



ÖLÇME, DEĞERLENDİRME VE SINAV HİZMETLERİ
GENEL MÜDÜRLÜĞÜ

TÜRKİYE YÜZYILI MAARİF MODELİ ÖĞRENME ETKİNLİKLERİ

10. Sınıf

MATEMATİK

CEVAP ANAHTARI

İÇİNDEKİLER

3

MAT.10.2.3. Gerçek sayılarda $f(x) = \sqrt{x} (x \geq 0)$ şeklinde tanımlı karekök referans fonksiyonun nitel özellikleri ile bu fonksiyondan türetilen $g(x) = a \cdot f(x \pm r) \pm k (a, r, k \in \mathbb{R}, a \neq 0)$ karekök fonksiyonlarının nitel özelliklerine ilişkin matematiksel muhakeme yapabilme

- a) Karekök referans fonksiyonun nitel özelliklerini (tanım kümesi, görüntü kümesi, işareti, artanlığı-azalanlığı, maksimum-minimum noktaları, sıfırları, bire birliği, tekliği-çiftliği, örtenliği) matematiksel temsilleri kullanarak belirler.
- b) Karekök referans fonksiyonun nitel özellikleri ile matematiksel temsilleri arasındaki ilişkileri belirler.
- c) Karekök referans fonksiyonu grafik ve cebirsel temsili üzerinde yapılan işlemlerle diğer karekök fonksiyonlarına dönüştürür.
- ç) Karekök referans fonksiyon ile elde ettiği karekök fonksiyonlarının grafik ve cebirsel temsilleri arasındaki ilişkiyi ifade eder.
- d) Karekök referans fonksiyonun nitel özelliklerinden hareketle diğer karekök fonksiyonlarının nitel özellikleri hakkında varsayımlarda bulunur.
- e) Varsayımlarına dayalı olarak karekök fonksiyonlarının nitel özelliklerine ilişkin örüntüleri (cebirsel, sayısal veya grafiksel) geneller.
- f) Genellemelerinin varsayımlarını karşılayıp karşılamadığını kontrol eder.
- g) Genellemelerinden elde ettiği önermeleri uygun sözel veya cebirsel dil ile sunar.
- ğ) Elde ettiği önermelerin gerçek yaşam bağlamlarındaki kullanışlılığını değerlendirir.
- h) Önermelerini grafiksel olarak doğrular veya cebirsel olarak ispatlar.
- ı) İşe koştuğu doğrulama veya ispat yöntemlerinin farklı durumlardaki kullanışlılığını değerlendirir.

7

MAT.10.2.4. Gerçek sayılarda $f(x) = \frac{1}{x} (x \neq 0)$ şeklinde tanımlı rasyonel referans fonksiyonun nitel özellikleri ile bu fonksiyondan türetilen $g(x) = a \cdot f(x \pm r) \pm k (a, r, k \in \mathbb{R}, a \neq 0)$ rasyonel fonksiyonların nitel özelliklerine ilişkin matematiksel muhakeme yapabilme

- a) Rasyonel referans fonksiyonun nitel özelliklerini (tanım kümesi, görüntü kümesi, işareti, artanlığı-azalanlığı, maksimum-minimum noktaları, sıfırları, bire birliği, tekliği-çiftliği, örtenliği) matematiksel temsilleri kullanarak belirler.
- b) Rasyonel referans fonksiyonun nitel özellikleri ile matematiksel temsilleri arasındaki ilişkileri belirler.
- c) Rasyonel referans fonksiyonu grafik ve cebirsel temsili üzerinde yapılan işlemlerle diğer rasyonel fonksiyonlara dönüştürür.
- ç) Rasyonel referans fonksiyon ile elde ettiği rasyonel fonksiyonların grafik ve cebirsel temsilleri arasındaki ilişkiyi ifade eder.
- d) Rasyonel referans fonksiyonun nitel özelliklerinden hareketle diğer rasyonel fonksiyonların nitel özellikleri hakkında varsayımlarda bulunur.
- e) Varsayımlarına dayalı olarak rasyonel fonksiyonların nitel özelliklerine ilişkin örüntüleri (cebirsel, sayısal veya grafiksel) geneller.
- f) Genellemelerinin varsayımlarını karşılayıp karşılamadığını kontrol eder.
- g) Genellemelerinden elde ettiği önermeleri uygun sözel veya cebirsel dil ile sunar.
- ğ) Elde ettiği önermelerin gerçek yaşam bağlamlarındaki kullanışlılığını değerlendirir.
- h) Önermelerini grafiksel olarak doğrular veya cebirsel olarak ispatlar.
- ı) İşe koştuğu doğrulama veya ispat yöntemlerinin farklı durumlardaki kullanışlılığını değerlendirir.

MAT.10.2.5. Doğrusal, karesel, karekök ve rasyonel referans fonksiyonlar ile bu fonksiyonlardan türetilen fonksiyonların ters fonksiyonlarına dair çıkarım yapabilme

10

- a) Referans fonksiyonlar ve bunlardan türetilen fonksiyonlar üzerinden bir fonksiyonun ters fonksiyonuna ilişkin varsayımlarda bulunur.
- b) Varsayımlarından yararlanıp farklı durumlarla ilgili örüntüleri listeleterek referans fonksiyonlar ve bunlardan türetilen fonksiyonların ters fonksiyonlarına ilişkin genellemeler yapar.
- c) Referans fonksiyonlar ve bunlardan türetilen fonksiyonların ters fonksiyonlarıyla ilişkisine dair varsayımları ile genellemelerini karşılaştırır.
- ç) Referans fonksiyonlar ve bunlardan türetilen fonksiyonların ters fonksiyon ilişkisine ait önermeleri matematiksel olarak doğrulanabilecek şekilde sunar.
- d) Referans fonksiyonlar ve bunlardan türetilen fonksiyonların ters fonksiyonlarına ait elde edilen önermeleri fonksiyonların genel özellikleri bağlamında değerlendirir.

MAT.10.2.6. Doğrusal, karesel, karekök, rasyonel referans fonksiyonlar ve bunlardan türetilen fonksiyonlarla ifade edilebilen denklem ve eşitsizlikler içeren problemleri çözebilme

13

- a) Bu fonksiyonlarla ifade edilebilen denklem ve eşitsizliklere ilişkin matematiksel bileşenleri (nitel özellikleri ile cebirsel ve grafik temsilleri) belirler.
- b) Bu fonksiyonlarla ifade edilebilen denklem ve eşitsizliklere ilişkin matematiksel bileşenlerin aralarındaki ilişkileri belirler.
- c) Bu fonksiyonlarla ifade edilebilen denklem ve eşitsizliklerin problem bağlamındaki temsillerini farklı temsillere dönüştürür.
- ç) Dönüştürdüğü temsillerin problem bağlamındaki anlamını ifade eder.
- d) Elde ettiği ve yorumladığı farklı temsillerden yararlanarak problemin çözümü için strateji oluşturur.
- e) Belirlediği stratejiyi kullanır.
- f) Elde ettiği çözümü farklı yöntemleri kullanarak doğrular.
- g) Problemin olası çözüm stratejilerini gözden geçirir.
- ğ) Problemin olası çözüm stratejilerinin farklı problem durumlarında kullanımı ile ilgili çıkarımlar yapar.
- h) Çıkarımlarının geçerliliğini sözel, cebirsel ve grafiksel argümanlarla değerlendirir.

VÜCUT YÜZEY ALANI

Bir bireyin boy ve kütle ölçümleri arasındaki matematiksel ilişkinin metrekare (m^2) cinsinden ifadesine Vücut Yüzey Alanı (VYA) denir. Klinik uygulamalarda VYA, sadece vücut kütlesine dayalı hesaplamalara göre daha hassas sonuçlar verdiği için, özellikle çocuk ve yetişkin hastaların ilaç dozajlarının belirlenmesinde temel bir parametre olarak kullanılır.

$$VYA = \sqrt{\frac{\text{boy (cm)} \cdot \text{kütle (kg)}}{3600}}$$

- Tarihin bilinen en ağır insanı olan Jon Brower Minnoch 5,7 m^2 ile en yüksek vücut yüzey alanına sahip birey olarak kayıtlara geçmiştir.
- Araştırmalara göre yenidoğan bir bebeğin boyunun en az 40 cm, kütlesinin ise en az 2,5 kg olması gerekmektedir.

Kişinin boyu (cm) ile kütlesinin (kg) çarpımına x denildiğinde, vücut yüzey alanını (m^2) veren g fonksiyonu

$$g(x) = \sqrt{\frac{x}{3600}}$$

biçiminde modellenmektedir.

1. Aşağıdaki tabloda verilen g fonksiyonunun nitel özelliklerinin matematiksel karşılıklarını boş bırakılan ilgili sütuna yazınız.

Fonksiyonun Nitel Özellikleri	g
Tanım Kümesi	$[100, 116964]$
Görüntü Kümesi	$\left[\frac{1}{6}, \frac{57}{10}\right]$
Fonksiyonun İşareti	Tanımlı olduğu aralıkta daima pozitif değer alır.
Maksimum Noktası ve Değeri	Fonksiyonun maksimum değeri 5,7 dir. Fonksiyon maksimum değerini $x = 116964$ noktasında alır.
Minimum Noktası ve Değeri	Fonksiyonun minimum değeri $\frac{1}{6}$ dir. Fonksiyon minimum değerini $x = 100$ noktasında alır.
Bire Birliği	Tanım aralığındaki her farklı x değerine karşılık gelen $g(x)$ değerleri de farklı olduğundan g bire birdir.
Artanlığı - Azalanlığı	Tanım aralığı içinde alınan a ve b değerleri için $a < b \Rightarrow g(a) < g(b)$ olduğundan g fonksiyonu artandır.
Tekliği - Çiftliği	$g(x) = \sqrt{\frac{x}{3600}}$ için $g(-x) = \sqrt{\frac{-x}{3600}}$ ve $-g(x) = -\sqrt{\frac{x}{3600}}$ olur. $g(-x) \neq g(x)$ olduğundan g fonksiyonu çift fonksiyon değildir. $g(-x) \neq -g(x)$ olduğundan g fonksiyonu tek fonksiyon değildir.

2. Bir matematik yazılımı kullanarak g fonksiyonunun grafik temsilini çiziniz. Bir kişinin VYA sınıfının değişim hızını g fonksiyonunun grafik temsili üzerinden yorumlayınız.

Başlangıçta hızlı artar daha sonra artış hızı yavaşlar.

- Hastalara verilecek bir ilacın dozajı VYA sınıfının 10 katı alınarak hesaplanmaktadır.

3. Buna göre ilaç dozajını veren h fonksiyonunun cebirsel temsilini yazınız.

$$h(x) = 10 \cdot \sqrt{\frac{x}{3600}} \text{ veya } h(x) = \frac{\sqrt{x}}{6}$$

- Doktor, hastaların enfeksiyon düzeyine bağlı olarak ilaç dozunun 0,2 birim artırılmasını uygun gördüğünde, yeni ilaç dozajını veren fonksiyon $m(x) = h(x) + 0,2$ biçiminde modellenir.
- Doktor, yan etki riskini azaltmak amacıyla ilaç dozunun 0,1 birim azaltılmasını uygun gördüğünde ise yeni ilaç dozajını veren fonksiyon $k(x) = h(x) - 0,1$ biçiminde modellenir.

4. Bu durumda, aşağıda boy ve kütleleri verilen çocuk ve yetişkin hastaların h, m ve k fonksiyonlarına göre yeni ilaç dozajlarını birim cinsinden hesaplayınız.

Boy (cm)	60	100	180
Kütle (kg)	15	36	80
$h(x)$	5	10	20
$m(x)$	5,2	10,2	20,2
$k(x)$	4,9	9,9	19,9

5. m ve k fonksiyonlarının cebirsel temsillerini yazınız.

$$m(x) = \frac{\sqrt{x}}{6} + 0,2$$

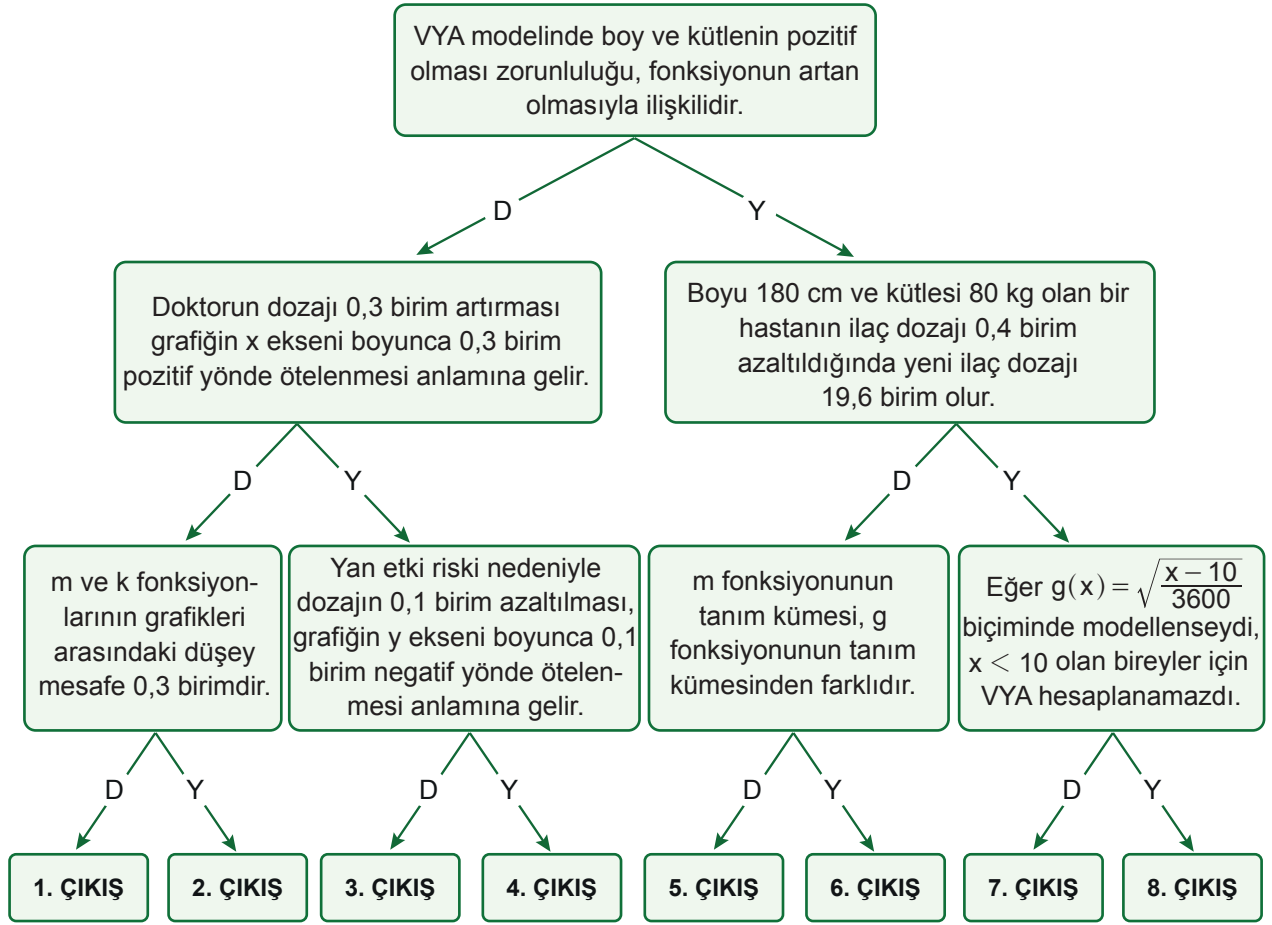
ve

$$k(x) = \frac{\sqrt{x}}{6} - 0,1$$

6. Bir matematik yazılımı kullanarak $f(x) = \sqrt{x}$ karekök referans fonksiyonunun grafik temsilini çiziniz. Daha sonra sırasıyla h, m ve k fonksiyonlarının grafik temsillerini aynı yazılımda çizerek aşağıdaki tabloyu doldurunuz.

Fonksiyonun İsmi	Oluşan Karekök Fonksiyonunun Cebirsel Temsili	Karekök Referans Fonksiyonun Cebirsel Temsiline Göre Yapılan Cebirsel İşlem	Karekök Referans Fonksiyonun Grafik Temsiline Göre Uygulanan Dönüşüm
h	$h(x) = \frac{\sqrt{x}}{6}$	$\frac{1}{6}$ ile çarpma	6 kat dikey genişleme
m	$m(x) = \frac{\sqrt{x}}{6} + 0,2$	Bağımsız değişkeninin karekökünü $\frac{1}{6}$ ile çarpma, daha sonra aldığı değere 0,2 ekleme	6 kat dikey genişleme, y eksenini boyunca pozitif yönde 0,2 birim öteleme
k	$k(x) = \frac{\sqrt{x}}{6} - 0,1$	Bağımsız değişkeninin karekökünü $\frac{1}{6}$ ile çarpma, daha sonra aldığı değerden 0,1 çıkarma	6 kat dikey genişleme, y eksenini boyunca negatif yönde 0,1 birim öteleme

7. Aşağıdaki ifadelerin her biri için Doğru (D) ya da Yanlış (Y) seçeneklerinden uygun olanı işaretleyiniz. İlk sorudan başlayarak verdiğiniz cevaplara göre ilerleyecek ve sonunda sekiz farklı çıkış noktasından birine ulaşacaksınız.



a) Hangi çıkışa ulaştığınızı belirtiniz.

6. ÇIKIŞ

b) Çıkışa ulaşırken yanlış olduğunı düşündüğünüz ifadelerin doğrusunu yazınız.

VYA modelinde boy ve ağırlığın pozitif olması zorunluluğu, fonksiyonun tanım kümesiyle ilişkilidir.

m fonksiyonu ile g fonksiyonunun tanım kümeleri aynıdır. Görüntü kümeleri farklıdır.

DALIŞ MACERASI

Kimya dersinde öğretmen, dalgıçların deniz dibindeki bir nesneyi içine belirli miktarda hava doldurulmuş bir balona bağlayarak su yüzeyine çıkardıkları bir belgesel izletmiştir. Belgeselde; balon deniz dibinden yüze doğru yükseldikçe maruz kaldığı basıncın azaldığı, buna bağlı olarak balonun hacminin giderek arttığı gözlemlenmiştir.

Öğretmen bu durumu Boyle Yasası ile ilişkilendirerek şu bilgileri paylaşmıştır:

“Sabit sıcaklıkta, belirli miktardaki bir gazın basıncı P (atm) ile hacmi V (L) ters orantılıdır.

Bu ilişki $P \cdot V = k$ ($k \in \mathbb{R}$) bağıntısı ile ifade edilir.

Deniz seviyesinde basınç yaklaşık 1 atm dir.

Deniz yüzeyinden derinliklerine doğru inildikçe her 10 metrede basınç 1 atm artar.”

Su altı sporlarıyla ilgilenen Levent, bu bilgilerden sonra dalış eğitmeninin daha önce yaptığı uyarıyı daha iyi kavradığını ifade etmiştir. Eğitmeninin “Su yüzeyine çıkarken asla nefes tutulmamalıdır!” uyarısını hatırlayan Levent; yüze doğru yükselirken maruz kaldığı basıncın azalması sonucu akciğerlerdeki havanın genleştiğini, akciğerlerin de tıpkı bir balon gibi esneyerek bu değişimden etkilendiğini fark etmiştir.

Yaz tatilinde dalış yapan Levent, 20 metre derinlikteyken tüpünden derin bir nefes almış ve toplam kapasitesi 6 litre olan akciğerlerinin yarısını doldurmuştur. Bu sırada beklenmedik bir durumla karşılaşan Levent, nefesini tutarak kontrolsüz biçimde su yüzeyine doğru yükselmeye başlamıştır.

1. Levent’in su yüzeyine çıkarken maruz kaldığı basınca (atm) bağlı akciğerlerindeki havanın hacmini (L) veren g fonksiyonunun cebirsel temsilini yazınız.

20 metre derinlikte iken basınç 3 atm dir. Levent’in akciğerlerindeki havanın hacmi 3 litredir.

Bu durumda $P \cdot V = 3 \cdot 3 = 9$ olduğundan

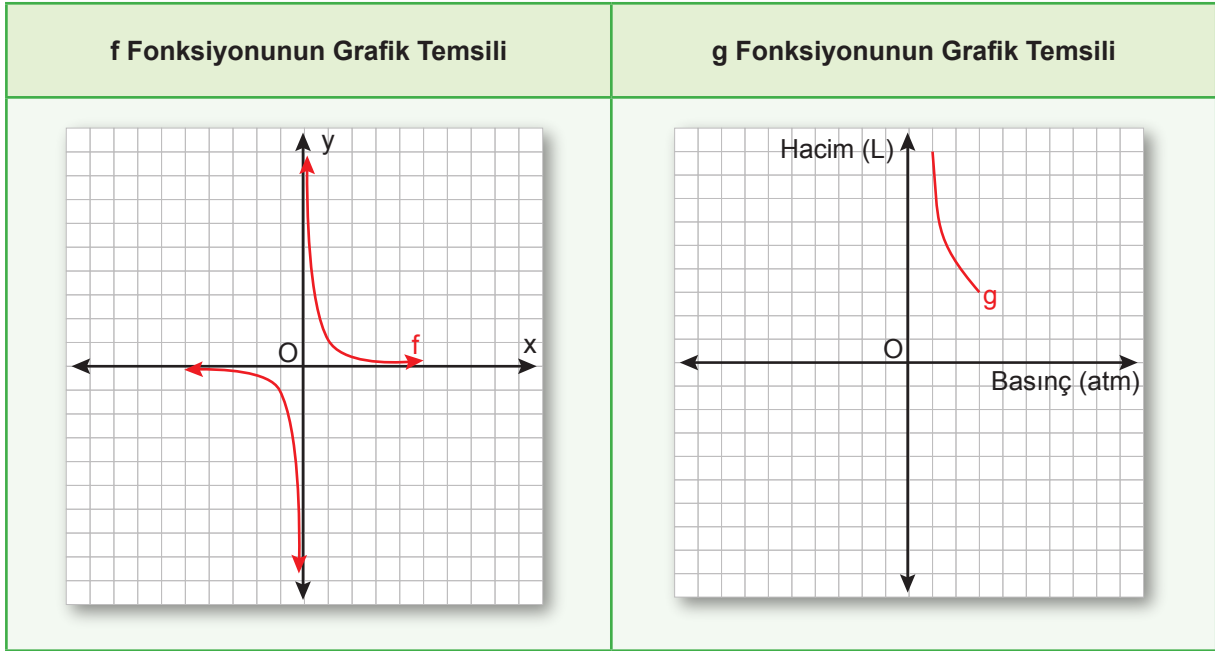
$$g(x) = \frac{9}{x}$$

2. g fonksiyonunun cebirsel temsilini kullanarak aşağıdaki tabloyu doldurunuz.

Tablo: Derinliğe Bağlı Maruz Kalınan Basınç ve Akciğerdeki Hava Hacmi

Derinlik (m)	Basınç (atm)	Akciğerdeki Hava Hacmi (L)
0	1	9
10	2	4,5
20	3	3

3. g fonksiyonunun grafik temsilini $f(x) = \frac{1}{x}$ ($x \neq 0$) fonksiyonunun grafik temsilini referans olarak çiziniz.



4. Aşağıdaki tabloda, g fonksiyonuna ait nitel özelliklerin matematiksel karşılıklarını boş bırakılan ilgili alana yazınız.

Fonksiyonun Nitel Özellikleri	g
Tanım Kümesi	$[1, 3]$
Görüntü Kümesi	$[3, 9]$
Fonksiyonun İşareti	Tanımlı olduğu aralıkta pozitifdir.
Maksimum Noktası ve Değeri	g fonksiyonu $x = 1$ noktasında maksimum değerini alır ve bu değer 9 dur.
Minimum Noktası ve Değeri	g fonksiyonu $x = 3$ noktasında minimum değerini alır ve bu değer 3 tür.
Bire Birliği	$\forall x_1, x_2 \in [1, \infty)$ için $g(x_1) = g(x_2)$ yani $\frac{9}{x_1} = \frac{9}{x_2}$ iken $x_1 = x_2$ olduğundan g fonksiyonu bire birdir.
Artanlığı - Azalanlığı	$\forall x_1, x_2 \in [1, \infty)$ için $x_1 < x_2$ iken $g(x_1) > g(x_2)$ olduğundan g fonksiyonu azalandır.

İnsan akciğeri, kapasitesinin üzerinde genleşmeye zorlandığında ciddi sağlık riskleri ortaya çıkabilmektedir.

5. Levent, su yüzeyine doğru nefesini tutarak yükselirken dalış eğitmeninin yaptığı uyarıyı hatırlamış ve yaşadığı telaşın etkisiyle nefesini tuttuğunu fark etmiştir. Bunun üzerine nefesini tutmayı bırakarak kontrollü ve güvenli bir şekilde su yüzeyine doğru yükselmeye devam etmiştir.

Buna göre Levent'in nefesini tutmayı bıraktığı anda su yüzeyine yaklaşık kaç metre kalmış olabilir? Cevabınızı matematiksel gerekçelerle açıklayınız.

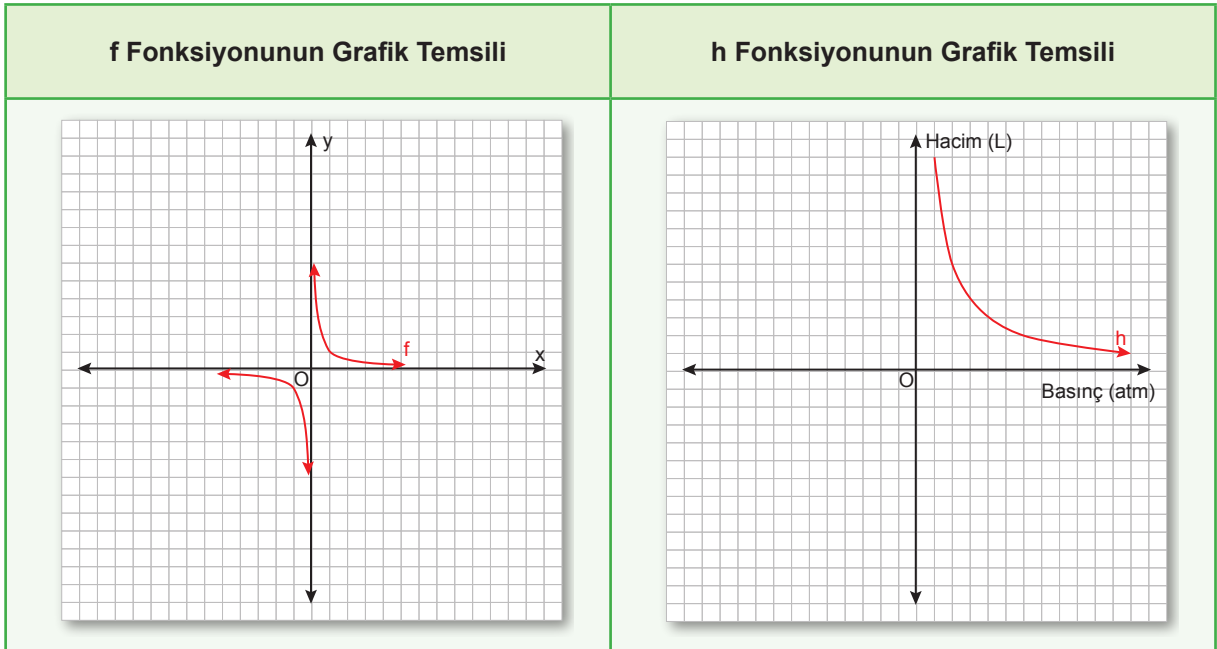
$$\frac{9}{x} \leq 6 \Rightarrow x \geq 1,5 \text{ atm olmalıdır.}$$

Buna göre su yüzeyine 5 metreden az kaldığı anda sağlık riskleri ortaya çıkabilmektedir. Levent'in nefesini tutmayı bıraktığı anda su yüzeyine olan uzaklığına a denirse, $a \geq 5$ olmalıdır.

6. Levent aynı durumu 30 metre derinlikteyken yaşasaydı, su yüzeyine doğru yükselirken maruz kalacağı basınca (atm) bağlı akciğerlerindeki havanın hacmini (L) veren h fonksiyonunun cebirsel temsili nasıl olurdu?

$$h(x) = \frac{12}{x}$$

7. h fonksiyonunun grafik temsilini $f(x) = \frac{1}{x} (x \neq 0)$ fonksiyonunun grafik temsilini referans alarak çizin.



8. h fonksiyonunun grafik temsili $f(x) = \frac{1}{x} (x \neq 0)$ referans fonksiyonunun grafik temsiline hangi dönüşümler uygulanarak elde edilmiştir?

12 kat dikey daralma

ALERJİ TESTİ

Alerji testleri, kişinin hangi maddelere karşı alerjik reaksiyon gösterip göstermediğini belirlemek için kullanılan test yöntemleridir. Deri prick testi sıklıkla kullanılan alerji testlerindendir.

Deri Prick Testi

Deri prick testi, genellikle kolun iç kısmına veya sırtta uygulanır. Alerjen damlaları cilde sürülür ve sürülen yer yüzeysel olarak delinerek cilt altına geçmeleri sağlanır. Testten bir süre sonra alerjenin uygulandığı bölgede bir kabarıklık ve kızarıklık oluşur. Bu kızarıklığın yarıçapının uzunluğu ölçülerek alerjik reaksiyonun şiddeti değerlendirilir.

Deri prick testinde kızarıklığın yarıçapının uzunluğuna (mm) bağlı kızarıklığın alanını (mm^2) veren f fonksiyonu

$$f(x) = \pi x^2$$

biçiminde modellenmiştir.

Kızarıklığın alanının (mm^2) bulunduğu değer aralığına göre klinik anlamı Tablo 1 de verilmiştir.

Tablo 1: Kızarıklığın Alanının Bulunduğu Değer Aralığına Göre Klinik Anlamı

Kızarıklığın Alanı (mm^2)	Klinik Anlamı
$\left[0, \frac{9\pi}{4}\right)$	Alerji yok
$\left[\frac{9\pi}{4}, \frac{25\pi}{4}\right)$	Düşük düzeyde duyarlılık
$\left[\frac{25\pi}{4}, 25\pi\right)$	Belirgin duyarlılık
$[25\pi, 2500\pi]$	Yüksek düzeyde duyarlılık

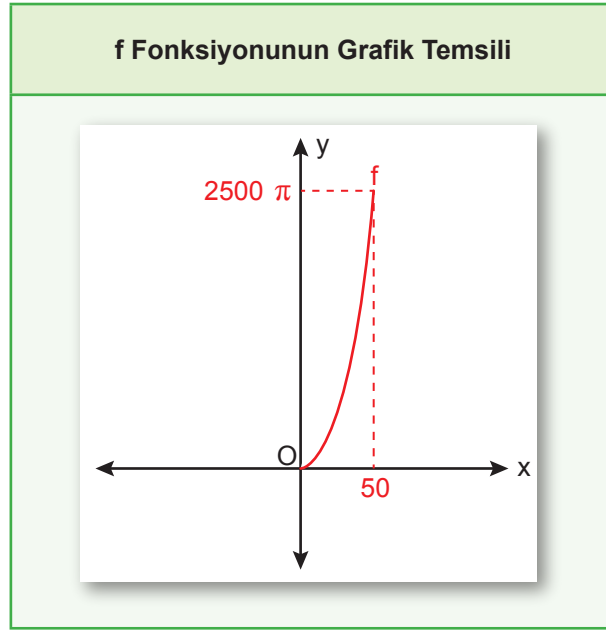
1. Deniz, Emre ve Gaye isimli hastalardan deri prick testi istenmiştir. Hastalara uygulanan deri testine ait kızarıklıkların yarıçaplarının uzunluğu milimetre cinsinden Tablo 2 de verilmiştir.

Buna göre bu hastalarda test sonucunda oluşan kızarıklıkların alanını (mm^2) ve bu alanların bulundukları değer aralığına göre klinik anlamlarını Tablo 2 deki ilgili boşluklara yazınız.

Tablo 2: Hastaların Deri Prick Test Sonuçları

Hasta Adı	Deri Prick Testi	Kızarıklığın Yarıçapının Uzunluğu (mm)	Kızarıklığın Alanı (mm^2)	Klinik Anlamı
Deniz		1	π	Alerji yok
Emre		3	9π	Belirgin duyarlılık
Gaye		7	49π	Yüksek düzeyde duyarlılık

2. f fonksiyonunun grafik temsilini çiziniz. Tabloda verilen f fonksiyonunun nitel özelliklerinin matematiksel karşılıklarını boş bırakılan ilgili alana yazınız.



Fonksiyonun Nitel Özellikleri	f
Tanım Kümesi	$[0, 50]$
Görüntü Kümesi	$[0, 2500 \pi]$
Bire Birliği	$\forall x_1, x_2 \in [0, 50]$ için $f(x_1) = f(x_2)$ yani $\pi x_1^2 = \pi x_2^2$ iken $x_1 = x_2$ dir. f fonksiyonu bire birdir.
Artanlığı - Azalanlığı	$\forall x_1, x_2 \in [0, 50]$ için $x_1 < x_2$ iken $f(x_1) < f(x_2)$ olduğundan f fonksiyonu artandır.

3. Deri prick testi sonucunda kızarıklığın yarıçapının uzunluğunun (mm) kızarıklık alanına (mm²) bağlı değişimini veren g fonksiyonunun cebirsel temsilini yazınız.

$$g(x) = \sqrt{\frac{x}{\pi}} = \frac{\sqrt{\pi x}}{\pi}$$

4. g fonksiyonunun tanım ve görüntü kümelerini bulunuz, fonksiyonun bire bir olma durumunu ve artan-azalan olma durumunu inceleyiniz.

Fonksiyonun Nitel Özellikleri	g
Tanım Kümesi	$[0, 2500\pi]$
Görüntü Kümesi	$[0, 50]$
Bire Birliği	$\forall x_1, x_2 \in [0, 2500\pi]$ için $g(x_1) = g(x_2)$ yani $\sqrt{\frac{x_1}{\pi}} = \sqrt{\frac{x_2}{\pi}}$ iken $x_1 = x_2$ olduğu için g fonksiyonu bire birdir.
Artanlığı - Azalanlığı	$\forall x_1, x_2 \in [0, 2500\pi]$ için $x_1 < x_2$ iken $g(x_1) < g(x_2)$ olduğu için g fonksiyonu artandır.

5. Bir doktor duyarlılık seviyelerinin, kızarıklık yarıçaplarının uzunluğuna (mm) göre değerlendirilebilmesini sağlayacak bir tablo oluşturmak için sizden yardım istiyor.

Buna göre Tablo 3 ü doldurunuz.

Tablo 3: Kızarıklıkların Yarıçap Uzunluklarının Değer Aralığına Göre Klinik Anlamları

Kızarıklığın Yarıçapının Uzunluğu (mm)	Klinik Anlamı
$[0, \frac{3}{2})$	Alerji yok
$[\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$	Düşük düzeyde duyarlılık
$[\frac{5}{2}, 5)$	Belirgin duyarlılık
$[5, 50]$	Yüksek düzeyde duyarlılık

6. f ve g fonksiyonlarının grafik temsillerini matematik yazılımı kullanarak çiziniz. Bu fonksiyonların grafik temsillerinin birbirleriyle olan ilişkisini tespit ediniz.

y = x doğrusuna göre simetriklerdir.

AMATÖR DALGIÇ

Amatör bir dalgıç olan Halis, suyun 50 metre altında araştırma yaparken oluşan teknik bir sorun nedeniyle acil çıkış yapmak zorunda kalmıştır. Hızla yüze çıktı için vücudundaki basınç dengesi bozulmuş ve vücut dokularında nitrojen kabarcıkları oluşmuş yani vurgun yemiştir. Halis acilen hastaneye kaldırılmış ve Hiperbarik Oksijen Odası'na alınmıştır. Hastanede zaman kaybı olmaması için 3 farklı grup oluşturulup aşağıdaki bilgi notları gruplara verilmiştir. Grupların bilgi notuna bağlı olarak matematiksel modeller belirlemesi ve elde edilen verilerin sonucuna göre hangi tedavi protokolünün uygulanacağı kararlaştırılacaktır.

GRUP 1 BİLGİ NOTU

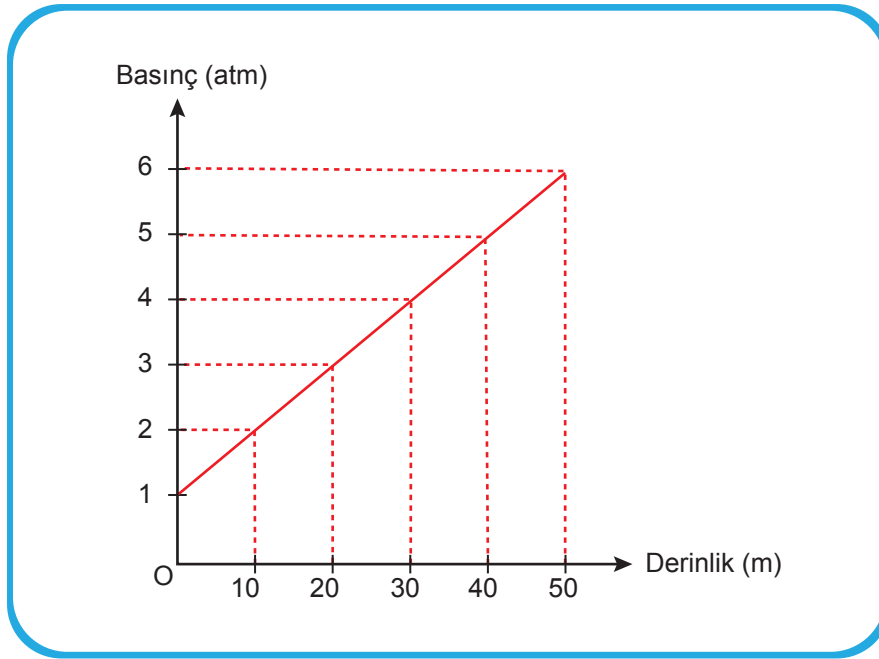
Tedavi öncesinde, dalgıcın maruz kaldığı toplam basıncın belirlenmesi gerekmektedir. Deniz seviyesinden derine inildikçe her 10 metrede basınç 1 atm artar. Basıncın derinliğe bağlı değişimi aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo: Basıncın Derinliğe Bağlı Değişimi

x Derinlik (m)	0	10	20	30	40	50
P Basınç (atm)	1	2	3	4	5	6

Buna göre verilen soruları cevaplandırınız.

a) Tablodaki verileri kullanarak basıncın derinliğe bağılı değişiminin grafik temsilini dik koordinat sisteminde çiziniz.



b) Aşağıda açıklama kartlarında numaralandırılmış olarak verilen örnekler ile kavram kartlarını eşleştiriniz.

AÇIKLAMA KARTLARI

1 Her bir derinliğe yalnızca bir basınç değeri karşılık gelmesi durumu

2 Basınç değerlerinin oluşturduğu küme

3 Suyun yüzeyinden aşağıya doğru olan uzaklık

4 Her 10 metrede basıncın 1 atm artması

5 Derinlik değerlerinin oluşturduğu küme

KAVRAM KARTLARI

Derinlik (m)

Basınç (atm)

Fonksiyon

Tanım Kümesi

Görüntü Kümesi

Doğrusal İlişki

Karesel İlişki

1 Fonksiyon

2 Görüntü Kümesi

3 Derinlik

4 Doğrusal İlişki

5 Tanım kümesi

c) Derinliğe (m) bağlı toplam basıncı (atm) veren P fonksiyonunun cebirsel temsilini verilen ifadeler arasından belirleyerek P(x) in karşısındaki boş bırakılan yere yazınız.

$P(x) = 0,1x + 1$

$0,1x^2 - 1$

$0,1x + 1$

$3x + 20$

$10x + 2$

$0,1\sqrt{x} - 3$

ç) P fonksiyonunun tanım ve görüntü kümelerini karşısındaki boşluklara yazınız.

Tanım Kümesi : [0, 50]

Görüntü Kümesi: [1, 6]

d) 45 metre derinliğe inen bir dalgıcın maruz kalacağı toplam basıncın kaç atm olacağını bulunuz.

$$\begin{aligned}
 P(x) &= 0,1x + 1 \\
 P(45) &= 0,1 \cdot 45 + 1 \\
 &= 4,5 + 1 \\
 &= 5,5 \text{ atm}
 \end{aligned}$$

e) Bir dalışta nitrojen kabarcığı riskinin artmaması için yüze çıkış sırasında maruz kalınan basınç azalmasının, başlangıç basıncının %50'inden fazla olmaması gerekmektedir.

Buna göre bir dalgıcın duraklama yapmadan güvenli bir şekilde su yüzeyine çıkabileceği maksimum derinliğin kaç metre olduğunu bulunuz.

$$\frac{P(x)-1}{P(x)} \leq \frac{50}{100}$$

$$\frac{\frac{x}{10} + 1 - 1}{\frac{x}{10} + 1} \leq \frac{1}{2}$$

$$\frac{x}{10} \cdot \frac{10}{x+10} \leq \frac{1}{2}$$

$$2x \leq x + 10$$

$$x \leq 10$$

Maksimum derinlik 10 metredir.

Hiperbarik odalarda yüksek basınç uygulanarak vücuttaki dokularda oluşan zararlı nitrojen kabarcıklarının küçültülmesi amaçlanmaktadır. Güvenli bir tedavi süreci için başlangıç basıncı 2 atm, bu odada çıkılabilecek en üst seviye basınç ise 3 atm dir. En üst seviyeye yarım saat içerisinde kademeli olarak çıkılması hedeflenmiştir.

Tedavi başlangıcında Halis'in vücut dokularındaki nitrojen gazının hacmi 15 nL (nanolitre) dir. Gazın hacmi ile uygulanan basınç ters orantılıdır.

Buna göre aşağıdaki soruları cevaplandırınız.

a) Zamana bağlı basınç değişimini veren karesel P fonksiyonunun cebirsel temsilini yazınız.

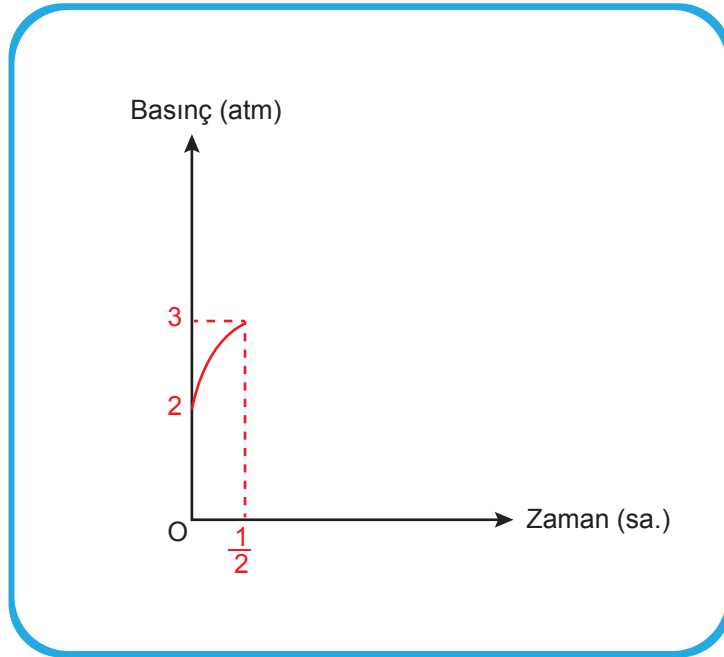
$$P(t) = a \cdot (t - r)^2 + k$$

$$P(t) = a \cdot \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + 3$$

$$P(0) = a \cdot \frac{1}{4} + 3 = 2 \Rightarrow a = -4$$

$$P(t) = -4 \cdot \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + 3$$

b) Zamana bağlı basınç değişimini veren karesel P fonksiyonunun grafik temsilini oluşturunuz.



c) Basıncın maksimum olduğu noktayı bulunuz.

Fonksiyonun maksimum değeri 3 tür. Fonksiyon maksimum değerini $t = \frac{1}{2}$ iken alır.

ç) Basıncın $\frac{11}{4}$ atm e eşit olduğu saati hesaplayınız.

$$\begin{aligned} P(t) &= \frac{11}{4} \\ -4 \cdot \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + 3 &= \frac{11}{4} & t_1 &= \frac{1}{4} \\ \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 &= \frac{1}{16} & t_2 &= \frac{3}{4} \left(\frac{1}{2} \text{ den büyük olduğu için alınamaz.}\right) \end{aligned}$$

d) Zamana bağlı basınç değişimini veren P fonksiyonundan yararlanarak gazın hacmini veren V fonksiyonunun cebirsel temsilini yazınız.

$$P(t) \cdot V(t) = k \Rightarrow P(0) \cdot V(0) = k \Rightarrow 2 \cdot 15 = k \Rightarrow k = 30$$

$$P(t) \cdot V(t) = 30 \Rightarrow V(t) = \frac{30}{P(t)} \Rightarrow V(t) = \frac{30}{-4 \cdot \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + 3}$$

e) Gaz baloncuklarının hacminin (nL) alabileceği en küçük değeri hesaplayınız.

$$V\left(\frac{1}{2}\right) = 10 \text{ nL}$$

f) Gaz baloncuklarının hacminin en küçük değere sahip olması için basıncın hangi değere sahip olması gerektiğini sözel olarak açıklayınız. Bu basınç değerinin gerçekleştiği zamanı bulunuz.

Basınç ve hacim ters orantılı olduğu için basınç arttıkça hacim azalacaktır. Dolayısıyla gaz baloncuklarının hacminin en küçük değere sahip olması için basıncın en büyük değerini alması yani 3 atm olması gerekir.

Basınç bu değeri $t = \frac{1}{2}$ iken alır.

Hiperbarik oksijen tedavisinde dokulardaki nitrojen kabarcıklarını küçültmek amacıyla uygulanan basınç değerinin 2 atm eksiği, tedavi süresinin karekökü ile doğru orantılı olarak artmaktadır. Dokuların zarar görmemesi için bir hasta, hiperbarik odada en fazla 9 saat kalabilmektedir. Halis'in tedavisinin başlangıcında basınç 2 atm olarak ayarlanmış ve vücuttaki gaz hacmi 15 nL olarak ölçülmüştür. Gaz hacmi ile basıncın ters orantılı olduğu bilinmektedir. Yapılan değerlendirmede tedavinin 1. saatinin sonunda gaz hacminin 10 nL ye düşeceği belirlenmiştir.

Buna göre aşağıdaki soruları cevaplandırınız.

a) Zamana bağlı basınç değişimini veren P fonksiyonunun cebirsel temsilini yazınız.

$$\frac{P(t)-2}{\sqrt{t}} = k \Rightarrow P(t) = k\sqrt{t} + 2$$

$$P \cdot V = a \Rightarrow 2 \cdot 15 = a \Rightarrow a = 30$$

$$10 \cdot P(1) = 30 \Rightarrow P(1) = 3 \Rightarrow k = 1$$

$$P(t) = \sqrt{t} + 2$$

b) Zamanın alabileceği değer aralığını belirleyiniz.

Karekök tanımından $t \geq 0$ olmalıdır ve hasta odada en fazla 9 saat kalabilmektedir. Dolayısıyla zamanın alabileceği değer aralığı $[0,9]$ dır.

c) Basıncın alabileceği değer aralığını belirleyiniz.

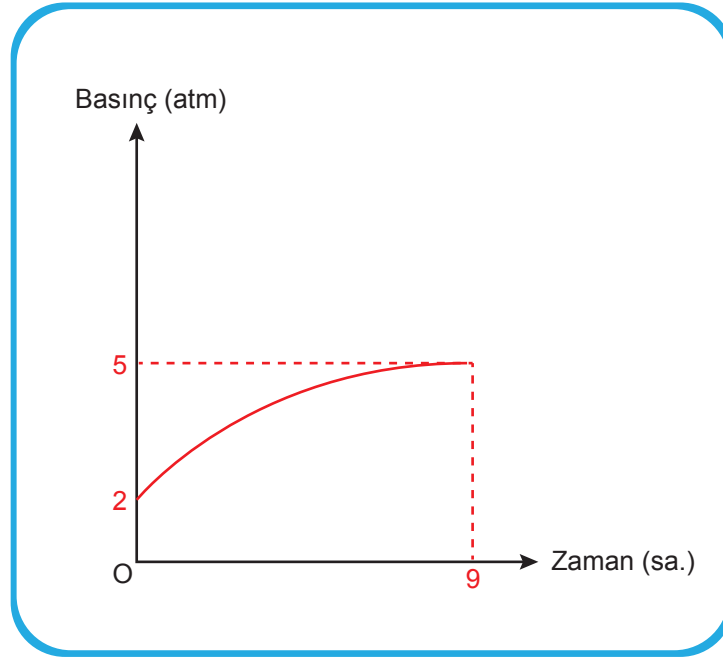
$$0 \leq t \leq 9 \Rightarrow 0 \leq \sqrt{t} \leq 3 \Rightarrow 2 \leq \sqrt{t} + 2 \leq 5$$

Basıncın alabileceği değer aralığı $[2,5]$ olur.

ç) Basıncın 4 atm e eşit olduğu saati hesaplayınız.

$$\sqrt{t} + 2 = 4 \Rightarrow \sqrt{t} = 2 \Rightarrow t = 4 \text{ iken basınç 4 atm olur.}$$

d) Zamana bağılı basınç değişimini veren P fonksiyonunun grafik temsilini çiziniz.



e) Zamana bağılı hacim değişimini veren V fonksiyonunun cebirsel temsilini yazınız.

$$P(t) \cdot V(t) = 30 \Rightarrow (\sqrt{t} + 2) \cdot V(t) = 30 \Rightarrow V(t) = \frac{30}{\sqrt{t} + 2}$$

f) Gaz baloncuklarının hacminin kritik aralık olan 10 nL ile 15 nL arasında değer aldığı zaman aralığını cebirsel olarak ifade ediniz.

$$10 < \frac{30}{\sqrt{t} + 2} < 15 \Rightarrow \frac{1}{15} < \frac{\sqrt{t} + 2}{30} < \frac{1}{10} \Rightarrow 2 < \sqrt{t} + 2 < 3$$
$$0 < \sqrt{t} < 1 \Rightarrow 0 < t < 1$$

g) Gaz baloncuklarının hacminin (nL) alabileceği en küçük değeri hesaplayınız.

$$V(9) = 6 \text{ nL}$$

DEĞERLENDİRME

Tüm gruplar toplanarak sunumlarını gerçekleştirmiştir. Buna göre aşağıdaki ifadeleri değerlendiriniz.

GRUP 2 tarafından belirlenen prosedürün sınırlılıkları ve tedavi sağlayacağı yararları değerlendiriniz.

Grup 2 tarafından çalışılan prosedürde karesel fonksiyon kullanılmıştır. Karesel fonksiyonda basınç artışı yarım saat içinde çok hızlı gerçekleşirken yarım saat sonrasında basınç azalır. Bu durum basınçla ters orantılı olarak değişen gazın hacmini ilk yarım saatte hızlı bir şekilde azaltırken yarım saat sonrasında gazın hacmi artmaya başlar.

GRUP 3 tarafından belirlenen prosedürün sınırlılıkları ve tedavi sağlayacağı yararları değerlendiriniz.

Grup 3 tarafından çalışılan prosedürde karekök fonksiyon kullanılmıştır. Karekök fonksiyonda basınç artışı yavaş gerçekleşmiştir. Ancak basınç sürekli artmıştır. Bu durum basınçla ters orantılı olarak değişen gazın hacminin sürekli bir şekilde azalmasını sağlamıştır.

Gaz hacminin hızlı bir şekilde düşürülmesi gereken durumlarda hangi prosedürün kullanılmasının avantaj olduğunu farklı yöntemleri kullanarak doğrulayınız.

Gaz hacminin hızlı bir şekilde düşürülmesi gereken durumlarda karesel fonksiyonu kullanmak avantajlıdır. Bunu grafik temsilinden faydalanarak doğrulayabiliriz.

