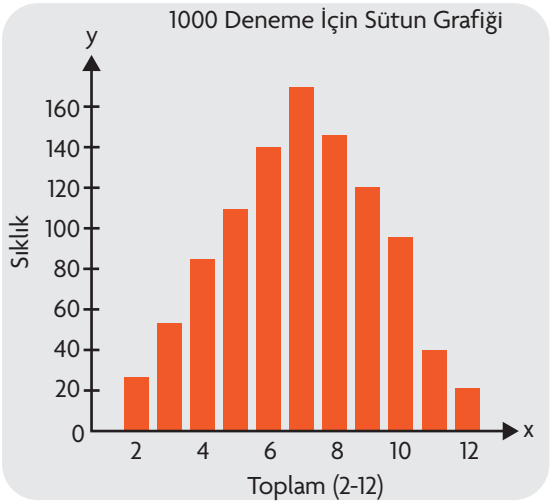
ÇÖZÜM 5.

a) Sütun grafiklerinin yorumu









Grafiklerde:

- **Yatay eksen:** Elde edilen toplamlar (2-12)
- **Dikey eksen:** Bu toplamların görülme sıklıkları
- **Her grafik:** Deneme sayısı arttıkça dağılımın nasıl daha düzenli ve simetrik hâle geldiğini gösteriyor.
- **50 deneme:** Dalgalanmalar fazla, göreli sıklıklar düzensiz.
- **100 deneme:** 6-8 civarında yoğunlaşma başlıyor.
- **500 deneme:** Dağılım çan eğrisine benzemeye başlıyor.
- **1000 deneme:** Teorik olasılığa oldukça yakın bir dağılım görülüyor.

Bu durumda eklenen cevap:

- 50 ve 100 tekrarda grafikler düzensizdir, bazı toplamlar beklenenden fazla veya az görünebilir.
- 500 ve özellikle 1000 tekrarda grafikler daha simetrik hâle gelir.
- En yüksek sütun 7 toplamına ait olur.
- Dağılım, teorik olasılık dağılımına daha çok benzer.

b) Toplamın 6 olması olayının deneysel olasılığı:

HATIRLATMA

$$\text{Deneysel Olasılık} = \frac{\text{Olayın gerçekleşme sayısı}}{\text{Toplam deneme sayısı}}$$

Tekrar Sayısı	Sıklık (Toplam = 6)	Deneysel Olasılık
50	5	$\frac{5}{50} = 0,100$
100	9	$\frac{9}{100} = 0,090$
500	61	$\frac{61}{500} = 0,122$
1000	132	$\frac{132}{1000} = 0,132$

c) İki zarın üst yüzlerine gelen sayıların toplamının 6 olması olayının teorik olasılığı:

Üst yüze gelen sayıların toplamının 6 olduğu çıktılar; (1,5) , (2,4) , (3,3) , (4,2) , (5,1) beş tane ve tüm çıktılar 36 tane olduğundan teorik olasılık değeri : $\frac{5}{36} \approx 0,138$ olarak hesaplanır.

ç) Tekrar sayısı arttıkça gözlenen değişimler için beklenen cevap:

- Sıklık dağılımı daha düzenli ve simetrik hâle gelmektedir.
- Deneysel olasılık değerleri birbirine yaklaşmaktadır.
- Rastgelelikten kaynaklanan büyük sapmalar azalmaktadır.
- Sonuçlar teorik olasılığa yaklaşmaktadır.

ÇÖZÜM 6.

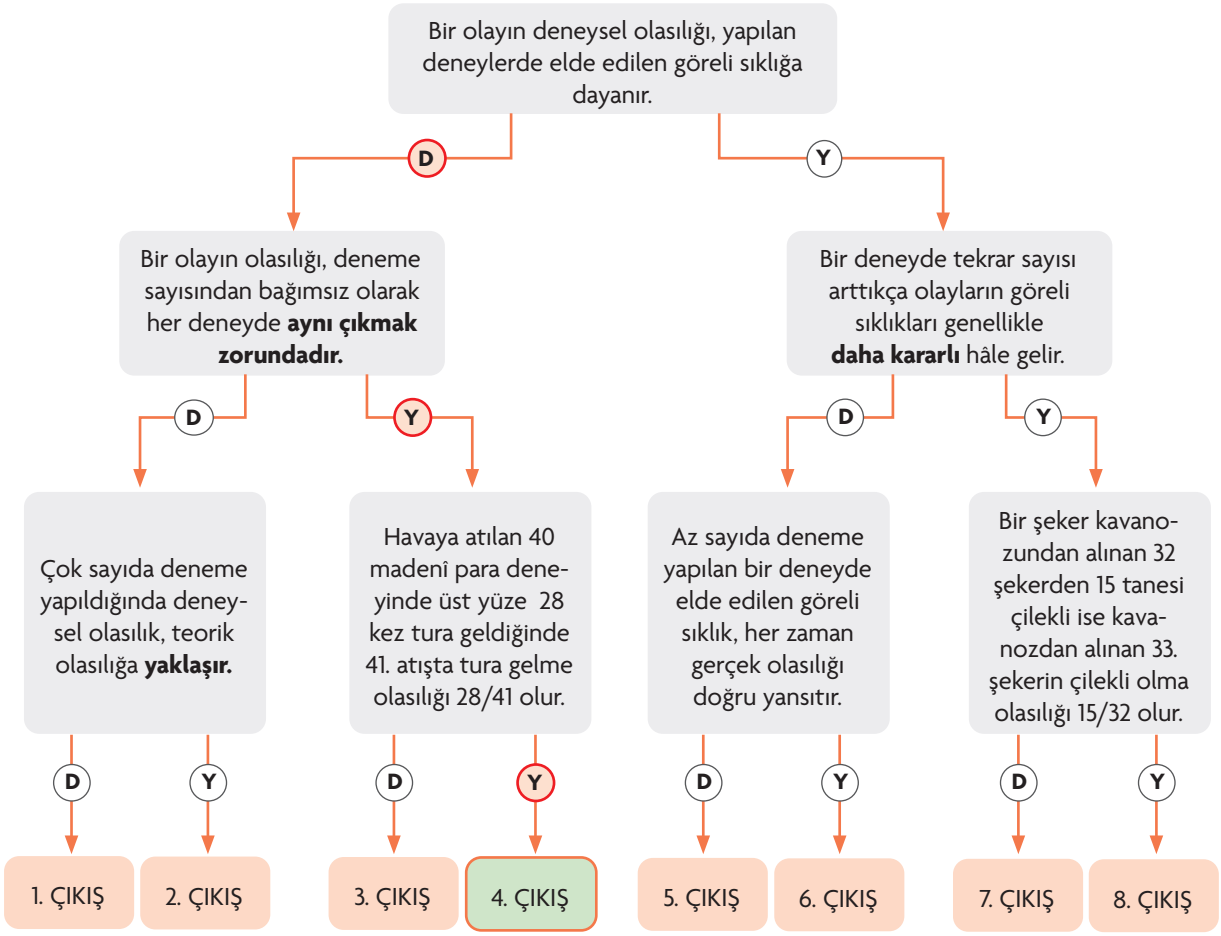
a) $\frac{11}{20} = 0,55$ $\frac{29}{60} \approx 0,48$ $\frac{58}{120} \approx 0,48$

b) Gözlem süresi arttıkça göreli sıklık daha kararlı bir değer etrafında toplanmaktadır.

c) Yağmur yağma olasılığı yaklaşık **0,48 – 0,5** civarındadır.

ÇÖZÜM 7.

Doğru ilerleme sonucunda ulaşılması gereken çıkış 4. çıkış olmalıdır.



ÖĞRENDİKLERİM

Verilen bilgileri dikkatle okuyunuz. Temanın temel kavramlarını, önemli noktalarını ve bağlantılarını gözden geçirerek öğrenmenizi pekiştiriniz.

Deneysel Olasılık: Bir olayın yapılan deneyler sonucunda elde edilen verilere dayanarak tahmin edilen olasılığıdır.

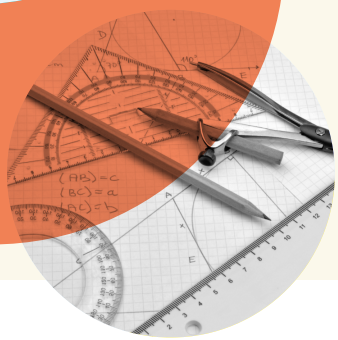
$$\text{Deneysel Olasılık} = \frac{\text{Olayın gerçekleşme sayısı}}{\text{Toplam deneme sayısı}}$$

Göreli Sıklık: Bir olayın gerçekleşme sayısının toplam deneme sayısına oranıdır.
Deneysel olasılık ile aynı anlamda kullanılır.

Teorik Olasılık: Bir olayın deney yapmadan tüm çıktıların eş olasılıklı olduğu varsayımıyla hesaplanan olasılığıdır.

$$\text{Teorik Olasılık} = \frac{\text{İstenen durum sayısı}}{\text{Tüm olası sonuçların sayısı}}$$

Daha fazlası için karekodu okutunuz.



TEORİK OLASILIK

BAŞLARKEN

Sevgili öğrencimiz, bu çalışma kartında bireysel öğrenme yolculuğunuza destek sunmak amaçlanmaktadır. Çalışmalarınızı yürütürken "Hazırlanıyorum", "İlişkilendiriyorum", "Uygulayarak Öğreniyorum", "Değerlendiriyorum" bölümlerini sırası ile yapmanızı; her bölüm ve etkinlik sonundaki geri bildirimleri alarak ilerlemenizi; "Öğrendiklerim" bölümünde öğrenme sürecinizi gözden geçirmenizi bekliyoruz. Bu çalışma kartında matematiğin günlük hayata olan katkılarına ilişkin çıkarımlarda bulunup aşağıdaki soruları yanıtlayabileceksiniz.

- Günlük yaşamda karşılaşılan tüm olayların doğası gereği kesinlikler üzerine kurulu olduğu ileri sürülebilir mi?
- Bir olayın olasılık değeri olarak adlandırılabilmesi için sağlaması gereken ön koşullar nelerdir?
- Olasılık bilgisini kullanmak, bir karar verme süreci ya da bir risk değerlendirmesinde nasıl bir etki üretir? Bu aşamada nasıl bir yol izlenebilir?

HAZIRLANIYORUM

Amaç: Bu bölümde ön bilgilerinizi hatırlamanızı ve temaya hazırlıklı hâle gelmenizi amaçlıyoruz.

Aşağıda yer alan ifadeler, bu temada tamamlanması hedeflenen öğrenme çıktısını ele almadan önce sahip olmanız gereken bazı temel becerileri içermektedir.

- Eğer ifadedeki bilgiye hâkim olduğunuzu düşünüyorsanız kutucuğu işaretleyiniz.
- Eğer temayı henüz tam olarak bilmediğinizi ya da hatırlamadığınızı düşünüyorsanız kutucuğu boş bırakınız.

Bu çalışmanın amacı notla değerlendirilmeyecek olup amacı temaya ne ölçüde hazır olduğunuzu belirlemektir.

ÖN ÖĞRENME KONTROL LİSTESİ	
1. Olasılık ile ilgili temel kavramları (olay, deney, çıktı, örnek uzay) bilirim.	☐
2. Verilen olayların ayrık olup olmama durumlarını ayırt edebilirim.	☐
3. Olasılık yaklaşımlarını (deneysel olasılık ve teorik olasılık) bilirim.	☐

"Ön Öğrenme Kontrol Listesi"ni doldurduktan sonra aşağıda verilen "Kontrol Noktası" sorularını çözünüz ve cevaplarınızı kontrol ediniz.

KONTROL NOKTASI

SORU 1.

İçerisinde 1'den 6'ya kadar numaralandırılmış, birbiriyle özdeş altı top bulunan bir torbadan rastgele bir top çekilmesi deneyi ele alınsın.

a) Bu deneyin olası tüm çıktıları nelerdir? Yazınız.

b) Bu torbadan rastgele çekilen bir topun üzerindeki sayının 3'ten büyük olması olayına ait çıktılar nelerdir? Yazınız.

c) Çekilen topun üzerindeki sayının tek sayı olma olasılığının değerini hesaplayınız.

d) Çekilen topun üzerindeki sayının 5'ten büyük olması olayının tümleyeninin olasılık değerini bulunuz.

e) K olayı "çekilen sayının tek olması" ve L olayı "çekilen sayının asal olması" olarak tanımlansın.

Bu iki olayın neden ayrık olaylar olmadığını olaylara ait çıktıları bularak açıklayınız.

f) Bu deney için kesişimleri boş küme olan (birbiriyle ayrık) iki olay tanımlayınız ve bu olayların çıktı kümelerini yazarak neden ayrık olduklarını gösteriniz.

SORU 2.

Aşağıdaki durumların her birinde olasılık değerinin hesaplanmasında hangi yaklaşımın (deneysel veya teorik) kullanıldığını tespit ediniz.

Belirlediğiniz yaklaşıma göre aşağıdaki ifadelerde; satır başındaki boşluğa deneysel olasılık için "D", teorik olasılık için "T", ifadenin içindeki boşluğa ise olasılık değerini yazınız.

a) ---- Bir basketbolcunun oynadığı son 10 maçta kullandığı 80 serbest atışın 60 tanesini sayıya çevirdiği görülmüştür. Bu oyuncunun bir sonraki serbest atışı sayıya çevirme olasılığı $\frac{3}{4}$ olarak hesaplanır.

b) ---- Her yüzünde 1'den 6'ya kadar farklı bir rakam bulunan hilesiz bir sayı küpü atıldığında üst yüze gelen sayının asal olma olasılık değeri $\frac{1}{2}$ dir.

c) ---- Alfabemizdeki 29 harfin yazılı olduğu özdeş kartlardan rastgele çekilen bir kartın sesli harf olma olasılığı $\frac{8}{29}$ dur.

d) ---- Bir anket şirketinin 2 000 kişiyle yaptığı araştırmaya göre katılımcılardan 400'ünün A gazetesini okuduğu saptanmıştır. Bu gruba göre rastgele seçilen bir kişinin A gazetesini okuma olasılığı %20 dir.

GERİ BİLDİRİM

Bu geri bildirim sayesinde kendi cevabınızı kontrol edebilir, hatalarınızı düzelterek öğrenmenizi pekiştirebilirsiniz.

İnternet erişiminiz varsa eksik gördüğünüz konuları tamamlamak için MEBİ platformundaki içeriklerden yararlanabilirsiniz.

KONTROL NOKTASI

ÇÖZÜM 1.

a) Bu deneyin olası tüm çıktılarının oluşturduğu örnek uzay kümesi E ile gösterilsin. E = {1, 2, 3, 4, 5, 6} olarak bulunur.

b) Soruda istenen **olay** ise çekilen topun üzerindeki sayının 3'ten büyük olmasıdır. Örnek uzay kümesindeki elemanlardan bu şartı sağlayanlar 4, 5 ve 6 olduğundan istenen olaya ait çıktılar kümesi A = {4, 5, 6} olarak bulunur.

c) Olay (A): Çekilen sayının tek sayı olmasıdır.

Olaya Ait Çıktılar: {1, 3, 5} olduğundan istenen durum sayısı 3'tür.

Örnek uzayın eleman sayısı s(E) = 6

Bu durumda A olayına ait olasılık, $P(A) = \frac{s(A)}{s(B)} = \frac{3}{6}$ bulunur.

Bir deneyde elde edilebilecek tüm sonuçların kümesine **örnek uzay,** bu kümenin her bir elemanına ise **çıktı** denir.

Olay, deneyin tüm olası sonuçları (örnek uzay) içerisinden ilgilendiğimiz özel bir durumu veya bu duruma uyan sonuçlar grubunu ifade etmektedir.

Teorik olasılık, istenen çıktıların sayısının olası tüm çıktıların sayısına oranıyla bulunur.

d) Bir olayın **tümleyeni**, o olayın gerçekleşmediği tüm durumları ifade eder.

Olay (B kümesi olsun): Çekilen sayının 5'ten büyük olmasıdır.

Bu olayın çıktılarının kümesi: B = {6}

Çıktı sayısı s(B) = 1 olur.

Olayın Tümleyeni (B'): Çekilen sayının 5'ten büyük **olmaması** dolayısıyla 5'e eşit veya 5'ten küçük olmasıdır.

B' = {1, 2, 3, 4, 5}

Çıktı sayısı, s(B') = 5 olur.

$P(B') = \frac{5}{6}$ bulunur.

Farklı bir yöntemle çözüm için öncelikle örnek uzayın olasılığı yazılır.

$P(E) = \frac{s(E)}{s(E)} = 1$

B olayının olasılığı ile B olayının tümleyeninin olasılığı toplamı tüm çıktıların olasılığına eşittir.

Bu durumda P(E) = P(B) + P(B') = 1 eşitliği elde edilir.

B = {6} olduğundan

B olayının olasılığı $P(B) = \frac{1}{6}$,

B nin tümleyeninin olasılığı ise $1 = \frac{1}{6} + P(B') \Rightarrow P(B') = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$ olarak bulunur.

e) Aynı örnek uzaya ait iki olayın ortak çıktısı varsa bu olaylar **ayrık olmayan olaylar** olarak adlandırılır. Bu soruda K ve L olaylarının ortak çıktılarının (kesişimini) bulunup neden ayrık olmadıklarının gösterilmesi istenmektedir.

K: Çekilen sayının tek olması olayıdır.

Çıktı kümesi: K= {1, 3, 5}

L: Çekilen sayının asal olması olayıdır.

Çıktı kümesi: L = {2, 3, 5}

Ortak çıktılar: $K \cap L = \{3, 5\}$ elemanlarıdır.

Kesişim kümesi boş küme olmadığı için bu iki olay **ayrık olay değildir.**

f) Bu soruda ise kesişimi olmayan diğer bir deyişle **ayrık olaya** ait bir örnek bulunması istenmektedir. **Ayrık olayların ortak çıktıları yoktur.** En bilinen ayrık olay örneklerinden biri; içerisinde 1'den 6'ya kadar numaralandırılmış, birbiriyle özdeş altı top bulunan bir torbadan rastgele bir top çekilmesi deneyinde çekilen topun üzerindeki sayının "tek sayı" ve "çift sayı" gelmesi olaylarıdır.

M: Çekilen topun üzerindeki sayının tek olması olayı olsun.

M = {1, 3, 5}

N: Çekilen topun üzerindeki sayının çift olması olayı olsun.

N = {2, 4, 6}

Ortak çıktıların kümesi $M \cap N$ olmak üzere

$M \cap N = \emptyset$ olduğundan

M ve N olayları **ayrık olaylardır.**

ÇÖZÜM 2.

a) ...**D**... Bir basketbolcunun oynadığı son 10 maçta kullandığı 80 serbest atışın 60 tanesini sayıya çevirdiği görülmüştür. Bu oyuncunun bir sonraki serbest atışı sayıya çevirme olasılığı $\frac{3}{4}$ olarak hesaplanır.

UYARI

Bir olaya ait olasılık değerinin incelenebilmesi için o olaya ait her bir çıktının eşit şansa sahip olması gerekir.

1. Gözlem Yapılır: Oyuncunun **geçmişteki performansına** (gerçekleşmiş olaylara) bakılarak hesaplanan olasılık, deneysel olasılıktır.

2. Deney Sayısı Belirlenir: Basketbolcunun toplam serbest atış sayısı dolayısıyla deney sayısı 80'dir.

3. Başarılı Sonuç Sayısı Belirlenir: Serbest atışı sayıya çevirme sayısı dolayısıyla başarılı sonuç sayısı 60'dır.

4. Deneysel Olasılık Formülü Uygulanır: Deneysel olasılık = $\frac{\text{Başarılı Sonuç Sayısı}}{\text{Toplam Deney Sayısı}}$ formülü ile bulunur.

5. Hesaplama Yapılır: Buradan olasılık $\frac{60}{80} = \frac{3}{4}$ bulunur.

6. Sonuç: Gelecekteki olasılık, geçmiş deneylere (maçlara) dayanılarak tahmin edildiği için **deneysel olasılık** yaklaşımı kullanılmıştır.

Deneysel Olasılık: Bir olayın geçmişteki deneylerde (gözlemlerde) meydana gelme sıklığıdır. "Olasılık" bu geçmiş verilere dayanarak hesaplanır.

Teorik Olasılık: Bir olayın olma olasılığı, istenen olayın çıktı sayısının olası durum sayısına oranıdır.

b) ...**T**... Her yüzeyinde 1'den 6'ya kadar farklı bir rakam bulunan hilesiz bir sayı küpünün atıldığında üst yüze gelen sayının asal olma olasılık değeri $\frac{1}{2}$'dir.

1. Örneklem Belirlenir: Sayı küpünün hilesiz olması nedeniyle tüm olası sonuçların kümesi {1, 2, 3, 4, 5, 6} bulunur. Toplam olası sonuç sayısı 6'dır.

2. İstenen Olay Belirlenir: İstenen olay, üst yüze asal sayı gelmesidir. Asal sayılar kümesi {2, 3, 5} bulunur. İstenen olay sayısı 3'tür.

3. Teorik Olasılık Formülü Uygulanır: Teorik olasılık = $\frac{\text{İstenen Olay Sayısı}}{\text{Tüm Olası Olayların Sonuçları}}$ formülü ile bulunur.

4. Hesaplama Yapılır: Olasılık $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ bulunur.

5. Sonuç: Olasılık, herhangi bir deneysel gözleme ihtiyaç duyulmadan, örnek uzaydaki tüm çıktıların **eşit şansa sahip olduğu varsayımı** altında hesaplandığından **teorik olasılık** yaklaşımı kullanılmıştır.

c) ...**T**... Alfabemizdeki 29 harfin yazılı olduğu özdeş kartlardan rastgele çekilen bir kartın sesli harf olma olasılığı $\frac{8}{29}$'dur.

1. Örneklem Uzayı Belirlenir: Toplam 29 harfin yazılı olduğu özdeş kartlar olduğundan tüm olası sonuç sayısı 29'dur.

2. İstenen Olay Belirlenir: İstenen olay, çekilen kartın sesli harf olmasıdır. Türk dili alfabesindeki sesli harfler kümesi {a, e, ı, i, o, ö, u, ü} bulunur. İstenen olay sayısı 8'dir.

3. Teorik Olasılık Formülü Uygulanır: Teorik olasılık = $\frac{\text{İstenen Olay Sayısı}}{\text{Tüm Olası Olayların Sonuçları}}$ formülü ile bulunur.

4. Hesaplama Yapılır: Olasılık $\frac{8}{29}$ olarak bulunur.

5. Sonuç: Olasılık; herhangi bir deneme yapılmadan, eşit olasılıklı varsayıma (kartların özdeş olması) dayanılarak hesaplandığı için **teorik olasılık** yaklaşımı kullanılmıştır.

d) ...**D**... Bir anket şirketinin 2 000 kişiyle yaptığı araştırmaya göre katılımcılardan 400'ünün A gazetesini okuduğu saptanmıştır. Bu gruba göre rastgele seçilen bir kişinin A gazetesini okuma olasılığı **%20**'dir.

1. Gözlem Yapılır: Olasılık, bir anket araştırması sonucunda (yapılmış bir deney) elde edilen verilere bakılarak hesaplanmıştır.

2. Deney Sayısı Belirlenir: Ankete katılan toplam kişi sayısı 2 000'dir.

3. Başarılı Sonuç Sayısı Belirlenir: A gazetesini okuyan kişi sayısı başka bir deyişle istenen çıktı sayısı 400'dür.

4. Deneysel Olasılık Formülü Uygulanır: Deneysel olasılık = $\frac{\text{Başarılı Sonuç Sayısı}}{\text{Toplam Deney Sayısı}}$ formülü ile bulunur.

5. Hesaplama Yapılır: Olasılık $\frac{400}{2000} = \frac{1}{5}$ bulunur.

6. Sonuç: Bu soruda olasılık değeri, sonuçların eşit olasılıklı olduğu varsayımına dayanılarak değil yapılan denemeler (araştırmalar) sonucunda elde edilen verilerin oranlanmasıyla belirlendiği için **deneysel olasılık** yaklaşımı kullanılmıştır. Bu nedenle hesaplama, teorik olasılıktan farklı olarak gözleme ve elde edilen sonuçlara bağlıdır.

İLİŞKİLENDİRİYORUM

Amaç: Bu bölümde yeni öğreneceğiniz temayı; zihninizde var olan bilgileriniz, yaşantılarınız ve diğer derslerde öğrendiklerinizle ilişkilendirmenizi bekliyoruz.

Aşağıdaki metinleri okuyup görselleri inceleyiniz. Bu metinler, teorik olasılığın gerçek yaşamla nasıl ilişkilendirildiğini fark etmenizi ve teorik olasılık üzerine düşünmenizi amaçlamaktadır.

Hava Durumu Tahminleri



Bir meteoroloji uzmanı; elindeki sıcaklık, basınç ve nem gibi verileri kullanarak yarın yağmur yağma olasılığını hesaplar. Bu hesaplamalar, geçmiş veriler ve karmaşık matematiksel modeller (algoritmalar) üzerine kuruludur. Hava tahminlerinde gördüğünüz **%70 yağmur ihtimali** gibi ifadeler, tam olarak teorik olasılığın günlük hayattaki en somut uygulamalarından biridir. Bu yüzdelik değer, uzmanların ellerindeki veriler ışığında bu olayın gerçekleşme sıklığına dair bir yargıda bulunulmasını sağlar.

Olasılık Teorisi'nin Doğuşu



17. yüzyılın ortalarında Fransız soylusu Şövalye de Méré'nin şans oyunlarında karşılaştığı bir problem, iki büyük matematikçi Blaise Pascal (1623-1662) ve Pierre de Fermat (1607-1665) arasında yoğun bir yazışmaya yol açmıştır.

Bu yazışmalar, günümüzde kullandığımız modern olasılık teorisinin temelini atmıştır. O dönemde belirsizlik içeren bir oyunun (veya karşılaşmanın) yarım kalması durumunda bahsin (veya kazancın) nasıl adilce bölüneceği gibi sorular, matematiksel bir çerçeveye oturtulmaya çalışılmıştır. Bu çabalar; rastgeleliği incelemenin sadece bir şans meselesi olmadığını, aynı zamanda bir mantık ve hesaplama bilimi olduğunu ortaya koymuştur. Bu dönemde olasılık matematiğin bir alt dalı olarak ortaya çıkmıştır, denilebilir.

UYGULAYARAK ÖĞRENİYORUM

OLASI TÜM ÇIKTILARIN GÖRSELLEŞTİRİLMESİ

ETKİNLİK 1.

Bir mağazada üç farklı renkte tişört (kırmızı, beyaz, mavi) ve iki farklı renkte pantolon (siyah, bej) bulunmaktadır. Bir müşteri bir tişört ve bir pantolon seçmek istemektedir.



a) Bu mağazadan bir tişört ve bir pantolon seçilerek yapılabilecek tüm kıyafet kombinasyonlarını sistematik liste yöntemi ile listeleyiniz.

b) Elde ettiğiniz kombinasyonları satırlarda tişört renkleri, sütunlarda pantolon renkleri olacak şekilde bir tablo ile gösteriniz.

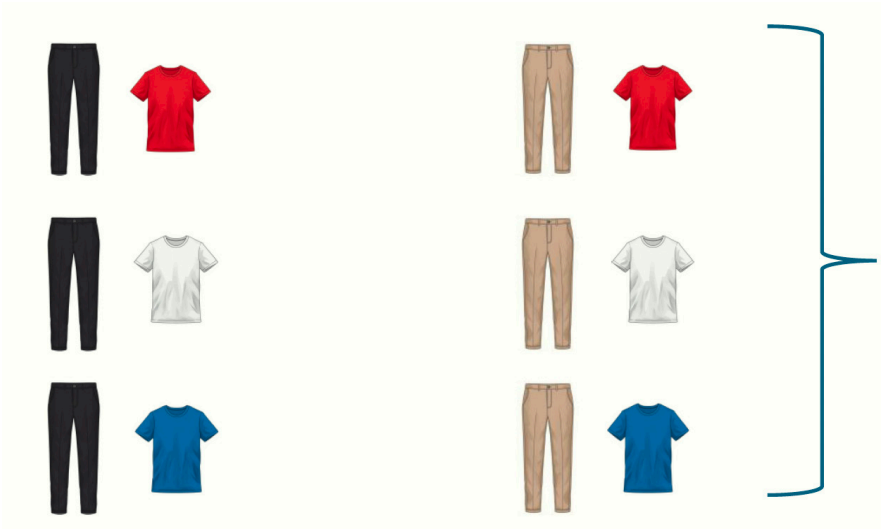
ÇÖZÜM

a) Bu mağazadan bir tişört ve bir pantolon seçilerek yapılabilecek tüm kıyafet kombinasyonlarının tüm olası çıktıları sistematik liste yöntemi ile aşağıdaki gibi görselleştirilebilir.

NOT

Sistematik Liste Yöntemi: Bir veya birden fazla olayın tüm olası çıktılarının belirli bir düzen içinde sıralanarak kaydedilmesini sağlayan bir gösterim biçimidir.

Bu yöntem, bir deneyde meydana gelebilecek tüm sonuçları eksiksiz ve tekrarsız biçimde görselleştirmek amacıyla kullanılır.



Şekilde **sistematik liste yöntemi**nin kullanımı gösterilmiştir.

Bu problemde seçilebilecek kıyafetler iki ayrı küme olarak tanımlanabilir.

- A Kümesi: {Siyah Pantolon, Bej Pantolon}
- B Kümesi: {Kırmızı Tişört, Beyaz Tişört, Mavi Tişört}

Bu kümelerin eleman sayıları ise

- s(A) = 2
- s(B) = 3 olarak bulunur.

Çarpma Yoluyla Sayma Formülü ile Örnek Uzayın Eleman Sayısını Bulalım:

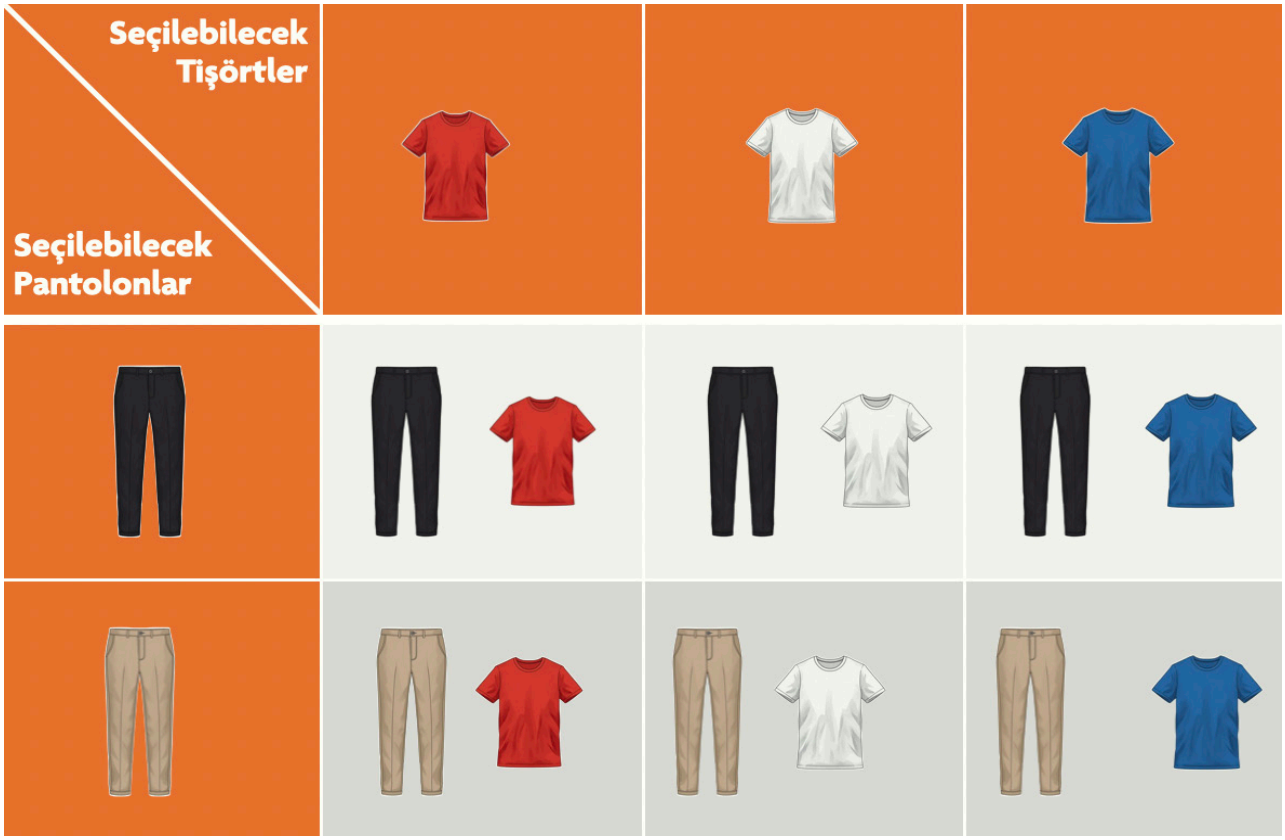
Bir pantolon ve bir tişört seçilerek oluşturulabilecek tüm olası kombinasyonların sayısı (örnek uzayın eleman sayısı), kümelerin eleman sayılarının çarpımına eşittir ve formülü aşağıda verilmiştir.

$s(E) = s(A) \cdot s(B)$

Buna göre

$s(E) = 2 \cdot 3 = 6$ bulunur.

b) Elde ettiğiniz kombinasyonları satırlarda tişört renkleri, sütunlarda pantolon renkleri olacak şekilde bir tabloda gösterdiğimizde aşağıdaki gibi görselleştirilebilir.



E, olası tüm çıktıların kümesi olmak üzere

E kümesinin eleman sayısı ise s(E) ile gösterilir ve

s(E) = 2 • 3 = 6 bulunur.

NOT

Tablo Yöntemi: Bir deneyin veya olaylar dizisinin tüm olası çıktılarının satır ve sütunlar hâlinde düzenlenerek görselleştirilmesini sağlayan bir temsil yöntemidir. Bu yöntemde her bir satır ve sütun, bir olayın olası sonuçlarını temsil eder; kesişim noktaları ise bu sonuçların birlikte gerçekleştiği durumları gösterir.

Tablo yöntemi, özellikle iki olayın birlikte incelendiği durumlarda olası tüm çıktıları düzenli biçimde görselleştirmeyi kolaylaştırır.

ETKİNLİK 2.

Bir deneyde

1. torbada 1 kırmızı, 1 mavi top

2. torbada 1 yeşil, 1 pembe top

3. torbada 1 beyaz, 1 siyah top bulunmaktadır.

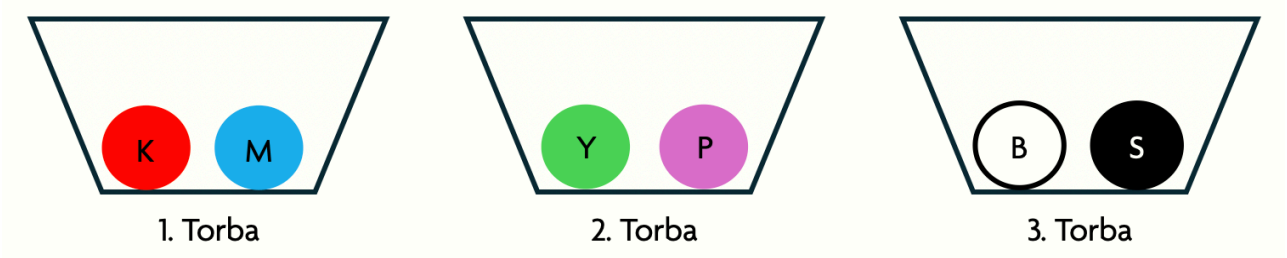
Her torbadan rastgele bir top çekilecektir. Bu deneyde olası tüm çıktıların **ağaç şeması yöntemiyle** nasıl gösterileceğini inceleyiniz.

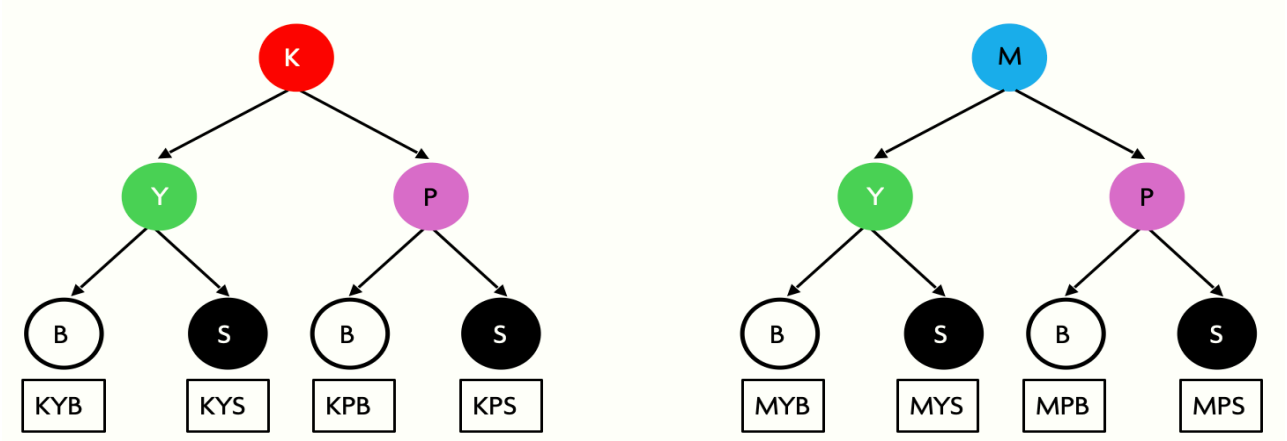
ÇÖZÜM

Olay sayısının iki olduğu durumlarda tablo ve sistematik liste yöntemlerinin kullanılabildiğini gördünüz. **Peki, olay sayısı ikiden fazla olduğunda kullanabileceğiniz başka bir görselleştirme yöntemi var mıdır?**

Olay sayısının ikiden fazla olduğu durumlarda kullanılabilecek görselleştirme yöntemi **ağaç şeması** oluşturmaktır.

Buna göre her renk baş harfi ile temsil edilmiş ve olası tüm çıktılar ağaç şeması ile görselleştirilmiş olsun.





Bu yöntemle ağaç şeması, üç olaya ait olası tüm çıktıları eksiksiz ve düzenli bir biçimde görselleştirmeyi sağlar.

Ağaç şeması kullanılarak toplamda 8 farklı çıktı elde edilir. E, olası tüm çıktıların kümesi olmak üzere E = {KYB, KYS, KPB, KPS, MYB, MYS, MPB, MPS} biçimindedir.

E kümesinin eleman sayısı ise s(E) ile gösterilir, s(E) = 2 • 2 • 2 = 8 bulunur.

NOT

Olay sayısı iki olduğunda tablo yöntemi ile sistematik liste yöntemi kullanılabilir.

Olay sayısı ikiden fazla olduğunda ise sistematik liste yapma ve ağaç şeması yöntemi kullanılabilir.

Tüm bu yöntemler çıktıların daha sistematik ve düzgün bir biçimde gösterilmesi için işlevseldir.

SIRA SİZDE 1.

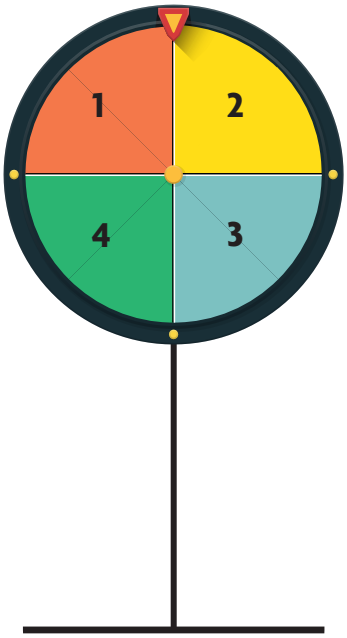
Hilesiz üç madenî paranın havaya atılması deneyinin olası tüm çıktılarını ağaç şeması ile gösteriniz, örnek uzayın eleman sayısını bulunuz.

SIRA SİZDE 2.

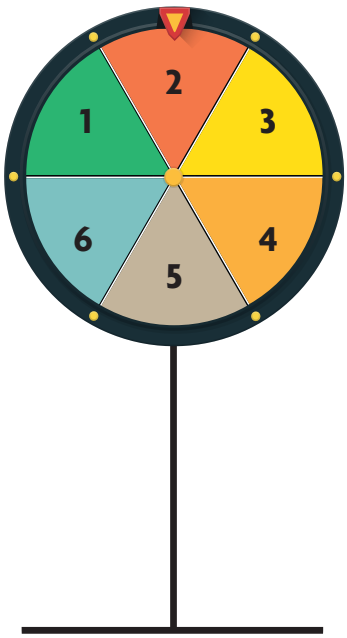
Aşağıdaki görselde, merkezleri etrafında serbestçe dönebilen iki farklı çark verilmiştir. Çarklardan birincisi 4 eş bölmeye, ikincisi ise 6 eş bölmeye ayrılarak her bir bölme ardışık sayılarla numaralandırılmıştır.

Bu iki çark aynı anda döndürüldüğünde her bir çarkın üzerindeki ok hizasına gelen sayıların oluşturduğu ikililer bu deneyin çıktıları olarak kabul edilmektedir.

Buna göre bu deneyde oluşabilecek tüm çıktıları belirlemek amacıyla sistematik liste, tablo ve ağaç şeması yöntemlerinden hangisini kullanmayı tercih edersiniz? Söz konusu görselleştirme aracını seçmenizdeki temel gerekçe nedir? Açıklayınız.



Çark 1



Çark 2

OLAYLARIN OLASILIK DEĞERİNİ HESAPLAMA

NOT

Eş olasılık, yapılan bir deney sonucunda **her bir çıktının seçilme olasılık değerinin birbirine eşit** olduğu duruma denir.

ETKİNLİK 1.

Bir torbada aynı büyüklükte 3 kırmızı, 2 mavi ve 1 yeşil top bulunmaktadır.

Torbadan rastgele bir top çekilecektir.

a) Hangi rengin seçilme olasılığı sizce daha fazladır? Açıklayınız.

b) Sizce her topun seçilme olasılığı eşit midir? Açıklayınız.

c) Seçilebilecek kırmızı topların sayısının toplam olası durum sayısına oranı sizce neyi ifade eder? Açıklayınız.

ÇÖZÜM

a) Torbada en çok bulunan renk kırmızıdır (3 tane). Bu nedenle kırmızı topun çekilme olasılığı diğer renklere göre daha fazladır.

b) Torbada **aynı büyüklükte** 6 top bulunmaktadır. Torbadaki tüm topların aynı büyüklükte olduğu belirtilmiştir. Bu, onları birbirinden ayırmamızı zorlaştırır (Örneğin, gözümüz kapalıyken kırmızı topu mavi toptan ayıramayız.). Deneyimiz "Torbadan rastgele bir top çekme" olduğundan her bir topun çekilme şansı eşittir. Torbadan rastgele bir top çekilmesi deneyinde tüm olası çıktılar kümesi E ile gösterilsin.

$E = \{K_1, K_2, K_3, M_1, M_2, Y_1\}$ olduğuna göre $s(E) = 6$ bulunur.

K_1 in olasılık değeri $\frac{1}{6}$ bulunur. K_2 nin olasılık değeri $\frac{1}{6}$ bulunur. K_3 ün olasılık değeri $\frac{1}{6}$ bulunur.

M_1 in olasılık değeri $\frac{1}{6}$ bulunur. M_2 nin olasılık değeri $\frac{1}{6}$ bulunur. Y_1 in olasılık değeri $\frac{1}{6}$ bulunur.

Aynı büyüklükte topların bulunduğu bir torbadan rastgele bir top çekilmesi deneyinde tüm olası çıktıların olasılık değerleri eşittir. Bu durumda örnek uzaydaki her bir çıktı eş olasılıklıdır.

c) Seçilebilecek kırmızı topların sayısı, incelediğimiz **olaya ait çıktıların sayısını** ifade eder. Toplam olası durum sayısı ise **tüm çıktıların sayısıdır.**

Teorik olasılık [P(Olay)] değeri, istenen çıktıların sayısının olası tüm çıktıların sayısına oranıdır.

Bu oran, torbadan kırmızı top çekme olayının teorik olasılık değerini ifade eder.

HATIRLATMA

Teorik olasılık, istenen çıktıların sayısının olası tüm çıktıların sayısına oranıyla bulunur.

$$P(\text{Olay}) = \frac{\text{Olaya ait tüm çıktıların sayısı}}{\text{Olası tüm çıktıların sayısı}}$$

Olaya ait çıktı sayısı (Kırmızı top sayısı): $s(\text{Kırmızı}) = 3$

Olası tüm çıktıların sayısı (Toplam top sayısı): $s(E) = 6$

$$P(\text{Olay}) = \frac{\text{Olaya ait tüm çıktıların sayısı}}{\text{Olası tüm çıktıların sayısı}} \Rightarrow P(\text{Kırmızı}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

SIRA SİZDE 3.

Havaya atılan 1'den 6'ya kadar numaralandırılmış hilesiz iki sayı küpünün üst yüzüne gelen sayıların çarpımının 12'ye tam bölünebilme olasılığını bulunuz.

SIRA SİZDE 4.

Bir lise kütüphanesindeki tüm kitapların %35'i roman, %45'i ders kitabı ve %20'si test kitabıdır. Kütüphaneye gelen bir öğrenci, rastgele bir kitap seçecektir. Romanların %40'ı kuşe kâğıda basılmıştır.

Buna göre öğrencinin seçtiği kitabın kuşe kâğıda basılmış bir roman olma olasılığını bulunuz.

ETKİNLİK 3.

Aşağıdaki tabloda verilen olay çiftlerini inceleyiniz. Bu çiftlerin ayrık olay-ayrık olmayan olay olma durumlarını belirleyiniz. Soruları cevaplarken tablodaki kutucuk numaralarını kullanınız.

Sayı küpü atma deneyinde üst yüze gelen sayının çift olması olayı-Sayı küpü atma deneyinde üst yüze gelen sayının asal olması olayı **(1)**	Bir sınıftan rastgele seçilen bir öğrencinin gözlüklü olması olayı-Aynı sınıftan seçilen bir öğrencinin sarışın olması olayı **(2)**
Bir torbadan rastgele çekilen bir topun kırmızı olması olayı-Rastgele çekilen topun mavi olması olayı **(3)**	1'den 10'a kadar numaralandırılmış kartlardan çekilen bir kartın numarasının 4'ten büyük olması olayı-Aynı kartın numarasının çift olması olayı **(4)**
"MATEMATİK" kelimesinin harflerinden seçilen bir harfin sesli harf olması olayı-Aynı harfin "M" olması olayı **(5)**	Hilesiz bir madenî paranın art arda iki kez atılmasında en az bir tura gelmesi olayı-İlk atışın yazı gelmesi olayı **(6)**

a) Ayrık olay çiftlerinin bulunduğu kutucuk numaralarını yazınız.

.....

.....

b) Ayrık olmayan çiftlerinin bulunduğu kutucuk numaralarını yazınız.

.....

.....

c) Yukarıdaki tabloda yer almayan, günlük hayattan ayrık ve ayrık olmayan olaylara birer örnek yazınız.

.....

.....

ÇÖZÜM

a)

Ayrık olaylar aynı anda gerçekleşmeleri mümkün olmayan, ortak çıktısı bulunmayan olaylardır.

(3): Bir torbadan tek bir top çekilmiştir. Bu top aynı anda hem kırmızı hem mavi olamaz. Dolayısıyla "kırmızı olma" ve "mavi olma" sonuçlarının **kesişim kümesi boş kümedir.** Tanım gereği bu iki olay ayrık olaydır.

(5): "MATEMATİK" kelimesindeki sesli harfler (A, E, İ) ile "M" harfi farklıdır. Seçilen bir harf hem sesli hem de "M" harfi olamaz.

Cevap: 3 ve 5 ayrık olaylardır.

b) Ayrık Olmayan Olaylar:

Ayrık olmayan olaylar, en az bir ortak çıktıya sahip olan dolayısıyla aynı anda gerçekleşmeleri mümkün olan olaylardır.

(1): Sayı küpü atıldığında üst yüze gelen sayı hem çift hem asal olabilir (örneğin 2). Bu nedenle ayrık değildir.

(2): Bir öğrenci hem gözlüklü hem sarışın olabilir. Ayrık olaylar değildir.

(4): 1'den 10'a kadar numaralı kartlardan çekilen bir kartın numarası hem 4'ten büyük hem çift olabilir (örneğin 6, 8, 10). Ayrık olaylar değildir.

(6): İki kez para atıldığında "en az bir tura" olayı ile "ilk atış yazı" olayı birlikte gerçekleşebilir (örneğin Y-T). Ayrık olaylar değildir.

ETKİNLİK 4.

Bir okul; öğrenci-veli iletişimini güçlendirmek, öğrenci ve ailesinin birlikte kaliteli zaman geçirmelerini sağlamak amacıyla bazı kulüp etkinliklerini hem öğrencilere hem de velilere açık olarak düzenlemektedir. Aşağıdaki tabloda üç farklı kulübün düzenlediği etkinlikler ve bu etkinliklerin hedef kitlesi verilmiştir.

	Öğrenci Etkinliği	Veli Katılımlı Etkinlik
Kitap Kulübü	Roman Analizi	Ortak Okuma Saati
Sanat Kulübü	Karakalem Çalışması	Ailece Resim Atölyesi
Bilim Kulübü	Deney Günü	Bilim Şenliği

Buna göre yalnızca bir kulübe üye olan bir katılımcının veli katılımlı etkinliğe katılması veya sanat kulübü etkinliklerinden birine katılması olasılığını bulunuz.

ÇÖZÜM

1. Yol: (Doğrudan Sayma Yöntemi)

İstenen koşul, veli katılımlı etkinlik **veya** sanat kulübü etkinliğine katılmaktır.

Bu iki şarttan en az birini sağlayan etkinlikler belirlensin.

Veli Katılımlı Etkinlikler:

Ortak Okuma Saati

Ailece Resim Atölyesi

Bilim Şenliği

Sanat Kulübü Etkinlikleri:

Karakalem Çalışması

Ailece Resim Atölyesi

	Öğrenci Etkinliği	Veli Katılımlı Etkinlik
Kitap Kulübü	Roman Analizi	Ortak Okuma Saati
Sanat Kulübü	Karakalem Çalışması	Ailece Resim Atölyesi
Bilim Kulübü	Deney Günü	Bilim Şenliği

Bu iki liste birleştirilip tekrar edenler (ailece resim atölyesi) bir kez sayılırsa

Ortak Okuma Saati, Ailece Resim Atölyesi, Bilim Şenliği, Karakalem Çalışması → 4 etkinlik

Toplam etkinlik sayısı → 6

Olasılık: $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ olarak bulunur.

NOT

A ile B **ayrık olmayan olaylar** ve E olası tüm çıktıların kümesi olmak üzere

$$\frac{s(A \cup B)}{s(E)} = \frac{s(A)}{s(E)} + \frac{s(B)}{s(E)} - \frac{s(A \cap B)}{s(E)} \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \text{ olur.}$$

2. Yol:

Tabloya göre toplam etkinlik sayısı 6'dır. Katılımcı 6 etkinlikten yalnızca birine katılmaktadır.

A olayı: Veli katılımlı etkinliğe katılmak

B olayı: Sanat kulübü etkinliklerinden birine katılmak

Dikkat: A **veya** B olayının olasılığını hesaplamak için A ve B kümelerinin **birleşimi** kullanılmalıdır.

Veli Katılımlı Etkinlikler: Ortak Okuma Saati, Ailece Resim Atölyesi, Bilim Şenliği → 3 etkinlik

$P(A) = \frac{3}{6}$

Sanat Kulübü Etkinlikleri: Karakalem Çalışması, Ailece Resim Atölyesi → 2 etkinlik

$P(A) = \frac{2}{6}$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Dikkat: Bu iki olayda "**Ailece Resim Atölyesi"** ortak çıktıdır. A ve B gibi iki olayın birleşiminin olasılığını hesaplarken "Ailece Resim Atölyesi" etkinliği **hem A nın hem B nin içinde olduğu için iki kez toplanmış** olur. Oysa bir etkinliğin olasılığı toplamda yalnızca bir kez sayılmalıdır.

$A \cap B$ (kesişim) her iki kümede de ortak olan elemanları temsil eder ve bu elemanlar toplama işleminde iki kez sayıldığı için bir kez çıkarılır ve formülü aşağıdaki gibi yazılır.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(A \cap B) = \frac{1}{6}$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ bulunur.

$P(A \cup B) = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ olur.

ETKİNLİK 5.

Bir bilgi yarışmasında katılımcıların aldıkları puanlar 1 ile 100 arasında değişmektedir. Yarışma yönetmeliğine göre puanı 60 üzeri olan katılımcılar "Başarılı" sayılarak farklı ödüller kazanmaktadır. Aşağıdaki tabloda yarışmadaki katılımcı sayısı-puan dağılımı verilmiştir.

Bu yarışmada, yarışmacıların aldıkları puanlarla ilgili iki olay tanımlanmıştır.

- **A Olayı:** Seçilen bir yarışmacının 60 puan veya daha az almış olması
- **B Olayı:** Seçilen bir yarışmacının 61 puan veya daha fazla almış olması

PUAN ARALIĞI	KATILIMCI SAYISI
1-20 puan	15
21-40 puan	22
41-60 puan	30
61-80 puan	18
81-100 puan	15

Yarışmacılar arasından rastgele bir kişinin seçildiği düşünüldüğünde A ve B olayları için aşağıdaki soruları yanıtlayınız.

a) A ve B olaylarının ayrık olma durumunu belirleyip nedenini ifade ediniz.

b) A veya B olayının gerçekleşme olasılığını hesaplayınız.

ÇÖZÜM

a) A olayı "60 puan veya daha az puan almak", B olayı ise "61 puan veya daha fazla puan almak" olarak tanımlanmıştır. Bir yarışmacı aynı anda hem en fazla 60 puan hem de en az 61 puan alamaz. Dolayısıyla A ve B olayları ayrık olaylardır. Sembolik olarak ifade edersek

$A \cap B = \emptyset$ Bu nedenle A ve B ayrık olaylardır.

b) Öncelikle yarışmaya katılan toplam kişi sayısının oluşturduğu küme E olsun.

$s(E) = 100$

A olayı: 60 puan veya daha az puan almış olmasıdır.

1-20 puan: 15 kişi

21-40 puan: 22 kişi

41-60 puan: 30 kişi

$s(A) = 15 + 22 + 30 = 67$

$P(A) = \frac{67}{10}$ bulunur.

B olayı: 61 puan veya daha fazla puan almış olmasıdır.

61-80 puan: 18 kişi

81-100 puan: 15 kişi

$s(B) = 18 + 15 = 33$

$P(A) = \frac{33}{10}$ bulunur.

Ayrık olaylarda iki olayın birleşiminin olasılığı, olasılıklarının toplamına eşittir.

A ve B olaylarının ortak çıktısı bulunmadığından ayrık olaylardır. Bu durumda A veya B olayını sağlayan toplam kişi sayısı $33 + 37 = 70$ olduğundan;

$P(A \cup B) = \frac{70}{100} = \frac{7}{10}$ bulunur. Buradan

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$P(A \cup B) = \frac{37}{100} + \frac{33}{100} = \frac{70}{100} = \frac{7}{10}$ olarak bulunur.

NOT

A ile B **ayrık olaylar** olmak üzere

$$\frac{s(A \cup B)}{s(E)} = \frac{s(A)}{s(E)} + \frac{s(B)}{s(E)} \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) \text{ olur.}$$

SIRA SİZDE 5.

Bir okulun kitap kulübü, üyelerini daha iyi tanımak amacıyla bir anket düzenlemiştir. Ankette, üyelerin okuma tercihlerini ve alışkanlıklarını ölçmek için en son okudukları kitap türü ve en sık kitap okudukları zaman dilimi sorulmuştur. Toplanan veriler aşağıdaki tabloda verilmiştir.

OKUNAN SON KİTAP TÜRÜ	AKŞAM OKUMA	HAFTA SONU OKUMA	ULAŞIMDA OKUMA
Roman	10	15	5
Bilim Kurgu	8	12	10
Şiir	5	8	2
Tarih	12	6	9

Ankete katılanlardan rastgele seçilen bir üyenin son okuduğu kitap türünün roman olması veya akşam okuma alışkanlığına sahip olması olasılığını bulunuz.

SIRA SİZDE 6.

Bir yaz kampına katılan 60 öğrenciden yüzme, bisiklete binme ve doğa yürüyüşü etkinliklerinden birini seçmeleri istenmiştir. Her öğrenci yalnızca bir etkinlik seçecektir. Kamp görevlilerinden alınan bilgilere göre 20 öğrenci yüzmeyi, 18 öğrenci bisiklete binmeyi seçmiş; kalan öğrenciler doğa yürüyüşünü tercih etmiştir.

Verilenlere göre rastgele seçilen öğrencinin bisiklet binme veya doğa yürüyüşü etkinliğini seçmiş olma olasılığını bulunuz.

DENEYSEL OLASILIKTAN TEORİK OLASILIĞA

ETKİNLİK

Bir okulun okçuluk kulübünde yapılan antrenmanda, bir öğrenci 1'den 10'a kadar numaralanmış bir hedef tahtasına sırasıyla 100, 200, 500 ve 1 000 atışlık antrenmanlar yapmıştır. Her bir antrenman sonunda okların hangi numaralı bölgelere kaçar kez isabet ettiği aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Vurulan Sayı / Atış Sayısı	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
100	15	8	5	12	10	18	11	9	7	5
200	24	18	22	30	36	34	28	18	14	6
500	45	55	60	75	85	90	70	55	40	25
1 000	60	90	120	140	170	160	140	100	80	70

Bu tabloya göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) 100, 200, 500 ve 1 000 atış sonunda oluşan sıklıklara ait sütun grafiklerini elle çizerek veya istatistik yazılımları, tablolama programları gibi araçlar yardımıyla oluşturunuz. Sıklık dağılımının şekli nasıl değişmektedir? Açıklayınız.

b) Hedef tahtasında 6'dan daha yüksek numaralı bir bölgeyi vurma olayının deneysel olasılık değerini 100, 200, 500 ve 1000 atış için ayrı ayrı hesaplayınız.

c) Atış sayısı arttıkça dağılımda ve ele alınan olayın deneysel olasılık değerinde gözlemlenen değişimleri yorumlayınız.

d) Bu değişimlere göre bir olayın deneysel olasılık değerinin daha kararlı hâle gelmesi için en az kaç tekrarın yeterli olacağı söylenebilir?

ÇÖZÜM

a) Her bir atış sayısı için (100, 200, 500, 1000) yatay eksende atış yaptıkları bölge numaraları (1'den 10'a), dikey eksende ise sıklık değerleri yer alacak şekilde ayrı ayrı sütun grafikleri aşağıdaki gibidir.

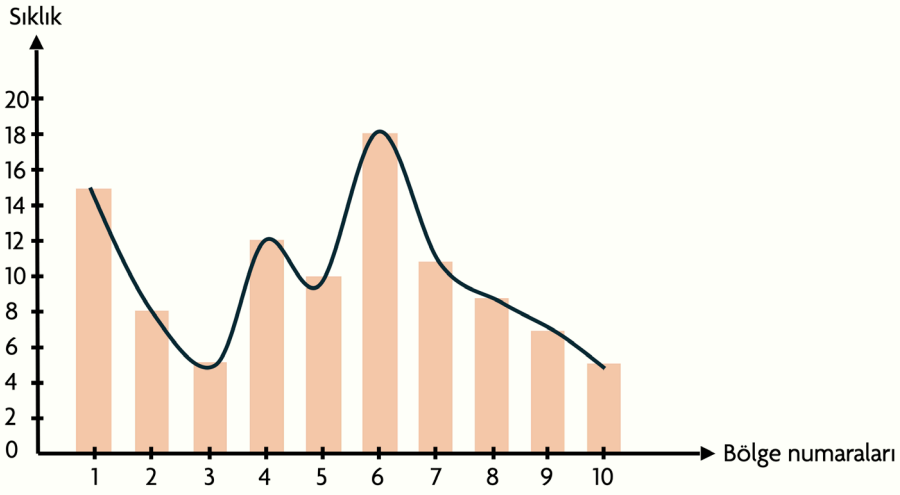
100 atış

Dağılım düzensiz ve tesadüfidir.

Örneğin 1. bölge 15 kez vurulmuşken 3. bölge 5 kez vurulmuştur.

Merkezî bölgelerde (5, 6, 7) sıklıklar yüksek olsa da dağılım simetrik değildir.

Bu grafik, az sayıda deneyde şans etkisinin belirgin olduğunu gösterir.



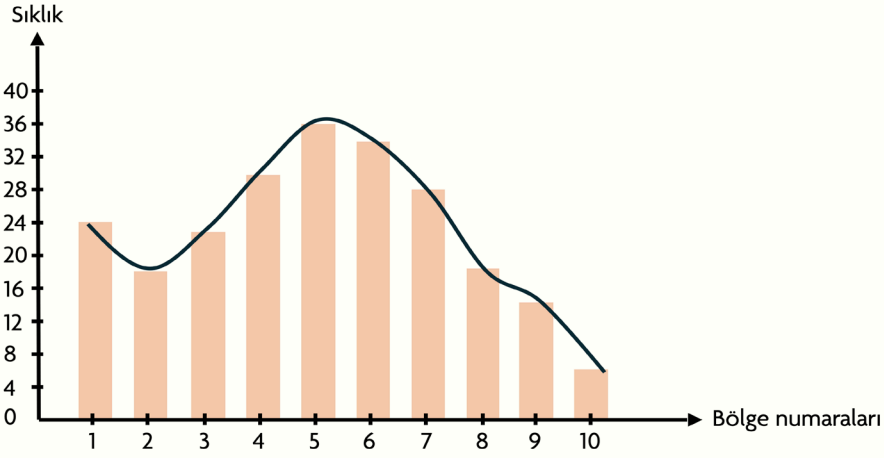
Grafik 1: 100 tekrardan oluşan sıklıklara ait sütun grafiği

200 atış

Dağılım biraz daha dengelenmiştir.

4, 5, 6 ve 7. bölgelerdeki sıklıklar artmıştır.

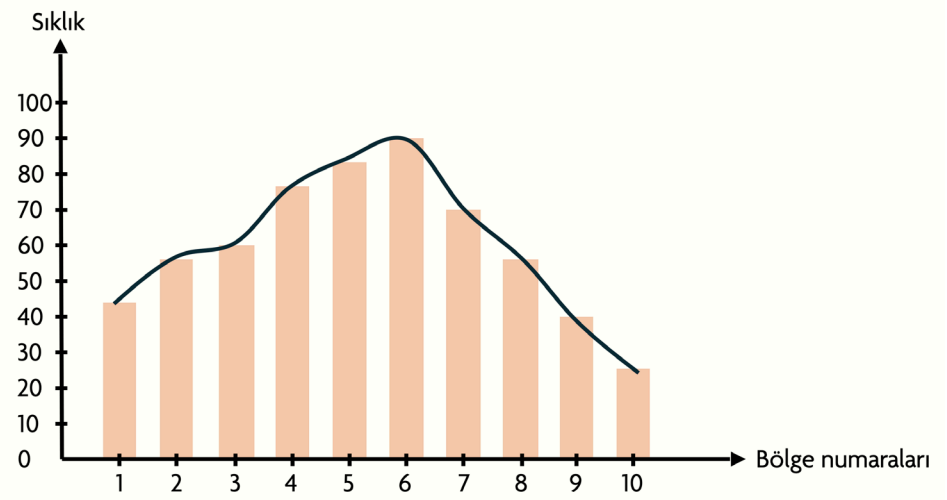
Ancak tam bir simetri henüz yoktur.



Grafik 2: 200 tekrardan oluşan sıklıklara ait sütun grafiği

500 atış

Çan eğrisi şekli belirginleşmeye başlamıştır.
En yüksek sıklıklar 5 ve 6. bölgelerdedir (85 ve 90).
Kenarlara doğru (1 ve 10) düzenli bir azalma görülür.



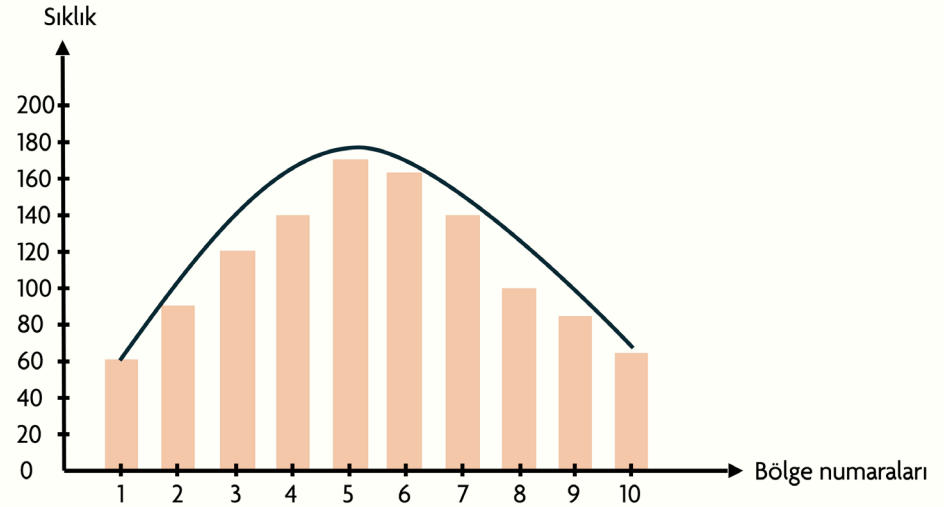
Grafik 3: 500 tekrardan oluşan sıklıklara ait sütun grafiği

1000 atış

Net bir çan eğrisi oluşmuştur.

Dağılım oldukça simetriktir. Merkezî bölgeler (5, 6) en yüksek seviyeye sahip olup kenarlara doğru kademeli bir düşüş vardır.

Bu grafik, yüksek tekrar sayısında deneysel dağılımın teorik dağılıma yaklaştığını gösterir.



Grafik 4: 1000 tekrardan oluşan sıklıklara ait sütun grafiği

b) "6'dan Daha Yüksek Numaralı Bölgeyi Vurma" Olasılıklarının Hesaplanması

"6'dan yüksek numaralı bölgeler" → **7, 8, 9, 10** numaralı bölgelerdir.

100 atış için istenen olayın oluşturduğu küme A olsun.

s(A) = 11 + 9 + 7 + 5 = 32

$P(A) = \frac{32}{100} = 0{,}32$

200 atış için istenen olayın oluşturduğu küme B olsun.

s(B) = 28 + 18 + 14 + 6 = 66

$P(B) = \frac{66}{200} = \frac{33}{100} = 0{,}33$

500 atış için istenen olayın oluşturduğu küme C olsun.

s(C) = 70 + 55 + 40 + 25 = 190

$P(C) = \frac{190}{500} = 0{,}38$

1000 atış için istenen olayın oluşturduğu küme D olsun.

s(D) = 140 + 100 + 80 + 70 = 390

$P(D) = \frac{390}{1000} = 0{,}39$

c) Sonuçlar:

P(A) = 0,32

P(B) = 0,33

P(C) = 0,38

P(D) = 0,39

"6'dan Daha Yüksek Numaralı Bölgeyi Vurma" Olasılıklarının Teorik Olasılık Olarak Hesaplanması

6'dan yüksek bölgeler; 7, 8 ,9 ve 10 olduğundan istenen olayın çıktı sayısı 4 bulunur.

Tüm çıktıların sayısı ise 10 olduğuna göre

Teorik olasılık değeri $\frac{4}{10} = 0{,}4$ bulunur.

Bu durumda, **tekrar sayısı arttıkça deneysel olasılığın belirli bir değere (teorik olasılığa) yaklaşma eğiliminde olduğu** görülür.

d) Bu değişimlere göre bir olayın deneysel olasılık değerinin daha kararlı hâle gelmesi için o deneye ait tekrar sayısının 1000'den fazla olması gerekmektedir.

GERİ BİLDİRİM

Bu geri bildirim sayesinde kendi cevabınızı kontrol edebilir, hatalarınızı düzelterek öğrenmenizi pekiştirebilirsiniz.

Yanıtlarınızı gözden geçirirken belirlediğiniz olasılık değerlerinin ve öngörülerinizin

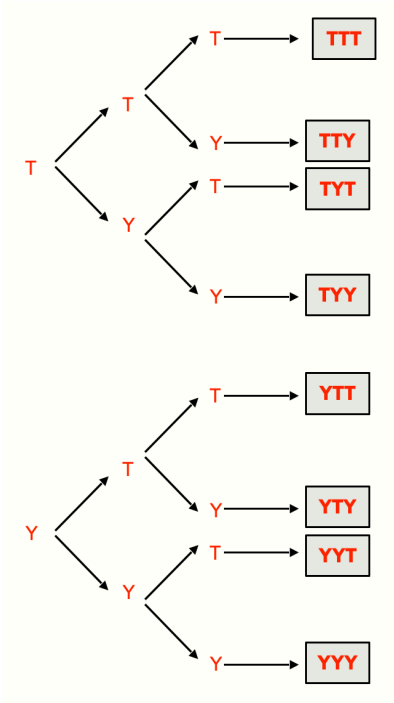
- Belirli bir sıraya (Olası durumların sayılması),
- Mantığa (Gerçekçi bir tahmine dayanıp dayanmaması) ve
- Kurala (Temel olasılık formüllerine uygunluğu) dayanıp dayanmadığını kontrol ediniz.

SIRA SİZDE 1.

ÇÖZÜM

Hilesiz üç madenî paranın havaya atılması deneyinde olası tüm çıktıları ağaç şeması ile gösterimi aşağıdaki gibidir.

Tura geldiği durumu T, yazı geldiği durumu Y ile gösterelim.



E, olası tüm çıktıların kümesi olmak üzere E = {TTT, TTY, TYT, TYY, YTT, YTY, YYT, YYY} biçimindedir.

s(E) = 2 • 2 • 2 = 8 bulunur.

SIRA SİZDE 2.

ÇÖZÜM

Çıktı sayısının az olması nedeniyle iki çarkın birlikte döndürülme deneyine ait tüm sonuçlar aşağıdaki tabloda gösterilmiştir.

Çark 2 \ Çark 1	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)

SIRA SİZDE 3.

ÇÖZÜM

Soruda, havaya atılan iki adet sayı küpünün üst yüzüne gelen sayıların çarpımının **12'ye tam bölünebilme** olasılığı sorulmaktadır.

$s(E) = 6 \cdot 6 = 36$

İki sayı küpünün üst yüzüne gelen sayıların çarpımının 12'ye tam bölünmesi şartını sağlayacak sıralı ikililer kümesi

$A = \{(2, 6), (4, 6), (6, 6), (6, 4), (6, 2), (3, 4), (4, 3)\}$ olduğundan $s(A) = 7$ bulunur.

A olayının olasılığı ise $P(A) = \frac{s(A)}{s(E)} = \frac{7}{36}$ olarak hesaplanır.

SIRA SİZDE 4.

ÇÖZÜM

Toplam kitap sayısı 100 birim kabul edildiğinde

$s(\text{Roman}) = 100 \cdot \frac{35}{100} = 35$ olur.

Romanların %40'ı kuşe kâğıda basıldığına göre hem roman hem de kuşe kâğıda basılan kitapların oluşturduğu kümeye A denirse $s(A) = 35 \cdot \frac{40}{100} = 14$ bulunur.

Buradan A olayının olasılığı $P(A) = \frac{14}{100} = \frac{7}{50}$ bulunur.

SIRA SİZDE 5.

ÇÖZÜM

Toplam katılımcı sayısını bulmak için tablodaki tüm sayılar toplanır. Tüm katılımcıların oluşturduğu küme E olsun.

$s(E) = 102$

OKUNAN SON KİTAP TÜRÜ	AKŞAM OKUMA	HAFTA SONU OKUMA	ULAŞIMDA OKUMA
Roman	**10**	15	5
Bilim Kurgu	8	12	10
Şiir	5	8	2
Tarih	12	6	9

A olayı: Seçilen üyenin son okuduğu kitap türünün roman olması

Roman satırındaki sayılar toplandığında $s(A) = 30$ bulunur. A olayının olasılığı ise $P(A) = \frac{s(A)}{s(E)} = \frac{30}{102}$ bulunur.

B olayı: Seçilen üyenin akşam okuma alışkanlığı olması

Akşam okuma sütunundaki sayılar toplandığında $s(B) = 35$ bulunur.

B olayının olasılığı ise $P(B) = \frac{s(B)}{s(E)} = \frac{35}{102}$ bulunur.

A ∩ B olayı: Seçilen üyenin hem roman okuması hem de akşam okuma alışkanlığına sahip olması olayıdır. Tablo incelendiğinde roman satırı ile akşam okuma sütununun kesişiminde bu şarta uyan 10 kişi olduğu görülür. Buna göre olasılık:

$s(A \cap B) = 10 \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{10}{102}$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ bulunur.

Seçilen üyenin son okuduğu kitap türü roman olma **veya** akşam okuma alışkanlığına sahip olma olasılığı ise

$P(A \cup B) = \frac{30}{102} + \frac{35}{102} - \frac{10}{102} = \frac{55}{102}$ olarak bulunur.

SIRA SİZDE 6.

ÇÖZÜM

Toplam öğrenci sayısı: 60

Yüzmeyi seçen öğrenci sayısı: 20

Bisiklete binmeyi seçen öğrenci sayısı: 18

Doğa yürüyüşünü seçen öğrenci sayısı: 60 – (20 + 18) = 22

A olayı: Seçilen öğrencinin bisiklete binme etkinliğini seçmiş olmasıdır.

B olayı: Seçilen öğrencinin doğa yürüyüşü etkinliğini seçmiş olmasıdır.

Soruda belirtildiği gibi "Her öğrenci yalnızca bir etkinlik seçmiştir."

Bu durumda hiçbir öğrenci hem bisiklete binme hem de doğa yürüyüşü etkinliğini seçemez. $P(A \cap B) = \emptyset$ olduğundan **A ve B ayrık olaylardır.**

Ayrık olaylar için birleşim olasılığı formülü $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ olduğuna göre

A olayının olasılığı: $P(A) = \frac{18}{60}$

B olayının olasılığı: $P(B) = \frac{22}{60}$

Sonuç:

Seçilen öğrencinin bisiklete binme veya doğa yürüyüşü etkinliğini seçmiş olma olasılığı: $P(A \cup B) = \frac{18}{60} + \frac{22}{60} = \frac{40}{60} = \frac{2}{3}$ olur.

Geri bildirim bölümünde yer alan cevaplar, öğrenme yolculuğunuzda size rehberlik etmek için hazırlanmıştır. "Sıra Sizde" sorularına verdiğiniz cevaplarınızı kontrol ederken zorlandığınız kısımları aşağıdaki alana not alabilirsiniz. Ölçme ve değerlendirme aşamasına geçmeden önce, çalışma kartındaki ilgili konuları tekrar gözden geçirmeniz gelişiminize katkı sağlayacaktır. İnternet erişiminiz varsa MEBİ Bireysel Öğrenme Platformu'ndaki konu anlatım videolarından ve zengin içeriklerden de faydalanabilirsiniz.

.....

.....

.....

.....

DEĞERLENDİRİYORUM

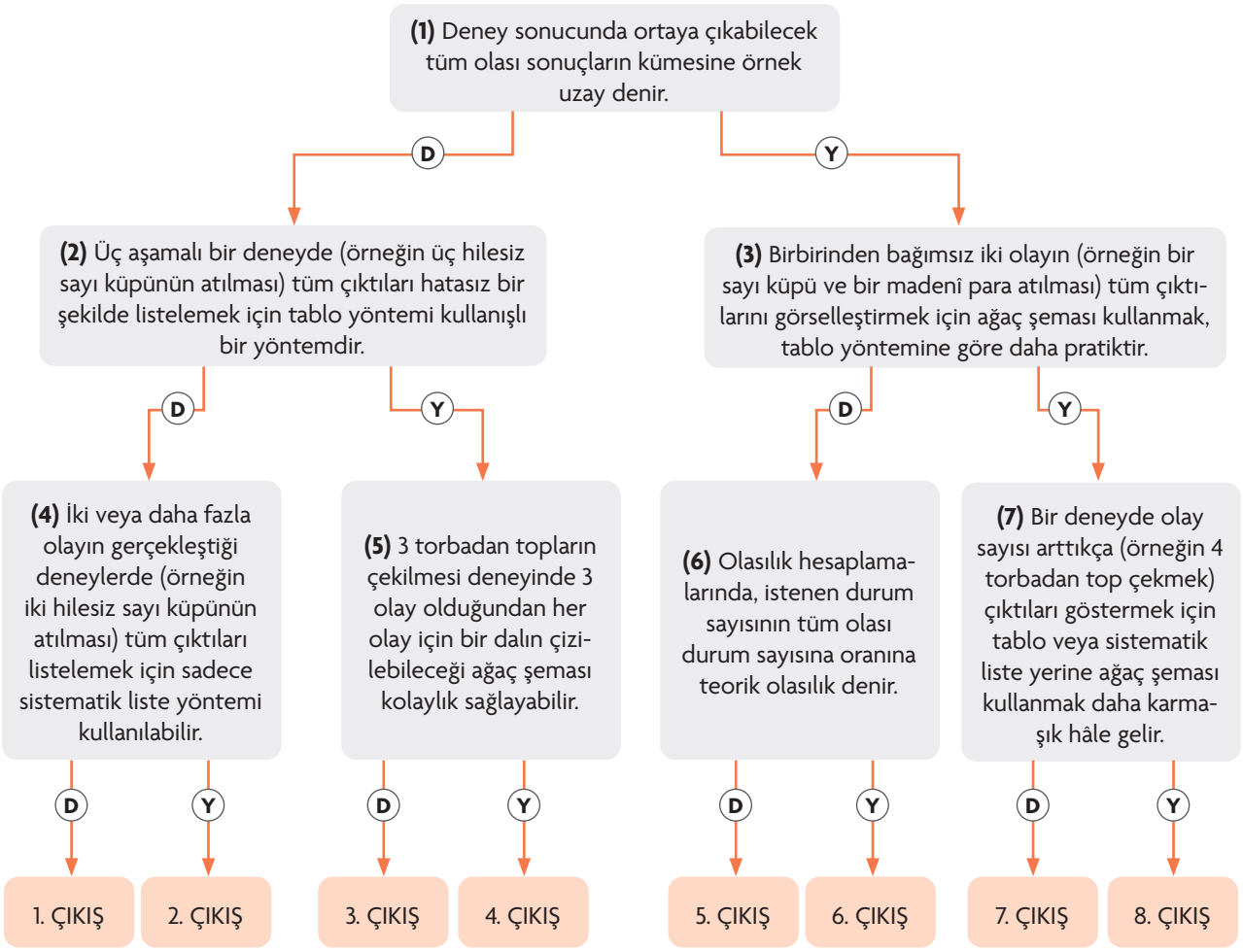
Amaç: Bu bölümde öğrendiklerinizi özetlemenizi, günlük hayatta ve farklı derslerde kullanabileceğiniz bilgileri belirlemenizi amaçlıyoruz.

Verilen bilgileri dikkatle okuyunuz. Temanın temel kavramlarını, önemli noktalarını ve bağlantılarını gözden geçirerek öğrenmenizi pekiştiriniz.

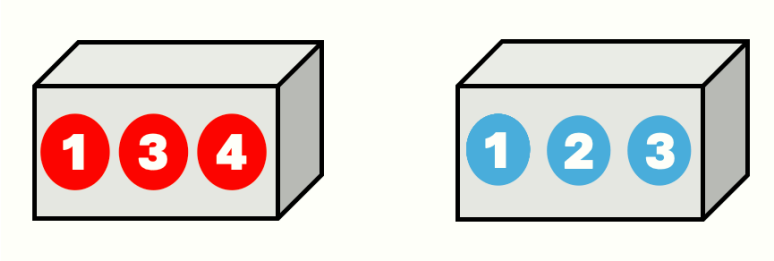
SORULAR

1. Aşağıdaki tanılayıcı dallanmış ağaç, teorik olasılık ve deney çıktılarının görselleştirilmesi ile ilgili temel kavramlar içermektedir. İlk önermeden başlayarak her önermenin doğru (D) veya yanlış (Y) olduğunu belirleyerek dalları takip ediniz.

Buna göre kaç numaralı çıkışa ulaşacağınızı bulunuz.



2.



Üzerine sayılar yazılmış iki farklı kutunun görseli yukarıda verilmiştir.

•Birinci Kutu: Üzerlerinde 1, 3 ve 4 sayıları yazılı kırmızı üç top mevcuttur.

•İkinci Kutu: Üzerlerinde 1, 2 ve 3 sayıları yazılı mavi üç top mevcuttur.

Bu iki kutudan rastgele birer top çekme deneyi yapılarak çekilen topların üzerindeki sayıların toplamının çift sayı olma olayının sıklığı incelenmektedir. Bu deney 9000 kez tekrar edilmiş ve oluşan dağılımda, toplamları çift sayı olan çıktıların toplam sıklığı a + b + c olarak ifade edilmiştir.

Deneyin deneysel olasılık değeri, teorik olasılık değerine eşit olduğuna göre a + b + c toplamını bulunuz.

3. Bir lisedeki sanat kulübü, dönem sonu sergisi için kulüp üyelerinin yaptığı toplam 20 adet eser arasından rastgele bir tanesini seçerek okul giriş panosunda sergilemeye karar vermiştir.

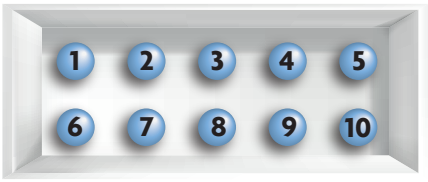
Bu 20 eserin türü ve yapım yılına göre dağılımı aşağıdaki tabloda verilmiştir.

ESER TÜRÜ	2024 YILINDA YAPILANLAR	2023 YILINDA YAPILANLAR	TOPLAM
YAĞLI BOYA TABLO	5	3	8
HEYKEL	2	4	6
DİJİTAL SANAT	3	3	6
TOPLAM	10	10	**20**

Buna göre rastgele seçilen bu eserin yağlı boya tablo olması veya 2023 yılında yapılmış olması olasılığını bulunuz.

4. Aşağıda altı eş parçaya bölünmüş ve üzerine 1, 2, 3, 4, 5, 6 sayıları yazılmış dairesel bir çark ve 1'den 10'a kadar numaralandırılmış 10 adet özdeş top bulunan bir kutu verilmiştir.

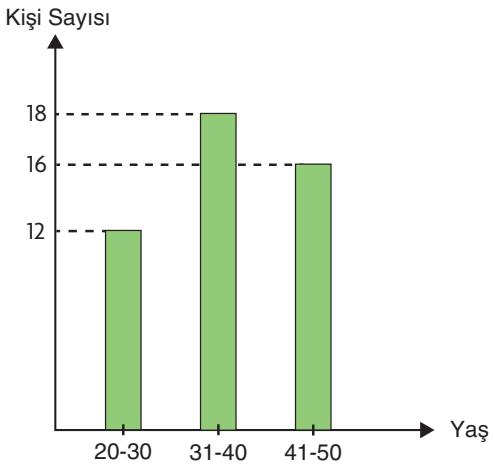




Bir olasılık deneyinde dairesel çark bir kez çevrilmekte ve ibrenin gösterdiği sayı kaydedilmektedir. Ardından kutudan rastgele bir top çekilmekte ve üzerindeki sayı kaydedilmektedir.

Buna göre çarkta ibrenin gösterdiği sayının kutudan çekilen toptaki sayıyı tam bölme olasılığını bulunuz.

5. Bir insan kaynakları uzmanı, şirketteki çalışanların yaş dağılımını analiz etmek ve buna göre kurum içi eğitim programlarını planlamak amacıyla bir araştırma yapmıştır. Araştırma sonucunda, çalışanların yaş gruplarına göre sayıları aşağıdaki sütun grafiği ile görselleştirilmiştir.



Buna göre şirketten rastgele seçilen bir çalışanın yaşının 31-50 aralığında olma olasılığını bulunuz.

6. Bir otomobil servisine gelen araçların renklerine göre dağılımı incelenmiştir. Araçlar beyaz (B), gri (G) ve siyah (S) olarak sınıflandırılmıştır.

Servise gelen araçlardan rastgele biri seçildiğinde bu aracın beyaz olma olasılığı $\frac{3}{10}$, siyah olma olasılığı $\frac{2}{5}$ 'tir.

Serviste o gün "gri" renkli 18 araç olduğuna göre "siyah" renkli kaç araç olduğunu bulunuz.

7. Bir gezi şirketi, müşterilerinin en çok tercih ettiği 5 farklı ülkeyi Türkiye (T), İtalya (İ), Fransa (F), Yunanistan (Y) ve Mısır (M) olarak belirlemiştir.

Şirket, geriye dönük olarak 100 adet tamamlanmış tatil kaydını incelediğinde her kayıt, müşterinin bu 5 ülkeden sadece birini ziyaret ettiğini göstermektedir. İnceleme sonucunda ülkelerin ziyaret edilme sayıları aşağıdaki tabloda gösterilmiştir.

ÜLKE	Türkiye (T)	İtalya (İ)	Fransa (F)	Yunanistan (Y)	Mısır (M)
ZİYARET SAYISI	18	25	15	22	20

Bu verilere göre şirketin inceleyeceği 101. tatil kaydı dikkate alındığında hangi ülke için deneysel olasılık değeri teorik olasılık değerine eşit olur? Bulunuz.

8. Aşağıda dört farklı meyve suyuna ait görseller ve fiyat etiketleri verilmiştir.



A marka meyve suyunun fiyatı 48 TL, B marka meyve suyunun fiyatı 44 TL, C marka meyve suyunun fiyatı 36 TL, D marka meyve suyunun fiyatı ise 30 TL'dir. Bir müşteri bu dört meyve suyundan rastgele 2 farklı marka seçip satın alacaktır.

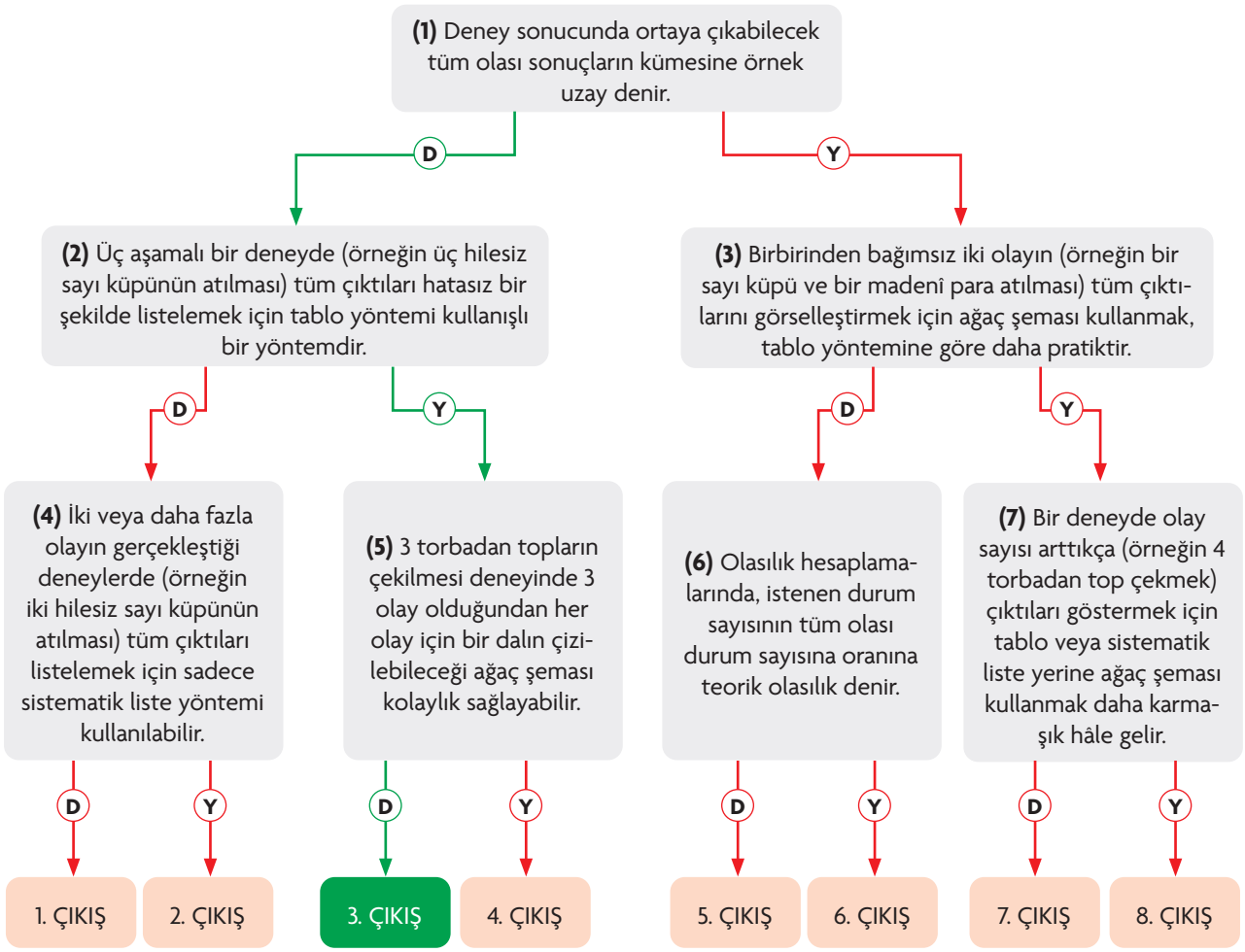
Buna göre seçilen iki meyve suyunun toplam fiyatının 80 TL'den fazla olma olasılığını bulunuz.

GERİ BİLDİRİM

Bu geri bildirim sayesinde kendi cevabınızı kontrol edebilir, hatalarınızı düzelterek öğrenmenizi pekiştirebilirsiniz.

ÇÖZÜM 1.

Aşağıdaki akış diyagramında, her adımdaki ifadelerin doğruluk değerleri (Doğru/Yanlış) verilmiş ve bu doğrultuda izlenen yol kırmızı ile işaretlenmiştir. Bu adımlar takip edildiğinde 3 numaralı çıkışa ulaşılmaktadır.



ÇÖZÜM 2.

E, olası tüm çıktıların kümesi olmak üzere

$s(E) = 3 \cdot 3 = 9$'dur.

İstenen olayın çıktılarının oluşturduğu kümenin adı A olsun.

A kümesi toplamı çift sayı olan ikililerden oluşacağına göre bu sayılar tek-tek ya da çift-çift olmalıdır.

$A = \{(1, 1), (1, 3), (3, 1), (3, 3), (2, 4)\}$

$s(A) = 5$'tir.

Teorik olasılık değeri ise $P(A) = \frac{5}{9}$

Deney 9000 kez tekrar edilmiş ve deneysel olasılık, teorik olasılığa eşit çıktığı için a + b + c toplamı, toplam deneme sayısının teorik olasılık ile çarpılmasıyla bulunur.

Sonuç: $a + b + c = 9000 \cdot \frac{5}{9} = 5000$

ÇÖZÜM 3.

Bu problemde, P(A ∪ B) nin bulunması istenmektedir.

Toplam eser sayısı, örnek uzayın eleman sayısını verir. s(E) = 20

A Olayı: Seçilen eserin yağlı boya tablo olması s(A) = 8 bulunur.

B Olayı: Seçilen eserin 2023 yılında yapılmış olması s(B) = 10 bulunur.

A ∩ B Olayı: Seçilen eserin hem yağlı boya tablo hem de 2023 yılında yapılmış olması s(A ∩ B) = 3 bulunur.

P(A ∪ B) = P(A) + P(B) – P(A ∩ B)

$$P(A) = \frac{s(A)}{s(E)} = \frac{8}{20}$$

$$P(B) = \frac{s(B)}{s(E)} = \frac{10}{20}$$

$$P(A \cap B) = \frac{s(A \cap B)}{s(E)} = \frac{3}{20}$$

$P(A \cup B) = \frac{8}{20} + \frac{10}{20} - \frac{3}{20} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$ olur.

ÇÖZÜM 4.

Birinci aşamada 6, ikinci aşamada 10 farklı sonuç vardır.

s(E) = 6 • 10 = 60'tır.

İstenen olayın çıktılarının oluşturduğu kümeye A adı verilsin.

Çarktaki sayı: a ∈ {1, 2, 3, 4, 5, 6}

Toptaki sayı: b ∈ {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}

Koşul: a sayısı, b sayısını tam bölen yani b'nin bir çarpanı olmalıdır.

Bunu sağlayan değerlerler:

a = 1: 1 her sayıyı tam böler → b'yi 1'den 10'a kadar tüm sayılar sağlar. → 10 tane

a = 2: 2, çift sayıları tam böler → b ∈ {2, 4, 6, 8, 10} → 5 tane

a = 3: 3'ün bölebildikleri → b ∈ {3, 6, 9} → 3 tane

a = 4: 4'ün bölebildikleri → b ∈ {4, 8} → 2 tane

a = 5: 5'in bölebildikleri → b ∈ {5, 10} → 2 tane

a = 6: 6'nın bölebildikleri → b ∈ {6} → 1 tane

s(A) = 10 + 5 + 3 + 2 + 2 +1 = 23 olduğundan

$p(A) = \frac{23}{60}$ bulunur.

ÇÖZÜM 5.

Grafikte yatay eksen yaş aralıkları, dikey eksen kişi sayısıdır.

20-30 yaş: 12 kişi

31-40 yaş: 18 kişi

41-50 yaş: 16 kişi

$s(E) = 18 + 16 + 12 = 46$

İstenen yaş aralığındaki (31-50 aralığı) kişilerin oluşturduğu küme A olmak üzere

$s(A) = 18 + 16 = 34$ bulunur.

Buradan $P(A) = \frac{34}{46} = \frac{17}{23}$ olarak hesaplanır.

ÇÖZÜM 6.

E, servisteki tüm araçların kümesi olmak üzere

$P(E) = P(B) + P(G) + P(S)$ olur.

$1 = \frac{3}{10} + P(G) + \frac{2}{5} \Rightarrow P(G) = \frac{3}{10}$ bulunur.

$s(G) = 18$ olduğundan

$P(G) = \frac{3}{10} = \frac{18}{s(E)} \Rightarrow 3 \cdot s(E) = 18 \cdot 10 \Rightarrow s(E) = 60$ olur.

Bu durumda serviste bulunan bütün araçların sayısı 60'tır.

Siyah renkli araç sayısının bulunması için toplam araç sayısı, siyah olma olasılığı ile çarpılmalıdır. Bu durumda siyah araç sayısı,

$60 \cdot \frac{2}{5} = 24$ bulunur.

ÇÖZÜM 7.

Söz konusu 5 ülkenin her birinin seçilme olasılığının teorik olarak birbirine eşit olduğu varsayıldığında (eş olumlu örnek uzay) her bir ülkeye ait teorik olasılık değeri,

$P = \frac{1}{5}$ bulunur.

Deneysel olasılık, 100 tatil kaydına göre hesaplandığında

$P(T) = \frac{18}{100}$ $P(I) = \frac{25}{100}$ $P(F) = \frac{15}{100}$ $P(Y) = \frac{22}{100}$ $P(M) = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$ değerleri elde edilir.

Buradan Mısır'ı ziyaret etme olayının deneysel olasılık değerinin teorik olasılık değerine eşit olduğu görülür.

ÇÖZÜM 8.

Markalar, A, B, C, D olmak üzere ikili seçimler (Sıralama önemli değil.);

1. A-B → 48 + 44 = 92 TL

2. A-C → 48 + 36 = 84 TL

3. A-D → 48 + 30 = 78 TL

4. B-C → 44 + 36 = 80 TL

5. B-D → 44 + 30 = 74 TL

6. C-D → 36 + 30 = 66 TL olur.

Toplam 6 farklı seçim var. Bu durumda s(E) = 6 olur.

N olayı ise 80 TL'yi geçenler olmak üzere

1. A-B → 48 + 44 = 92 TL

2. A-C → 48 + 36 = 84 TL bulunur.

Bu durumda s(N) = 2 olur ve

$P(N) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ bulunur.

ÖĞRENDİKLERİM

Amaç: Bu bölümde öğrendiklerinizi özetlemenizi, günlük hayatta ve farklı derslerde kullanabileceğiniz bilgileri belirlemenizi amaçlıyoruz.

Bu çalışma kartı boyunca teorik olasılığın ne olduğunu, nasıl temsil edildiğini ve nerelerde kullanıldığını deneyimlediniz. Verilen bilgileri dikkatle okuyunuz. Temanın temel kavramlarını, önemli noktalarını ve bağlantılarını gözden geçirerek öğrenmenizi pekiştiriniz.

TEORİK OLASILIK

a) Tüm Olası Çıktıları Görselleştirme

b) Olayların Olasılıklarını Hesaplama

c) Ayrık Olayları ve Ayrık Olmayan Olayları İnceleme

d) Deneysel Olasılık ile Teorik Olasılığı Karşılaştırma

e) Genelleme ve Değerlendirme Yapabilme

f) Analiz Yapma: Olasılık Değerlerinin Günlük Hayattaki Karşılığını Görme

VERİDEN OLASILIĞA

Deneysel ve Teorik Olasılık Yansıtıcı Yazı

Amaç: Bu çalışma; olayların olasılıklarını inceleme sürecinde tahmin etme, deneysel ve teorik olasılık kavramlarını karşılaştırma ve bu süreçte çıkarımda bulunma becerilerinize yönelik farkındalık oluşturmak amacıyla hazırlanmıştır.

Aşağıdaki soruları yanıtlarken kullandığınız yöntemi, yaptığınız incelemeleri ve ulaştığınız sonuçları göz önünde bulundurarak açıklayınız. Kısa ve açık cümlelerle kullandığınız yöntemi ve öne sürdüğünüz gerekçeleri ifade etmeniz yeterlidir.

1. Öğrendiğiniz bu temada dikkatinizi çeken veya önemli bulduğunuz noktaları yazınız.

2. Deneysel ve teorik olasılık yaklaşımlarını kullanarak bir olayın olasılığını inceleyiniz. Bu yaklaşımları karşılaştırarak daha etkili olduğunu düşündüğünüz yöntemi gerekçeleriyle açıklayınız.

3. Deneysel ve teorik olasılığı incelemeye yönelik yürüttüğünüz çalışmalarda elde ettiğiniz sonuçları nasıl kullandığınızı, bu sonuçlara dayalı çıkarımlarınızı hangi gerekçelerle oluşturduğunuzu kısaca açıklayınız.

4. Deneysel ve teorik olasılıkla ilgili çalışmalarda edindiğiniz deneyimin, gerçek yaşamda karşılaştığınız durumlara veya matematiğin farklı alanlarına nasıl yansıtılabileceğini örneklerle ifade ediniz.

Daha fazlası için karekodu okutunuz.

MEBİ

OGM MATERYAL