BİREYSEL ÖĞRENME ETKİNLİKLERİ

MATEMATİK



10

ORTAÖĞRETİM
GENEL MÜDÜRLÜĞÜ

MEBİ

OGM
MATERYAL

BİREYSEL ÖĞRENME ETKİNLİKLERİ

10. SINIF

MATEMATİK

GENEL YAYIN YÖNETMENİ Cengiz METE

YAYIN KOORDİNATÖRÜ Ömer SARICA

EDİTÖR Prof. Dr. Abdülkadir ERDOĞAN, Doç. Dr. Abdullah ÖZKALE

HAZIRLAYANLAR Filiz ÇINARBAY, Zühre ŞAHBAZ, İmdat KURT, Melike ÖĞÜT, Meryem SONKAYA, Özge Duygu BAYKAL GEDİK, Fatma Zehra GÜNGÖR, Cumali SUNAR, Burak ÖZÇELİK, Yunus ÇETİN, Mikail DAĞLI, İsmail Gökhan BEKTAŞ, Damla KÜÇÜKTOKSÖZ, Şükrüye İPEK, Ayşen GÜRLER EŞSİZ, Murat DOĞAN, Ezgi ORAL, Seçil SEVİNÇ, Erkan SERT, Neşe DEMİRTAŞ ANAÇ, Fatih AKÇAKUYU, Dr. Sevilay ALKAN, Gizem AY, Erdinç SALIK, Dr. Ahmet Salih DOĞAN, Faruk BİLİCİ, Fatih ÇINAR, Emre ŞAHİN, Serdar ALTAN, Uğur ATEŞ, Özlem OKDEMİR, Abdullah KALAYCI

DİL UZMANI Şerife YAŞAR

ÖLÇME VE DEĞERLENDİRME UZMANI Dr. Öğr. Üyesi Ahmet YILDIRIM, Dr. Öğr. Üyesi Recep GÜR, Dr. Öğr. Üyesi Ömer KAMIŞ, Hanifi YUMUŞAK

PROGRAM GELİŞTİRME UZMANI Doç. Dr. Serkan DEMİR

DİZGİ ve GRAFİK TASARIM Çağlayan Volkan YILDIZ, Adem TOK, Diğdem TÜKEL ÇOLAK, Tahir YAMAN, Behiye GÖK BOZKURT, Habib ALPASLANOĞULLARI

ISBN 978-975-11-9739-9

YAYIM YILI Ekim 2026

Bu yayın Millî Eğitim Bakanlığı Ortaöğretim Genel Müdürlüğü tarafından hazırlanmıştır. Gerçekleştirilen çalışmalara UNICEF Türkiye Temsilciliği katkıda bulunmuştur.

Millî Eğitim Bakanlığı
Atatürk Bulvarı No: 98 Bakanlıklar / ANKARA
Tel: +90 312 413 2680
+90 312 413 2681
+90 312 413 1838
www.meb.gov.tr

Birleşmiş Milletler Çocuklara Yardım Fonu
UNICEF
Turan Güneş Bulvarı No.106 Kat: 7 06550
Çankaya / ANKARA
Tel: +90 312 545 10 00
www.unicef.org.tr

Sevgili Öğrenciler,

Hayat her zaman düz bir çizgide ilerlemeyebilir. Kişisel önceliklerinizi, değişen yaşam koşullarınız veya ilgi alanlarınıza ayırdığınız özel zamanlar nedeniyle zaman zaman dersleri düzenli takip etmek zorlaşabilir; bu da öğrenmelerinizde geçici eksiklikler oluşturabilir. Bu durum doğaldır ve pek çok öğrencinin öğrenme sürecinde karşılaşabildiği bir deneyimdir. Böyle zamanlarda önemli olan, küçük ama düzenli adımlarla yeniden başlamak, eksiklerinizi fark edip planlı biçimde tamamlamak ve öğrenme yolculuğunuza devam etmektir.

Bu kitap; okulunuza düzenli olarak devam edemediğiniz, öğrendiğiniz bilgileri unuttuğunuz ya da sahip olduğunuz becerilerin zamanla zayıfladığı durumlarda öğrenmenizi sürdürebilmeniz için hazırlanmıştır. Kitap içerisinde yer alan bireysel öğrenme etkinlikleri, beklenmedik durumlar nedeniyle ya da bireysel gerekçelerle okula ara verseniz bile öğrenme sürecinizin devamlılığını desteklemek amacıyla tasarlanmıştır. Kartlardaki etkinlikler, 9. sınıfta yer alan öğrenme çıktıları dikkate alınarak oluşturulmuştur. Bu kartlar ile hem sürekli öğrenebilir hem de öğrenme sürecinizi zenginleştirebilirsiniz.

Bu kitapla

- düşünerek,
- deneyerek,
- hatalarınızın üzerine giderek

ilerleyebilirsiniz.

Kitapta yer alan etkinlikler, öğrenmelerinizi adım adım ilerletecek biçimde tasarlanmıştır. Burada önemli olan, doğru bilgiye ulaşmakla birlikte öğrenme sürecinizi fark etmeniz ve bu süreci yönetebilir hâle gelmenizdir.
Bireysel öğrenme etkinlikleri, okul dışında da öğrenme sürecinizi güvenle sürdürebilmeniz için size rehberlik eder.

Kitabınızı

- herhangi bir gerekçeden dolayı okula gidemediğiniz dönemlerde,
- yarıyıl tatili /yaz tatili sonrası konuları hatırlamak istediğinizde,
- okul değişikliği yaptığınızda,
- temel kabullerinizde eksikliğiniz olduğunda,
- bir konuyu yeniden çalışmak istediğinizde,
- bir konuyu pekiştirmek istediğinizde

kullanabilirsiniz.

Öğrenmek, bireysel bir yolculuktur. Bu yolculukta merak etmek, sormak, denemek ve bazen zorlanmak normaldir. Kitapların içindeki bireysel öğrenme etkinliklerinde yer alan etkinlikler; sizi kendi güçlü yönlerinizi keşfetmeye, eksiklerinizi tamamlamaya, öğrendiklerinizi pekiştirmeye ve özgüvenle ilerlemeye teşvik edecektir.

Bireysel öğrenme etkinliklerinde yer alan başlıkların genel açıklamaları şu şekildedir:



Her bölümün sonunda yer alan geri bildirimler, yaptığınız çalışmayı kontrol etmenize ve öğrenmenizi kalıcı hâle getirmenize yardımcı olur.

Bireysel öğrenme etkinlikleri kitabınızdaki her sayfa, öğrenme eksiklerinizi tamamlamanız için bir fırsattır. Öğrendikçe, düşündükçe ve tekrar ettikçe eksiklerinizi giderecek ve kendinizi daha hazır hissedeceksiniz. Bu kitap, öğrenme yolculuğunuzda her zaman ilerleyebileceğinizi gösteren bir çalışma arkadaşıdır.

Eğlence ve keşif dolu bir öğrenme yolculuğu dileklerimizle...

İÇİNDEKİLER

GEOMETRİK ŞEKİLLER **7**

DİK ÜÇGENDE TRİGONOMETRİK ORANLAR 7

ÜÇGENİN YARDIMCI ELEMANLARI 32

ÜÇGENDE ALAN 62

SİNÜS VE KOSİNÜS TEOREMLERİ 78

İSTATİSTİKSEL ARAŞTIRMA SÜRECİ **114**

İKİ KATEGORİK DEĞİŞKEN İÇEREN DAĞILIMLAR 1 114

İKİ KATEGORİK DEĞİŞKEN İÇEREN DAĞILIMLAR 2 144

SAYILAR **167**

BİR DOĞAL SAYININ ASAL ÇARPANLARI VE BÖLENLERİ 167

EBOB-EKOK 188

BÖLME İŞLEMİNDE KALAN BULMA 218

NİCELİKLER VE DEĞİŞİMLER **243**

FONKSİYONUN TANIMI 243

GERÇEK SAYILARDA TANIMLI KARESEL FONKSİYONLAR 281

GERÇEK SAYILARDA TANIMLI KAREKÖK FONKSİYONLAR 322

GERÇEK SAYILARDA TANIMLI RASYONEL FONKSİYONLAR 384

TERS FONKSİYONLAR 445

DENKLEM VE EŞİTSİZLİKLER 460

SAYMA, ALGORİTMA VE BİLİŞİM **496**

SAYMA STRATEJİLERİ 496

ALGORİTMİK YAPI OLUŞTURMA 538

ANALİTİK İNCELEME **567**

NOKTANIN ANALİTİĞİ 567

DOĞRUNUN ANALİTİĞİ 590

VERİDEN OLASILIĞA **622**

KOŞULLU OLASILIK 1 622

KOŞULLU OLASILIK 2 (BAYES TEOREMİ) 644



DİK ÜÇGENDE TRİGONOMETRİK ORANLAR

BAŞLARKEN

Bu bölümde yer alan etkinlikler, bireysel öğrenme yolculuğunuzda size rehberlik etmek ve öğrenme sürecinizi desteklemek amacıyla hazırlanmıştır. Çalışmalarınızı yürütürken "Hazırlanıyorum", "İlişkilendiriyorum", "Uygulayarak Öğreniyorum", "Değerlendiriyorum", "Yansıtıcı Yazı" ve "Öğrendiklerim" etkinliklerini sırası ile takip etmeniz ve etkinliklerin sonunda yer alan geri bildirimleri inceleyerek bölümleri tamamlamanız beklenmektedir.

Bu çalışma kartında matematiğin günlük hayata olan katkılarına ilişkin çıkarımlarda bulunup aşağıdaki soruları yanıtlayabileceksiniz.

- Bir ağacın boyunu, ağacın yakınında bulunan ve yüksekliğini bildiğiniz bir bina sayesinde nasıl bulabilirsiniz?
- Bir duvara yaslanacak merdivenin güvenli yaslama açısı verildiğinde merdiven sayesinde ne kadar yüksekliğe çıkabileceğinizi bulabilir misiniz?
- Bilgisayar oyunlarında, nesnelerin döndürülmesi, hareket yörüngeleri ve kamera açılarının hesaplanmasında,
- MR (Manyetik Rezonans), CT(Bilgisayarlı Tomografi) gibi tıbbi görüntüleme cihazlarında, görüntünün yeniden oluşturulmasında ve analizinde, trigonometrik hesaplamalar kullanılır.

HAZIRLANIYORUM

Amaç: Bu bölümde, ön bilgilerinizi hatırlamanızı ve temaya hazırlıklı hâle gelmenizi amaçlıyoruz.

Aşağıda yer alan ifadeler, bu temada tamamlanması hedeflenen öğrenme çıktısını ele almadan önce sahip olmanız gereken bazı temel becerileri içermektedir. Lütfen her bir ifadeyi dikkatlice okuyunuz.

- Eğer ifadedeki bilgiye hakim olduğunuzu düşünüyorsanız kutucuğu işaretleyiniz.
- Eğer konuyu henüz tam olarak bilmediğinizi ya da hatırlamadığınızı düşünüyorsanız kutucuğu boş bırakınız.

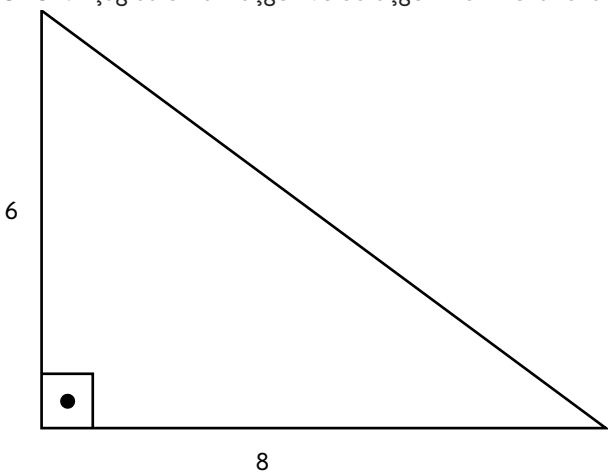
Bu çalışma notla değerlendirilmeyecek olup amacı temaya ne ölçüde hazır olduğunuzu belirlemektir.

SORULAR	ÖN ÖĞRENME KONTROL LİSTESİ	✓
1	Bir dik üçgeninin iç açılarının ölçüleri toplamının 180° olduğunu biliyorum.	☐
2	Bir dik üçgende dik kenarları ve hipotenüsü ayırt edebilirim.	☐
3	Bir dik üçgende Pisagor teoremini uygulayabilirim.	☐
4	İki üçgenin benzer olup olmadığını tespit edebilirim.	☐
5	Benzer iki üçgeninin benzerlik oranını hesaplayabilirim.	☐

"Ön Öğrenme Kontrol Listesi"ni doldurduktan sonra aşağıda verilen "Kontrol Noktası" sorularını çözünüz ve cevaplarınızı kontrol ediniz.

KONTROL NOKTASI

SORU 1. Aşağıda bir dik üçgen ve bu üçgenin dik kenar uzunluklarının santimetre cinsinden değeri verilmiştir.



Verilenlere göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) Üçgenin hipotenüs uzunluğu kaç santimetredir?

b) Üçgeninin dik kenar uzunlukları iki katına çıkarılırsa hipotenüs uzunluğu nasıl değişir?

c) Aşağıda kenar uzunlukları verilen üçgenlerden hangileri yukarıdaki üçgen ile benzerdir?

I. 3 cm – 4 cm – 5 cm

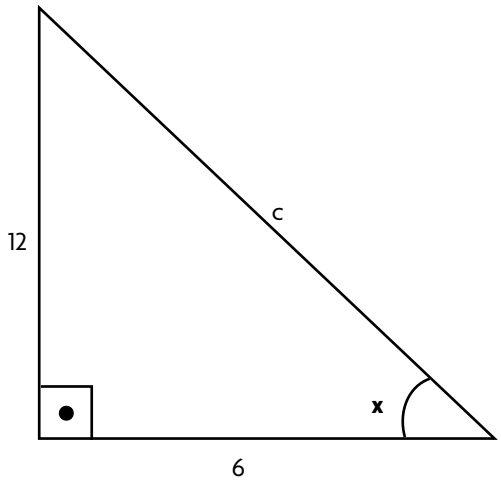
II. 9 cm – 12 cm – 15 cm

III. 6 cm – 12 cm – 18 cm

IV. $\frac{3}{4}$ cm – 1 cm – $\frac{5}{4}$ cm

V. $5\sqrt{3}$ cm – $4\sqrt{3}$ cm – $3\sqrt{3}$ cm

SORU 2. Aşağıda bir dik üçgen ve bu üçgenin dik kenar uzunluklarının santimetre cinsinden değeri verilmiştir.

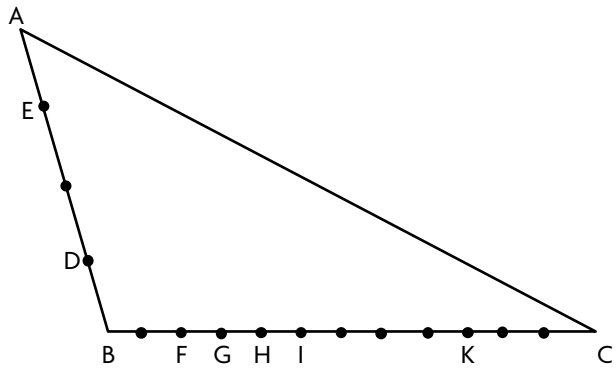


Verilenlere göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) Üçgenin hipotenüs uzunluğunun x açısının karşı dik kenar uzunluğuna oranı kaçtır?

b) Üçgende, x açısının komşu dik kenar uzunluğunun karşı dik kenar uzunluğuna oranı kaçtır?

SORU 3. Aşağıdaki ABC üçgeninde, AB kenarı 4 eş, BC kenarı 12 eş parçaya bölünmüştür.



Verilenlere göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) Üçgende verilen D noktası ile BC kenarı üzerindeki isimlendirilmiş noktalardan hangisi birleştirilirse, oluşan üçgen ABC üçgenine benzer olur?

b) Üçgenin AC kenarının uzunluğu 24 cm olduğuna göre E ve K noktaları birleştirilerek elde edilen doğru parçasının uzunluğu kaç santimetre olur?

GERİ BİLDİRİM

Bu geri bildirim sayesinde kendi cevabınızı kontrol edebilir, hatalarınızı düzelterek öğrenmenizi pekiştirebilirsiniz.

ÇÖZÜM 1.

a) Hipotenüs uzunluğu c cm olsun.

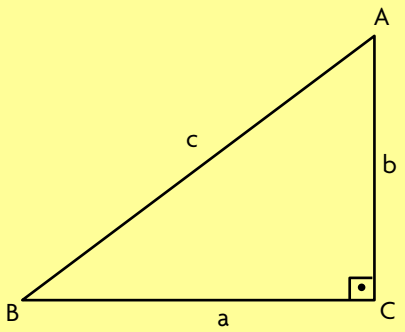
Pisagor teoreminden;

$c^2 = 6^2 + 8^2$

$c^2 = 100$

c = 10 cm bulunur.

Pisagor Teoremi



$c^2 = a^2 + b^2$

b) Hipotenüs uzunluğu da iki katına çıkar.

Bir üçgenin iki kenar uzunluğu aynı oranda değiştirilirse üçüncü kenar uzunluğu da aynı oranda değişir. (K.K.K. Benzerliği)

Siz de Pisagor teoremini kullanarak doğru cevaba ulaşabilirsiniz.

Kenar - Kenar - Kenar Benzerlik Teoremi:
İki üçgenin karşılıklı bütün kenar uzunlukları orantılı ise bu iki üçgen benzerdir. Kenar uzunlukları orantılı olan benzer üçgenlerde orantılı kenarları gören açılar eştir.

c) Soruda verilen üçgenin kenar uzunlukları 6 cm, 8 cm ve 10 cm'dir. Bir üçgenin tüm kenar uzunlukları aynı pozitif sayı ile çarpılır ya da bölünürse, elde edilen üçgen ilk üçgenle açıları eş ve kenar uzunlukları orantılı olduğundan benzer olur.

I. 3 cm – 4 cm – 5 cm ✓ (Kenar uzunlukları $\frac{1}{2}$ ile çarpılmış)

II. 9 cm – 12 cm – 15 cm ✓(Kenar uzunlukları $\frac{3}{2}$ ile çarpılmış)

III. 6 cm – 12 cm – 18 cm ✓ (Kenar uzunlukları ilk üçgenle orantılı değil.)

IV. $\frac{3}{4}$ cm – 1 cm – $\frac{5}{4}$ cm ✓ (Kenar uzunlukları 8 ile bölünmüş)

V. $5\sqrt{3}$ cm – $4\sqrt{3}$ cm – $3\sqrt{3}$ cm ✓ (Kenar uzunlukları $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ile çarpılmış ve kenarların sıraları değişmiş)

Sonuç olarak I – II – IV – V numaralı üçgenler ilk üçgenle benzerdir.

ÇÖZÜM 2.

a) Hipotenüs c cm uzunluğundadır.

Pisagor teoreminden;

$c^2 = 6^2 + 12^2$

$c^2 = 180$

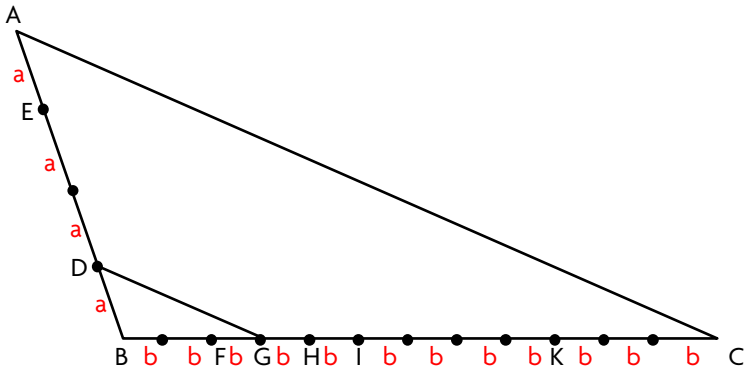
$c = 6\sqrt{5}$ cm bulunur.

x açısının karşı dik kenar uzunluğu 12 cm'dir. Buradan istenen oran, $\frac{6\sqrt{5}}{12} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ bulunur.

b) x açısının komşu dik kenar uzunluğu 6 cm, karşı dik kenar uzunluğu 12 cm'dir. Buradan istenen oran $\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ olur.

ÇÖZÜM 3.

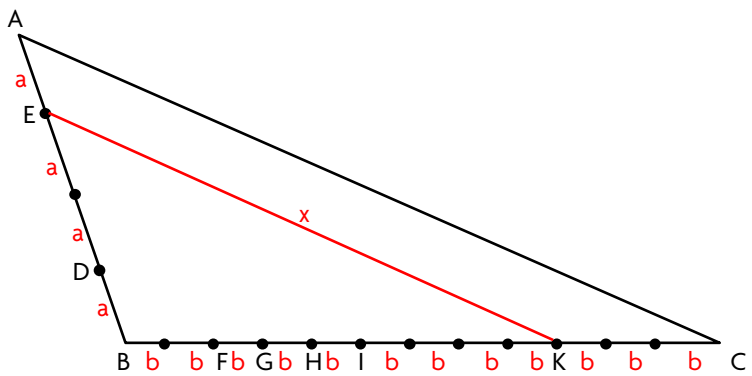
Kenar – Açı – Kenar Benzerliği
İkişer kenar uzunluğu orantılı ve bu kenarların arasındaki açıları eş olan iki üçgen, karşı kenar uzunlukları da aynı orantıya sahip olacağı için benzerdir.



a) D noktası ile G noktası birleştirilirse elde edilen DBG üçgeni ile ABC üçgeni benzer olur.

Neden benzer olduklarına bakalım: $\frac{|BD|}{|BA|} = \frac{a}{4a} = \frac{1}{4}$ ya da $\frac{|BG|}{|BC|} = \frac{3b}{12b} = \frac{1}{4}$ olarak bulunur. B açısı ortak olduğundan Kenar – Açı – Kenar Benzerlik teoremine göre üçgenler benzer olur. [DG] ve [AC] birbirine paralel olup $\frac{|DG|}{|AC|} = \frac{1}{4}$ olur ve bu durumda benzerlik oranı $\frac{1}{4}$'tür.

b)



E noktası ile K noktası birleştirilirse elde edilen EBK üçgeni ile ABC üçgeni benzer olur.

Neden benzer olduklarına bakalım: $\frac{|BE|}{|BA|} = \frac{3a}{4a} = \frac{3}{4}$ ve $\frac{|BK|}{|BC|} = \frac{9b}{12b} = \frac{3}{4}$ olarak bulunur. B açısı ortak olduğundan

Kenar – Açı – Kenar Benzerlik teoremine göre üçgenler benzer olur. [EK] ve [AC] birbirine paralel olur ve $\frac{|EK|}{|AC|} = \frac{3}{4}$ bulunur ve bu durumda EBK üçgeni ile ABC üçgenin benzerlik oranı $\frac{3}{4}$ olur.

Benzerlik oranı $\frac{3}{4}$ olduğundan $\frac{x}{24} = \frac{3}{4} \rightarrow x = 18$ cm olur.

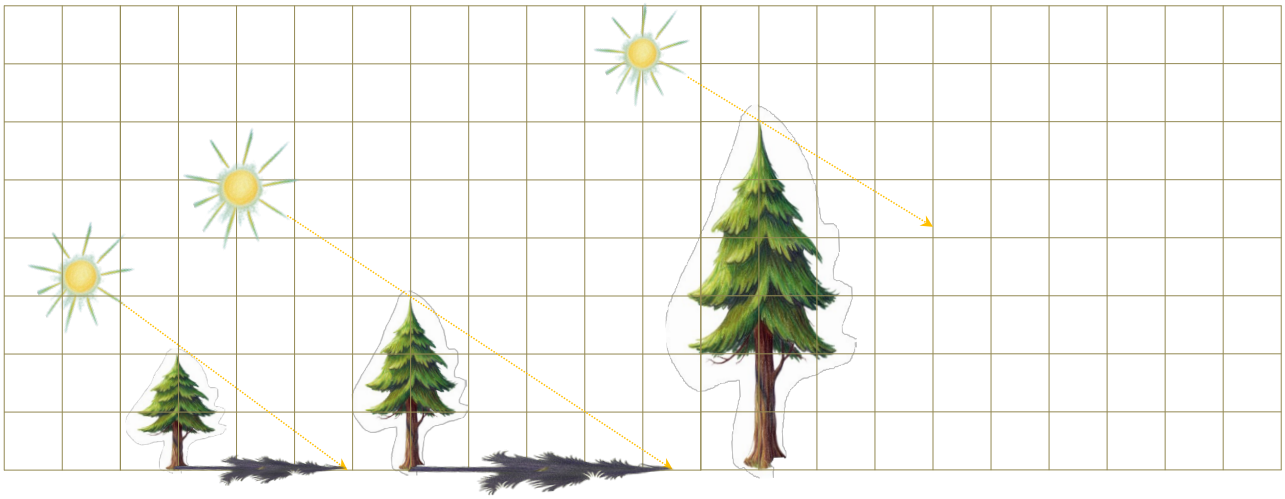
Bu tarz sorularda Pisagor bağıntısı ile üçgenlerde eşlik ve benzerlik (Kenar-Kenar-Kenar eşliği ve benzerliği, Açı-Açı benzerliği, Açı-Kenar-Açı eşliği gibi) konularına ait bilgileri kullanabilmek gerekmektedir.
Eğer sorunun çözümünde kavramsal olarak emin olamadığınız noktalar olduysa, temel bilgilerinizi pekiştirmek amacıyla
9. Sınıf müfredatındaki "'Geometrik Şekiller" ve "Eşlik ve Benzerlik" konularını yeniden gözden geçirmeniz faydalı olacaktır. Bu temel konular üzerindeki hakimiyetiniz, ilerleyen çalışmalardaki başarınızı doğrudan destekleyecektir.

İLİŞKİLENDİRİYORUM

Amaç: Bu bölümde, öğrendiğiniz bilgileri günlük hayatta karşılaştığınız durumlarla ilişkilendirmenizi istiyoruz.

Verilen etkinliği inceleyiniz. 'Gerçek yaşamda karşılaştığımız görüntüler hangi durumlarda benzer şekiller oluşturur? ''irdeleyiniz.

Birim kareli zemin üzerinde bulunan üç farklı ağaca, güneş ışınları aynı açı ölçüsüyle gelmektedir. Birinci ve ikinci ağacın yükseklikleri ile bu ağaçlara ait gölge uzunlukları verilmiştir.



Buna göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) Ağaçların ve gölgelerinin boyları arasındaki ilişkiyi açıklayınız.

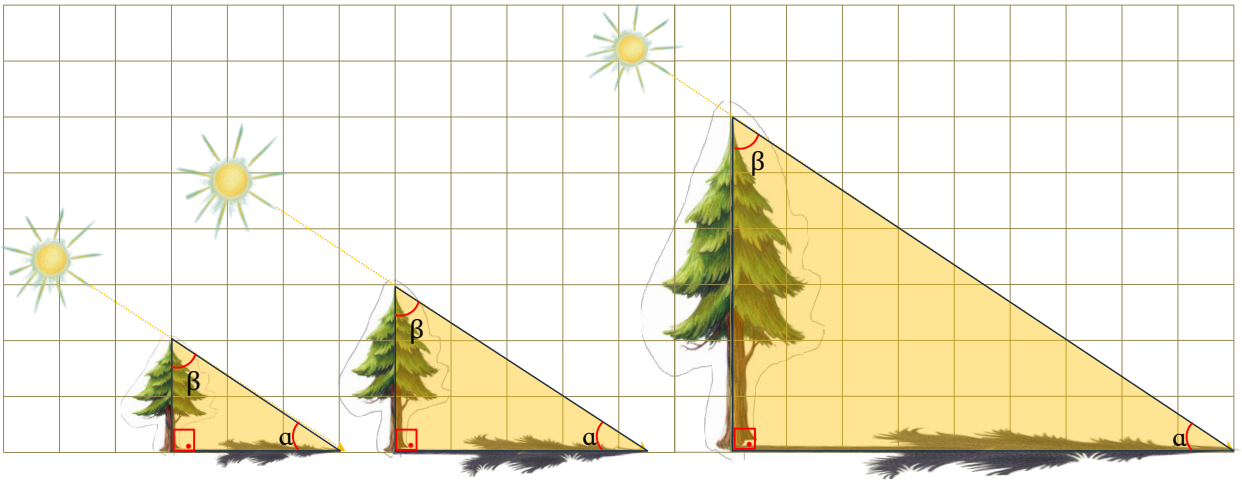
b) Birinci ve ikinci ağaç için oluşan üçgenlerin benzer olduğunu gösteriniz.

c) Benzerlik oranını kullanarak üçüncü ağacın gölge uzunluğunu birim cinsinden bulunuz.

ç) Bulduğunuz sonucu, birim kareli zemin üzerinde çizerek kontrol ediniz.

GERİ BİLDİRİM

Bu geri bildirim sayesinde kendi cevabınızı kontrol edebilir, hatalarınızı düzelterek öğrenmenizi pekiştirebilirsiniz.



a) Ağaçların boyları arttıkça gölgelerinin boyları da artmaktadır. Güneşin geliş açısının ölçüsü aynı olduğu için ağaçların boyları ve gölgelerinin boyları arasında sabit bir oran bulunur ve bu oranı $\frac{2}{3}$'tür.

b) Birinci ve ikinci ağaç için oluşan üçgenlerde ağaçlar birim kareli zemin üzerinde olduğu için oluşan üçgenlerin birer açıları dik açı olur. Güneş ışınlarının geliş açısı aynı olduğu için üçgenlerin ikinci açılarının ölçüsü de eşit olur.

Üçgenin iç açıları ölçüleri toplamı da aynı olduğu için üçgenlerin üçüncü açılarının ölçüsü de eşit olacaktır. Bu durumda açıları aynı olan iki üçgen benzer olacaktır.

c) Üçüncü üçgenin açıları da diğer üçgenlerle aynı olacaktır ve bu üçgen de diğer üçgenlerle benzerdir. 1. ve 2. ağaç için ağaçların boylarının gölgelerinin boylarına oranı $\frac{2}{3}$ olduğu için 3. ağacın boyunun gölgesine oranı $\frac{2}{3}$ olmalıdır.

Üçüncü ağacın gölgesinin boyuna x dersek

$\frac{6}{x} = \frac{2}{3}$

$18 = 2x$

$9 = x$ olur.

d) Güneş ışınını devam ettirdiğimizde kareli zeminde ağacın gölgesinin boyunun 9 birim olduğu görülür.

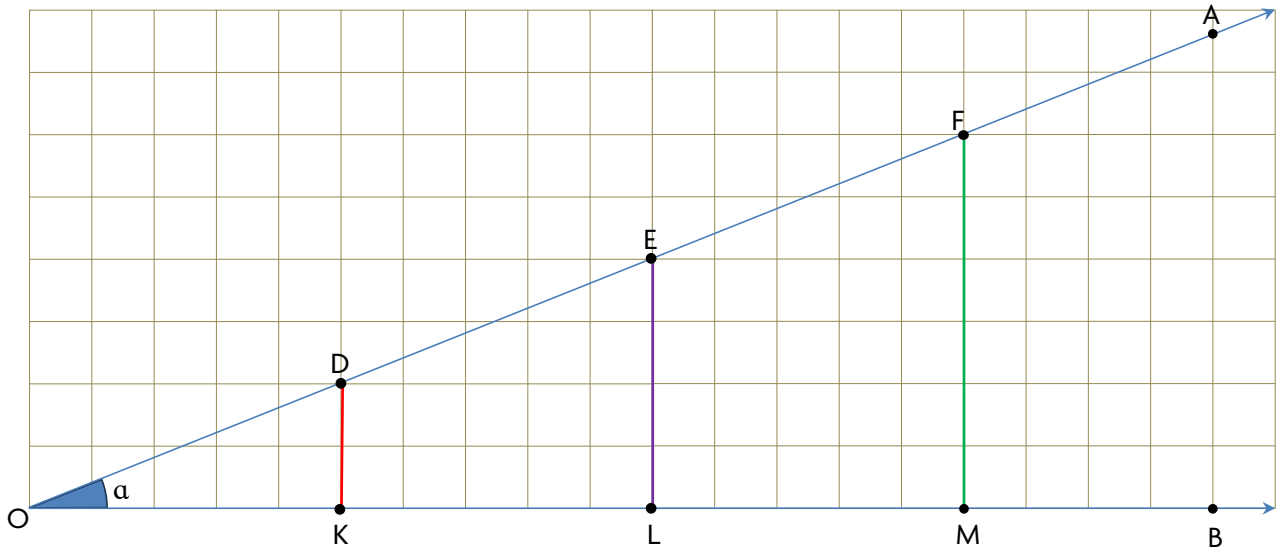
UYGULAYARAK ÖĞRENİYORUM

Amaç: Bu bölümde bilgilerinizi etkinlikler ve uygulamalarla pekiştirmenizi, öğrenmeyi daha kalıcı hâle getirmenizi amaçlıyoruz.

Aşağıdaki etkinliklerde verilen adımları dikkatle uygulayınız. Çalışmanızı güvenli ve düzenli bir şekilde yapınız.

ETKİNLİK 1.

Aşağıda birim kareli zemin üzerinde çizilmiş AOB açısı, [OA nı üzerindeki D, E, F ve [OB nı üzerindeki K, L, M noktaları gösterilmiştir.



a) Aşağıdaki uzunlukları birim cinsinden bulunuz.

|OD| = ... |OE| = ... |OF| = ...

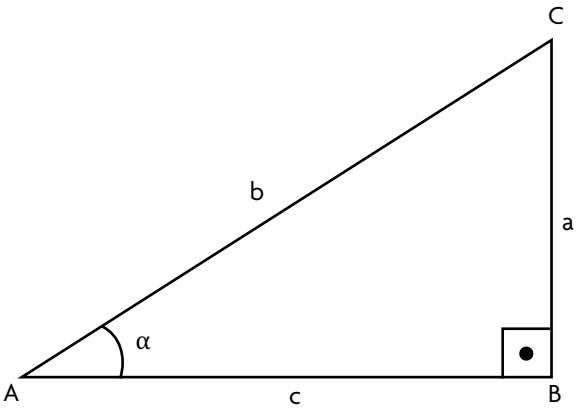
b) Şekildeki benzer üçgenleri gerekçeleriyle yazınız.

c) Aşağıdaki tablodaki oranları bulunuz ve sonuçları değerlendiriniz.

α AÇISINA GÖRE	ODK ÜÇGENİNDE	OEL ÜÇGENİNDE	OFM ÜÇGENİNDE	DEĞERLENDİRMENİZ
Karşı dik kenar uzunluğu / Hipotenüs uzunluğu	$\frac{\lvert DK\rvert}{\lvert OD\rvert}$ = ...	$\frac{\lvert EL\rvert}{\lvert OE\rvert}$ = ...	$\frac{\lvert FM\rvert}{\lvert OF\rvert}$ = ...	
Komşu dik kenar uzunluğu / Hipotenüs uzunluğu	$\frac{\lvert OK\rvert}{\lvert OD\rvert}$ = ...	$\frac{\lvert OL\rvert}{\lvert OE\rvert}$ = ...	$\frac{\lvert OM\rvert}{\lvert OF\rvert}$ = ...	
Karşı dik kenar uzunluğu / Komşu dik kenar uzunluğu	$\frac{\lvert OK\rvert}{\lvert DK\rvert}$ = ...	$\frac{\lvert EL\rvert}{\lvert OL\rvert}$ = ...	$\frac{\lvert FM\rvert}{\lvert OM\rvert}$ = ...	
Komşu dik kenar uzunluğu / Karşı dik kenar uzunluğu	$\frac{\lvert DK\rvert}{\lvert OK\rvert}$ = ...	$\frac{\lvert OL\rvert}{\lvert EL\rvert}$ = ...	$\frac{\lvert OM\rvert}{\lvert FM\rvert}$ = ...	

NOT

Bir dik üçgenin kenar uzunlukları arasındaki oranlardan yararlanılarak tanımlanan ifadelere **trigonometrik oranlar** denir. Bu oranlar, üçgenin bir açısına göre karşı ve komşu kenarların hipotenüse veya birbirine oranı şeklinde ifade edilir.



ABC üçgeninde α açısının trigonometrik değerleri aşağıdaki gibidir.

$$\sin\alpha = \frac{\text{Karşı dik kenar uzunluğu}}{\text{Hipotenüs uzunluğu}} = \frac{a}{b}$$

$$\tan\alpha = \frac{\text{Karşı dik kenar uzunluğu}}{\text{Komşu dik kenar uzunluğu}} = \frac{a}{c}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{Komşu dik kenar uzunluğu}}{\text{Hipotenüs uzunluğu}} = \frac{c}{b}$$

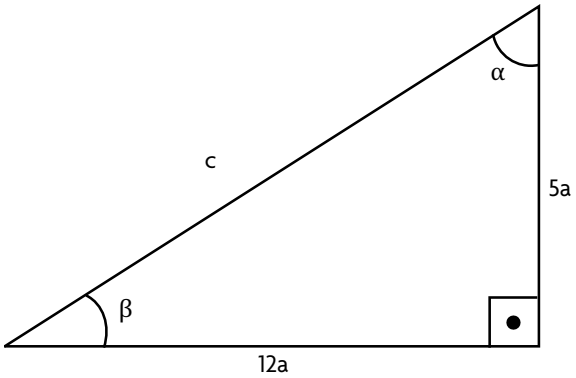
$$\cot\alpha = \frac{\text{Komşu dik kenar uzunluğu}}{\text{Karşı dik kenar uzunluğu}} = \frac{c}{a}$$

ÖRNEK

Bir dik üçgenin dar açılarının ölçüleri α ve β dır.

$\tan\beta = \frac{5}{12}$ olduğuna göre $\sin\alpha + \cos\beta$ ifadesinin değeri kaçtır?

ÇÖZÜM



$c^2 = (5a)^2 + (12a)^2$

$c^2 = 169a^2$

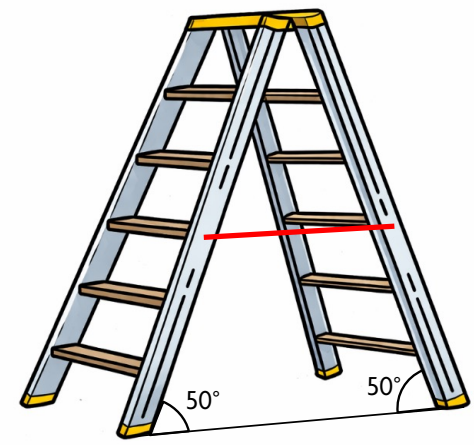
$c = 13a$

$$\sin\alpha = \frac{\text{Karşı dik kenar uzunluğu}}{\text{Hipotenüs uzunluğu}} = \frac{12}{13}$$

$$\cos\beta = \frac{\text{Komşu dik kenar uzunluğu}}{\text{Hipotenüs uzunluğu}} = \frac{12}{13}$$

$$\sin\alpha + \cos\beta = \frac{24}{13}$$

SIRA SİZDE 1.



Yanda her iki ayağı zeminle 50° lik açı yapacak şekilde yerleştirilmiş iş merdiveni görseli verilmiştir. Merdivenin bir kenarının uzunluğu 2 metredir. Merdiven ayaklarının daha fazla açılarak kullanıcının iş güvenliğinin tehlikeye atılmaması için merdiven kenarlarının orta noktaları arasına kırmızı bir ip bağlanarak emniyete alınıyor.

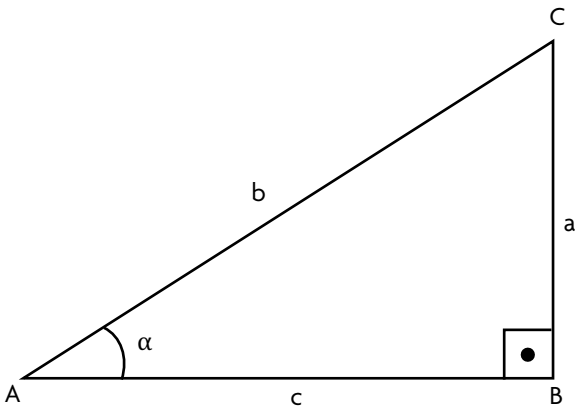
Buna göre kullanılacak ipin uzunluğunun en az kaç metre olması gerektiğini bulunuz. (cos50° ≈ 0,6)

ETKİNLİK 2.

Amaç: Bu bölümde, trigonometrik oranları ve dik üçgende Pisagor teoremini kullanarak her zaman doğruluğu geçerli olan ifadeler elde etmenizi istiyoruz.

Verilen etkinlikleri inceleyiniz. Elde edilen ifadelerin (özdeşliklerin) farklı yöntemlerle elde edilip edilmeyeceğini irdeleyiniz.

Aşağıdaki ABC dik üçgeninde |CB| = a, |AB| = c, |AC| = b ve $m(\widehat{CAB}) = \alpha$ olarak verilmiştir.



a) Aşağıda ABC üçgeninde Pisagor teoreminden yola çıkarak elde edilen trigonometrik özdeşliğin adımları karışık şekilde verilmiştir.

A	$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
B	$a^2 + c^2 = b^2$
C	$\left(\frac{a}{b}\right)^2 + \left(\frac{c}{b}\right)^2 = 1$
D	$\frac{a^2}{b^2} + \frac{c^2}{b^2} = \frac{b^2}{b^2}$

Özdeşliğe ulaşan işlem adımlarını sıralamayınız.

1.ADIM	2.ADIM	3.ADIM	4.ADIM

b) $\tan\alpha \cdot \cot\alpha$ ifadesinin değerini bulunuz.

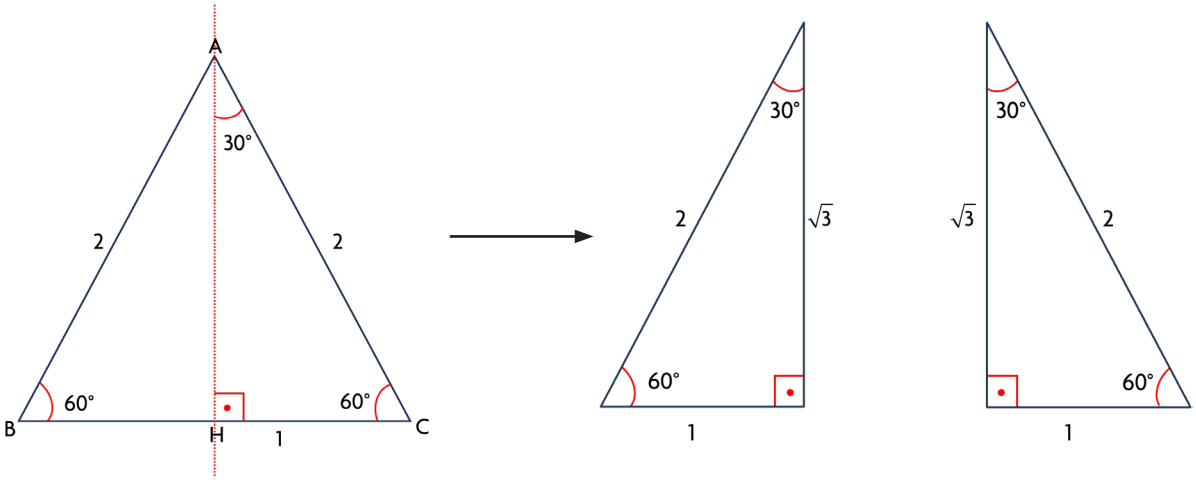
c) ABC üçgeninde α açısına ait oranları kullanarak aşağıdaki ifadelerin hangi trigonometrik değere karşılık geldiğini belirleyiniz.

$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \ldots$

$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \ldots$

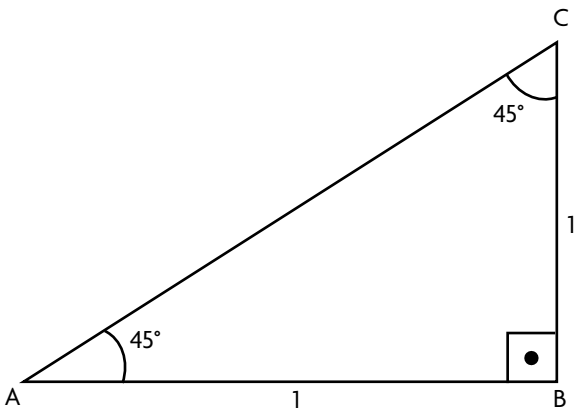
ETKİNLİK 3.

Aşağıda bir kenar uzunluğu 2 birim olan bir eşkenar üçgen ve dik kenar uzunluklarından biri birer birim olan bir dik üçgen verilmiştir.



Pisagor teoreminden

IAHI = $\sqrt{3}$ birim olarak bulunur.



Pisagor teoreminden

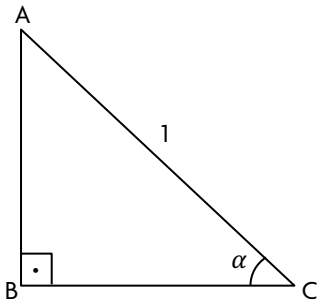
IACI = $\sqrt{2}$ birim olarak bulunur.

Verilen üçgenlere göre aşağıdaki tablolarda boş bırakılan yerleri doldurunuz.

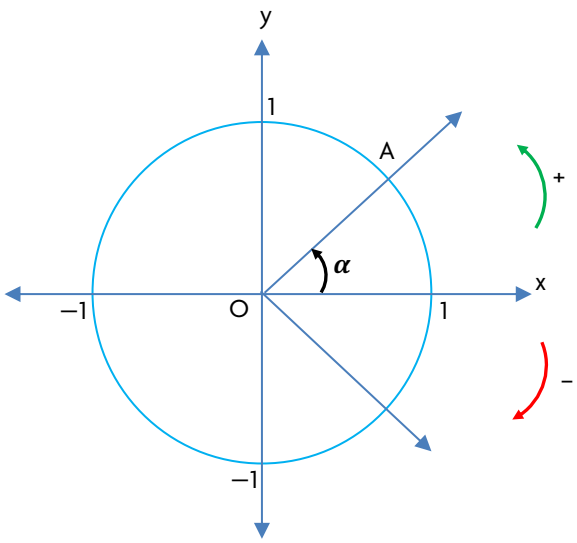
	SİNÜS DEĞERİ	KOSİNÜS DEĞERİ	TANJANT DEĞERİ	COTANJANT DEĞERİ
30°	$\frac{1}{2}$			$\sqrt{3}$
45°		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		
60°			$\sqrt{3}$	

BİRİM ÇEMBER VE TRİGONOMETRİ

Aşağıda hipotenüs uzunluğu 1 birim olan ABC dik üçgeninde $m(\widehat{ACB}) = \alpha$ dir.

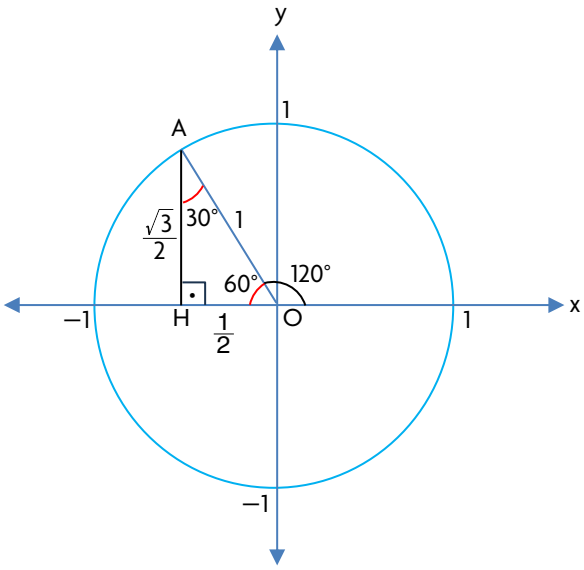


Bu üçgenin dik kenar uzunluklarını α nın trigonometrik değerleri cinsinden yazınız.



- Dik koordinat düzleminde merkezi orijinde bulunan ve yarıçap uzunluğu 1 birim olan çembere **birim çember** denir. OA ışınının **x ekseni** ile **pozitif yönde** yapmış olduğu açının ölçüsü α olduğuna göre çemberi kestiği noktaların koordinatlarını inceleyelim.
- Işın, **saat yönünün tersine** dönerse pozitif yönlü açı,
- Işın, **saat yönünde** dönerse negatif yönlü açı oluşur.

ÖRNEK



AHO dik üçgenine göre A noktasının koordinatları;

$\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

GERİ BİLDİRİM

Bu geri bildirim sayesinde kendi cevabınızı kontrol edebilir, hatalarınızı düzelterek öğrenmenizi pekiştirebilirsiniz.

ETKİNLİK 1.

ÇÖZÜM

a) |OD| = x dersek ODK üçgeninde Pisagor teoremini kullandığımızda

$x^2 = 2^2 + 5^2$

$x^2 = 29$

$x = \sqrt{29}$ birim olur.

|OE| = x dersek OLE üçgeninde Pisagor teoremini kullandığımızda

$x^2 = 4^2 + 10^2$

$x^2 = 116$

$x = 2\sqrt{29}$ birim olur.

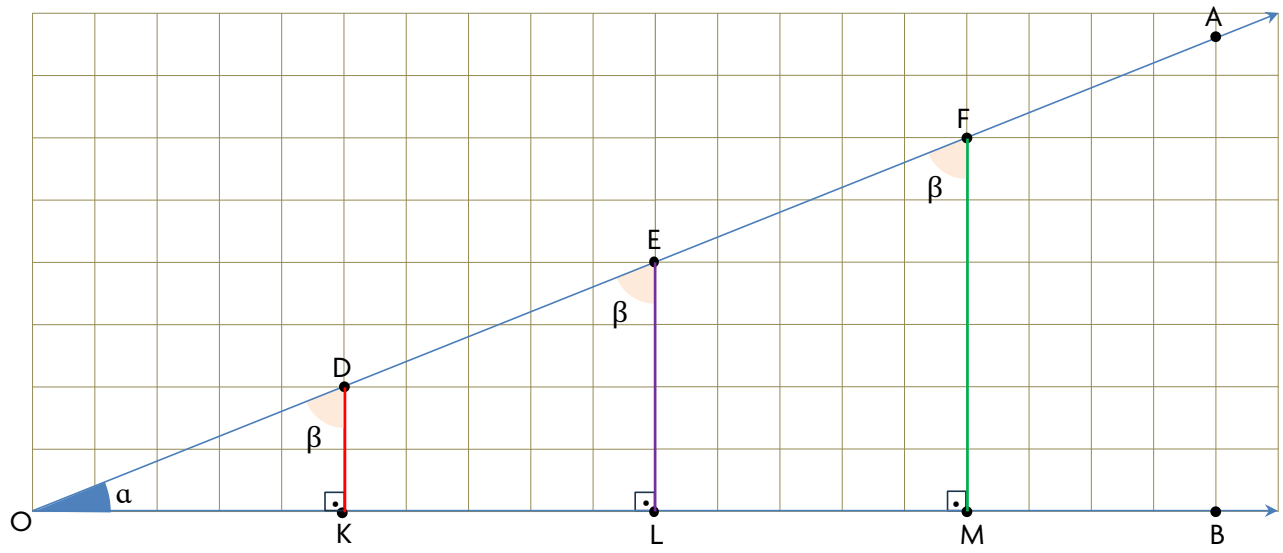
|OF| = x dersek OMF üçgeninde Pisagor teoremini kullandığımızda

$x^2 = 6^2 + 15^2$

$x^2 = 261$

$x = 3\sqrt{29}$ birim olur.

b)



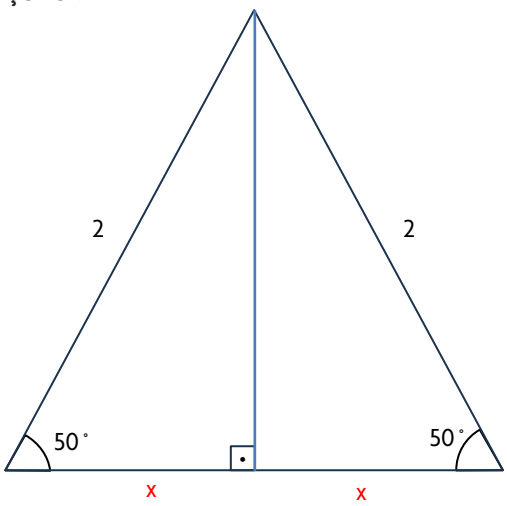
ODF, OLE ve OMF üçgenlerinin açıları aynı olduğu için bu üçgenler benzerdir.

c)

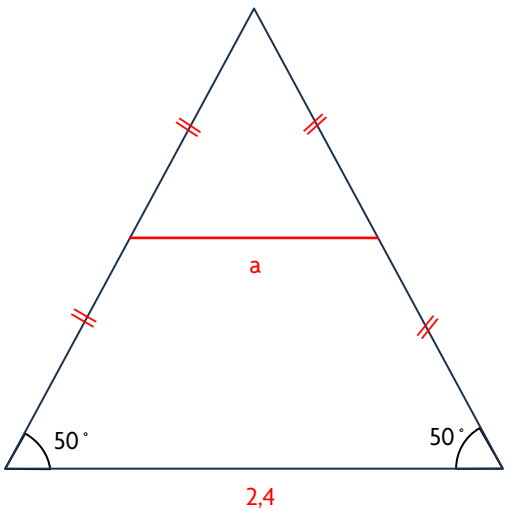
α AÇISINA GÖRE	ODK ÜÇGENİNDE	OEL ÜÇGENİNDE	OFM ÜÇGENİNDE	DEĞERLENDİRMENİZ
$\frac{\text{Karşı dik kenar uzunluğu}}{\text{Hipotenüs uzunluğu}}$	$\frac{\lvert DK\rvert}{\lvert OD\rvert} = \frac{2}{\sqrt{29}}$	$\frac{\lvert EL\rvert}{\lvert OE\rvert} = \frac{2}{\sqrt{29}}$	$\frac{\lvert FM\rvert}{\lvert OF\rvert} = \frac{2}{\sqrt{29}}$	Herhangi bir dik üçgende aynı açı için bu oran değişmez.
$\frac{\text{Komşu dik kenar uzunluğu}}{\text{Hipotenüs uzunluğu}}$	$\frac{\lvert OK\rvert}{\lvert OD\rvert} = \frac{5}{\sqrt{29}}$	$\frac{\lvert OL\rvert}{\lvert OE\rvert} = \frac{5}{\sqrt{29}}$	$\frac{\lvert OM\rvert}{\lvert OF\rvert} = \frac{5}{\sqrt{29}}$	Herhangi bir dik üçgende aynı açı için bu oran değişmez.
$\frac{\text{Karşı dik kenar uzunluğu}}{\text{Komşu dik kenar uzunluğu}}$	$\frac{\lvert DK\rvert}{\lvert OK\rvert} = \frac{2}{5}$	$\frac{\lvert EL\rvert}{\lvert OL\rvert} = \frac{2}{5}$	$\frac{\lvert FM\rvert}{\lvert OM\rvert} = \frac{2}{5}$	Herhangi bir dik üçgende aynı açı için bu oran değişmez.
$\frac{\text{Komşu dik kenar uzunluğu}}{\text{Karşı dik kenar uzunluğu}}$	$\frac{\lvert OK\rvert}{\lvert DK\rvert} = \frac{5}{2}$	$\frac{\lvert OL\rvert}{\lvert EL\rvert} = \frac{5}{2}$	$\frac{\lvert OM\rvert}{\lvert FM\rvert} = \frac{5}{2}$	Herhangi bir dik üçgende aynı açı için bu oran değişmez.

SIRA SİZDE 1.

ÇÖZÜM



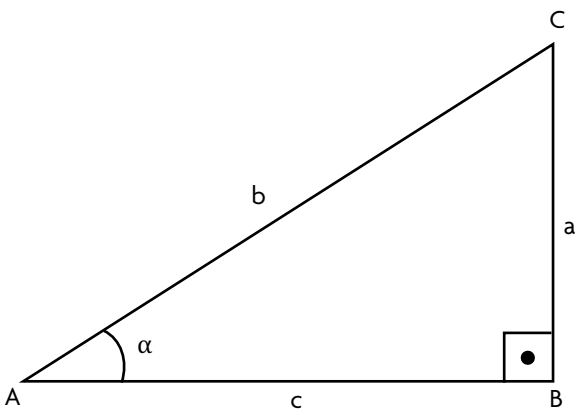
$$\frac{x}{2} = 0,6$$
$$x = 1,2$$
$$2x = 2,4 \text{ birim}$$



$$\frac{a}{2,4} = \frac{1}{2}$$
$$2a = 2,4$$
$$a = 1,2 \text{ birim}$$

ETKİNLİK 2.

ÇÖZÜM



a)

A	$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
B	$a^2 + c^2 = b^2$
C	$\left(\frac{a}{b}\right)^2 + \left(\frac{c}{b}\right)^2 = 1$
D	$\frac{a^2}{b^2} + \frac{c^2}{b^2} = \frac{b^2}{b^2}$

Özdeşliğe ulaşan işlem adımlarını sıralamayınız.

1.ADIM	2.ADIM	3.ADIM	4.ADIM
B	D	C	A

b) $\frac{c}{a} \cdot \frac{a}{c} = 1$

c) $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha$

$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \cot\alpha$

ETKİNLİK 3.

ÇÖZÜM

	SİNÜS DEĞERİ	KOSİNÜS DEĞERİ	TANJANT DEĞERİ	COTANJANT DEĞERİ
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$

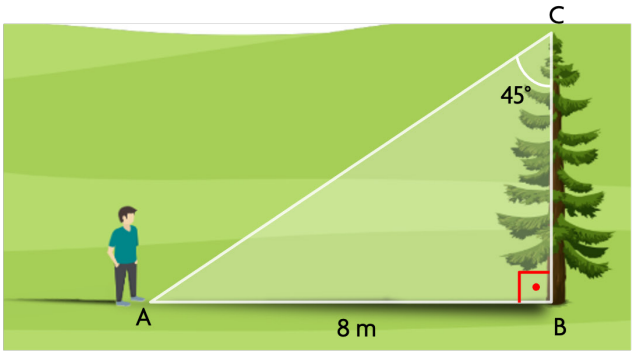
DEĞERLENDİRİYORUM

Amaç: Bu bölümde, öğrendiklerinizi gözden geçirmenizi, kendi öğrenme sürecinizi değerlendirmenizi ve eksiklerinizi fark etmenizi amaçlıyoruz.

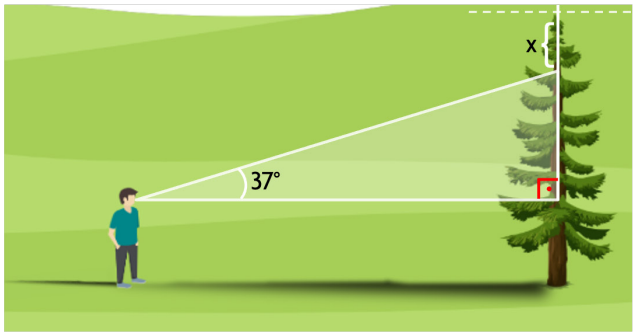
Soruları dikkatle yanıtlayınız. Cevaplarınızı geri bildirimlerle karşılaştırarak eksik gördüğünüz noktaları tekrar ediniz.

SORULAR

1. Şekil 1'deki ağacın gölgesinin boyu, güneş ışınlarının 45° lik açıyla geldiği bir anda 8 metre olarak ölçülmüştür. Şekil 2'de, ağacın gölgesinin bitim noktasında duran bir gözlemcinin göz seviyesi yerden 160 santimetre yukarıda olup gözlemci ağaca yer ile 37° lik açı yapacak şekilde bakmaktadır.



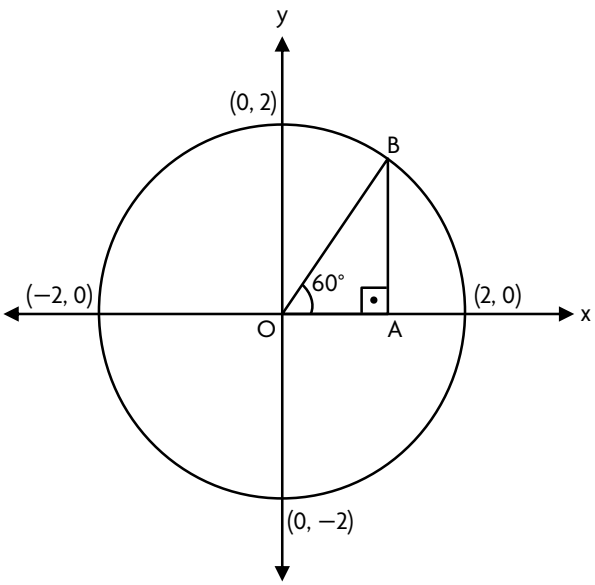
Şekil 1



Şekil 2

Buna göre gözlemcinin bakış doğrultusunun ağaç gövdesini kestiği noktanın, ağacın tepe noktasına uzaklığı x kaç santimetre olduğunu bulunuz. (Cos 37°≅ 0,8**)**

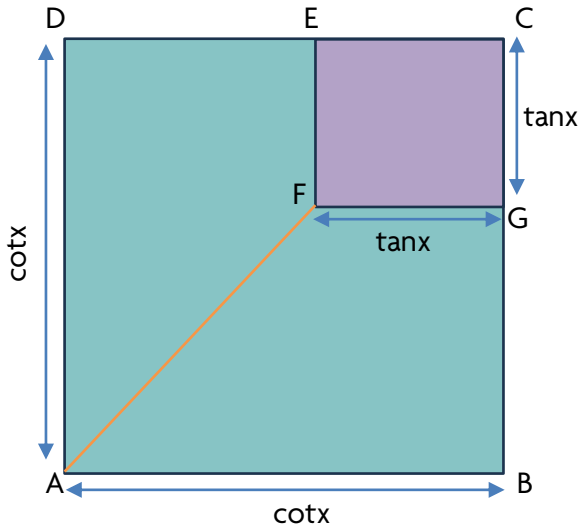
2. Aşağıda yarıçap uzunluğu 2 birim olan bir çember verilmiştir. 60° lik açının bitim kolu, çemberi B noktasında kesmektedir.



Buna göre B noktasının koordinatları toplamını bulunuz.

3. Mor renkli CEFG karesi ve yeşil renkli ABCD karesi, birer köşeleri ve ikişer kenarları çakışacak şekilde görseldeki gibi üst üste yerleştirilmiştir.

x bir dar açının derece cinsinden ölçüsü olmak üzere, mor karenin bir kenarının uzunluğu tanx, yeşil karenin bir kenarının uzunluğu cotx olarak verilmiştir.



IAFI = $8\sqrt{2}$ birim **olduğuna göre**

a) Alan(ABCD) + Alan(CEFG) **toplamının birimkare cinsinden değerini bulunuz.**

b) Görseldeki yeşil alanın kaç birimkare olduğunu bulunuz.

4. Aşağıda bir saatin iki farklı zamanı gösterdiği iki görsel verilmiştir.



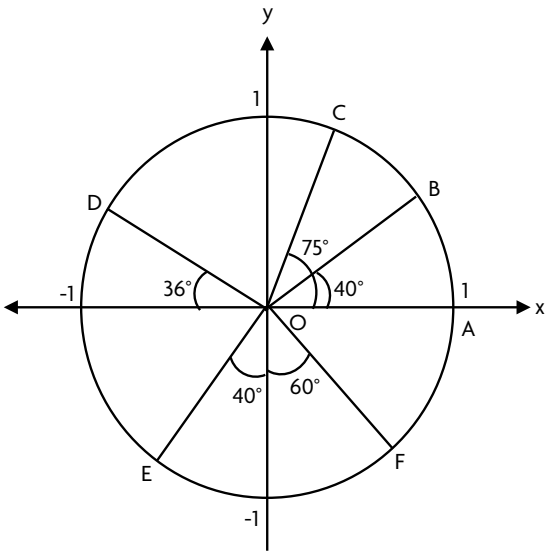
Şekil 1 Şekil 2

Buna göre saatin akrebi, Şekil 1'deki konumdan Şekil 2'deki konuma gelene kadar geçen sürede kaç derecelik dönme hareketi yaptığını bulunuz.

5. Aşağıda verilen önermelerden doğru olanların karşısına D, yanlış olanların karşısına Y yazınız.

No	Önerme	
1	Bir açının sinüsünün alabileceği en büyük değer 1'dir.	
2	Bir açının kosinüsünün alabileceği en küçük değer –1'dir.	
3	$\alpha \neq \beta = 90°$ olmak üzere $\sin^2\alpha + \cos^2\beta = 1$'dir.	
4	Birim çemberde birinci bölgedeki bir açının ölçüsü büyüdükçe kosinüs değeri azalır.	
5	Birim çemberde ikinci bölgedeki bir açının ölçüsü büyüdükçe sinüs değeri artar.	
6	Eş açıların tanjantları ile kotanjantlarının çarpımı 1'e eşittir.	
7	$\tan x = \frac{\cos x}{\sin x}$	
8	$\cot x = \frac{1}{\cos x}$	
9	$\tan x = \frac{1}{\cot x}$	
10	Bir analog saatte yelkovanın saat 4'ten başlayarak en kısa yoldan saat 12'ye doğru yaptığı harekette taradığı açının ölçüsü 120° dir.	

6. Birim çemberde ortak köşesi orijin, ortak kolları [OA olan dört farklı açının her birinin diğer kollarının birim çemberi kestiği noktalar B, C, D, E ve F dir.



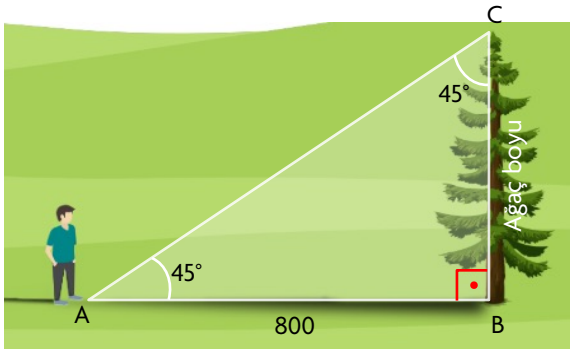
Bu açıların birim çember üzerindeki gösterimlerinden yararlanarak tabloda boş bırakılan yerleri doldurunuz.

Açının Yönü	Açının Diğer Kolunun Birim Çemberi Kestiği Nokta	Açı Ölçüsü (Derece)
Pozitif	A	
Pozitif	B	
	C	– 285°
Negatif	D	
	E	230°
Negatif	F	

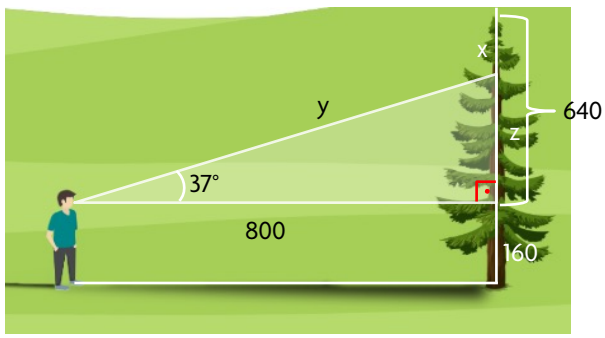
GERİ BİLDİRİM

Bu geri bildirim sayesinde kendi cevabınızı kontrol edebilir, hatalarınızı düzelterek öğrenmenizi pekiştirebilirsiniz.

ÇÖZÜM 1.



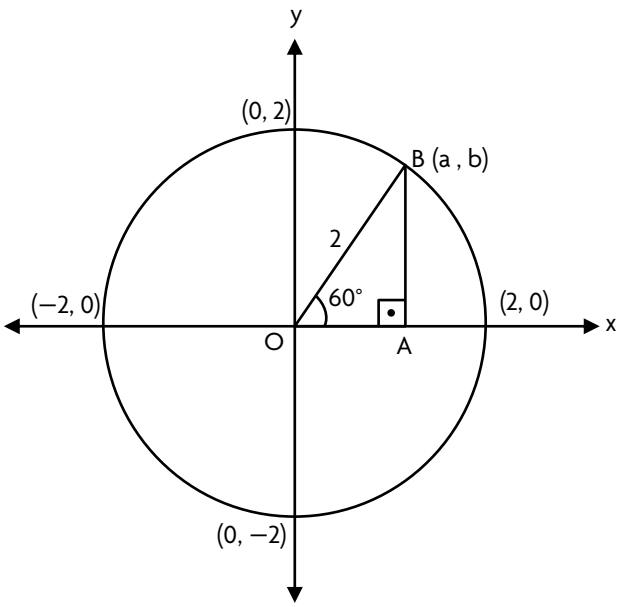
Şekil 1



Şekil 2

$\tan 45° = 1$ $\tan 45° = \frac{\text{(Ağacın Boyu)}}{800}$ Ağacın boyu = 800 cm	$\cos 37° \cong 0,8 = \frac{8}{10}$ $\cos 37° = \frac{800}{y}$ $y = 1000$ cm Pisagor teoreminden $z = 600$ cm olur. $x = 640 - 600 = 40$ cm olarak bulunur.

ÇÖZÜM 2.

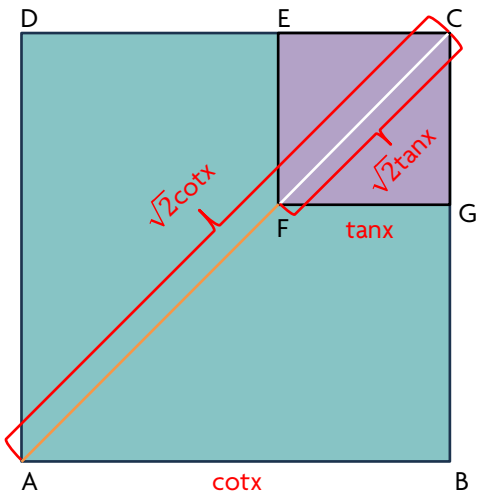


$$\left.\begin{aligned}\cos 60° &= \frac{1}{2}\\ \cos 60° &= \frac{a}{2}\end{aligned}\right\} \frac{a}{2} = \frac{1}{2} \longrightarrow a = 1$$

$$\left.\begin{aligned}\sin 60° &= \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin 60° &= \frac{b}{2}\end{aligned}\right\} \frac{b}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \longrightarrow b = \sqrt{3}$$

$$a + b = 1 + \sqrt{3}$$

ÇÖZÜM 3.



a)

$|AF| = 8\sqrt{2}$ birim

$\sqrt{2}\cot x - \sqrt{2}\tan x = 8\sqrt{2}$

$\cot x - \tan x = 8$

$\cot^2 x - 2 \cdot \tan x \cdot \cot x + \tan x + \tan^2 x = 64$

$\tan x \cdot \cot x = 1$ olduğundan

$\cot^2 x - 2 \cdot \tan^2 x = 64$

$\cot^2 x + \tan^2 x = 66$

Alan(ABCD) + Alan(CEFG) = $\cot^2 x + \tan^2 x$

Alan(ABCD) + Alan(CEFG) = 66 birimkare olur.

b)

$\cot x + \tan x = A$ olsun.

$\cot^2 x + 2 \tan x \cdot \cot x + \tan^2 x = A^2$

$\cot^2 x + 2 + \tan^2 x = A^2$

a seçeneğinde $\cot^2 x + \tan^2 x = 66$ bulunmuştu.

$68 = A^2$ ve

$2\sqrt{17} = A$ olur.

Yeşil Alan = $\cot^2 x - \tan^2 x$

$\cot^2 x - \tan^2 x = (\cot x + \tan x) \cdot (\cot x - \tan x)$

a seçeneğinde $\cot x - \tan x = 8$ bulunmuştu.

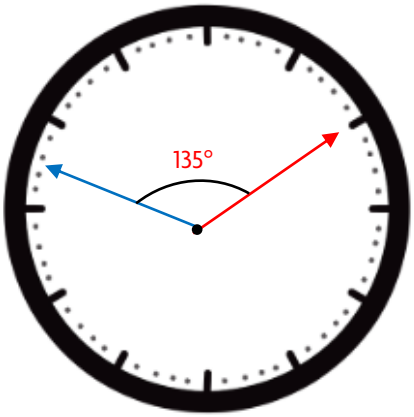
$\cot^2 x - \tan^2 x = 2\sqrt{17} \cdot 8$

$\cot^2 x - \tan^2 x = 16\sqrt{17}$ birimkare olur.

ÇÖZÜM 4.



1 saat dilimi: $\frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$ olduğundan



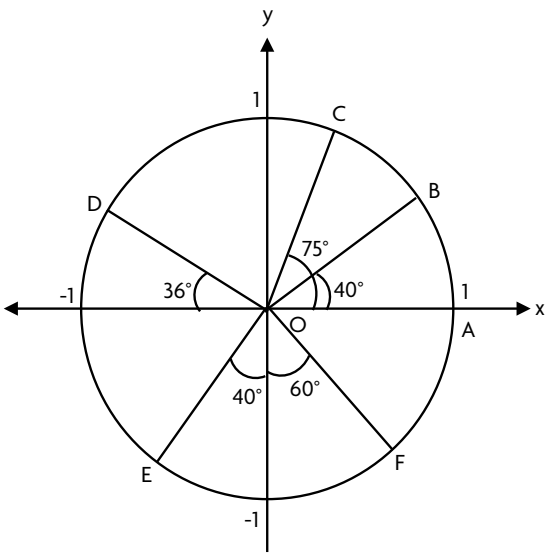
4 buçuk saat dilimi: $4 \cdot 30^\circ + \frac{1}{2} \cdot 30^\circ = 135^\circ$ olur.

ÇÖZÜM 5.

No	Önerme	
1	Bir açının sinüsünün alabileceği en büyük değer 1'dir.	D
2	Bir açının kosinüsünün alabileceği en küçük değer –1'dir.	D
3	$\alpha + \beta = 90^\circ$ olmak üzere $\sin^2\alpha + \cos^2\beta = 1$'dir.	Y
4	Birim çemberde birinci bölgedeki bir açının ölçüsü büyüdükçe kosinüs değeri azalır.	D
5	Birim çemberde ikinci bölgedeki bir açının ölçüsü büyüdükçe sinüs değeri artar.	Y
6	Eş açıların tanjantları ile kotanjantlarının çarpımı 1'e eşittir.	D
7	$\tan x = \frac{\cos x}{\sin x}$	Y
8	$\cot x = \frac{1}{\cos x}$	Y
9	$\tan x = \frac{1}{\cot x}$	D
10	Bir analog saatte yelkovanın saat 4'ten başlayarak en kısa yoldan saat 12'ye doğru yaptığı harekette taradığı açının ölçüsü 120° dir.	D

ÇÖZÜM 6.

Birim çemberde ortak köşesi orijin, ortak kolları [OA olan dört farklı açının her birinin diğer kollarının birim çemberi kestiği noktalar B, C, D, E ve F dir.



Bu açıların birim çember üzerindeki gösterimlerinden yararlanarak tabloda boş bırakılan yerleri doldurunuz.

Açının Yönü	Açının Diğer Kolunun Birim Çemberi Kestiği Nokta	Açı Ölçüsü (Derece)
Pozitif	A	0°
Pozitif	B	40°
Negatif	C	– 285
Negatif	D	– 216°
Pozitif	E	230
Negatif	F	– 30°

ÖĞRENDİKLERİM

Amaç: Bu bölümde, öğrendiklerinizi özetlemenizi, günlük hayatta ve farklı derslerde kullanabileceğiniz bilgileri belirlemenizi amaçlıyoruz.

Verilen bilgileri dikkatle okuyunuz. Konunun temel kavramlarını, önemli noktalarını ve bağlantılarını gözden geçirerek öğrenmenizi pekiştiriniz.

$$\sin\alpha = \frac{\text{Karşı dik kenar uzunluğu}}{\text{Hipotenüs uzunluğu}}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{Komşu dik kenar uzunluğu}}{\text{Hipotenüs uzunluğu}}$$

$$\tan\alpha = \frac{\text{Karşı dik kenar uzunluğu}}{\text{Komşu dik kenar uzunluğu}}$$

$$\cot\alpha = \frac{\text{Komşu dik kenar uzunluğu}}{\text{Karşı dik kenar uzunluğu}}$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$\tan\alpha \cdot \cot\alpha = 1$$

Birim çemberde bir α açısının bitim kolunun birim çember ile kesiştiği noktanın apsisi α **açısının kosinüsü**, ordinatı ise α **açısının sinüsü** dür.

Birim çemberde başlangıç noktası orijin olan bir ışın saat yönünün tersine dönerse **pozitif yönlü açı**, saat yönünde dönerse **negatif yönlü açı** oluşur.

Daha fazlası için karekodu okutunuz.



ÜÇGENİN YARDIMCI ELEMANLARI

BAŞLARKEN

Bu bölümde yer alan etkinlikler, bireysel öğrenme yolculuğunuzda size rehberlik etmek ve öğrenme sürecinizi desteklemek amacıyla hazırlanmıştır. Çalışmalarınızı yürütürken "Hazırlanıyorum", "İlişkilendiriyorum", "Uygulayarak Öğreniyorum", "Değerlendiriyorum", "Yansıtıcı Yazı" ve "Öğrendiklerim" etkinliklerini sırası ile takip etmeniz ve etkinliklerin sonunda yer alan geri bildirimleri inceleyerek bölümleri tamamlamanız beklenmektedir.

Bu çalışma kartında üçgenin yardımcı elemanları ve özellikleri ile ilgili çıkarımlarda bulunup aşağıdaki soruları yanıtlayabileceksiniz.

- Üçgende iç ve dış açıortayların, kenarortayların, kenar orta dikmelerin ve yüksekliklerin özellikleri nelerdir?
- Üçgenin yardımcı elemanlarıyla ilgili önermeleri problemler bağlamında nasıl değerlendirebilirim?

HAZIRLANIYORUM

Amaç: Bu bölümde ön bilgilerinizi hatırlamanızı ve temaya hazırlıklı hâle gelmenizi amaçlıyoruz.

Aşağıda yer alan ifadeler, bu temada tamamlanması hedeflenen öğrenme çıktısını ele almadan önce sahip olmanız gereken bazı temel becerileri içermektedir Lütfen her bir ifadeyi dikkatlice okuyunuz.

- Eğer ifadedeki bilgiye hâkim olduğunuzu düşünüyorsanız kutucuğu işaretleyiniz.
- Eğer konuyu henüz tam olarak bilmediğinizi ya da hatırlamadığınızı düşünüyorsanız kutucuğu boş bırakınız.

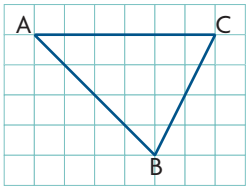
Bu çalışmanın amacı notla değerlendirme yapmak değil amacı temaya ne ölçüde hazır olduğunuzu belirlemektir.

SORULAR	ÖN ÖĞRENME KONTROL LİSTESİ	
1	Kareli kâğıt üzerinde çizim yaparak üçgenin yardımcı elemanlarından kenarortay, açıortay ve yüksekliği belirleyebilirim.	
2	Eşkenar, ikizkenar ve dik üçgen gibi özel üçgenlerde kenarortay, açıortay ve yüksekliğin özelliklerini belirleyebilirim.	

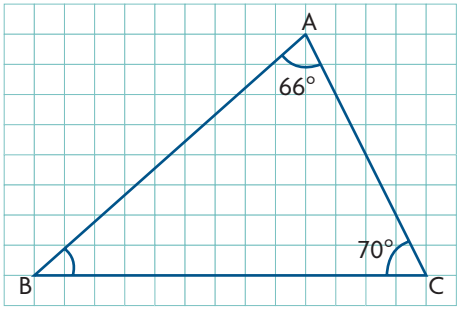
"Ön Öğrenme Kontrol Listesi"ni doldurduktan sonra aşağıda verilen "Kontrol Noktası" sorularını çözünüz ve cevaplarınızı kontrol ediniz.

KONTROL NOKTASI

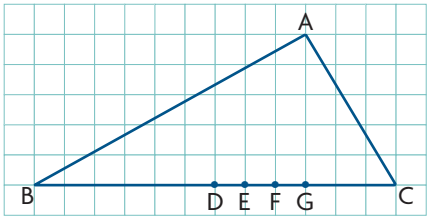
SORU 1. Aşağıda birimkareli kağıt üzerindeki ABC üçgenine ait kenarortayları çiziniz.



SORU 2. Aşağıda birimkareli kağıt üzerindeki ABC üçgeninin açıortaylarını çiziniz.



SORU 3. Aşağıda birimkareli kağıt üzerindeki üçgende A köşesi ile D, E, F ve G noktalarından hangisi birleştirilirse [BC] kenarına ait yükseklik elde edilir?



SORU 4. Aşağıda verilen ifadelerden hangileri doğrudur? İşaretleyiniz.

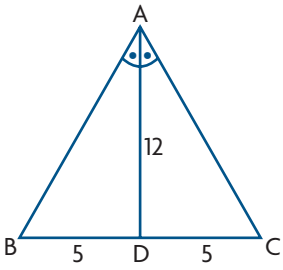
I. Dar açılı üçgende yükseklikler her zaman üçgenin iç bölgesinde kesişir.

II. Eşkenar üçgende açıortay ve yükseklik her zaman aynı doğru parçasıdır.

III. İkizkenar üçgende tepe açısına ait kenarortay ve yükseklik aynı doğru parçasıdır.

IV. Bir üçgende iç açıortaylar, her zaman üçgenin iç bölgesinde kesişmezler.

SORU 5. Aşağıda verilen ABC üçgeninde [AD], A açısına ait açıortaydır.



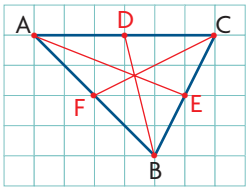
IADI = 12 cm **ve** IBDI = IDCI = 5 cm **olduğuna göre ABC üçgeninin çevresinin uzunluğu kaç santimetredir?**

GERİ BİLDİRİM

Bu geri bildirim sayesinde kendi cevabınızı kontrol edebilir, hatalarınızı düzelterek öğrenmenizi pekiştirebilirsiniz.

KONTROL NOKTASI

ÇÖZÜM 1.

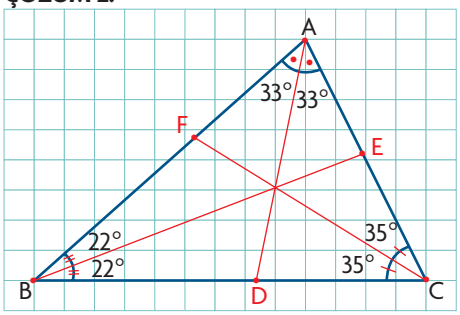


[AC] kenarının orta noktası D olduğundan [BD] kenarortaydır.

[BC] kenarının orta noktası E olduğundan [AE] kenarortaydır.

[AB] kenarının orta noktası F olduğundan [CF] kenarortaydır.

ÇÖZÜM 2.

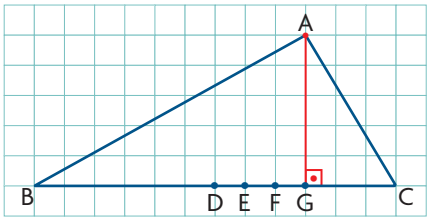


Önce B açısının ölçüsünü bulalım. B açısının ölçüsü x ise ABC üçgeninin iç açıları toplamından $x + 70° + 66° = 180° \Rightarrow x = 44°$ bulunur.

- 66° nin yarısı 33° olduğundan [AD] açıortaydır.
- 70° nin yarısı 35° olduğundan [BE] açıortaydır.
- 44° nin yarısı 22° olduğundan [CF] açıortaydır.

Üçgenin açıortayları tek bir noktada kesişir.

ÇÖZÜM 3.



[AG] $\perp$ [BC] olduğundan [AG], ABC üçgeninin [BC] kenarına ait yüksekliğidir.

ÇÖZÜM 4.

I. Dar açılı üçgende yükseklikler her zaman üçgenin iç bölgesinde kesişir. **(Doğru)**

Dar açılı üçgende yükseklikler her zaman üçgenin iç bölgesinde kesişir.

II. Eşkenar üçgende açıortay ve yükseklik her zaman aynı doğru parçasıdır. **(Doğru)**

Eşkenar üçgende kenarortay, açıortay ve yükseklik her zaman aynı doğru parçasıdır.

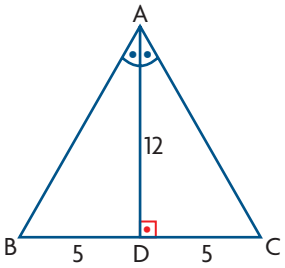
III. İkizkenar üçgende tepe açısına ait kenarortay ve yükseklik aynı doğru parçasıdır. **(Doğru)**

İkizkenar üçgende tepe açısına ait açıortay, yükseklik ve kenarortay aynı doğru parçasıdır.

IV. Bir üçgende iç açıortaylar her zaman üçgenin iç bölgesinde kesişmezler.**(Yanlış)**

Bir üçgende iç açıortaylar her zaman üçgenin iç bölgesinde kesişirler.

ÇÖZÜM 5.



[AD] hem açıortay hem de kenarortaydır. Demek ki ABC üçgeni ikizkenar üçgendir. Çünkü ikizkenar üçgende tepe açısına ait açıortay, yükseklik ve kenarortay aynı doğru parçasıdır. O zaman [AD] aynı zamanda yüksekliktir ve ADB açısının ölçüsü 90° dir.

ADC veya ABD dik üçgeninde Pisagor teoremini yazalım.

$|AB|^2 = 5^2 + 12^2 \Rightarrow |AB|^2 = 169 \Rightarrow |AB| = 13\,cm$'dir.

$|AB| = |AC| = 13\,cm \Rightarrow Ç(ABC) = 13 + 13 + 10 = 36$ cm bulunur.

KONTROL LİSTEMİ DEĞERLENDİRİYORUM

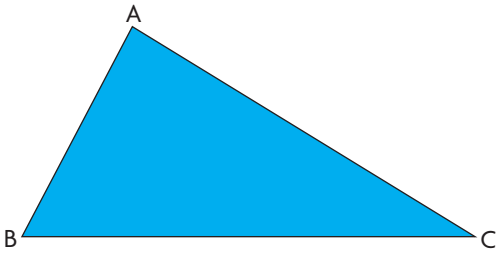
"Hazırlanıyorum" kısmında yaptığınız "Ön Öğrenme Kontrol Listesi"nde verdiğiniz yanıtlar ile "Kontrol Noktası"nda elde ettiğiniz başarı durumu arasında bir fark var mı?

Bu fark, kendinizi değerlendirme sırasında ne kadar objektif olduğunuzu ve değerlendirme sonuçlarınızın "Kontrol Noktası"ndaki başarınızla örtüşüp örtüşmediğini anlamak için önemlidir.

İLİŞKİLENDİRİYORUM

Amaç: Bu bölümde yeni öğreneceğiniz konuyu; zihninizde var olan bilgileriniz, yaşantılarınız ve diğer derslerde öğrendiklerinizle ilişkilendirmenizi bekliyoruz.

Verilen örneği okuyunuz. Ardından soruları yanıtlayınız.

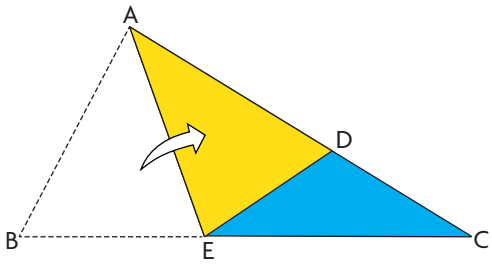


Yandaki şekilde önyüzü mavi, arka yüzü sarı olan ABC üçgeni biçimindeki bir kâğıt parçası görseli verilmiştir.

Üçgenin yardımcı elemanlarını (açıortay, kenarortay, yükseklik, kenar orta dikme) oluşturmak için bu kâğıda ait olarak verilen katlama işlemlerini uygulayınız.

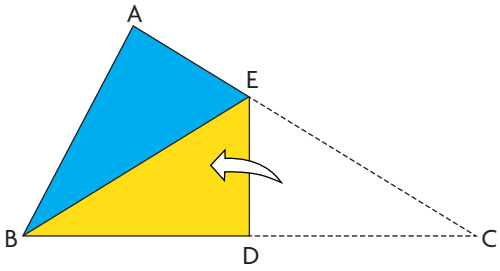
1. ABC üçgeninin AB kenarı, AC kenarı üstüne katlandığında oluşan şekil yanda verilmiştir.

Kâğıt açıldıktan sonra ABC üçgeninin içinde yapılan katlama sonucunda oluşan [AE] hakkında ne söylenebilir?



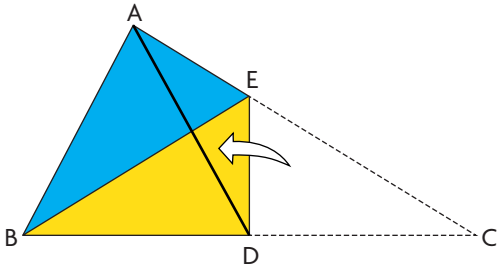
2. ABC üçgeninin C köşesi, B köşesi ile çakışacak biçimde katlandığında oluşan şekil yanda verilmiştir.

Kâğıt açıldıktan sonra ABC üçgeninin içinde yapılan katlama sonucunda oluşan [DE] hakkında ne söylenebilir?



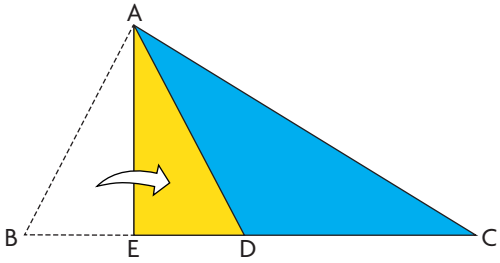
3. ABC üçgeninin C köşesi, B köşesi ile çakışacak biçimde katlandığında oluşan şekil yanda verilmiştir.

Kâğıt açıldıktan sonra ABC üçgeninin içinde yapılan katlama sonucunda oluşan kat izinin [BC] nı kestiği nokta ile A köşesini birleştiren [AD] hakkında ne söylenebilir?



4. ABC üçgeninin B köşesi, BC kenarı üzerine gelecek biçimde A köşesi hizasına kadar olan kısmı katlandığında oluşan şekil yanda verilmiştir.

Kâğıt açıldıktan sonra ABC üçgeninin içinde yapılan katlama sonucunda oluşan [AE] hakkında ne söylenebilir?



GERİ BİLDİRİM

Bu geri bildirim sayesinde kendi cevabınızı kontrol edebilir, hatalarınızı düzelterek öğrenmenizi pekiştirebilirsiniz.

ÇÖZÜM

1. ABC üçgeninin AB kenarı, AC kenarı üstüne katlanıp açıldıktan sonra ABC üçgeninin içinde yapılan katlama sonucunda oluşan [AE], A açısına ait açıortaydır.

2. ABC üçgeninin C köşesi, B köşesi ile çakışacak biçimde katlanıp açıldıktan sonra ABC üçgeninin içinde yapılan katlama sonucunda oluşan [DE], BC kenarına ait kenar orta dikmedir.

3. ABC üçgeninin C köşesi, B köşesi ile çakışacak biçimde katlanıp açıldıktan sonra ABC üçgeninin içinde yapılan katlama sonucunda oluşan kat izinin [BC] nı kestiği nokta ile A köşesini birleştiren [AD], BC kenarına ait kenarortaydır.

4. ABC üçgeninin B köşesi, BC kenarı üzerine gelecek biçimde A köşesi hizasına kadar olan kısmı katlanıp açıldıktan sonra ABC üçgeninin içinde yapılan katlama sonucunda oluşan [AE], BC kenarına ait yüksekliktir.

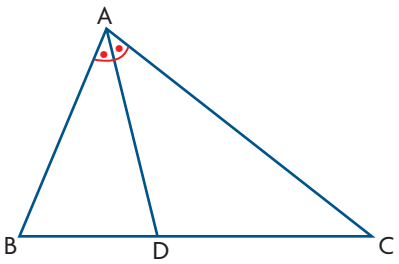
UYGULAYARAK ÖĞRENİYORUM

Amaç: Bu bölümde bilgilerinizi etkinlikler ve uygulamalarla pekiştirmenizi, öğrenmeyi daha kalıcı hâle getirmenizi amaçlıyoruz.

Adım adım verilen etkinlik basamaklarını uygulayın. Problem çözme ya da etkinlik yönergelerine dikkat edin. Çalışmanızı düzenli bir şekilde yapın.

ÜÇGENİN İÇ AÇIORTAYI VE ÖZELLİKLERİ

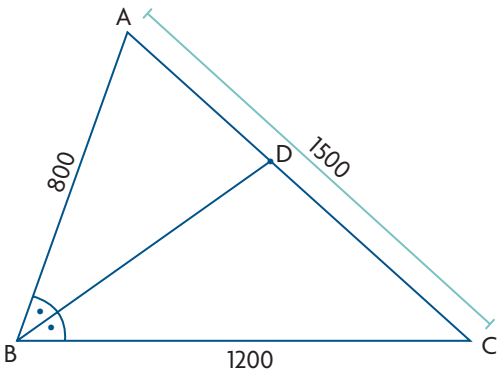
Aşağıda ABC üçgeni ve A açısının iç açıortayı olan [AD] verilmiştir. Bu çizimden yararlanarak üçgenin bir iç açısına ait açıortayın kestiği kenar üzerinde ayırdığı parçaların uzunluklarının oranı ile açıyı oluşturan kenarların uzunluklarının oranı arasındaki ilişkiyi inceleyelim.



$\lvert AB\rvert$	$\lvert AC\rvert$	$\lvert DC\rvert$	$\lvert BD\rvert$	$\lvert BC\rvert$	$\frac{\lvert AB\rvert}{\lvert AC\rvert}$	$\frac{\lvert BD\rvert}{\lvert DC\rvert}$
9	12	8	6	14	$\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$	$\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$
10	18	9	5	14	$\frac{10}{18}=\frac{5}{9}$	$\frac{5}{9}$
12	15	10	8	18	$\frac{12}{15}=\frac{4}{5}$	$\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$

GENELLEME: $\frac{|AB|}{|AC|}=\frac{|BD|}{|DC|}$

ÖRNEK



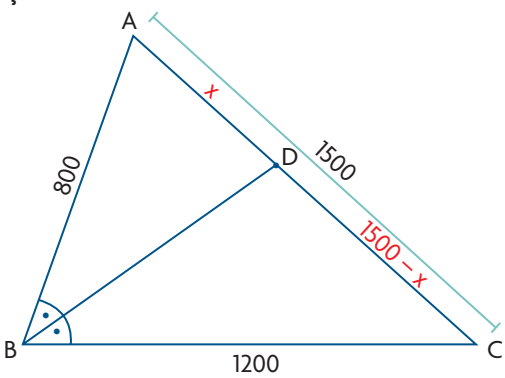
Bir şehirde yeni bir park yapılmaktadır. Üçgen şeklindeki parkın köşeleri A, B ve C noktalarıdır.

Belediye, parkın köşelerinden biri olan B noktasına bir çeşme yerleştirmek istemektedir. Çeşmeden itibaren oluşturulacak bir yürüyüş yolu, B açısını tam ortalayacak şekilde parkın kenarı olan [AC] na doğrusal bir şekilde uzanacaktır.

Yolun [AC] na değdiği nokta D ve parkın kenar uzunlukları $|AB| = 800$ m, $|AC| = 1500$ m ve $|BC| = 1200$ metredir.

Buna göre D noktasının A ve C köşelerine olan uzaklıklarını bulunuz.

ÇÖZÜM



ABC üçgeninin B açısına ait açıortayın kestiği kenar üzerinde ayırdığı parçaların uzunluklarının oranı ile B açısını oluşturan kenarların uzunluklarının oranı arasındaki ilişki

$$\frac{|BA|}{|BC|}=\frac{|DA|}{|DC|}$$

şeklindedir. $|DA| = x$ dersek $|DC| = 1500 - x$ olur. Buradan

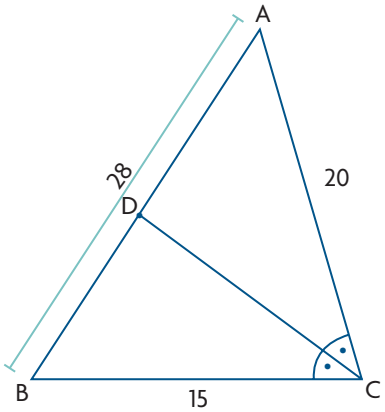
$$\frac{|BA|}{|BC|}=\frac{|DA|}{|DC|}\Rightarrow\frac{800}{1200}=\frac{x}{1500-x}$$

eşitliğini yazabiliriz. Sol tarafı 400 ile sadeleştirip içler dışlar çarpımı yaparsak $3000 - 2x = 3x \Rightarrow 5x = 3000 \Rightarrow x = 600$ m bulunur.

D noktasının A köşesine uzaklığı $|DA| = 600$ m ve D noktasının B köşesine uzaklığı $|DB| = 1500 - 600 = 900$ m olur.

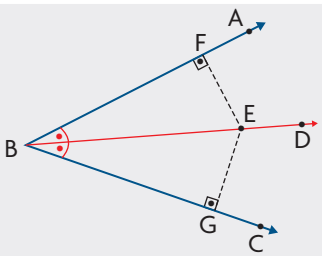
SIRA SİZDE 1.

Yaban hayat gözlemcileri için bir doğa parkının A, B ve C noktalarını köşe kabul eden aşağıda verilen üçgen şeklinde bir koruma bölgesi belirlenmiştir. |AB| = 28 km, |AC| = 20 km ve |BC| = 15 km'dir. Gözlemciler, bu bölgeyi en verimli şekilde kullanmak ve hayvanların su kaynaklarına erişimini engellememek için yeni bir gözlem kulesi inşa etmeye karar verirler. Gözlem kulesi, bölgenin C köşesindeki görüş açısını (C açısı) tam ortadan ikiye bölen [CD] nın AB kenarını kestiği D noktasında kurulacaktır.

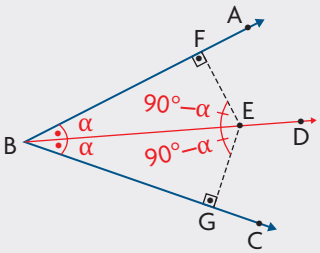


Buna göre D noktasının B ve C köşelerine olan uzaklıklarını bulunuz.

Yanda verilen ABC açısında [BD açıortayının üzerindeki E noktasından açıortayın kollarına [EF] ve [EG] dikmeleri çizilmiştir. E noktasından açının kollarına indirilen dikmeler arasındaki ilişkiyi inceleyelim.



$m(\widehat{BFE}) = m(\widehat{EGB}) = 90°$
$m(\widehat{FBE}) = m(\widehat{GBE}) = \alpha°$
$\Rightarrow m(\widehat{FEB}) = m(\widehat{GEB}) = 90° - \alpha$



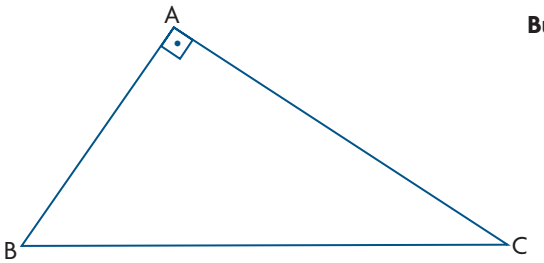
[BE ortak olduğundan Açı-Kenar-Açı eşlik teoreminden dolayı BEF üçgeni ile BGE üçgeni eştir.

Dolayısıyla IEFI = IEGI ve IBFI = IBGI olur.

GENELLEME: Bir açının açıortayı üzerindeki herhangi bir nokta, açının kollarına eşit uzaklıktadır.

ÖRNEK

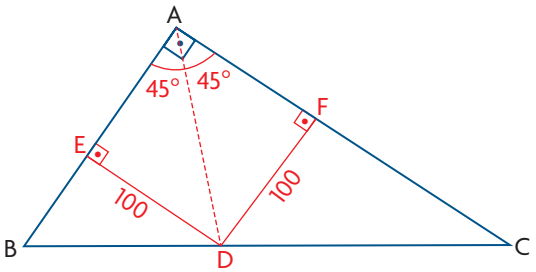
Şekilde verilen ABC dik üçgeni biçimindeki metal levha, bir direğe iki farklı yerden monte edilecektir. Montajlama yerlerinden biri A köşesi, diğeri de BC kenarı üzerinde AB ve AC kenarlarına 100 cm uzaklıkta olan noktadır.



Buna göre montajlama yapılan noktalar arasındaki uzaklığı bulunuz.

ÇÖZÜM

Montajlama işlemi için BC kenarı üzerinde seçilen nokta AB ve AC kenarları eşit uzaklıkta olduğundan A açısına ait açıortay üzerindedir. Bu nokta D olsun.



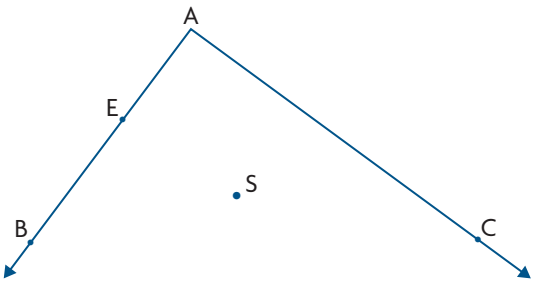
$m(\widehat{BAD}) = m(\widehat{DAC}) = 45^\circ$, DAE ve DFA üçgenlerinin iç açılarının ölçüleri toplamından $m(\widehat{EDA}) = m(\widehat{FDA}) = 45^\circ$ olur.

DAE ve DFA ikizkenar dik üçgendir.

$|DE| = |EA| = 100$ cm $\Rightarrow |AD| = 100\sqrt{2}$ cm olur.

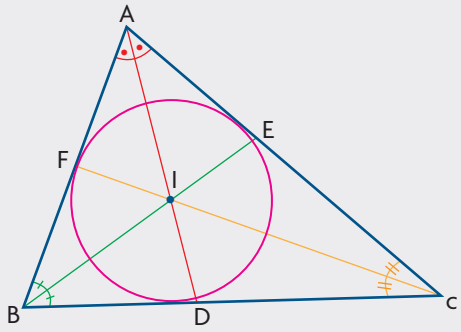
SIRA SİZDE 2.

Aşağıdaki şekilde bir üretim tesisinde, A noktasında kesişen [AB ve [AC iki boru hattı verilmiştir. Tesis yönetimi, her iki hattı da izlemek için BAC açısının açıortayı üzerinde bulunan S noktasına bir güvenlik sensörü yerleştirmeyi planlamaktadır. S noktasının A köşesine uzaklığı 17 metre, [AB boru hattına en yakın olduğu nokta da E noktasıdır.



A ile E noktaları arasındaki uzaklık 15 metre olduğuna göre S noktasının [AC boru hattına en kısa uzaklığı kaç metredir?

NOT

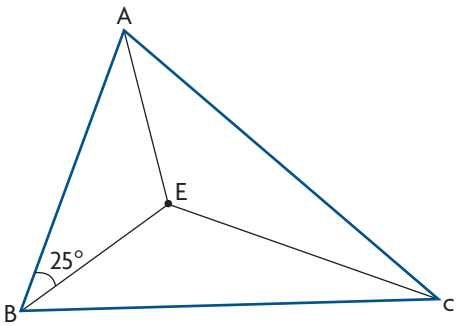


- Bir üçgenin iç açıortayları tek noktada kesişir.
- Bir üçgenin içinden üçgenin tüm kenarlarına teğet olan çembere iç teğet çemberi denir.
- Bir üçgenin iç açıortaylarının kesiştiği nokta, üçgenin iç teğet çemberinin merkezidir.
- İç teğet çemberinin merkezi üçgenin kenarlarına eşit uzaklıktadır.
- I noktası ABC üçgeninin iç teğet çemberinin merkezidir.

  Dolayısıyla I noktası AB, AC ve BC kenarlarına eşit uzaklıktadır.

ÖRNEK

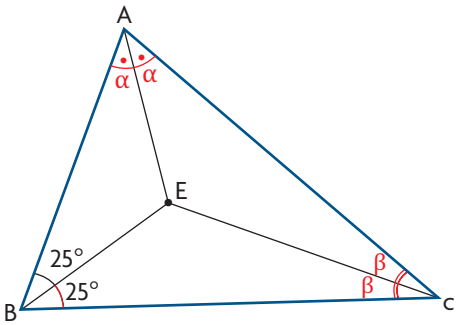
Şekilde ABC üçgeni biçimindeki sahne gösterilmiştir. Sahnenin üç kenarına eşit uzaklıkta bulunan E noktası, sahnenin köşeleri ile şekildeki gibi birleştirilmiştir.



$m(\widehat{ABE}) = 25^\circ$ **olduğuna göre** $m(\widehat{AEC})$ **kaç derecedir?**

ÇÖZÜM

E noktası, sahnenin üç kenarına eşit uzaklıkta ise ABC üçgeninin iç teğet çemberinin merkezidir ve iç açıortayların kesim noktasıdır.



$m(\widehat{ABE}) = m(\widehat{EBC}) = 25^\circ$, $m(\widehat{BAE}) = m(\widehat{EAC}) = \alpha$ ve $m(\widehat{ACE}) = m(\widehat{ECB}) = \beta$ ise

ABC üçgeninin iç açılarının ölçüleri toplamını yazalım.

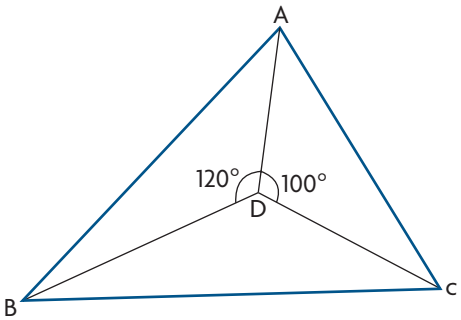
$50^\circ + 2\alpha + 2\beta = 180^\circ \Rightarrow 2\alpha + 2\beta = 130^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = 65^\circ$ buluruz.

AEC üçgeninin iç açılarının ölçüleri toplamını yazalım.

$m(\widehat{AEC}) + \alpha + \beta = 180^\circ \Rightarrow m(\widehat{AEC}) + 65^\circ = 180^\circ \Rightarrow m(\widehat{AEC}) = 115^\circ$ buluruz.

SIRA SİZDE 3.

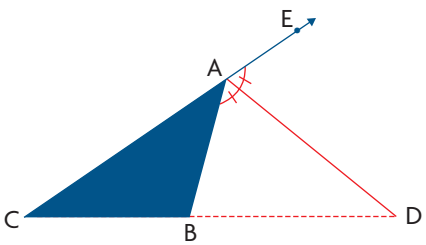
Bir köyde üç yolun birleşmesiyle aşağıda verilen ABC üçgeni şeklinde boş bir alan oluşmuştur. Köylüler bu alanı su deposu yapmak için kullanmak ister. Ulaşım ve adil bir kullanım için su deposunun, üç yola da eşit uzaklıkta olan D noktasına yapılması kararlaştırılmıştır.



$m(\widehat{ADB}) = 120^\circ$, $m(\widehat{ADC}) = 100^\circ$ **olduğuna göre** $m(\widehat{BAC})$ **kaç derecedir?**

ÜÇGENİN DIŞ AÇIORTAYI VE ÖZELLİKLERİ

Aşağıda verilen ACB üçgeninde BAE dış açısına ait [AD] dış açıortayı çizilmiştir. Bu çizimden ve tabloda verilen |AB|, |AC|, |BC| ve |BD| 'dan yararlanarak üçgenin bir dış açısına ait açıortayın uzantısını kestiği kenarda oluşturduğu parçaların oranı ile üçgenin diğer iki kenarı arasındaki ilişkiyi inceleyelim.

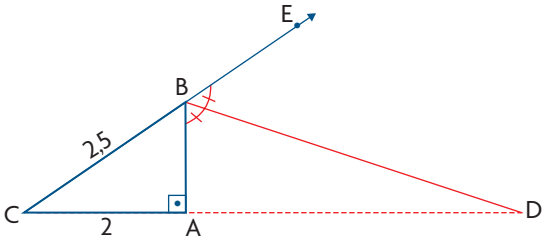


$\lvert AB\rvert$	$\lvert AC\rvert$	$\lvert BC\rvert$	$\lvert BD\rvert$	$\lvert CD\rvert$	$\frac{\lvert AB\rvert}{\lvert AC\rvert}$	$\frac{\lvert BD\rvert}{\lvert CD\rvert}$
4	6	5	10	15	$\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$	$\frac{10}{15}=\frac{2}{3}$
6	8	6	18	24	$\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$	$\frac{18}{24}=\frac{3}{4}$
7	10	6	14	20	$\frac{7}{10}$	$\frac{14}{20}=\frac{7}{10}$

GENELLEME: $\frac{\lvert AB\rvert}{\lvert AC\rvert}=\frac{\lvert BD\rvert}{\lvert CD\rvert}$

ÖRNEK

Bir mühendislik firması, şekildeki gibi dağlık bir bölgede bulunan A, B ve C tepeleri arasına doğrusal bir şekilde teleferik hatları kurmayı planlamaktadır. A ve B tepeleri arasındaki teleferik hattı ile A ve C tepeleri arasındaki teleferik hattı birbirine diktir. Mühendisler, B tepesindeki açının dış açıortayını temsil eden yeni bir destek hattı [BD] eklemeye karar verirler. Bu D noktasının belirlenmesi, hattın dengesi için hayati önem taşımaktadır.



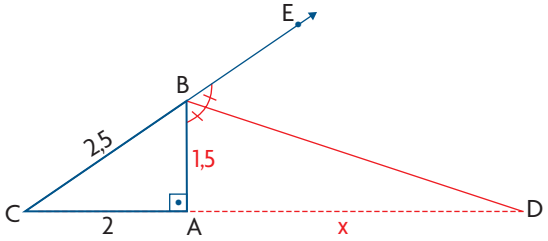
A ile C tepeleri arasındaki uzaklık 2 kilometre, B ile C tepeleri arasındaki uzaklık 2,5 kilometre olduğuna göre A tepesi ile D destek noktası arasındaki uzaklık kaç kilometredir?

ÇÖZÜM

BCA dik üçgen olduğundan pisagor teoremi ile |AB| nu bulalım.

$$|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 \Rightarrow (2,5)^2 = |AB|^2 + 2^2$$
$$6,25 = |AB|^2 + 4$$
$$2,25 = |AB|^2 \Rightarrow |AB| = 1,5$$

(|AB| nu 3-4-5 özel üçgeni ile de bulabilirdik.)

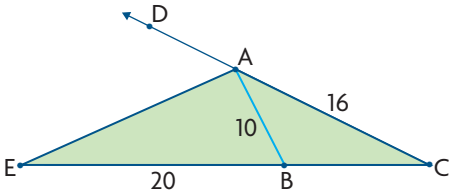


B açısının dış açıortayının uzantısının kestiği kenarda, oluşturduğu parçaların oranı ile üçgenin diğer iki kenarı arasındaki ilişkiyi yazalım. |AD| = x olsun.

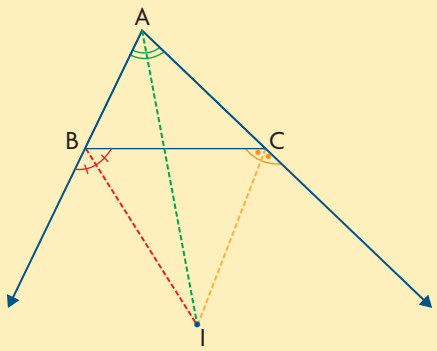
$$\frac{|BA|}{|BC|} = \frac{|AD|}{|CD|} \Rightarrow \frac{1,5}{2,5} = \frac{x}{x+2} \Rightarrow \frac{3}{5} = \frac{x}{x+2} \Rightarrow 5x = 3x + 6 \Rightarrow x = 3 \text{ kilometre buluruz.}$$

SIRA SİZDE 4.

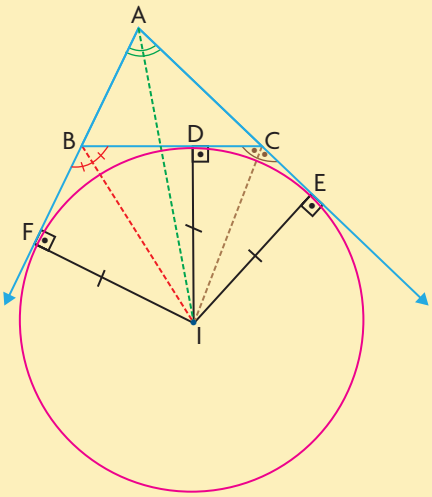
Şekilde [CD yoluna bitişik olan AEC üçgeni biçiminde bir bahçe verilmiştir. E noktasından 20 metre uzaklıktaki B noktası ile A noktası doğrusal bir hatla birleştirilerek bahçe iki parçaya ayrılacaktır. A köşesinin B ve C ye uzaklığı sırasıyla 10 metre ve 16 metredir.



E noktasının [AD ve [AB] na eşit uzaklıkta olduğu bilindiğine göre ABC üçgeni biçimindeki bahçenin çevresinin uzunluğu kaç metredir?

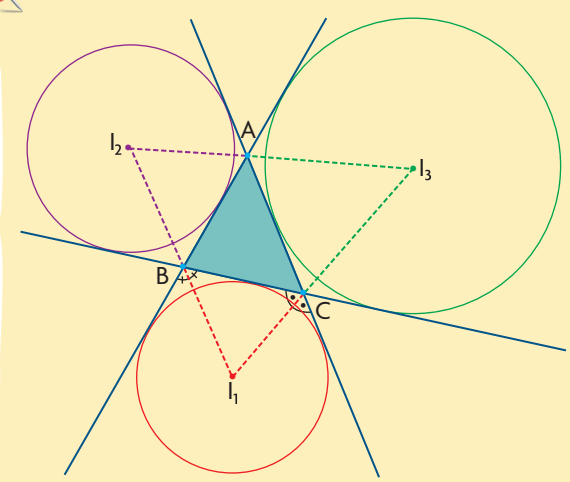


- Bir üçgende iki dış açıortay ile bu dış açılara komşu olmayan iç açının açıortayı tek noktada kesişir.
- İki dış açıortayın kesim noktasına üçgenin dış teğet çemberinin merkezi denir.
- I noktası, ABC üçgeninin dış teğet çemberinin merkezidir.



- ABC üçgeninin dış teğet çemberinin merkezi I noktası; [BC], [AE] ve [AF]'na eşit uzaklıktadır.

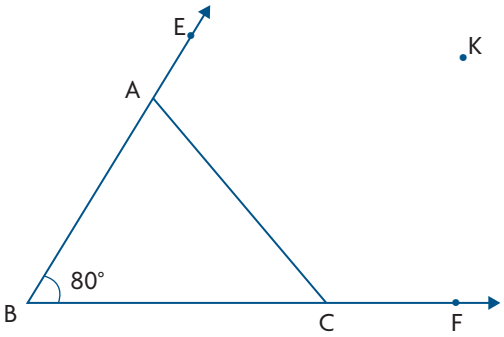
  |ID| = |IE| = |IF|



- Bir üçgenin üç tane dış teğet çemberi vardır.
- I_1, I_2 ve I_3 noktaları ABC üçgeninin dış teğet çemberlerinin merkezleridir.

ÖRNEK

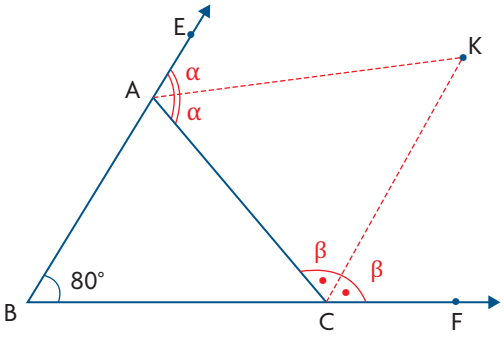
Şekilde verilen [BE, [BF ve [AC] kesişen üç yoldur. Bu üç yola eşit uzaklıkta buluna K noktasına bir reklam panosu konacaktır.



$m(\widehat{EBF}) = 80^\circ$ **olduğuna göre A ve K noktalarını birleştiren doğru parçası ile C ve K noktalarını birleştiren doğru parçası arasındaki açının ölçüsü kaç derecedir?**

ÇÖZÜM

K noktası [BE, [BF ve AC kenarına eşit uzaklıkta olduğundan ABC üçgeninin dış teğet çemberidir. Dolayısıyla A ve C köşesine ait dış açıortayların kesim noktasıdır.



$m(\widehat{EAK}) = m(\widehat{KAC}) = \alpha \Rightarrow m(\widehat{BAC}) = 180^\circ - 2\alpha$

$m(\widehat{ACK}) = m(\widehat{KCF}) = \beta \Rightarrow m(\widehat{ACB}) = 180^\circ - 2\beta$

ABC üçgeninden;

$80^\circ + 180^\circ - 2\alpha + 180^\circ - 2\beta = 180^\circ$

$2\alpha + 2\beta = 260^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = 130^\circ$

ACK üçgeninden;

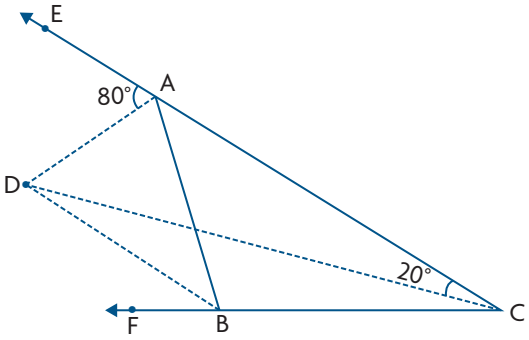
$m(\widehat{AKC}) + \alpha + \beta = 180^\circ$

$m(\widehat{AKC}) + 130^\circ = 180^\circ$

$m(\widehat{AKC}) = 50^\circ$ buluruz.

SIRA SİZDE 5.

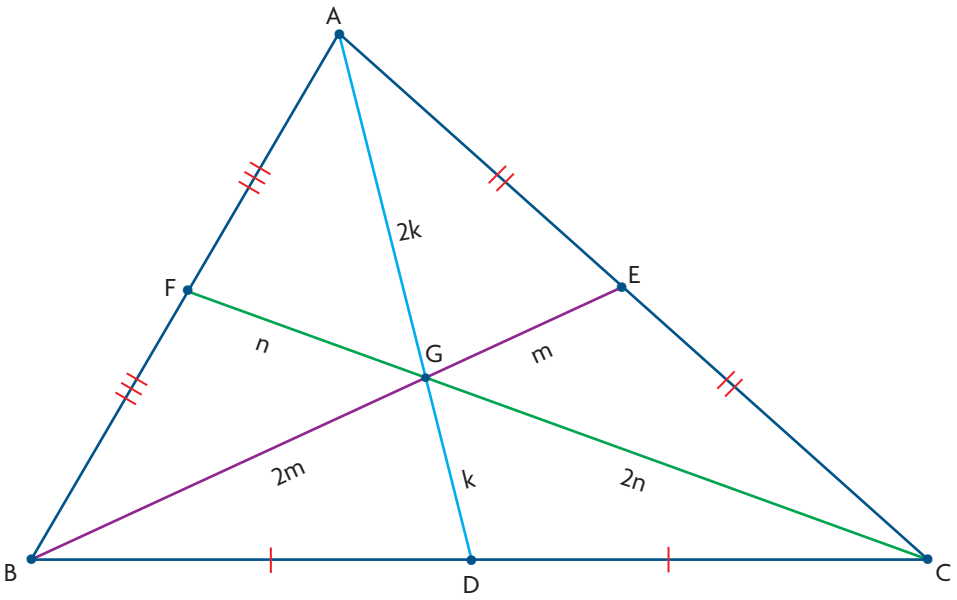
Aşağıdaki şekilde [CE, [CF, [AB], [AD], [CD] ve [BD] bir şehrin yollarıdır. [CD] boyunca yol alan bir araç yol boyunca [CE ve [CF na; [BD] boyunca yol alan bir araç da yol boyunca [AB] ve [BF ye eşit uzaklıkta olmaktadır.



$m(\widehat{EAD}) = 80^\circ$ **ve** $m(\widehat{ACD}) = 20^\circ$ **olduğuna göre** $m(\widehat{BDC})$ **kaç derecedir?**

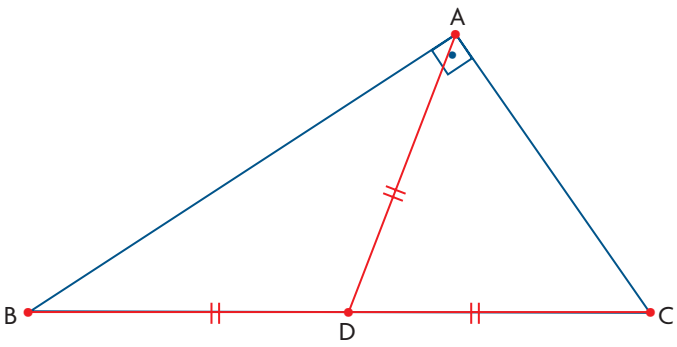
ÜÇGENİN KENARORTAYLARI VE AĞIRLIK MERKEZİ

Bir üçgende, bir köşeden karşısındaki kenarın orta noktasına çizilen doğru parçasına kenarortay adı verilir. Bir üçgenin kenarortayları üçgenin içinde bir noktada kesişir ve bu noktaya üçgenin ağırlık merkezi denir. Ağırlık merkezi üçgenin kenarortaylarını 2'ye 1 oranında böler.



Yukarıdaki ABC üçgeninde [AD], [BE] ve [CF] kenarortaylar, $[AD] \cap [BE] \cap [CF] = \{G\}$ olmak üzere G,

ABC üçgeninin ağırlık merkezidir ve $\frac{|AG|}{|GD|} = \frac{|BG|}{|GE|} = \frac{|CG|}{|GF|} = 2$'dir.

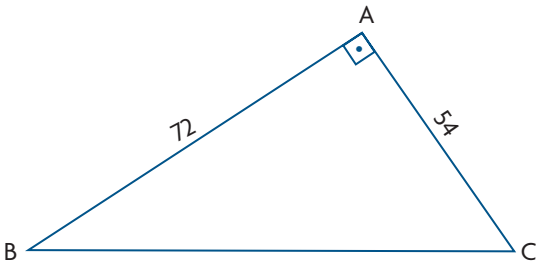


GENELLEME

Bir dik üçgende hipotenüse ait kenarortayın uzunluğu hipotenüsün uzunluğunun yarısına eşittir.

ÖRNEK

Bir mühendislik kulübü,şekildeki gibi üçgen şeklinde bir drone iskeleti tasarlamaktadır. Drone isketinde $[AB] \perp [AC]$, $|AB| = 72$ cm ve $|AC| = 54$ cm'dir. Kulüp öğrencileri drone motorunu üçgenin ağırlık merkezine yerleştirmeyi planlamaktadırlar. Bunun için önce ağırlık merkezini belirleyerek bu noktadan üçgenin köşelerine doğrusal bir şekilde metal destekler ekleyeceklerdir.

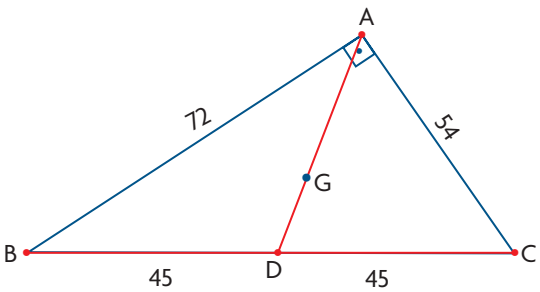


Buna göre motorun yerleştirileceği nokta ile A köşesi arasına eklenen metal desteğin uzunluğu kaç santimetredir?

ÇÖZÜM

Bir üçgenin ağırlık merkezi kenarortaylarının kesim noktasıdır. Öncelikle ABC dik üçgeninin hipotenüsünün uzunluğunu bulalım.

$|AB| = 4 \cdot 18$ ve $|AC| = 3 \cdot 18$ olduğundan $|BC| = 5 \cdot 18 = 90$ cm olur. (3-4-5 üçgeni)



BC kenarının orta noktası D olsun. $|BD| = |DC| = 45$ cm'dir.

A ile D noktalarını birleştirirsek [AD] kenarortay olur.

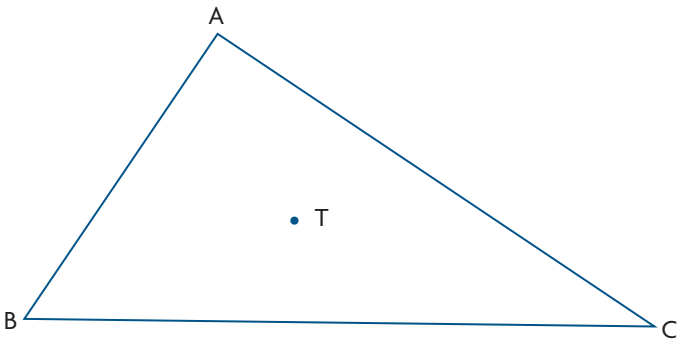
[AD] hipotenüse ait kenarortay olduğundan
$|BD| = |DC| = |AD| = 45$ cm olur.

Üçgenin ağırlık merkezi G olsun. G noktası [AD] üzerindedir ve ağırlık merkezi üçgenin kenarortaylarını 2'ye 1 oranında böler.

$|AD| = |AG| + |GD|$ ve $|AG| = 2|GD|$ olduğundan denklemde yerine yazarsak
$|AD| = 2|GD| + |GD| \Rightarrow 45 = 3|GD| \Rightarrow |GD| = 15$ cm olur. O halde $|AG| = 2 \cdot 15 = 30$ cm'dir.

SIRA SİZDE 6.

Aşağıdaki şekilde ABC üçgeni biçiminde tasarlanmış bir aydınlatma armatürü verilmiştir. Bu aydınlatma armatürünün tavana asıldığında dengede durabilmesi için T noktasından montajı yapılmalıdır. Bunun için aydınlatma armatürüne üçgenin köşelerinden karşısındaki kenarına kadar T noktasından geçen doğrusal çubuklar eklenmiştir.

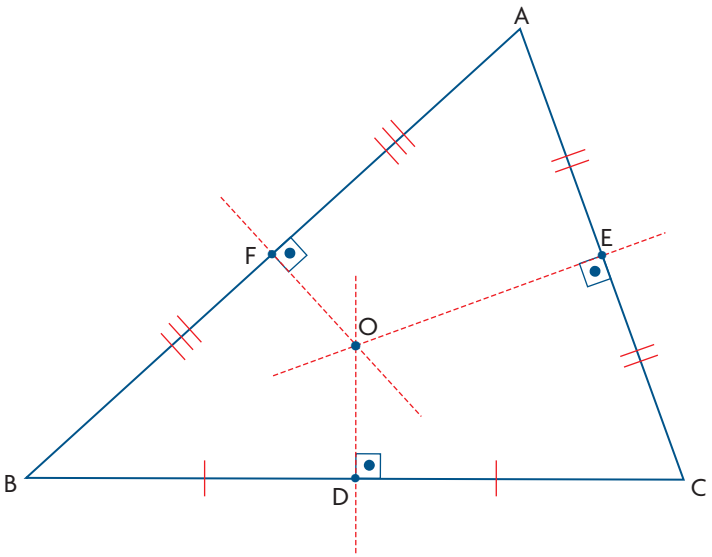


Eklenen doğrusal çubukların uzunluklarının toplamı 48 santimetre olduğuna göre T noktasının köşelere olan uzaklıkları toplamı kaç santimetredir?

ÜÇGENİN KENAR ORTA DİKMELERİ VE ÇEVREL ÇEMBERİNİN MERKEZİ

Üçgenin herhangi bir kenarının orta noktasından geçen ve bu kenara dik olan doğru parçasına kenar orta dikme denir.

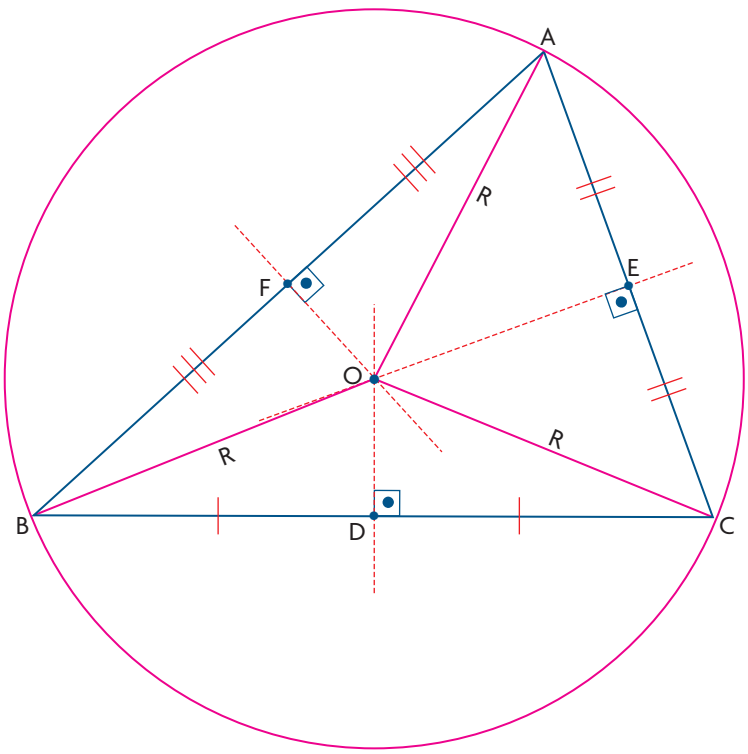
Aşağıdaki ABC üçgeninde [OD], [OF] ve [OE] kenar orta dikmelerdir.



Bir üçgenin kenar orta dikmeleri tek noktada kesişir ve bu noktaya üçgenin çevrel çemberinin merkezi denir.

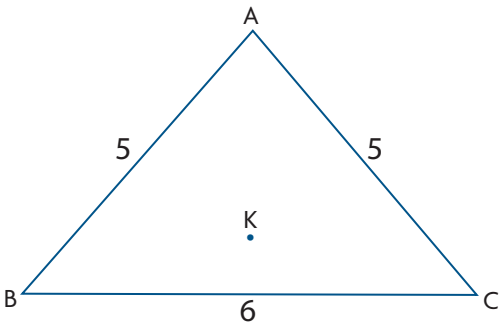
Buna göre O, ABC üçgeninin çevrel çemberinin merkezidir ve çevrel çemberinin yarıçapı R olmak üzere
|OA| = |OB| = |OC| = R'dir.

Çevrel çemberin merkezi üçgenin köşelerine eşit uzaklıktadır.



ÖRNEK

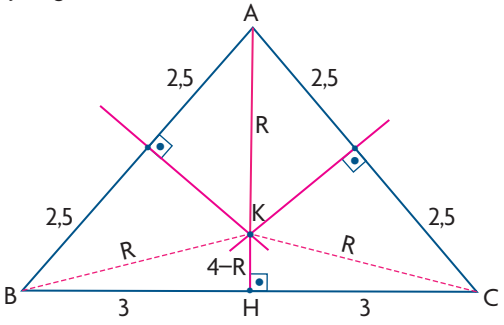
Bir grup lise öğrencisi, bilim fuarı için kırsal bir bölgede üç adet sinyal verici anten kurmayı planlıyor. Antenler, birbirini görebilecek şekilde aşağıda verilen ABC üçgeninin köşelerine yerleştiriliyor. Bu üç antenin sinyallerini eşit uzaklıkta alabilecek bir merkezi alıcı cihazı da K noktasına konumlandırıyorlar.



$|AB| = |AC| = 5$ km **ve** $|BC| = 6$ km **olduğuna göre merkezi alıcı cihazının sinyal verici antenlere uzaklıkları toplamı kaç kilometredir?**

ÇÖZÜM

Merkezi alıcı cihazının yerleştirileceği K noktası, sinyal verici antenlerin yerleştirildiği köşelere eşit uzaklıkta olacağından çevrel çemberin merkezi olmalıdır. Çevrel çemberin merkezi kenar orta dikmelerin kesim noktasıdır. ABC üçgeni ikizkenar üçgen olduğundan tepe açısına ait yükseklik aynı zamanda kenar orta dikmedir. Diğer iki kenara ait kenar orta dikmeleri çizdiğimizde kesim noktası K olmalıdır.



K noktası köşelere eşit uzaklıkta olduğundan $|KA| = |KB| = |KC| = R$ olsun. ABH veya AHC dik üçgeninden $|AH| = 4$ km bulunur. $|KH| = 4 - R$ olur. KBH dik üçgeninde pisagor teoremini yazalım.

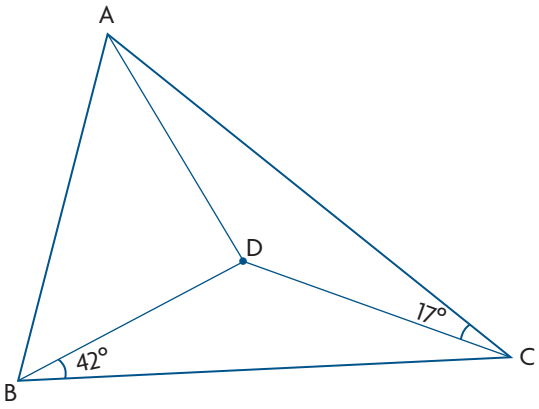
$$R^2 = (4-R)^2 + 3^2 \Rightarrow R^2 = 16 - 8R + R^2 + 9$$

$$8R = 25 \Rightarrow R = \frac{25}{8} \text{ bulunur.}$$

Sorunun cevabı $|KA| + |KB| + |KC| = 3R = \frac{75}{8}$ kilometredir.

SIRA SİZDE 7.

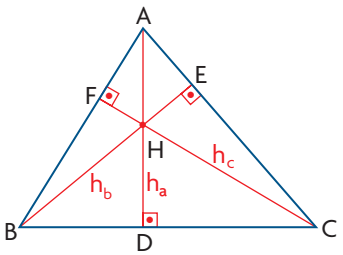
Üç farklı izci grubu, ormanda üçgensel bir bölge belirleyerek şekildeki gibi ABC üçgeninin köşelerine kamp kurmuşlardır. Tüm kamp malzemelerinin toplanacağı A, B ve C kamp noktalarına eşit mesafede bulunan D noktasına ortak depo kurulacaktır.



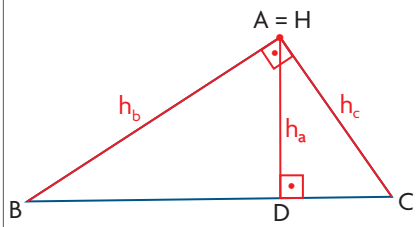
$m(\widehat{DBC}) = 42^\circ$ **ve** $m(\widehat{DCA}) = 17^\circ$ **olduğuna göre** $m(\widehat{BAC})$ **kaç derecedir?**

ÜÇGENİN YÜKSEKLİKLERİ

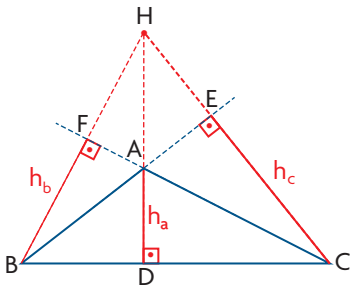
Bir üçgende bir köşeden karşısındaki kenara veya bu kenarın uzantısına dik olarak çizilen doğru parçasına yükseklik denir. Bir üçgenin yükseklikleri aynı noktada kesişir.



Dar açılı ABC üçgeninde h_a, h_b ve h_c yüksekliklerinin kesim noktası olan H, **üçgenin iç bölgesindedir.**



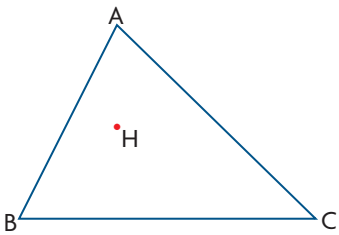
Dik açılı ABC üçgeninde h_a, h_b ve h_c yüksekliklerinin kesim noktası olan H noktası aynı zamanda A noktasıdır ve **üçgenin dik köşesindedir.**



Geniş açılı ABC üçgeninde h_a, h_b ve h_c yüksekliklerinin kesim noktası olan H, **üçgenin dış bölgesindedir.**

ÖRNEK

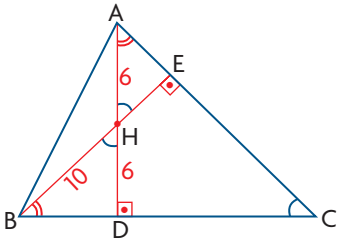
Bir telekomünikasyon şirketi, dağlık bir alandaki A köyü, B köyü ve C köyünün tamamına en verimli şekilde sinyal ulaştıracak bir uzaktan algılama kulesi inşa etmeyi planlamaktadır. Bu üç köy, aşağıdaki şekildeki gibi ABC üçgeninin köşeleri olarak işaretlenmiştir. Kule, arazinin coğrafi koşulları nedeniyle sadece üçgenin kenarlarına (köy yollarına) en kısa mesafeden hatlar çekilerek ulaştırılacak enerji ve besleme kablolarının kesiştiği H noktasına kurulacaktır. Kulenin B köyüne uzaklığı 10 km ve A köyüne uzaklığı 6 kmdir.



Uzaktan algılama kulesi A köyüne ve BC kenarına eşit uzaklıkta olduğuna göre |CB| + |CA| kaç kilometredir?

ÇÖZÜM

Üçgenin köşesinden karşısındaki kenara en kısa mesafe yüksekliktir. Dolayısıyla uzaktan algılama kulesinin kurulacağı H noktası yüksekliklerin kesim noktasıdır. ABC üçgeninde BC ve AC kenarlarına ait yükseklikleri çizelim.



$|AH| = |HD| = 6$ km, $|BH| = 10$ km'dir. HDB dik üçgeninde pisagor teoremini yazalım.

BDH dik üçgeninde pisagor teoremini yazalım.

$10^2 = 6^2 + |BD|^2 \Rightarrow |BD| = 8$ km'dir.

Ters açı olduklarından $m(\widehat{BHD}) = m(\widehat{AHE}) = \alpha$ dır.

Dolayısıyla $m(\widehat{HBD}) = m(\widehat{DAE}) = 90^\circ - \alpha$ ve $m(\widehat{ACB}) = \alpha$ olur.

Açı – Açı benzerlik teoreminden dolayı BDH ve ADC üçgenleri benzerdir.

Benzerlik oranını yazalım.

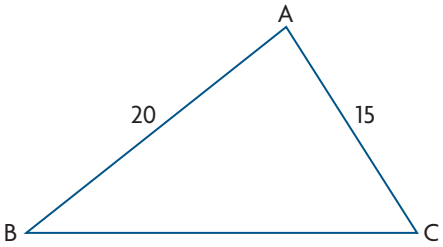
$$\frac{10}{|AC|} = \frac{8}{12} \Rightarrow |AC| = 15 \text{ km'dir.}$$

$$\frac{6}{|DC|} = \frac{8}{12} \Rightarrow |DC| = 9 \text{ km} \Rightarrow |BC| = 8 + 9 = 17 \text{ km'dir.}$$

$|AC| + |BC| = 32$ kilometre bulunur.

SIRA SİZDE 8.

Şekilde A, B, C yerleşkeleri ve bu yerleşkeler arasındaki doğrusal yollar verilmiştir. |AB| = 20 km ve |AC| = 15 km'dir. A yerleşkesinden [BC] yoluna, B yerleşkesinden [AC] yoluna ve C yerleşkesinden [AB] yoluna en kısa olacak şekilde doğrusal yeni yollar yapılmıştır.



Yeni yapılan yollar A köşesinde kesiştiğine göre A köşesinden BC kenarına doğru yapılan yeni yolun uzunluğu kaç kilometredir?

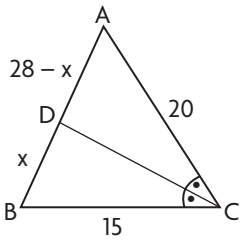
GERİ BİLDİRİM

Bu geribildirim sayesinde kendi cevabınızı kontrol edebilir, hatalarınızı düzelterek öğrenmenizi pekiştirebilirsiniz.

SIRA SİZDE 1.

ÇÖZÜM

[CD] açıortayının karşı kenarda ayırdığı doğru parçalarının uzunlukları |BD| = x, |AD| = (28 – x) olsun.



$$\frac{|CA|}{|CB|}=\frac{|AD|}{|DB|}\Rightarrow\frac{20}{15}=\frac{28-x}{x}\Rightarrow\frac{4}{3}=\frac{28-x}{x}$$

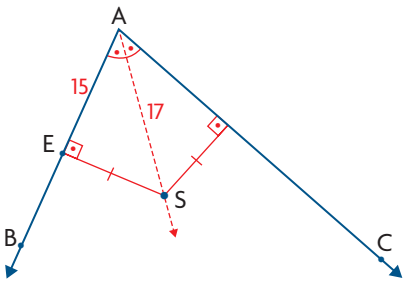
$$4x=3(28-x)$$
$$4x=84-3x$$
$$7x=84$$
$$x=12 \text{ metre}$$

|BD| = 12 metre, |AD| = 28 – 12 = 16 metredir.

SIRA SİZDE 2.

ÇÖZÜM

S noktasının [AB na en yakın noktası E noktası olduğundan [SE] ⊥ [AB olur. [AS, A açısının açıortayıdır.



SAE dik üçgeninde pisagor teoremini yazalım.

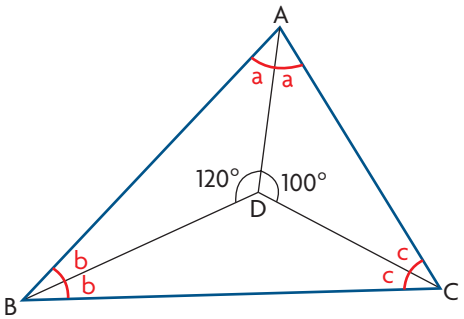
$$17^2=15^2+|SE|^2$$
$$289=225+|SE|^2$$
$$64=|SE|^2\Rightarrow|SE|=8 \text{ metredir.}$$

S noktasının [AC nına en kısa uzaklığı dik uzaklıktır.
S noktası açıortay üzerindedir ve açının kollarına eşit uzaklıktadır.
Dolayısıyla S noktasının [AC na en kısa uzaklığı 8 metredir.

SIRA SİZDE 3.

ÇÖZÜM

D noktası [AB], [AC] ve [BC] yollarına eşit uzaklıkta olduğundan ABC üçgeninin iç teğet çemberinin merkezidir ve iç açıortayların kesim noktasıdır.



$m(\widehat{BAD})=m(\widehat{DAC})=a$, $m(\widehat{ABD})=m(\widehat{DBC})=b$, $m(\widehat{ACD})=m(\widehat{BCD})=c$ olsun.

ABC üçgeninin iç açıları ölçüleri toplamından

$2a+2b+2c=180^\circ\Rightarrow a+b+c=90^\circ$ dir.

$120^\circ+100^\circ+m(\widehat{BDC})=360^\circ\Rightarrow m(\widehat{BDC})=140^\circ$ dir.

BCD üçgeninin iç açıları ölçüleri toplamından

$b+c+140^\circ=180^\circ\Rightarrow b+c=40^\circ$ dir.

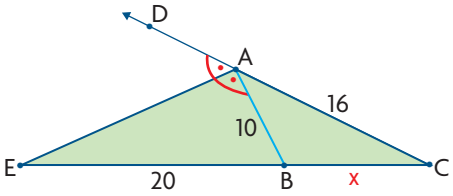
$a+b+c=90^\circ$ bulmuştuk. Buradan $a+40^\circ=90^\circ\Rightarrow a=50^\circ$ dir.

$m(\widehat{BAC})=2a=100^\circ$ buluruz.

SIRA SİZDE 4.

ÇÖZÜM

E noktasının [AD ve [AB] na eşit uzaklıkta olduğuna göre [AE], DAB açısının açıortayıdır. Dolayısıyla BCA üçgeninin A açısına ait dış açıortaydır. |BC| = x olsun.



$$\frac{|AB|}{|AC|}=\frac{|EB|}{|EC|}\Rightarrow\frac{10}{16}=\frac{20}{20+x}$$

$$\frac{5}{8}=\frac{20}{20+x}$$

$$160=5(20+x)$$

$$160=100+5x$$

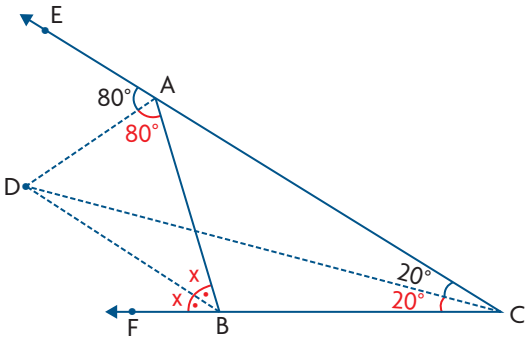
$$60=5x\Rightarrow x=12\text{metredir.}$$

$$Ç(ABC)=10+12+16=38\text{ metre bulunur.}$$

SIRA SİZDE 5.

ÇÖZÜM

[CD] boyunca yol alan bir araç yol boyunca [CE ve [CF na eşit uzaklıkta olduğundan [CD], C açısının açıortayıdır. [BD] boyunca yol alan bir araç da yol boyunca [AB] ve [BF na eşit uzaklıkta olduğundan [BD], ABF açısının açıortayıdır. D noktası da açıortayların kesim noktası olduğundan [AD], EAB açısının açıortayı olur.



$$m(\widehat{EAD})=m(\widehat{DAB})=80^\circ\Rightarrow 80^\circ+80^\circ+m(\widehat{BAC})=180^\circ$$

$$m(\widehat{BAC})=20^\circ\text{ bulunur.}$$

$$m(\widehat{ACD})=m(\widehat{DCB})=20^\circ\Rightarrow m(\widehat{ACB})=40^\circ\text{ dir.}$$

ABC üçgeninin iç açılarının ölçüleri toplamından

$$20^\circ+40^\circ+m(\widehat{ABC})=180^\circ\Rightarrow m(\widehat{ABC})=120^\circ\text{ dir.}$$

$$m(\widehat{ABD})=m(\widehat{DBF})=x\text{ olsun.}$$

$$2x+120^\circ=180^\circ\Rightarrow x=30^\circ\text{ bulunur.}$$

DBC üçgeninin iç açılarının ölçüleri toplamından

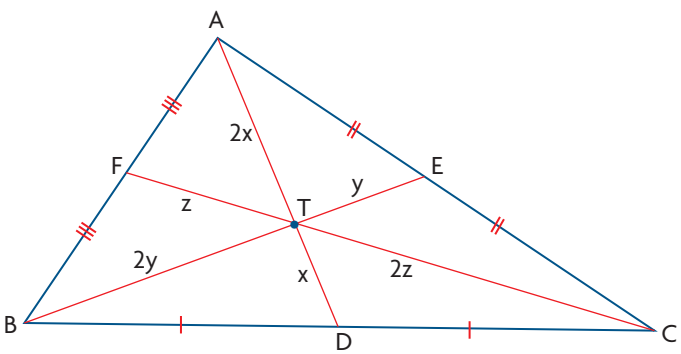
$$m(\widehat{BDC})+30^\circ+120^\circ+20^\circ=180^\circ\Rightarrow m(\widehat{BDC})=10^\circ\text{ dir.}$$

SIRA SİZDE 6.

ÇÖZÜM

T noktası ABC üçgeninin denge(ağırlık) merkezidir. Dolayısıyla [AD], [BE] ve [CF] kenarortaydır.

|TD| = x ise |AT| = 2x dir. |TE| = y ise |BT| = 2y dir. |TF| = z ise |CT| = 2z dir.



$|AD| + |BE| + |CF| = 48\text{ cm} \Rightarrow 3x + 3y + 3z = 48$

$3(x + y + z) = 48 \Rightarrow x + y + z = 16\text{ cm'dir.}$

$|AT| + |BT| + |CT| = 2x + 2y + 2z$

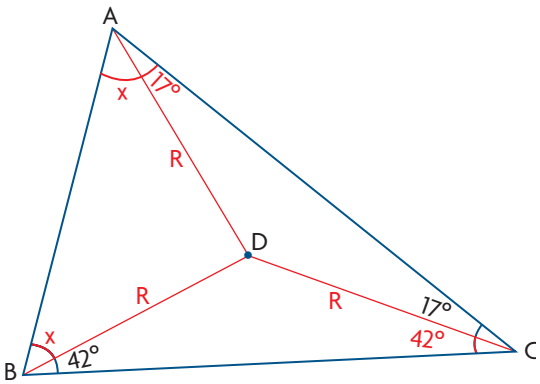
$|AT| + |BT| + |CT| = 2(x + y + z) = 2 \cdot 16 = 32\text{cm'dir.}$

SIRA SİZDE 7.

ÇÖZÜM

D noktasına A, B ve C köşelerine eşit uzaklıkta olduğundan ABC üçgeninin çevrel çemberinin merkezidir.

$|AD| = |BD| = |CD| = R$ olduğundan ABD, ADC ve BCD üçgenleri ikizkenar üçgendir.



$m(\widehat{DBC}) = m(\widehat{DCB}) = 42^\circ$

$m(\widehat{DCA}) = m(\widehat{DAC}) = 17^\circ$

$m(\widehat{DAB}) = m(\widehat{DBA}) = x$ olsun.

ABC üçgeninin iç açılarının ölçüleri toplamından

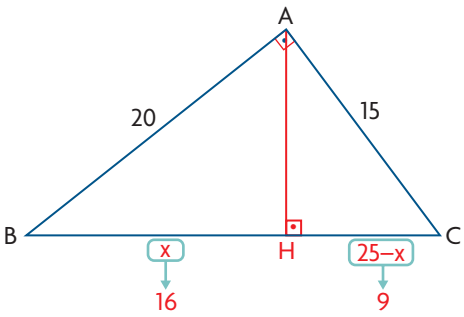
$2x + 34^\circ + 84^\circ = 180^\circ \Rightarrow x = 31^\circ$ dir.

$m(\widehat{BAC}) = 17^\circ + 31^\circ = 48^\circ$ bulunur.

SIRA SİZDE 8.

ÇÖZÜM

A yerleşkesinden [BC] yoluna, B yerleşkesinden [AC] yoluna ve C yerleşkesinden [AB] yoluna en kısa olacak şekilde doğrusal yeni yollar A köşesinde kesiştiğine göre A noktası yüksekliklerin kesim noktasıdır. Dolayısıyla BCA üçgeni bir dik üçgendir.



BCA dik üçgeninde pisagor teoremini yazalım.

$|BC|^2 = 20^2 + 15^2 \Rightarrow |BC|^2 = 400 + 225$

$\Rightarrow |BC|^2 = 625 \Rightarrow |BC| = 25$ km'dir.

A köşesinden [BC] kenarına yapılan yeni yol ile [BC] kenarının kesim noktası H olsun.

$|BH| = x$ ise $|CH| = 25 - x$ olur.

BCA dik üçgeninde Öklit teoremini kullanabiliriz.

$|AB|^2 = |BH| \cdot |BC| \Rightarrow 20^2 = x \cdot 25 \Rightarrow x = 16$ km'dir.

$|AH|^2 = |BH| \cdot |HC| \Rightarrow |AH|^2 = 16 \cdot 9 \Rightarrow |AH| = 12$ kilometredir.

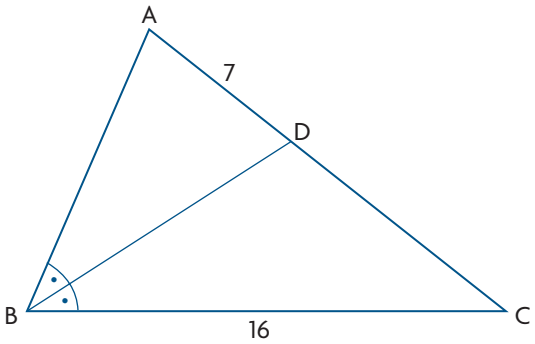
DEĞERLENDİRİYORUM

Amaç: Bu bölümde, öğrendiklerinizi gözden geçirmenizi, kendi öğrenme sürecinizi değerlendirmenizi ve eksiklerinizi fark etmenizi amaçlıyoruz.

Soruları dikkatle yanıtlayınız. Cevaplarınızı geri bildirimlerle karşılaştırarak eksik gördüğünüz noktaları tekrar ediniz.

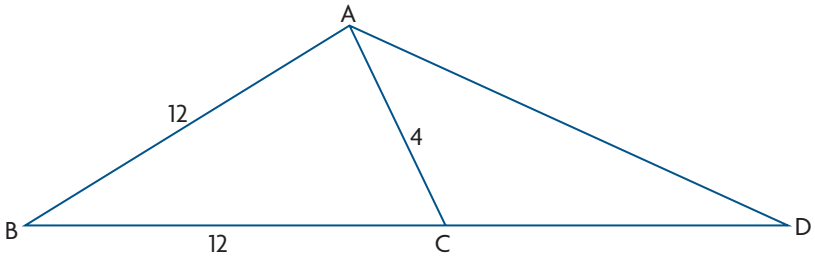
SORULAR

1. Şekildeki ABC üçgeninde



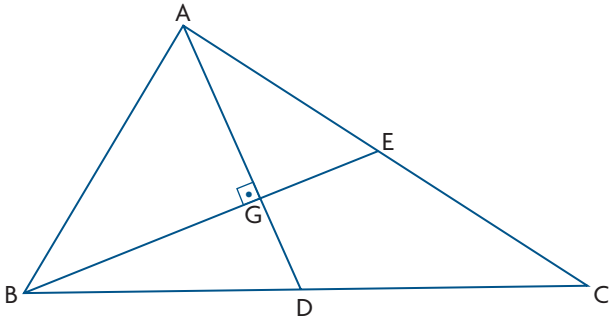
[BD] açıortay, IADI = 7 cm **ve** IBCI = 16 cm **olduğuna göre IBAI · IDCI kaç santimetrekaredir?**

2. Şekilde verilen ABD üçgeninde $m(\widehat{ACD}) = 2m(\widehat{CAD})$ ve IABI = IBCI = 3IACI = 12 cm'dir.



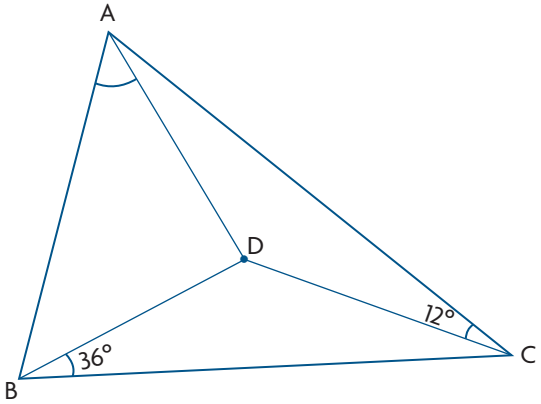
Buna göre ICDI kaç santimetredir?

3. Şekildeki ABC üçgeninde [AD] ⊥ [BE], IAEI = IECI, IBDI = IDCI, IADI = 9 cm ve IBEI =12 cm'dir.



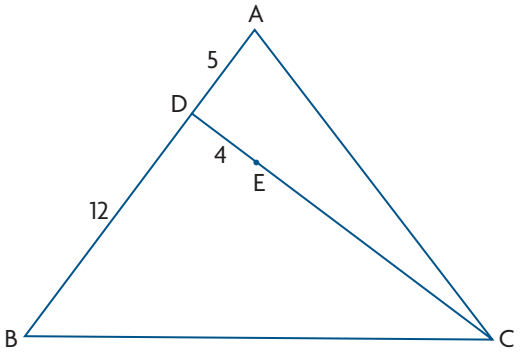
Buna göre G ile C noktaları arasındaki uzaklık kaç santimetredir?

4. Aşağıdaki ABC üçgeninde $3m(\widehat{DCA}) = m(\widehat{DBC}) = 36^\circ$ ve D kenar orta dikmelerin kesim noktasıdır.



Buna göre $m(\widehat{ABC})$ **kaç derecedir?**

5. Aşağıdaki şekilde verilen ABC üçgenininde IBDI = 12 birim, IDEI = 4 birim, IADI = 5 birim ve C köşesinden [AB] kenarına çizilen en kısa uzaklık [CD] dir.

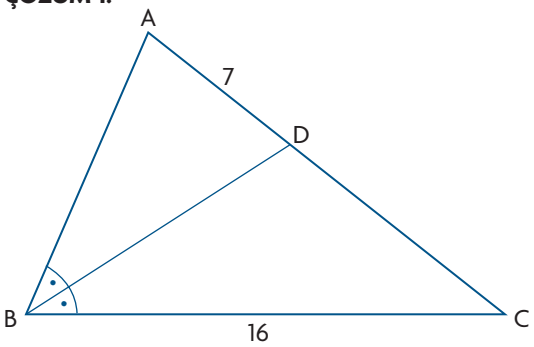


B köşesinin AC kenarına en kısa uzaklığı E noktasından geçtiğine göre ICEI kaç birimdir?

GERİ BİLDİRİM

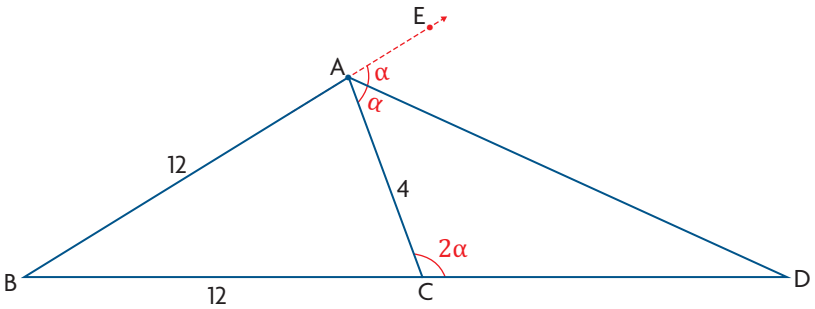
Bu geribildirim sayesinde kendi cevabınızı kontrol edebilir, hatalarınızı düzelterek öğrenmenizi pekiştirebilirsiniz.

ÇÖZÜM 1.



$\frac{|AD|}{|DC|} = \frac{|BA|}{|BC|} \Rightarrow \frac{7}{|DC|} = \frac{|BA|}{16} \Rightarrow |BA| \cdot |DC| = 7 \cdot 16 = 112$ santimetrekaredir.

ÇÖZÜM 2.



$m(\widehat{ACD}) = 2\alpha$ ve $m(\widehat{CAD}) = \alpha$ olsun. CAB üçgeni ikizkenar üçgen olduğundan

$m(\widehat{BCA}) = m(\widehat{BAC})$ ve $m(\widehat{CAE}) = m(\widehat{ACD}) = 2\alpha$ dır.

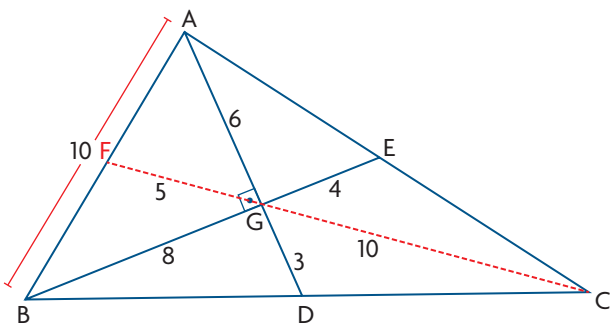
[AD], CAB üçgeninde A açısının dış açıortayıdır. ICDI = x olsun.

$\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{|CD|}{|BD|} \Rightarrow \frac{4}{12} = \frac{x}{12+x} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{x}{12+x} \Rightarrow 3x = 12 + x \Rightarrow x = 6$ cm'dir.

ÇÖZÜM 3.

ABC üçgeninde IAEI = IECI olduğundan [BE] kenarortaydır, IBDI = IDCI olduğundan [AD] kenarortaydır.

G noktası kenarortayların kesim noktası olduğundan ağırlık merkezidir.



IAGI = 2x, IGDI = x $\Rightarrow$ 3x = 9 $\Rightarrow$ x = 3 cm ve IAGI = 6 cm'dir.

IBGI = 2y, IGEI = y $\Rightarrow$ 3y = 12 $\Rightarrow$ y = 4 cm ve IBGI = 8 cm'dir.

BGA dik üçgeni 6-8-10 üçgeni olduğundan IABI = 10 cm'dir.

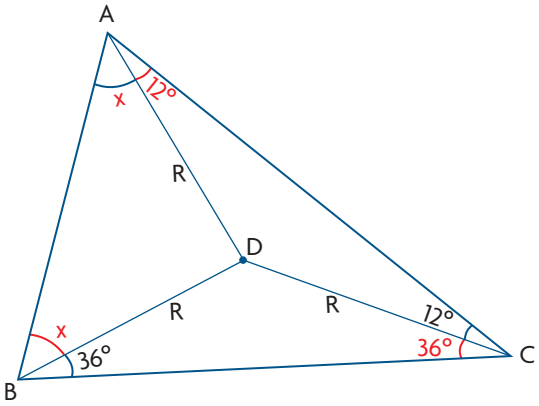
C köşesine ait kenarortay aynı zamanda BGA dik üçgeninin hipotenüsüne ait kenarortaydır.

IAFI = IFBI = IFGI = 5 cm ve IGCI = 2 · IFGI = 10 cm olur.

ÇÖZÜM 4.

D noktası ABC üçgeninin kenar orta dikmelerin kesim noktası olduğundan ABC üçgeninin çevrel çemberinin merkezidir.

IADI = IBDI = ICDI = R olduğundan ABD, ADC ve BCD üçgenleri ikizkenar üçgendir.



$m(\widehat{DAC}) = m(\widehat{DCA}) = 12^\circ$

$m(\widehat{DBC}) = m(\widehat{DCB}) = 36^\circ$

$m(\widehat{DAB}) = m(\widehat{DBA}) = x$ olur.

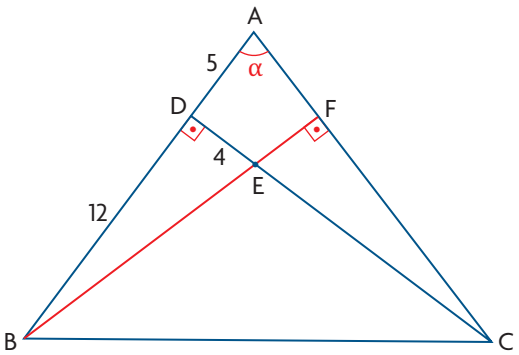
ABC üçgeninin iç açılarının ölçüleri toplamından

$2x + 72^\circ + 24^\circ = 180^\circ \Rightarrow x = 42^\circ$ dir.

$m(\widehat{ABC}) = 36^\circ + 42^\circ = 78^\circ$ dir.

ÇÖZÜM 5.

ABC üçgenininde C köşesinden AB kenarına çizilen en kısa uzaklık [CD] ise [CD] yüksekliktir. B köşesinin AC kenarına en kısa uzaklığı E noktasından geçtiğine göre E noktası yüksekliklerin kesim noktasıdır. [BF] yüksekliğini çizelim.



$m(\widehat{BAC}) = \alpha$ ise $m(\widehat{FBA}) = m(\widehat{FCE}) = 90^\circ - \alpha$ ve $m(\widehat{DEB}) = m(\widehat{FEC}) = \alpha$ olur.

BED ve BFA üçgenleri Açı - Açı benzerlik teoreminden dolayı benzerdir.

$$\frac{4}{5} = \frac{12}{4 + |EC|} \Rightarrow \frac{1}{5} = \frac{3}{4 + |EC|} \Rightarrow 15 = 4 + |EC| \Rightarrow |EC| = 11 \text{ birimdir.}$$

ÖĞRENDİKLERİM

Verilen bilgileri dikkatle okuyunuz. Konunun temel kavramlarını, önemli noktalarını ve bağlantılarını gözden geçirerek öğrendiklerinizi pekiştiriniz.

ÜÇGENDE YARDIMCI ELEMANLAR

ÜÇGENİN AÇIORTAYLARI

Açıortay, bir üçgenin iç açısını iki eşit parçaya bölerek üçgenin iç yapısında simetri ve denge sağlar.

- Bir açının açıortayı üzerindeki herhangi bir nokta, açının kollarına eşit uzaklıktadır.
- Bir üçgende herhangi bir iç açıortayın karşı kenar üzerinde ayırdığı parçaların uzunlukları oranı, diğer iki kenarın uzunlukları oranına eşittir.
- Bir üçgenin iç açıortayları üçgenin kenarlarından eşit uzaklıkta bir noktada kesişir. Bu noktaya üçgenin iç teğet çemberinin merkezi denir.
- Bir ABC üçgeninde A açısının dış açıortayı BC kenarının uzantısını E noktasında kesiyorsa

$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|EB|}{|EC|}\text{'dir.}$$

- Bir üçgende iki dış açıortay ile bu dış açılara komşu olmayan iç açının açıortayı tek noktada kesişir. Bu noktaya üçgenin dış teğet çemberlerinin merkezi denir. Bir üçgenin üç tane dış teğet çemberi vardır.

ÜÇGENİN KENARORTAYLARI

Bir üçgende, bir köşeden karşısındaki kenarın orta noktasına çizilen doğru parçasına kenarortay adı verilir.

- Bir üçgenin kenarortayları üçgenin içinde bir noktada kesişir ve bu noktaya üçgenin ağırlık merkezi denir.
- Ağırlık merkezi üçgenin kenarortaylarını 2'ye 1 oranında böler.
- Bir dik üçgende hipotenüse ait kenarortayın uzunluğu hipotenüsün uzunluğunun yarısına eşittir.

ÜÇGENİN KENAR ORTA DİKMELERİ

Üçgenin herhangi bir kenarının orta noktasından geçen ve bu kenara dik olan doğru parçasına kenar orta dikme denir.

- Bir üçgenin kenar orta dikmeleri tek noktada kesişir bu noktaya üçgenin çevrel çemberinin merkezi denir.
- Çevrel çemberin merkezi üçgenin köşelerine eşit uzaklıktadır.

ÜÇGENİN YÜKSEKLİKLERİ

Bir üçgende bir köşeden karşısındaki kenara veya bu kenarın uzantısına dik olarak çizilen doğru parçasına yükseklik denir.

- Bir üçgenin yükseklikleri aynı noktada kesişir.
- Dar açılı bir üçgende yüksekliklerin kesim noktası üçgenin iç bölgesindedir.
- Dik açılı bir üçgende yüksekliklerin kesim noktası üçgenin köşesindedir.
- Geniş açılı bir üçgende yüksekliklerin kesim noktası üçgenin dış bölgesindedir.

GEOMETRİK ŞEKİLLER

Trigonometri ve Üçgen Özellikleri Üzerine Çıkarımlara Yönelik Yansıtıcı Yazı

Amaç: Bu çalışma, trigonometrik oranlar, üçgenin yardımcı elemanları ve alan bağıntılarıyla ilgili problemleri çözerken; varsayımlarınızdan nasıl genellemelere ulaştığınızı ve teoremleri nasıl doğruladığınızı fark etmenizi amaçlamaktadır.

Aşağıdaki soruları; konuyla ilgili incelemeleriniz, ispat denemeleriniz ve problem çözümleriniz üzerine düşünerek yanıtlayınız.

1. **Öğrendiğiniz bu temada sizin dikkatinizi çeken veya önemli bulduğunuz noktaları yazınız.**

2. **Trigonometrik oranlara yönelik çıkarımlarınızı gözden geçiririz. Bu çıkarımların sinüs ve kosinüs teoremlerinin doğrulanmasındaki etkinliğini kısaca açıklayınız.**

3. **Üçgenin yardımcı elemanlarının geometrik problemlerin çözümündeki etkilerini gerekçeleriyle açıklayınız.**

4. **Trigonometrik oranlara yönelik çıkarımlar yaparken ve üçgenin yardımcı elemanlarını incelerken matematiksel araç, gereç ve teknolojileri nasıl kullandığınızı örnekler vererek açıklayınız.**

Daha fazlası için karekodu okutunuz.



ÜÇGENDE ALAN

BAŞLARKEN

Bu bölümde yer alan etkinlikler, bireysel öğrenme yolculuğunuzda size rehberlik etmek ve öğrenme sürecinizi desteklemek amacıyla hazırlanmıştır. Çalışmalarınızı yürütürken "Hazırlanıyorum", "İlişkilendiriyorum", "Uygulayarak Öğreniyorum", "Değerlendiriyorum", "Yansıtıcı Yazı" ve "Öğrendiklerim" etkinliklerini sırası ile takip etmeniz ve etkinliklerin sonunda yer alan geri bildirimleri inceleyerek bölümleri tamamlamanız beklenmektedir.

Bu çalışma kartında üçgenin yardımcı elemanları ve özellikleri ile ilgili çıkarımlarda bulunup konuyla ilgili soruları yanıtlayabileceksiniz.



- Üçgende alan kavramı, bilim tarihinin en eski merak konularından biridir ve geometri düşüncesinin gelişiminde önemli bir yere sahiptir.
- Eski Mısır ve Mezopotamya'daki kayıtlar, üçgen alanı hesaplamaya yönelik ilk yöntemlerin binlerce yıl önce kullanıldığını gösterir. Ancak konunun sistematik hâle gelmesi, özellikle Thales ve Öklid ile birlikte Antik Yunan döneminde gerçekleşmiştir.
- Üçgen alanı formülünün ortaya konması, yalnızca geometride değil mimarlık, arazi ölçümü, mühendislik ve sanat gibi birçok alanda hesaplamaların doğrulukla yapılabilmesini sağlamış ve matematiğin uygulamalı yönünün güçlenmesine katkıda bulunmuştur.
- Bu bölümde böyle büyük öneme sahip üçgende alan konusunu inceleyeceğiz.

HAZIRLANIYORUM

Amaç: Bu bölümde ön bilgilerinizi hatırlamanızı ve temaya hazırlıklı hâle gelmenizi amaçlıyoruz.

Aşağıda yer alan ifadeler, bu temada tamamlanması hedeflenen öğrenme çıktısını ele almadan önce sahip olmanız gereken bazı temel becerileri içermektedir. Lütfen her bir ifadeyi dikkatlice okuyunuz.

• Eğer ifadedeki bilgiye hâkim olduğunuzu düşünüyorsanız kutucuğu işaretleyiniz.

• Eğer konuyu henüz tam olarak bilmediğinizi ya da hatırlamadığınızı düşünüyorsanız kutucuğu boş bırakınız.

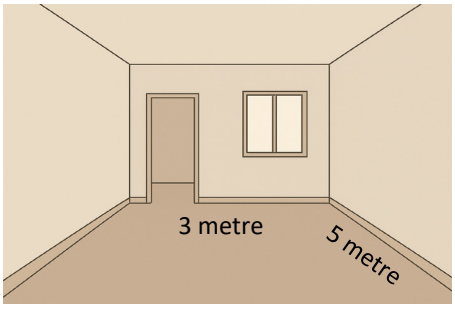
Bu çalışmanın amacı notla değerlendirme yapmak değil temaya ne ölçüde hazır olduğunuzu belirlemektir.

SORULAR	ÖN ÖĞRENME KONTROL LİSTESİ	
1	Kenar uzunlukları verilen dikdörtgenin alanını hesaplayabilirim.	
2	Dikdörtgenin alan formülünden yola çıkarak paralelkenarın alanını hesaplayabilirim.	
3	Paralelkenarın alan formülü yardımıyla üçgenin alanını hesaplayabilirim.	
4	Üçgenin herhangi bir kenarına ait yükseklik üçgenin dış bölgesinde olursa üçgenin alanını hesaplayabilirim.	
5	Üçgende eşlik ve benzerlik konusunu biliyorum.	

"Ön Öğrenme Kontrol Listesi"ni doldurduktan sonra aşağıda verilen "Kontrol Noktası" sorularını çözünüz ve cevaplarınızı kontrol ediniz.

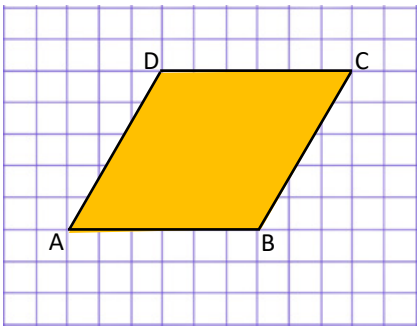
KONTROL NOKTASI

SORU 1. Betül; dikdörtgenler prizması biçimindeki odasının tabanının enini 3 metre, boyunu 5 metre olarak ölçüyor.



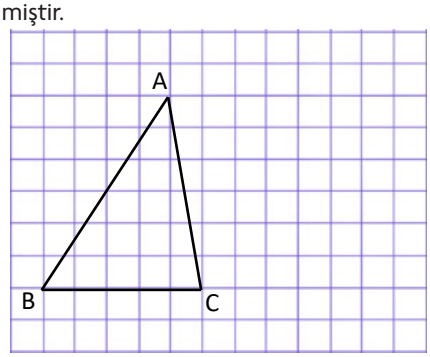
Buna göre odanın zeminini tamamen halıyla kaplamak isteyen Betül'ün kaç metrekare halıya ihtiyacı vardır?

SORU 2. Aşağıda birim kareli zemin üzerinde köşeleri, birim karelerin köşelerine denk gelen ABCD paralelkenarı şeklinde bir kâğıt görseli verilmiştir.



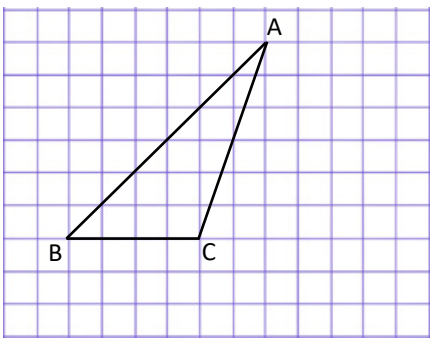
Buna göre kâğıdın alanı kaç birimkaredir?

SORU 3. Aşağıda birim kareli zemin üzerinde, köşeleri birim karelerin köşelerine denk gelecek biçimde ABC üçgeni verilmiştir.



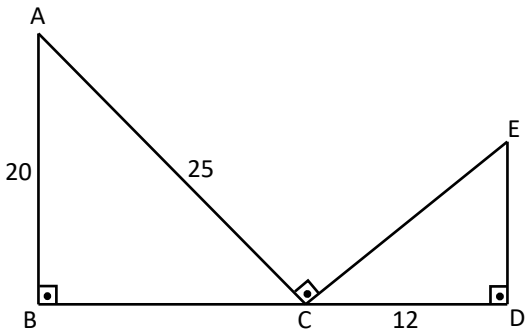
Buna göre ABC üçgeninin alanı kaç birimkaredir?

SORU 4. Aşağıdaki şekilde birim kareli zemin üzerinde, köşeleri birim karelerin köşelerine denk gelecek biçimde ABC üçgeni verilmiştir.



Buna göre ABC üçgeninin alanı kaç birimkaredir?

SORU 5. Aşağıdaki şekilde |AB| = 20 birim, |AC| = 25 birim ve |CD| = 12 birimdir.



[AC] ⊥ [CE], [AB] ⊥ [BD] ve [BD] ⊥ [DE] **olduğuna göre** CDE **üçgeninin alanı kaç birimkaredir?**

GERİ BİLDİRİM

Bu geri bildirim sayesinde kendi cevabınızı kontrol edebilir, hatalarınızı düzelterek öğrenmenizi pekiştirebilirsiniz.

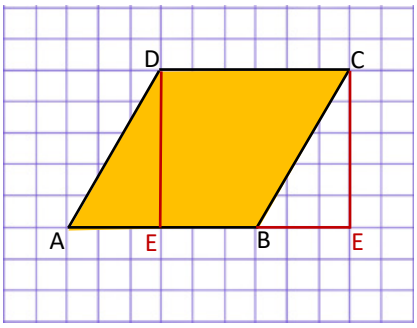
KONTROL NOKTASI

ÇÖZÜM 1.

Dikdörtgenin alanı, uzun kenar ile kısa kenar uzunluklarının çarpımına eşittir.

Böylece Betül'ün 3 · 5 = 15 metrekare halıya ihtiyacı vardır.

ÇÖZÜM 2.



Kâğıt DE boyunca kesildikten sonra ADE üçgeni biçimindeki parça;

[AD] kenarı, [BC] kenarı ile çakışacak şekilde kâğıdın sağ tarafına yapıştırılır.

Oluşan yeni şekil; kısa kenarı 5 birim, uzun kenarı 6 birim olan bir dikdörtgen olur.

Böylece bu kâğıdın alanı 5 · 6 = 30 birimkare olur.

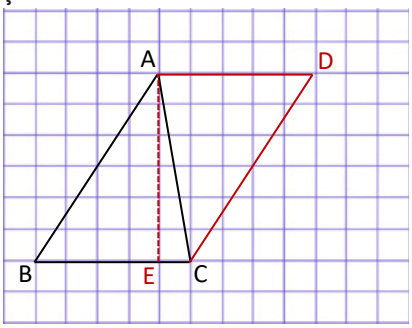
HATIRLATMA

Paralelkenarın alanı, kenar ile bu kenara ait yüksekliğin çarpımı olarak hesaplanır.

[AB] veya [DC] kenarına ait yükseklik, bu kenarlar arasındaki dik uzaklıktır.

[AD] veya [BC] kenarına ait yükseklik, bu kenarlar arasındaki dik uzaklıktır.

ÇÖZÜM 3.



ABC üçgeni, ABCD paralelkenarına tamamlanırsa [AC], paralelkenarın köşegeni olur.

Alan(ABCD) = |AE| · |BC| = 6 · 5 = 30 olur.

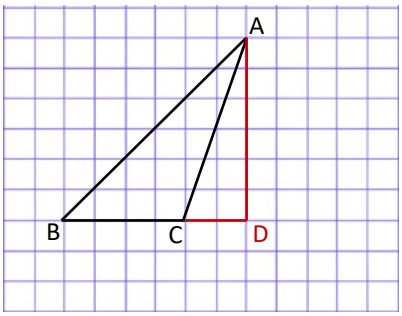
ABC üçgeninin alanı, paralelkenarın alanının yarısı olacağından

$A(\widehat{ABC}) = 30 : 2 = 15$ birimkaredir.

HATIRLATMA

Üçgenin alanı, üçgenin bir kenarının uzunluğu ile o kenara ait yüksekliğinin çarpımının yarısına eşittir.

ÇÖZÜM 4.

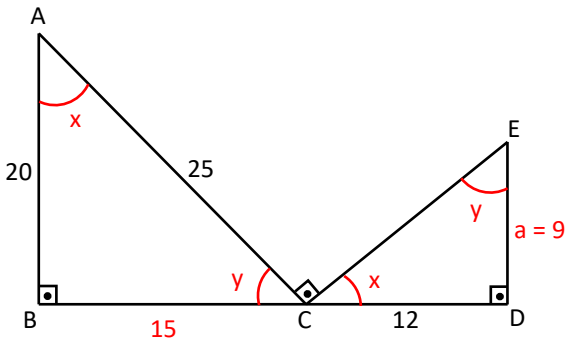


ACB açısı geniş açı olduğundan [BC] kenarına ait yükseklik olan [AD], üçgenin dış bölgesindedir.

|BC| = 4 birim , |AD| = 6 birim olduğundan

$Alan(\widehat{ABC}) = (6 \cdot 4) : 2 = 12$ birimkaredir.

ÇÖZÜM 5.



$m(\widehat{BAC}) = x$, $m(\widehat{ACB}) = y$ olursa $x + y = 90°$ olur.

B, C ve D noktaları doğrusaldır. Böylece $m(\widehat{ECD}) = x$ olur.

ECD üçgeninde iç açılar toplamı 180° olacağından

$m(\widehat{DEC}) = y$ dir.

Böylece ABC ve CDE üçgenleri arasında

Açı – Açı – Açı benzerliği vardır.

$\frac{12}{20} = \frac{a}{15}$ eşitliğinden a = 9 birim bulunur.

$A(\widehat{CDE}) = \frac{9 \cdot 12}{2} = 54$ birimkaredir.

İLİŞKİLENDİRİYORUM

Amaç: Bu bölümde yeni öğreneceğiniz temayı; zihninizde var olan bilgileriniz, yaşantılarınız ve diğer derslerde öğrendiklerinizle ilişkilendirmenizi bekliyoruz.



Günlük yaşamda karşılaştığınız birçok durum, aslında matematiksel bir hesaplama gerektirir.

Bir arazinin sınırlarını belirlemekten bir kumaş parçasının miktarını hesaplamaya kadar bu matematiksel ölçmeyi kullanırız.

• Bir çiftçi, üçgen şeklindeki tarlasının büyüklüğünü (alanını) doğru hesaplayarak ne kadar tohum kullanacağını veya ne kadar hasat bekleyeceğini belirleyebilir.

• Bir mimar veya mühendis, üçgen şeklindeki bir çatı veya destek yapısının ne kadar malzeme gerektirdiğini hesaplamak için alanı kullanabilir.

• Bir tekstilci, üçgen şeklinde bir kumaşın metrekare maliyetini hesaplayarak ürünün fiyatını belirleyebilir.

• Bu gibi durumlarda, üçgenin alanı (yani bir kenar uzunluğu ve o kenara ait yükseklik) arasındaki ilişkiyi bilmek, karmaşık görünen problemleri çözmek için pratik bir araç olur.

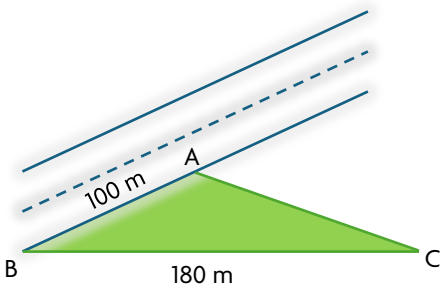
• Üçgende alan bilgisinin, günlük yaşamda karşılaşılan ölçme problemlerinin doğru ve kesin biçimde çözülmesine nasıl katkı sağladığını açıklayınız.

UYGULAYARAK ÖĞRENİYORUM

Amaç: Bu bölümde bilgilerinizi etkinlikler ve uygulamalarla pekiştirmenizi, öğrenmeyi daha kalıcı hâle getirmenizi amaçlıyoruz.

Problemlerde verilen adımları dikkatle uygulayınız. Çalışmanızı dikkatli ve düzenli bir şekilde yapınız.

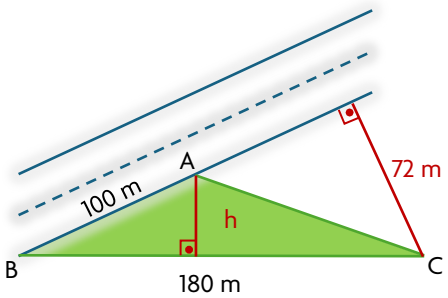
ÖRNEK



Ahmet Bey'in üçgen şeklindeki bahçesinin [AB] kenarı yola bitişik ve 100 metredir. [BC] kenarı 180 metre ve C köşesinin yola en yakın uzaklığı 72 metredir. Ahmet Bey, [BC] kenarından başlayıp A köşesinden çıkacak şekilde bahçesinden ana yola bir bağlantı yolu açmak istemektedir.

Buna göre bağlantı yolunun bahçe içindeki uzunluğu <u>en az</u> kaç metredir?

ÇÖZÜM



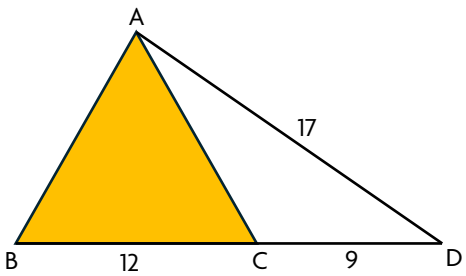
C noktasının yola en yakın uzaklığı dik uzaklıktır.

A noktasının [BC] kenarına en yakın uzaklığı dik uzaklıktır. Bu uzaklık h birim olsun.

$$A(\widehat{ABC}) = \frac{h.180}{2} = \frac{72.100}{2}$$

$$h = \frac{7200}{180} = 40 \text{ metre bulunur.}$$

ÖRNEK



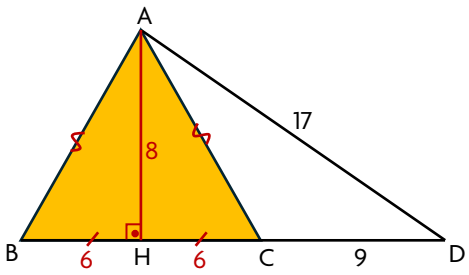
Şekildeki ABD bir üçgendir.

$|AB| = |AC|$, $|BC| = 12$ birim,

$|CD| = 9$ birim ve $|AD| = 17$ birimdir.

Buna göre $A(\widehat{ABC})$ **kaç birimkaredir?**

ÇÖZÜM



ABC ikizkenar olduğundan [AH] yüksekliği, simetri eksenidir ve [BC] kenarını eşit iki parçaya böler.

AHD dik üçgeninde $|HD| = 6 + 9 = 15$ birim olur.

$|AD| = 17$ birimdir.

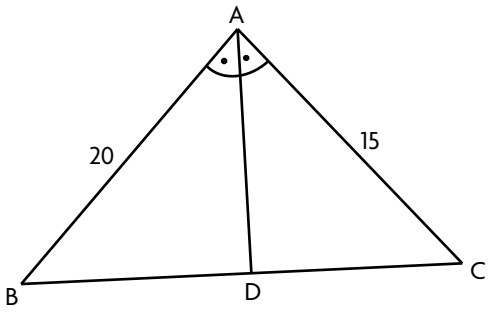
8-15-17 özel üçgeninden $|AH| = 8$ birim olur.

$$A(\widehat{ABC}) = \frac{8.12}{2} = 48 \text{ birimkare bulunur.}$$

HATIRLATMA

Yükseklikleri eşit olan iki üçgenin alanlarının oranı, tabanlarının oranına eşittir.

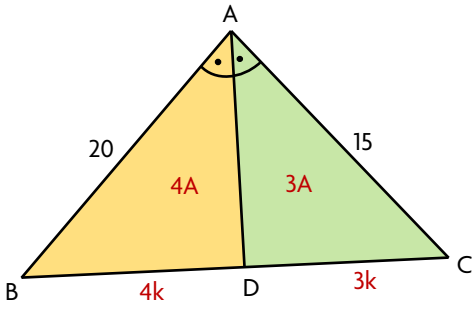
ÖRNEK



Şekildeki ABC üçgeninde AD doğru parçası, BAC açısının açıortayıdır. $|AB| = 20$ birim , $|AC| = 15$ birim ve $\text{Alan}(\widehat{ABC}) = 84$ birimkaredir.

Buna göre $A(\widehat{ADC})$ **kaç birimkaredir?**

ÇÖZÜM



Üçgende açıortay teoremi gereği $\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|BD|}{|DC|} = \frac{20}{15} = \frac{4}{3}$ olur.

Yükseklikleri eşit olan üçgenlerin alanları oranı, tabanları oranına eşit olacağından,

$$\frac{A(\widehat{ABD})}{A(\widehat{ADC})} = \frac{|BD|}{|DC|} = \frac{4}{3}$$ olur.

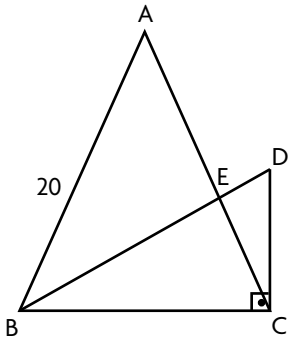
Böylece $A(\widehat{ABD}) = 4A$ ve $A(\widehat{ADC}) = 3A$ ise $4A + 3A = 84$ birim

$7A = 84$ birim ve $A = 12$ birimkare bulunur. $A(\widehat{ADC}) = 3 \cdot 12 = 36$ birimkare olur.

HATIRLATMA

Tabanları eşit olan iki üçgenin alanlarının oranı, yüksekliklerinin oranına eşittir.

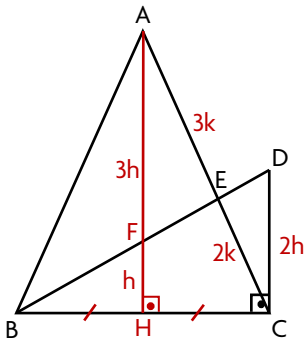
ÖRNEK



Şekilde ABC ikizkenar üçgeninin alanı, BDC üçgeninin alanının 2 katı;
[BC] ⊥ [DC] ve |AB| = |AC| = 20 birimdir.

Buna göre |EC| kaç birimdir?

ÇÖZÜM



ABC ve BDC üçgeninin ortak kenarı [BC] taban olarak alınırsa yükseklikleri oranı, alanları oranına eşit olur.

|DC| = 2h olursa |AH| = 4h olur.

BDC üçgeninde [FH], BDC üçgeninin [DC] tabanına ait orta tabanıdır dolayısıyla |FH| = h olur.

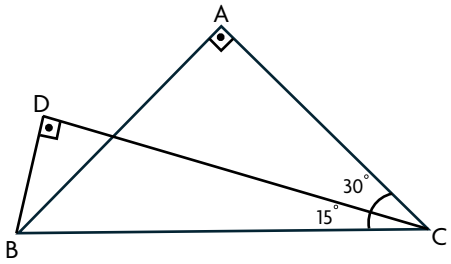
|AF| = 4h – h = 3h

[AF] // [DC] olduğundan AFE ve CDE üçgenleri benzerdir.

$\frac{|AF|}{|DC|} = \frac{|AE|}{|EC|} = \frac{3k}{2k} \Rightarrow$ |AC| = 3k + 2k = 20 olduğundan 5k = 20 ve k = 4 olur.

|EC| = 2 · 4 = 8 birim bulunur.

ÖRNEK

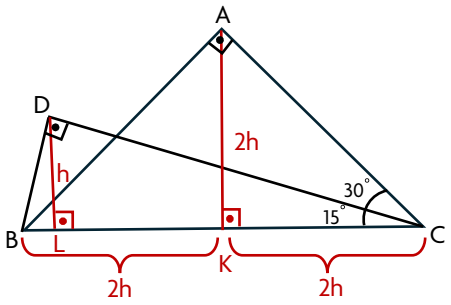


Şekilde ABC ve DBC birer dik üçgendir.

$[AB] \perp [AC]$, $[BD] \perp [DC]$, $m(\widehat{ACD}) = 30^o$ ve $m(\widehat{BCD}) = 15^o$ verilmiştir.

Buna göre ABC üçgeninin alanın BDC üçgeninin alanına oranı kaçtır?

ÇÖZÜM



$m(\widehat{ACB}) = 45^o$ olduğundan ABC ikizkenar dik üçgendir.

ABC ve DBC üçgenlerinin ortak kenarı [BC] taban olarak alınırsa alanların oranını bulmak için yüksekliklerin oranını bulmak yeterlidir. D noktasından [BC] na inilen dikme ayağı L noktası olsun.

$|BC| = 4h$ olursa $|DL| = h$ olur.

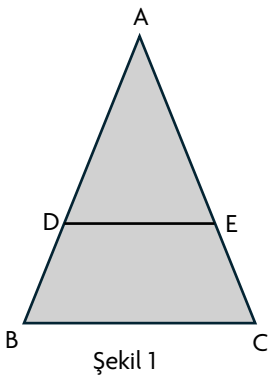
A noktasından [BC] na inilen dikme ayağı K noktası olmak üzere $|BK| = |KC| = |AK| = 2h$ olur.

Böylece $\dfrac{A(\widehat{ABC})}{A(\widehat{DBC})} = \dfrac{2h}{h} = 2$ bulunur.

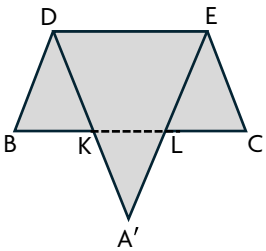
HATIRLATMA

Benzer üçgenlerin alanlarının oranı, benzerlik oranının karesine eşittir.

ÖRNEK



Şekil 1

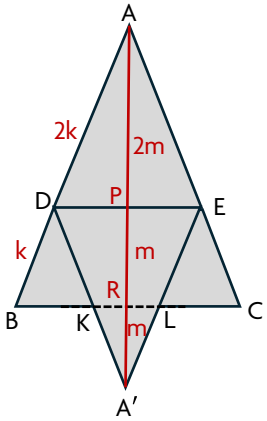


Şekil 2

Şekil 1'deki ABC üçgeninde $|AD| = 2|DB|$ ve $[DE] // [BC]$ dir. ABC üçgeni [DE] boyunca Şekil 2'deki gibi katlandığında [BC] kenarı, üzerindeki K ve L noktalarıyla kesişmektedir.

Buna göre ABC üçgeninin alanının DKLE dörtgensel bölgesinin alanına oranı kaçtır?

ÇÖZÜM



Üçgen geri katlandığında oluşacak [AA′] nı çizelim,

[DE] ve [KL] ile kesişimlerini P ve R noktaları olarak isimlendirelim.

Tales teoremi gereği |AP| = 2m, |PR| = m olur. Böylece |AP| = |PA′| olduğundan |RA′| = m olur.

Benzerlik oranının karesi alanların oranıdır.

$\frac{A(\widehat{A'KL})}{A(\widehat{A'DE})} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ bulunur.

$A(\widehat{A'KL}) = A$ olursa $A(\widehat{A'DE}) = 4A$ olur. Alan(DKLE) = 4A – A = 3A

$\frac{A(\widehat{ADE})}{A(\widehat{ABC})} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$

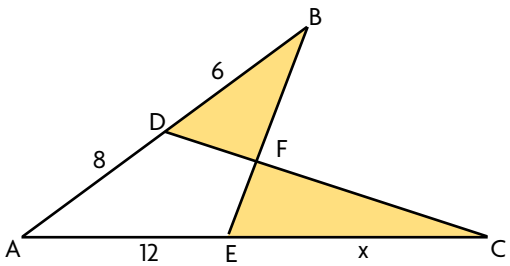
$A(\widehat{A'DE}) = A(\widehat{ADE}) = 4A$ ise $A(\widehat{ABC}) = 9A$ dır.

Böylece ABC üçgeninin alanı, DKEL dörtgeninin alanının 3 katı olur.

HATIRLATMA

Üçgende herhangi iki kenar ile bu kenarlar arasındaki açının sinüsünün çarpımının yarısı, o üçgenin alanını verir.

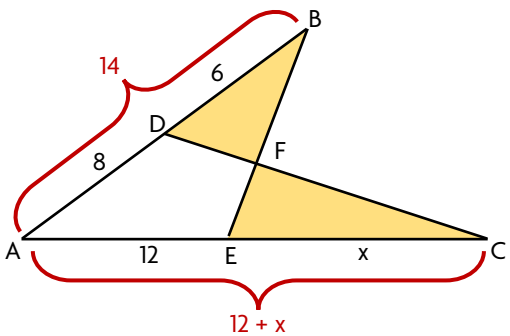
ÖRNEK



Şekilde ABE ve ADC birer üçgen, |AD| = 8 birim, |DB| = 6 birim, |AE| = 12 birimdir.

Boyalı bölgelerin alanları eşit olduğuna göre |EC| = x kaç birimdir?

ÇÖZÜM



Boyalı alanlar eşit ise AEFD dörtgeni ortak alan olduğundan $A(\widehat{ABE}) = A(\widehat{ADC})$ ve BAC bu iki üçgenin ortak açısıdır.

$\frac{\sin\hat{A} \cdot 14 \cdot 12}{2} = \frac{\sin\hat{A} \cdot 8 \cdot (12 + x)}{2}$ eşitliğinde gerekli sadeleştirmeler ve işlemler yapıldığında x = 9 birim olarak bulunur.

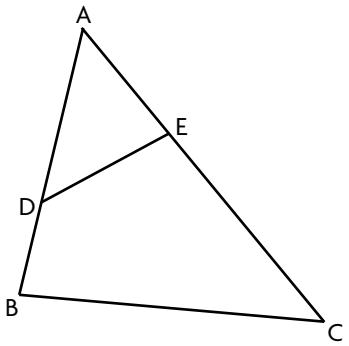
DEĞERLENDİRİYORUM

Amaç: Bu bölümde öğrendiklerinizi gözden geçirmenizi, kendi öğrenme sürecinizi değerlendirmenizi ve eksiklerinizi fark etmenizi amaçlıyoruz.

Soruları dikkatle yanıtlayınız. Cevaplarınızı geri bildirimlerle karşılaştırarak eksik gördüğünüz noktaları tekrar ediniz.

SORULAR

1. Şekilde ABC bir üçgen, |AB| = 3|DB| ve |AC| = 4|AE| veriliyor.

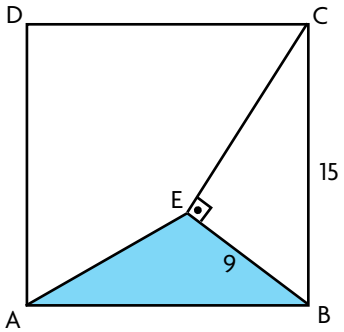


ABC üçgeninin alanının ADE üçgeninin alanına oranını;

a) Sinüslü alan formülüyle bulunuz.

b) Yükseklikleri eşit üçgenlerin alanları oranın tabanları oranına eşit olması özelliğini kullanarak bulunuz.

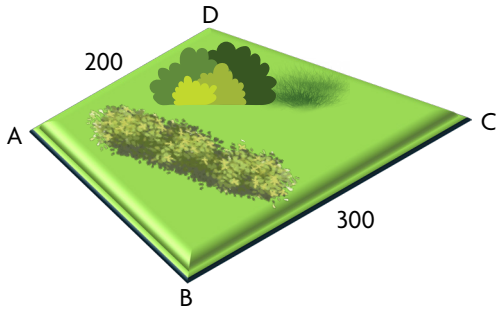
2. Şekilde ABCD bir kare, [EB] ⊥ [EC], |EB| = 9 birim, |BC| = 15 birimdir.



a) EBA üçgeninin alanını sinüslü alan formülünü kullanarak bulunuz.

b) EBA üçgeninin alanını yükseklik ve tabanın çarpımından bulunuz. (İpucu: Benzerlik kullanarak ya da eş üçgenler oluşturarak bulabilirsiniz.)

3. Şekilde ABCD ikizkenar yamuk şeklinde bir bahçe görseli verilmiştir. [AD]//[BC], |AB| = |CD|, |AD| = 200 metre ve |BC| = 300 metredir.



Yaşları 24 ve 36 olan iki kardeş, bu bahçeyi paylaşmak istediğine göre

a) Yaşlarıyla doğru orantılı olacak şekilde nasıl paylaşabileceklerini hesaplayınız.

b) Eşit şekilde nasıl paylaşabileceklerini açıklayınız.

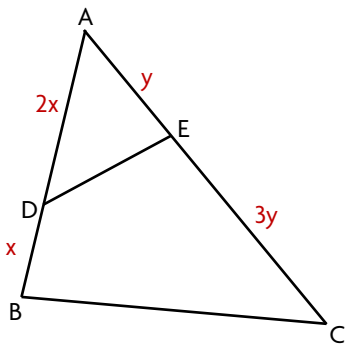
c) [AC] ve [BD] köşegenleri sınır olarak çizildiğinde oluşan dört bölgenin alanlarının hangi sayılarla doğru orantılı olduğunu bulunuz.

GERİ BİLDİRİM

Bu geri bildirim sayesinde kendi cevabınızı kontrol edebilir, hatalarınızı düzelterek öğrenmenizi pekiştirebilirsiniz.

ÇÖZÜM 1.

a)

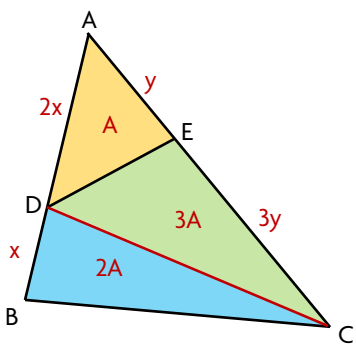


ABC ve ADE üçgenlerinde BAC ortak açıdır.

Verilen oranlar kenarlar üzerine yazılırsa

$$\frac{A(\widehat{ABC})}{A(\widehat{AED})} = \frac{\frac{1}{2}\sin A \cdot 3x \cdot 4y}{\frac{1}{2}\sin A \cdot 2x \cdot y} = 6 \text{ bulunur.}$$

b)



DC noktalarını birleştiren doğru parçası çizilir.

ADE ve EDC üçgenlerinin tepe noktası D noktası olursa yükseklikleri eşittir.

|EC| = 3|AE| olduğundan $A(\widehat{ADE}) = A$ olursa $A(\widehat{EDC}) = 3A$ olur.

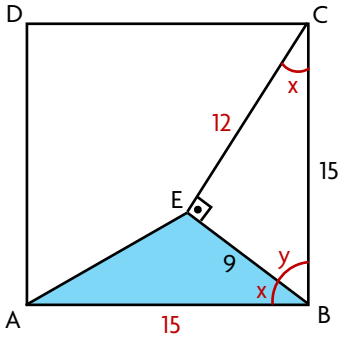
ACD ve DCB üçgenlerinin tepe noktası C olduğundan yükseklikleri eşittir.

|AD| = 2|DB| ise $A(\widehat{ADC}) = 4A$ olduğundan $A(\widehat{DBC}) = 2A$ olur.

Böylece $\frac{A(\widehat{ABC})}{A(\widehat{AED})} = \frac{A + 2A + 3A}{A} = 6$ bulunur.

ÇÖZÜM 2.

a)



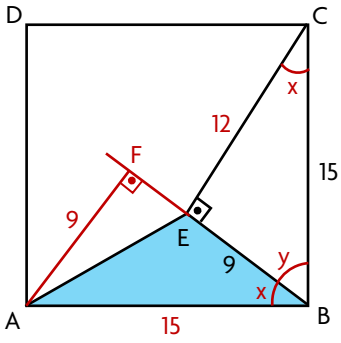
ABCD kare olduğundan |BC| = |AB| = 15, 3k-4k-5k üçgeninden |EC| = 12 birim olur.

$m(\widehat{ECB}) = x$, $m(\widehat{CBE}) = y$ olursa $x + y = 90^o$ olduğundan $m(\widehat{EBA}) = x$ bulunur.

$\sin x = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$ olduğundan

$A(\widehat{EBA}) = \frac{1}{2} \cdot \sin x \cdot 9 \cdot 15 = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} \cdot 9 \cdot 15 = \frac{81}{2}$ birimkare bulunur.

b)



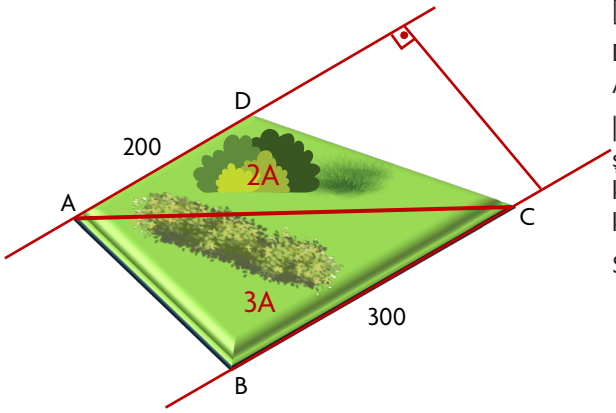
[BE] uzatılıp A noktasından inilen dikme ayağı F noktası olarak isimlendirilirse EBC ve FAB üçgenleri eş üçgen olur.

Böylece |AF| = 9 birim bulunur. [AF] yükseklik, [EB] taban olursa

$A(\widehat{EBA}) = \frac{9.9}{2} = \frac{81}{2}$ birimkare bulunur.

ÇÖZÜM 3.

a)



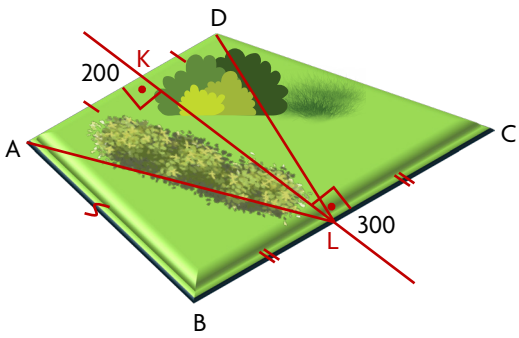
[AD]//[BC] olduğundan aralarındaki dik uzaklık sabittir.

Dolayısıyla [AC] köşegeni sınır olarak çizildiğinde oluşan ADC ve ABC üçgenlerinin [AD] ve [BC] kenarlarına ait yükseklikleri eşittir.

|AD| nun |BC| na oranı, küçük kardeşin yaşının büyük kardeşin yaşına oranı eşit olacağından ADC üçgeni şeklindeki bahçe küçük kardeşin, ABC üçgeni şeklindeki bahçe büyük kardeşin olacak şekilde paylaştırılabilir.

Siz de başka nasıl bir paylaşım yapılabileceğini yorumlayınız.

b)



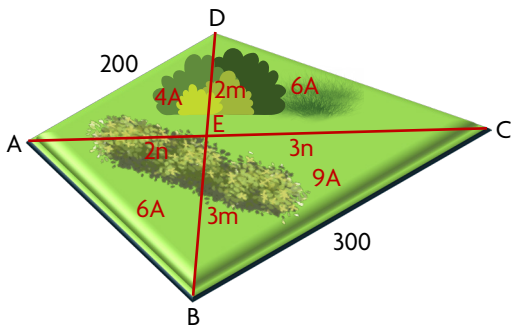
[AD] ve [BC] kenarlarına ait orta dikme doğrusunu sınır olarak çizelim, dikme ayaklarını K ve L noktaları ile isimlendirelim.

[AD]//[BC] olduğu için yamuğu ayırdığımız dört üçgensel bölgenin yüksekliği [KL] olur.

$A(\widehat{AKL}) = A(\widehat{KLD})$ ve $A(\widehat{ABL}) = A(\widehat{CLD})$ olduğundan [KL] sınırı ile eşit bir paylaşım yapılabilir.

Siz de başka nasıl eşit bir paylaşım yapılabileceğini inceleyiniz.

c)



Köşegenlerin kesim noktası E olsun. [AD]//[BC] olduğundan AED ile CEB üçgenleri benzerdir.

$\frac{|AD|}{|BC|} = \frac{|AE|}{|EC|} = \frac{|DE|}{|EB|} = \frac{200}{300} = \frac{2}{3}$ olur.

Alanların oranı benzerlik oranının karesi olduğundan

$\frac{A(\widehat{ADE})}{A(\widehat{CEB})} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$ bulunur.

Böylece $A(\widehat{AED}) = 4A$ olursa $A(\widehat{CEB}) = 9A$ olur.

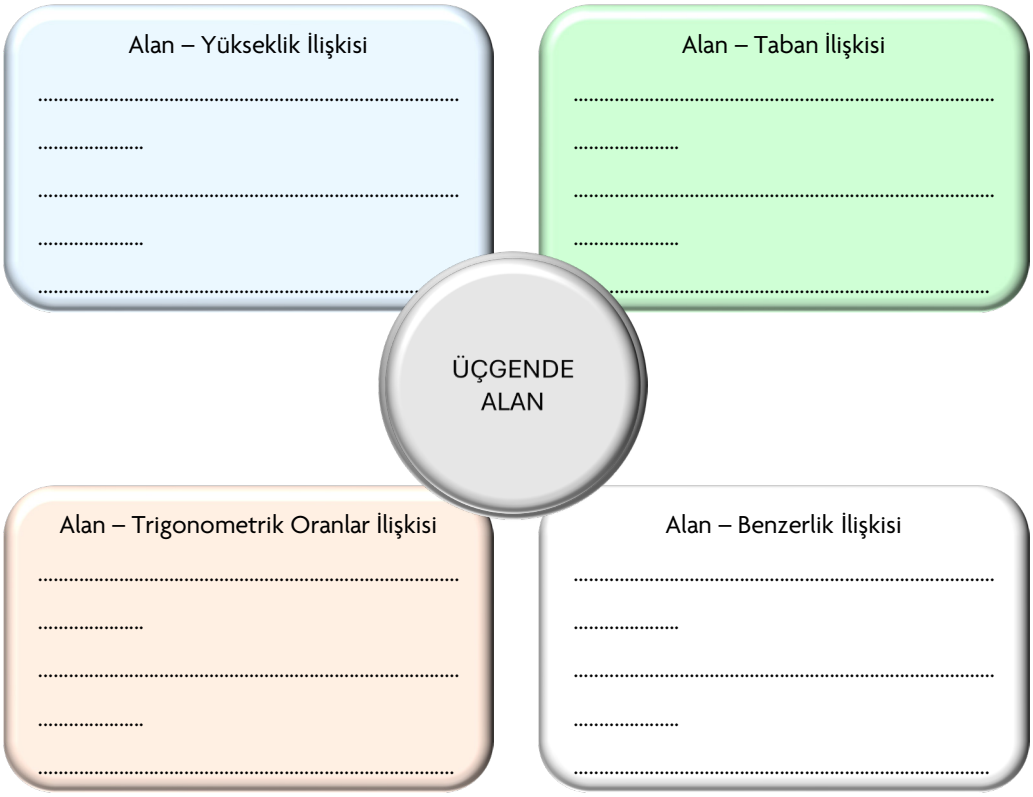
Yükseklikleri eşit olan AED üçgeni ile DEC üçgeninin tabanları oranından $A(\widehat{DEC}) = 6A$ olur.

Yükseklikleri eşit olan AED üçgeni ile AEB üçgeninin tabanları oranından $A(\widehat{AEB}) = 6A$ olur.

ÖĞRENDİKLERİM

Amaç: Bu bölümde öğrendiklerinizi özetlemenizi, günlük hayatta ve farklı derslerde kullanabileceğiniz bilgileri belirlemenizi amaçlıyoruz.

Üçgende alan ile ilgili verilen anahtar kavramları ve önemli bilgileri kendi cümlelerinizle yazınız.



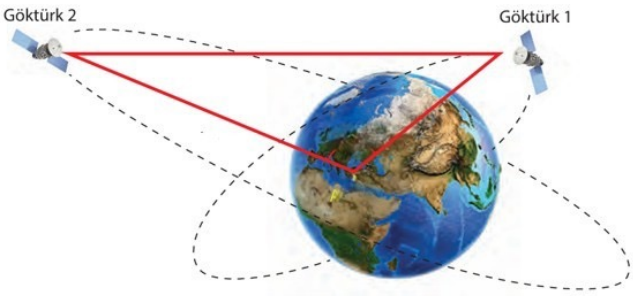
Daha fazlası için karekodu okutunuz.



SİNÜS VE KOSİNÜS TEOREMLERİ

BAŞLARKEN

Bu bölümde yer alan etkinlikler, bireysel öğrenme yolculuğunuzda size rehberlik etmek ve öğrenme sürecinizi desteklemek amacıyla hazırlanmıştır. Çalışmalarınızı yürütürken "Hazırlanıyorum", "İlişkilendiriyorum", "Uygulayarak Öğreniyorum", "Değerlendiriyorum", "Yansıtıcı Yazı" ve "Öğrendiklerim" etkinliklerini sırası ile takip etmeniz ve etkinliklerin sonunda yer alan geri bildirimleri inceleyerek bölümleri tamamlamanız beklenmektedir.



Sinüs teoremi, üçgende doğrudan ölçülmesi zor olan uzunlukların, bilinen kenar ve açı ölçülerinden yararlanılarak hesaplanmasını sağlar. Özellikle bir üçgende bazı açı ve kenar ölçüleri bilindiğinde, diğer kenar uzunluklarının bulunmasında kullanılır. Bu yönüyle sinüs teoremi, trigonometrinin uzaklık ve konum hesaplamalarında başvurduğu temel araçlardan biridir.

Yandaki görselde, Göktürk-1 ve Göktürk-2 uydularının konum belirleme çalışmalarında kullanılan üçgenleme mantığı, sinüs teoremiyle basitleştirilmiş olarak gösterilmiştir.

Kullanım Alanları:

- **Astronomi:** Gök cisimlerinin ufuktan yüksekliklerinin ve Dünya'ya olan uzaklıklarının hesaplanmasında kullanılır. (Örnek: Yıldız yüksekliği hesapları).
- **Haritacılık ve Jeodezi:** Arazide doğrudan ölçülmesi zor olan uzaklıkların, üçgenleme yöntemiyle hesaplanmasında kullanılır.
- **Navigasyon:** Gemi ve uçakların yön ve konum belirleme işlemlerinde, üçgenleme esasına dayalı hesaplamalarda kullanılır

NOT

El-Battani (858–929), sinüs ve kosinüs kavramlarını sistematik biçimde kullanan ilk bilim insanlarından biridir. Kitab ez-Zij adlı eserinde bu kavramları astronomi problemlerine uygulamıştır.

Nasirüddin Tusi (1201–1274), küresel üçgenler üzerindeki çalışmalarıyla trigonometrinin gelişimine önemli katkılar sağlamıştır.

Bu çalışmalar, sinüs ve kosinüs teoremlerinin hem düzlemsel hem de küresel problemlerde kullanılmasının önünü açmıştır.

HAZIRLANIYORUM

Amaç: Bu bölümde ön bilgilerinizi hatırlamanızı ve temaya hazırlıklı hâle gelmenizi amaçlıyoruz.

Aşağıda yer alan ifadeler, bu temada tamamlanması hedeflenen öğrenme çıktısını ele almadan önce sahip olmanız gereken bazı temel becerileri içermektedir. Lütfen her bir ifadeyi dikkatlice okuyunuz.

- Eğer ifadedeki bilgiye hâkim olduğunuzu düşünüyorsanız kutucuğu işaretleyiniz.
- Eğer konuyu henüz tam olarak bilmediğinizi ya da hatırlamadığınızı düşünüyorsanız kutucuğu boş bırakınız.

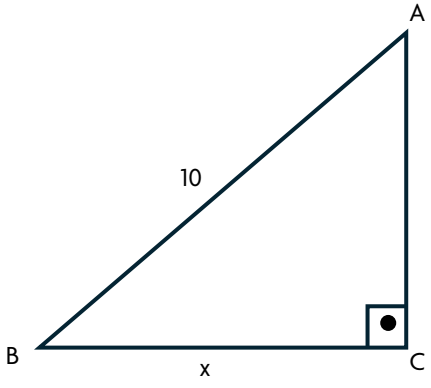
Bu çalışma notla değerlendirilmeyecek olup amacı temaya ne ölçüde hazır olduğunuzu belirlemektir.

SORULAR	ÖN ÖĞRENME KONTROL LİSTESİ	✓
1	Dik üçgende trigonometrik oranları bulabilirim.	☐
2	Dik üçgende trigonometrik özdeşlikleri bulabilirim.	☐
3	Ölçüleri 30°, 45° ve 60° olan açıların trigonometrik oranlarını bulabilirim.	☐
4	Birim çember yardımıyla geniş açıların trigonometrik oranlarını bulabilirim.	☐
5	Bir üçgenin iki kenar uzunluğu ve bu kenarlar arasındaki açının ölçüsü bilindiği durumda üçgenin alanını bulabilirim.	☐
6	Üçgenin herhangi iki kenarının uzunluğu ve bu iki kenar arasındaki açının sinüs değeri biliniyorsa bu üçgenin alanını bulabilirim.	☐

"Ön Öğrenme Kontrol Listesi"ni doldurduktan sonra aşağıda verilen "Kontrol Noktası" sorularını çözünüz ve cevaplarınızı kontrol ediniz.

KONTROL NOKTASI

SORU 1.



ABC dik üçgen

$[BC] \perp [AC]$

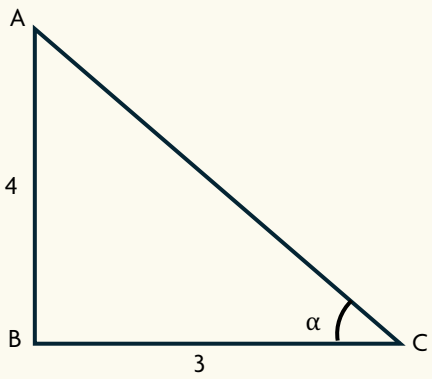
$|AB| = 10$ birim

$|BC| = x$ birim

$\tan\widehat{A} = \frac{3}{4}$

Verilenlere göre x değerini bulunuz.

SORU 2.



ABC üçgen
|AB| = 4 birim
|BC| = 3 birim
$m(\widehat{ACB}) = \alpha$

Açıklama:

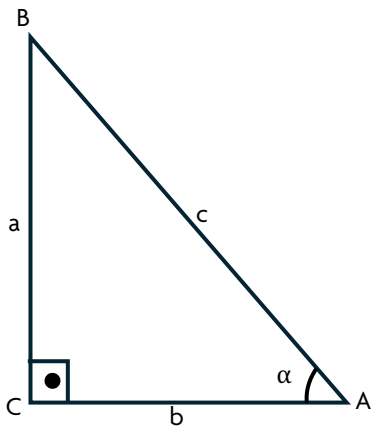
Verilenlere göre tanα + cotα **ifadesinin değeri kaçtır?**

Çözüm

ABC üçgeninde $\tan\alpha = \frac{4}{3}$ ve $\cot\alpha = \frac{3}{4}$ olduğundan $\frac{4}{3} + \frac{3}{4} = \frac{25}{12}$ olarak bulunur.

Yukarıda bir soru ve bu soruya ait çözüm verilmiştir. Çözümün doğru ya da yanlış olma durumunu sebebi ile birlikte açıklama için boş bırakılan kısma yazınız.

SORU 3.



ABC dik üçgen
[BC] ⊥ [CA]
|BC| = a birim
|AC| = b birim
|AB| = c birim
$m(\widehat{BAC}) = \alpha$

Bir öğretmen, öğrencilerinden aşağıdaki yönergeleri izleyerek ABC üçgeni üzerinde çalışmalarını istemiştir.

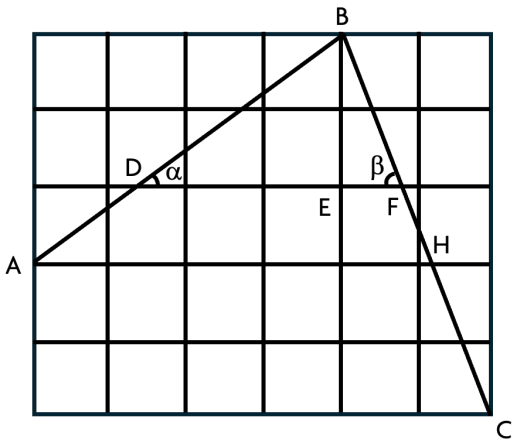
I. sinα değerini bulunuz.

II. cosα değerini bulunuz.

III. sinα ve cosα değerlerini oranlayınız.

Buna göre öğretmen, öğrencilerinin hangi trigonometrik özdeşliği keşfetmelerini sağlamayı amaçlamıştır? Yazınız.

SORU 4. Şekilde 30 eş kareden oluşan bir zemin verilmiştir. A, B ve C noktaları birim karelerin köşeleri üzerindedir.



Yukarıdaki şekil ile ilgili öğrenci yorumları aşağıdaki tabloda verilmiştir. Yorumları inceleyerek doğru veya yanlış seçeneklerinden uygun olanı işaretleyiniz.

ÖĞRENCİLER	ÖĞRENCİ YORUMLARI	DOĞRU	YANLIŞ
1. Öğrenci	Eş karelerin bir kenar uzunlukları x birim ise BDE dik üçgeninde |DE|, x cinsinden bulunabilir.		
2. Öğrenci	BDE ve BAH açılarının ölçüleri eşittir çünkü bu açılar yöndeş açılardır.		
3. Öğrenci	$\sin\alpha = \frac{3}{5}$		
4. Öğrenci	$\tan\alpha = \frac{2}{2,5}$		
5. Öğrenci	$\tan\beta = \frac{2}{\cos\alpha}$		
6. Öğrenci	$\sin(90° - \alpha) = 2 \cdot \cot\beta$		

SORU 5.

x bir gerçek sayı olmak üzere

$\sin\alpha = \dfrac{x-1}{\sqrt{5}}$

$\cos\alpha = \dfrac{x+2}{2\sqrt{5}}$

eşitlikleri veriliyor.

Buna göre x kaçtır?



Yukarıdaki soruyu arkadaşı Ahmet'e yönelten Faruk ile Ahmet arasındaki diyalog yanda verilmiştir. Ahmet, soruyu aşağıda verilen şekilde beş adımda çözmüştür.

ÇÖZÜM

I. $\left(\dfrac{x-1}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\dfrac{x+2}{2\sqrt{5}}\right)^2 = 1$

II. $\dfrac{(x-1)^2}{5} + \dfrac{(x+2)^2}{20} = 1$

III. $4(x^2 - 2x + 1) + (x^2 + 4x + 4) = 20$

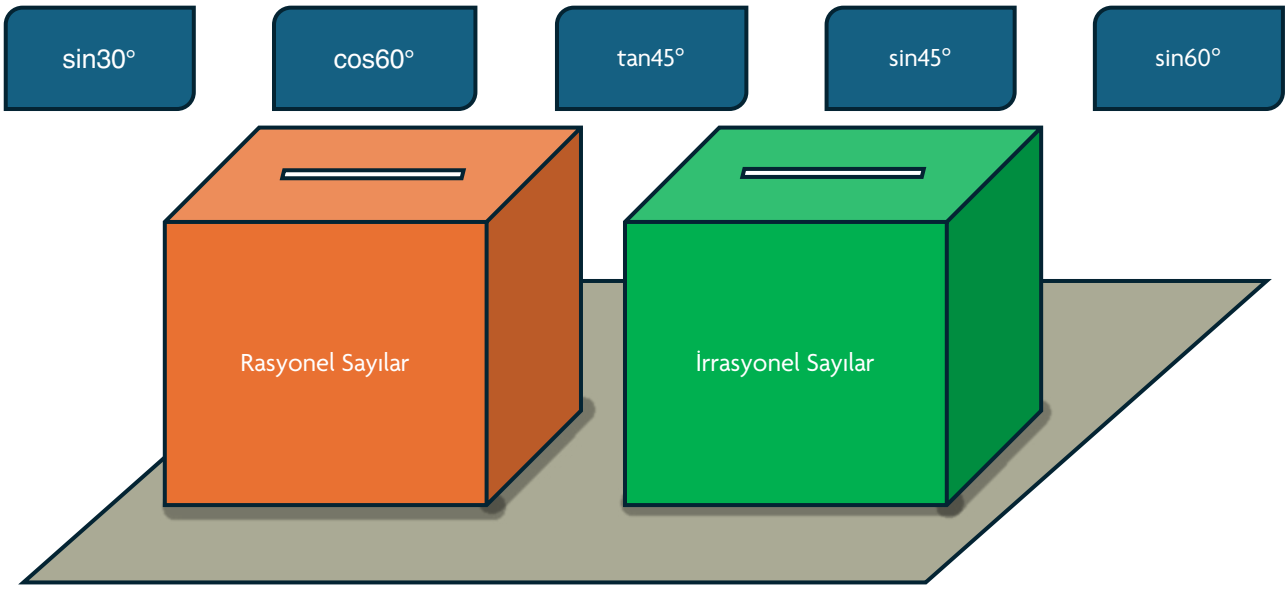
IV. $5x^2 - 4x - 12 = 0$

V. $(5x + 6)(x - 2) = 0$

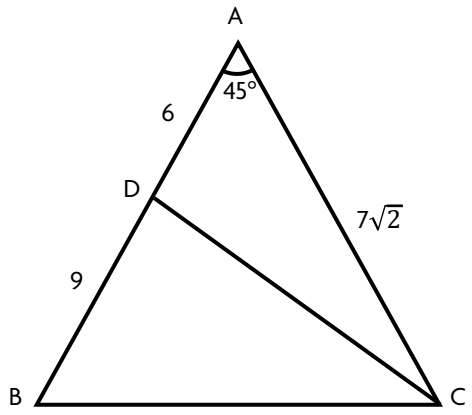
VI. $x = -\dfrac{6}{5}$ veya $x = 2$ olur.

Çözümü inceleyerek hata olup olmadığını kontrol ediniz, hata varsa nedenini açıklayınız.

SORU 6. Aşağıdaki kartların üzerine bazı trigonometrik ifadeler yazılmıştır. Bu kartları, üzerlerindeki ifadelerin değerlerine göre hangi kutulara yerleştirmeniz gerektiğini belirleyiniz.



SORU 7



ABC üçgen
$|AC| = 7\sqrt{2}$ birim
$|DB| = 9$ birim
$|AD| = 6$ birim
$m(\widehat{BAC}) = 45°$

Verilenlere göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

I. ABC üçgeninin alanı kaç birimkaredir?

II. BDC üçgeninin alanı kaç birimkaredir?

III. |BC| kaç birimdir?

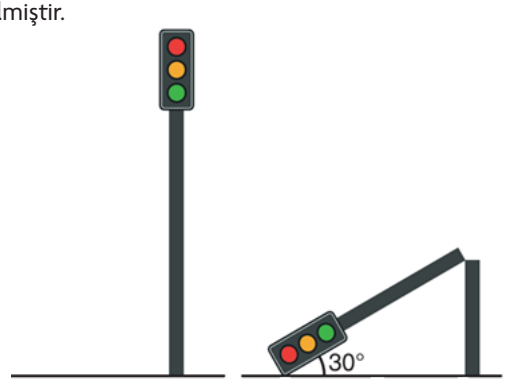
SORU 8. Aşağıda verilen trigonometrik değerleri birim çemberden faydalanarak bulunuz.

a) cos150° ve sin150°

b) sin135° ve cos135°

c) sin300° ve cos300°

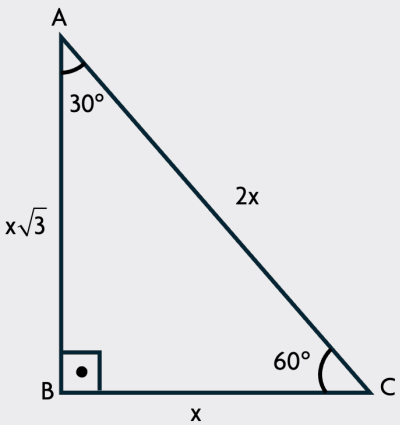
SORU 9. Şekil 1'de bir trafik lambası gösterilmektedir. Bir aracın çarpması sonucu kırılan direk, Şekil 2'deki gibi yer düzlemi ile 30° lik bir açı yapacak konuma gelmiştir.



Şekil 1 Şekil 2

Direk kırılıp yere çarpana kadar α derece döndüğüne göre dönme açısının kosinüs değeri ile sinüs değerinin çarpımı kaçtır?

HATIRLATMA



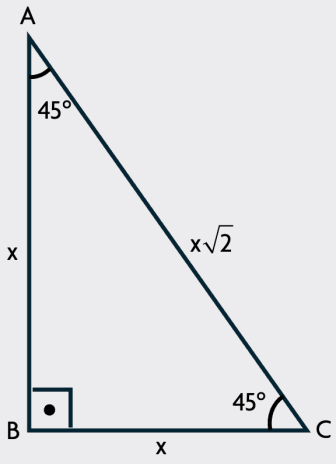
$$\sin 30° = \frac{x}{2x} = \frac{1}{2} \qquad \tan 30° = \frac{x}{x\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sin 60° = \frac{x\sqrt{3}}{2x} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \tan 60° = \frac{x\sqrt{3}}{x} = \sqrt{3}$$

$$\cos 30° = \frac{x\sqrt{3}}{2x} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cot 30° = \frac{x\sqrt{3}}{x} = \sqrt{3}$$

$$\cos 60° = \frac{x}{2x} = \frac{1}{2} \qquad \cot 60° = \frac{x}{x\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

HATIRLATMA



$$\sin 45° = \frac{x}{x\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos 45° = \frac{x}{x\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

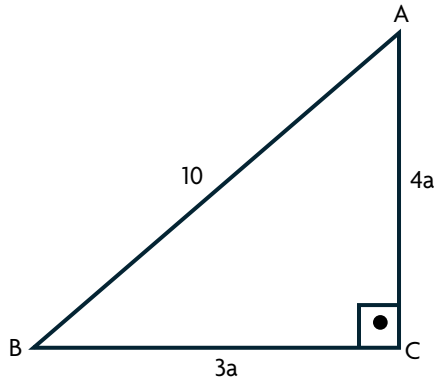
$$\tan 45° = \frac{x}{x} = 1$$

$$\cot 45° = \frac{x}{x} = 1$$

GERİ BİLDİRİM

Bu geri bildirim sayesinde kendi cevabınızı kontrol edebilir, hatalarınızı düzelterek öğrenmenizi pekiştirebilirsiniz.

ÇÖZÜM 1.



$\tan\widehat{A} = \frac{3}{4}$ olduğundan

$\tan\widehat{A} = \frac{|BC|}{|AC|} = \frac{3}{4}$ olur.

Buradan $|AC| = 4 \cdot a$ ve $|BC| = 3 \cdot a$ olur.

ABC üçgeni 3-4-5 özel dik üçgeni olduğundan

$|AB| = 5 \cdot a$

$5 \cdot a = 10$

$a = 2$ birim olarak bulunur.

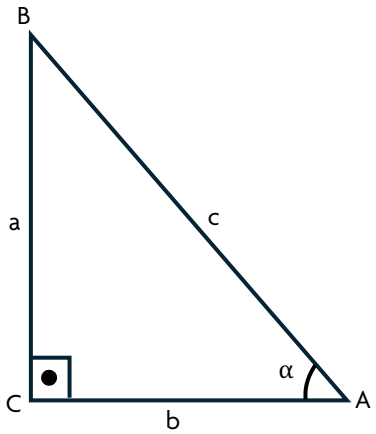
$x = 3 \cdot a$

$x = 6$ birim olur.

ÇÖZÜM 2.

Açıklama: ABC üçgeni dik üçgen değildir. tanα ve cotα değerleri verilenlerle bulunamaz. Çözümde ABC'nin dik üçgen olduğu kabul edilerek çözüm yapıldığından çözüm hatalıdır.

ÇÖZÜM 3.



ABC üçgeninde trigonometrik oranları yazalım.

$\sin\alpha = \frac{a}{c}$

$\cos\alpha = \frac{b}{c}$

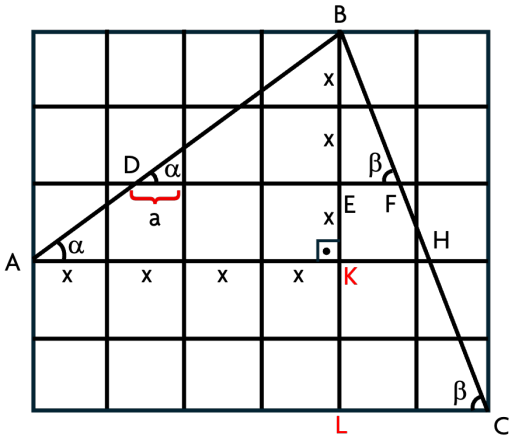
$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{a}{c} \cdot \frac{c}{b}$

$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{a}{b}$

$\tan\alpha = \frac{a}{b}$

olduğundan $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha$ özdeşliği ispatlanmıştır.

ÇÖZÜM 4.



1. Öğrenci: [DE] // [AK] olduğundan $m(\widehat{BDE}) = m(\widehat{BAK})$ yöndeş açılardır.

BAK dik üçgeninde

$\frac{3}{4} = \frac{2x}{2x+a}$

$6 \cdot x + 3a = 8 \cdot x$ olur.

$2x = 3a$

$a = \frac{2x}{3}$ olarak bulunur. Buradan $|DE| = 2x + \frac{2x}{3} = \frac{8x}{3}$ olur.

2. Öğrenci: [DE] // [AK] olduğundan BDE ve BAH yöndeş açılardır ve ölçüleri eşittir. $m(\widehat{BDE}) = m(\widehat{BAH})$

3. Öğrenci: BAK dik üçgeninden (3-4-5 özel dik üçgeni) $|AB| = 5 \cdot x$ olur.

Buradan $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ olarak bulunur.

4. Öğrenci: $\tan\alpha = \frac{3}{4}$ olduğundan $\tan\alpha = \frac{2}{2,5} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$ yanlış olur.

5. Öğrenci: BLC dik üçgeninde $\tan\beta = \frac{5}{2}$ ve $\cos\alpha = \frac{4}{5}$

$\tan\beta \cdot \cos\alpha = \frac{5}{2} \cdot \frac{4}{5} = 2$ olur. Buradan $\tan\beta \cdot \cos\alpha = 2$ ve $\tan\beta = \frac{2}{\cos\alpha}$ olur.

6. Öğrenci: $\sin(90° - \alpha) = 2 \cdot \cot\beta$ eşitliğini kontrol edelim.

$\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha = \frac{4}{5}$

BLC dik üçgeninde $\cot\beta = \frac{2}{5}$ olarak bulunur. O hâlde eşitlik doğrudur.

ÖĞRENCİLER	ÖĞRENCİ YORUMLARI	DOĞRU	YANLIŞ
1. Öğrenci	Eş karelerin bir kenar uzunlukları x birim ise BDE dik üçgeninde |DE|, x cinsinden bulunabilir.	✓	
2. Öğrenci	BDE ve BAH açılarının ölçüleri eşittir, çünkü bu açılar yöndeş açılardır.	✓	
3. Öğrenci	$\sin\alpha = \frac{3}{5}$	✓	
4. Öğrenci	$\tan\alpha = \frac{2}{2,5}$		✓
5. Öğrenci	$\tan\beta = \frac{2}{\cos\alpha}$	✓	
6. Öğrenci	$\sin(90° - \alpha) = 2 \cdot \cot\beta$	✓	

ÇÖZÜM 5.

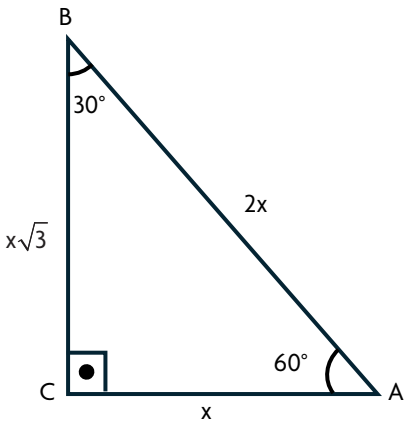
Açıklama: $x = -\frac{6}{5}$ değeri $\sin\alpha = \frac{x-1}{\sqrt{5}}$ ifadesinde yerine yazıldığında $\sin\alpha = -\frac{11}{5\sqrt{5}}$ olur.

Ancak bulunan sinüs değeri -1'den daha küçüktür.

$-1 \le \sin\alpha \le 1$ olması gerektiğinden $x = -\frac{6}{5}$ olamaz.

Doğru cevap $x = 2$ olmalıdır.

ÇÖZÜM 6.

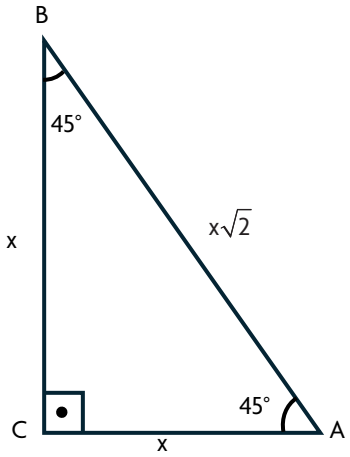


$$\sin 30° = \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$$

$$\sin 60° = \frac{x\sqrt{3}}{2x} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 30° = \frac{x\sqrt{3}}{2x} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60° = \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$$



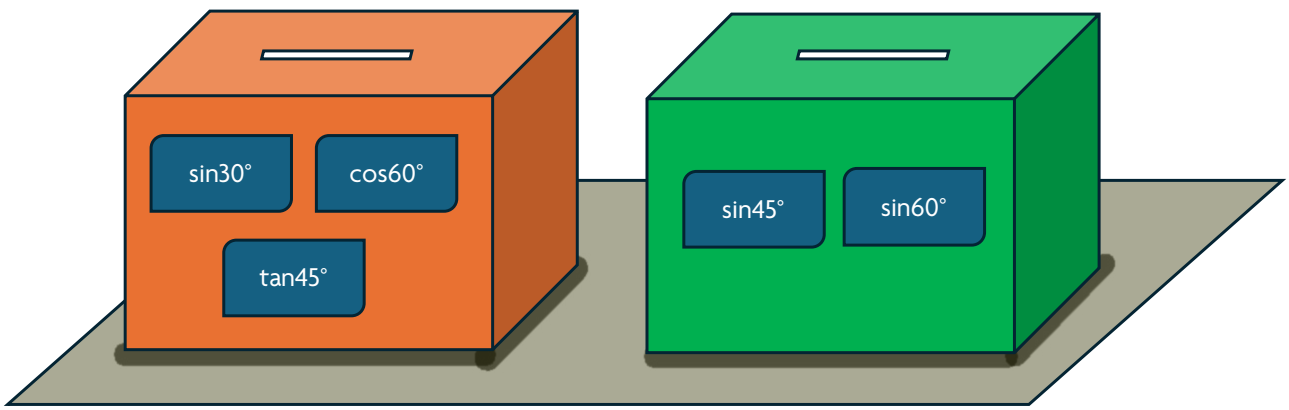
$$\sin 45° = \frac{x}{x\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos 45° = \frac{x}{x\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

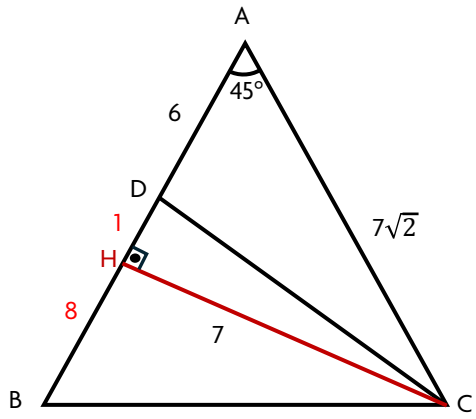
$$\tan 45° = \frac{x}{x} = 1$$

$$\cot 45° = \frac{x}{x} = 1$$

sin30°	tan45°	sin45°	cos60°	sin60°
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$



ÇÖZÜM 7.



I.

$A(\widehat{ABC}) = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 7\sqrt{2} \cdot \sin\widehat{A}$

$A(\widehat{ABC}) = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 7\sqrt{2} \cdot \sin 45^\circ$

$A(\widehat{ABC}) = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 7\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$

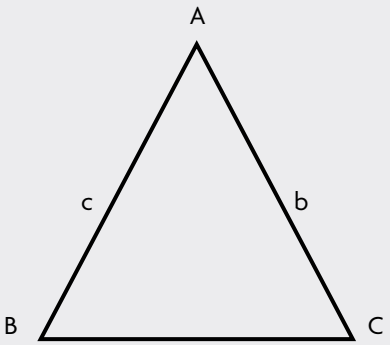
$A(\widehat{ABC}) = \frac{105}{2}$ birimkare

II.

[AB] kenarına ait [HC] yüksekliği çizilir. AHC üçgeni 45°-45°-90° üçgeni olduğundan |AH| = |HC| = 7 birim olur.

$A(\widehat{BDC}) = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 7 = \frac{63}{2}$ birimkare olarak bulunur.

HATIRLATMA



ABC üçgen
|AB| = c birim
|AC| = b birim

$A(\widehat{ABC}) = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin\widehat{A}$

III.

HBC dik üçgeninde Pisagor teoremi uygulanır.

$|HB|^2 + |HC|^2 = |BC|^2$

$8^2 + 7^2 = |BC|^2$

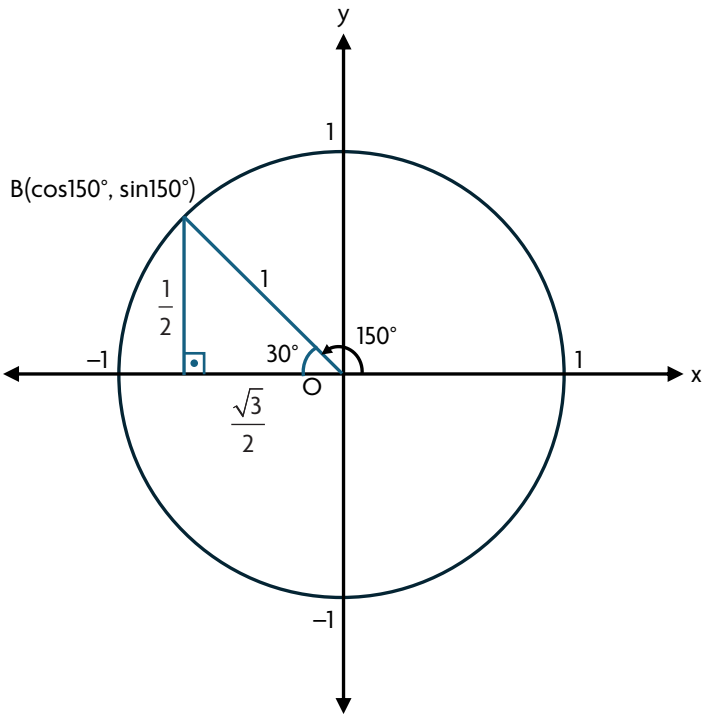
$64 + 49 = |BC|^2$

$|BC| = \sqrt{113}$ birim olarak bulunur.

ÇÖZÜM 8.

Birim çember içinde oluşturulan dik üçgenden yararlanarak noktanın koordinatları ile sinüs ve kosinüs değerlerini bulalım.

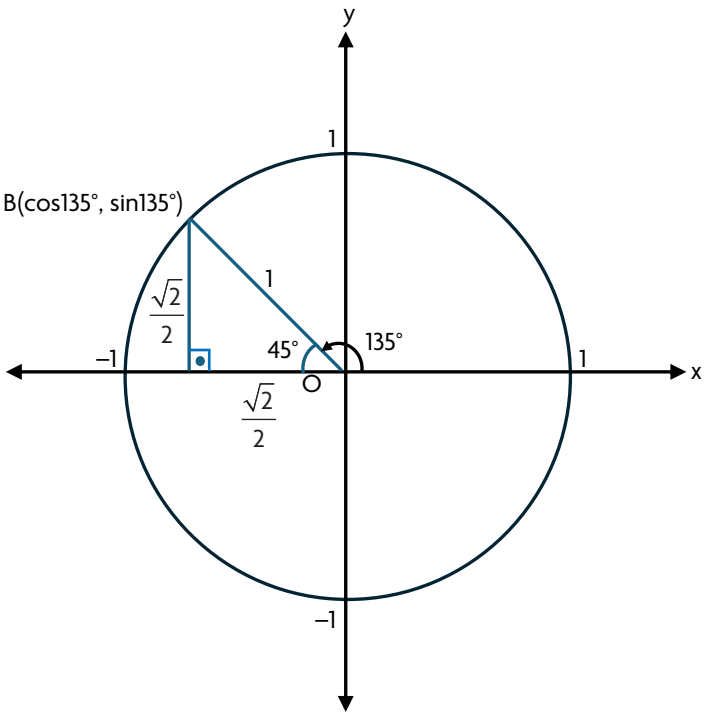
a)



$\cos 150° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin 150° = \frac{1}{2}$

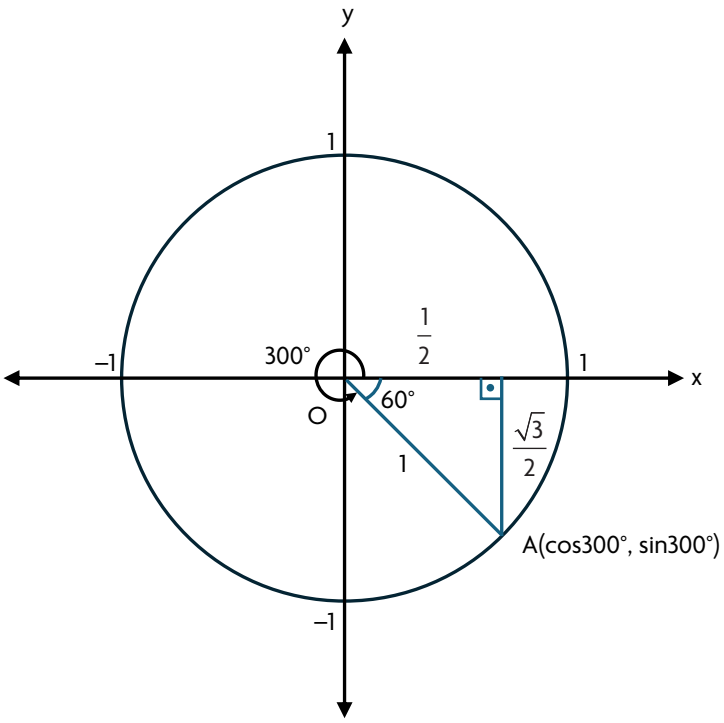
b)



$\cos 135° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin 135° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

c)

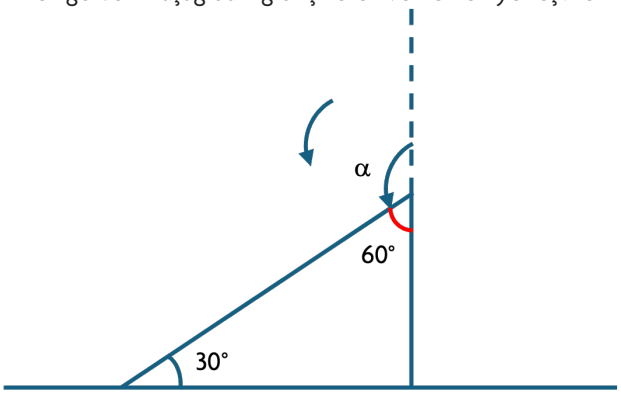


$\cos 300° = \frac{1}{2}$

$\sin 300° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

ÇÖZÜM 9.

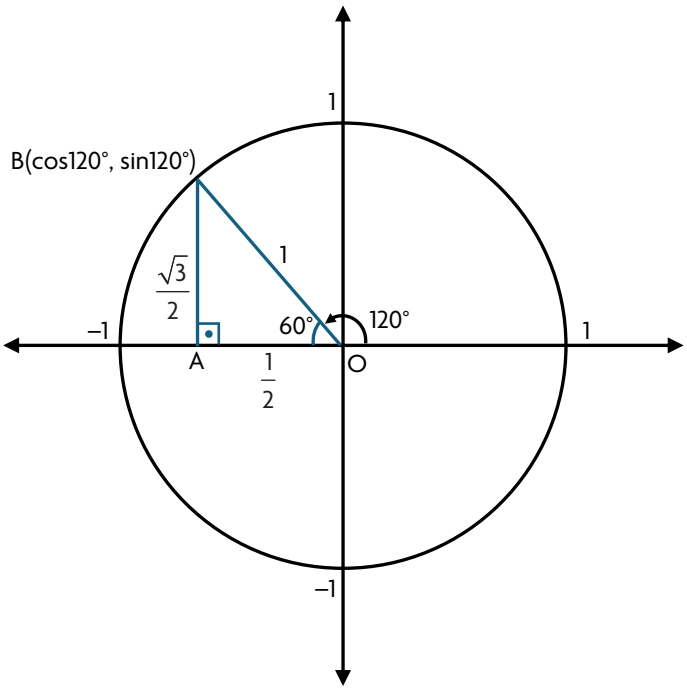
Direk görselini aşağıdaki gibi çizerek verilenleri yerleştirelim.



$\alpha + 60° = 180°$ olduğundan $\alpha = 120°$ olarak bulunur.

$\sin\alpha \cdot \cos\alpha$ değeri sorulduğundan $\alpha = 120°$ yazılarak

$\sin120° \cdot \cos120°$ değeri bulunur.



Birim çember üzerine 120° lik açı çizilerek BAO üçgeni oluşturulur, cos120° ve sin120° değerleri bulunur.

$\cos120° = -\frac{1}{2}$

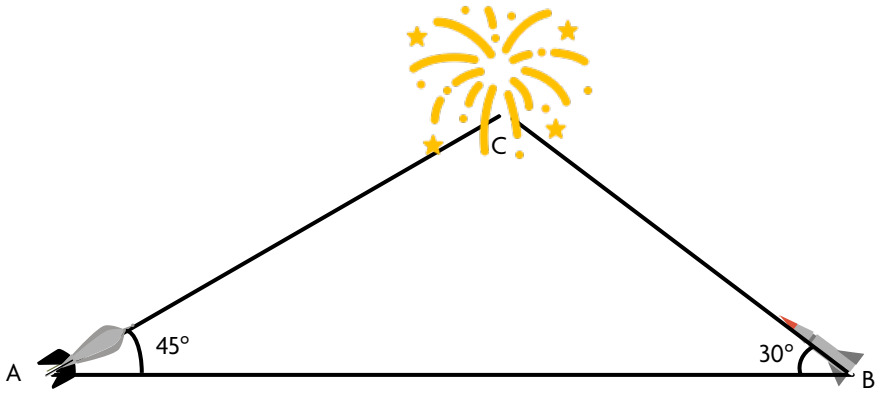
$\sin120° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ olur.

$\sin120° \cdot \cos120° = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot -\frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{4}$ olarak bulunur.

İLİŞKİLENDİRİYORUM

Amaç: Bu bölümde yeni öğreneceğiniz temayı; zihninizde var olan bilgileriniz, yaşantılarınız ve diğer derslerde öğrendiklerinizle ilişkilendirmenizi bekliyoruz.

Aşağıda test için A noktasından fırlatılan bir füze ve B noktasından ateşlenen hava savunma sisteminin görseli verilmiştir.



Doğrusal bir yolda ilerleyen füze, saniyede 400 metre süratle ve yer düzlemiyle 45° lik açı yapacak şekilde A noktasından fırlatılıyor. Füze ile aynı anda ateşlenen hava savunma sistemi B noktasından yer düzlemiyle 30° lik açı yapacak şekilde doğrusal bir şekilde hareket ederek füzeyi bir C noktasında imha ediyor.

Buna göre bu hava savunma sistemi testinde

1) Başlangıçta hava savunma sistemi ile füze arasındaki mesafe kaç metredir? Verilen bilgilerle hesaplanabilir mi? Açıklayınız.

2) B noktasından fırlatılan hava savunma sisteminin hızını bulmak için bir yöntem belirleyiniz.

ÇÖZÜM

1) Hayır, hesaplanamaz.

Çünkü başlangıç anında yalnızca doğrultular ve açılar verilmiştir, A ile B noktaları arasındaki mesafe ya da B noktasından ateşlenen sistemin hızı bilinmemektedir. Bu bilgiler olmadan sayısal olarak tek bir sonuca ulaşılamaz.

2) Füze ile hava savunma sisteminin C noktasında aynı anda buluştuğu kabul edilir. A, B ve C noktaları bir üçgen oluşturur. A ve B noktalarındaki açı ölçüleri bilindiği için sinüs teoremi kullanılarak kenar uzunlukları arasında oran kurulur. Füzenin hızı bilindiğinden zaman hesaplanır, aynı sürede hava savunma sisteminin aldığı yol kullanılarak hızı bulunur.

Örnekte de görüldüğü gibi hava savunma sistemleri ve füzeler, hedeflerine genellikle belirli açılarla ve doğrusal yollar boyunca ilerler. Farklı noktalardan farklı açılarla hareket eden bu tür cisimlerin konumları incelendiğinde aralarındaki uzaklıkların ve karşılıklı açıların önemli olduğu görülür.

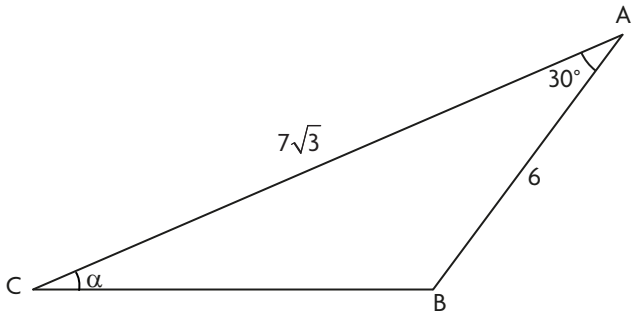
Bu tür durumlar, üçgenler üzerinde yapılan hesaplamaları gerekli kılar. Sinüs ve kosinüs teoremleri; günlük hayatta savunma sistemleri, navigasyon ve konum belirleme gibi alanlarda karşılaşılan bu problemlerin matematiksel olarak çözülmesini sağlar.

UYGULAYARAK ÖĞRENİYORUM

Amaç: Bu bölümde bilgilerinizi etkinlikler ve uygulamalarla pekiştirmenizi, öğrenmeyi daha kalıcı hâle getirmenizi amaçlıyoruz. Örneklerde verilen adımları dikkatle uygulayınız. Çalışmanızı dikkatli ve düzenli bir şekilde yapınız.

SİNÜS TEOREMİ

ÖRNEK



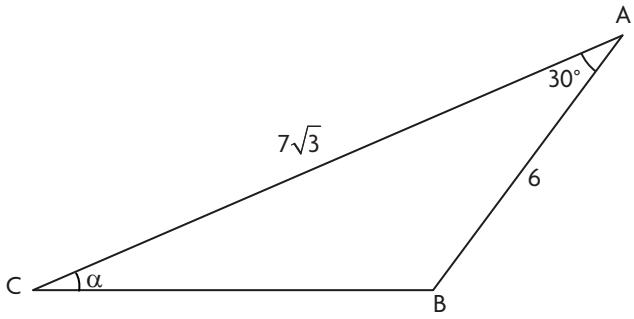
ABC dik üçgen
$|AB| = 6$ birim
$|AC| = 7\sqrt{3}$ birim
$m(\widehat{BAC}) = 30°$
$m(\widehat{ACB}) = \alpha$

Verilenlere göre aşağıdaki soruları cevaplandırınız.

a) ABC üçgeninin alanını bulunuz.

b) AC kenarına ait yüksekliği çizerek $\sin\alpha$ değerini bulunuz.

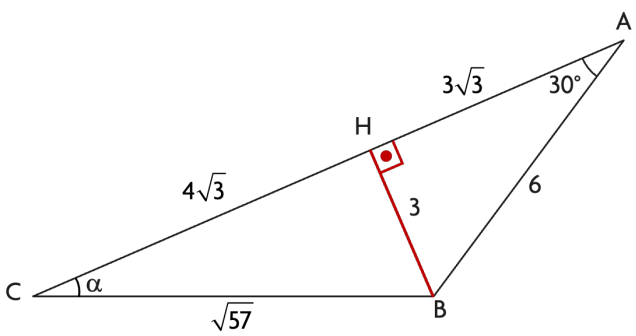
ÇÖZÜM



a) $A(\widehat{ABC}) = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 7\sqrt{3} \cdot \sin 30°$

$= \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 7\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2}$

$= \frac{21\sqrt{3}}{2}$ birimkare olur.



b) ABC üçgeninde AC kenarına ait yükseklik [BH] çizilir. ABH 30°-60°-90° özel üçgeni ve $|AB| = 6$ birim olduğundan $|BH| = 3$ birim ve $|AH| = 3\sqrt{3}$ birim olur. $|AC| = 7\sqrt{3}$ birim olduğundan $|HC| = 4\sqrt{3}$ birim olur.

BHC dik üçgeninde Pisagor teoremi uygulanır:

$|BH|^2 + |HC|^2 = |BC|^2$

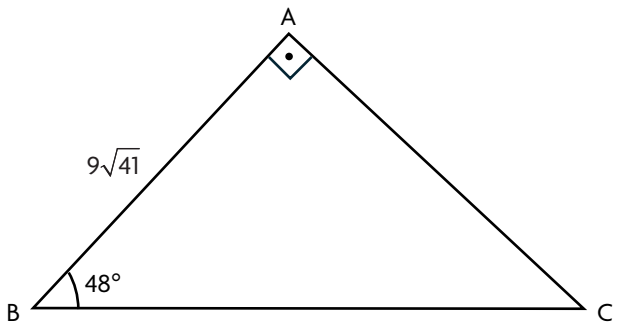
$3^2 + (4\sqrt{3})^2 = |BC|^2$

$57 = |BC|^2$

$|BC| = \sqrt{57}$ birim olur.

$\sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{57}}$ bulunur.

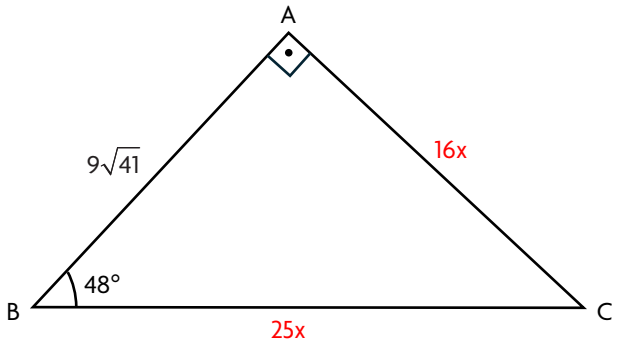
ÖRNEK



ABC dik üçgen
$|AB| = 9\sqrt{41}$ birim
$[BA] \perp [AC]$
$m(\widehat{ABC}) = 48°$

Verilenlere göre $\frac{|AB|}{\sin\hat{C}}$ **ve** $\frac{|AC|}{\sin\hat{B}}$ **oranlarını bulunuz.** (sin48° ≅ 0,64 alınız.)

ÇÖZÜM



$\sin 48° = \frac{|AC|}{|BC|} = \frac{64}{100} = \frac{16}{25}$ olur.

Buradan $|AC| = 16x$ ve $|BC| = 25x$ yazılabilir.

ABC üçgeninde Pisagor teoremi uygulanır:

$|AB|^2 + |AC|^2 = |BC|^2$

$(9\sqrt{41})^2 + (16x)^2 = (25x)^2$

$(9\sqrt{41})^2 = (25x)^2 - (16x)^2$

$(9\sqrt{41})^2 = (25x - 16x)(25x + 16x)$

$(9\sqrt{41})^2 = (9x)(41x)$

$9^2 \cdot \cancel{41} = 9 \cdot \cancel{41} \cdot x^2$

$x^2 = 9$ ve $x = 3$ birim olarak bulunur.

Buradan $|BC| = 75$ birim ve $|AC| = 48$ birim olur.

$\frac{|AB|}{\sin\hat{C}} = \frac{9\sqrt{41}}{\frac{9\sqrt{41}}{75}} = 75$ ve

$\frac{|AC|}{\sin\hat{B}} = \frac{48}{\frac{48}{75}} = 75$ olur.

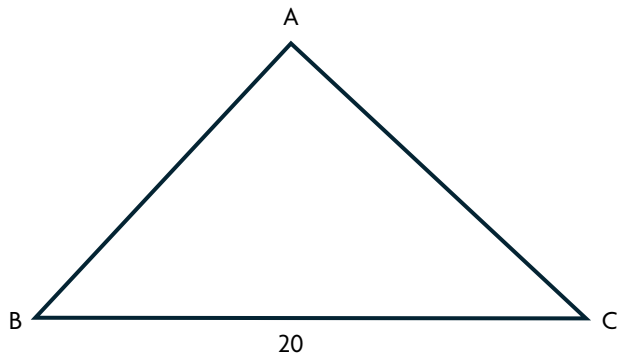
$\frac{|AB|}{\sin\hat{C}} = \frac{|AC|}{\sin\hat{B}}$ olduğuna dikkat ediniz.

Diğer yandan

$\frac{|BC|}{\sin\hat{A}} = \frac{75}{\sin 90°} = \frac{75}{1} = 75$ ve

$\frac{|AB|}{\sin\hat{C}} = \frac{|AC|}{\sin\hat{B}} = \frac{|BC|}{\sin\hat{A}}$ elde edilir.

ÖRNEK



ABC üçgen

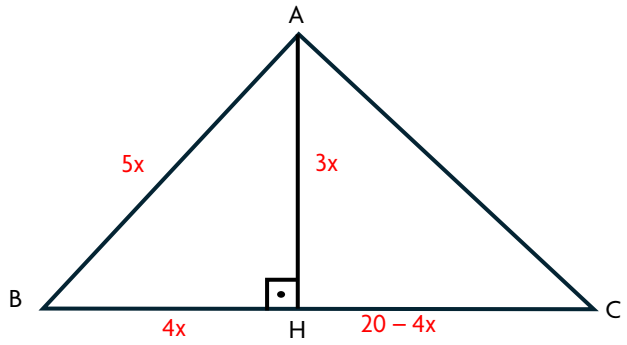
|BC| = 20 birim

$\sin\hat{B}=\frac{3}{5}$

$\sin\hat{C}=\frac{1}{\sqrt{5}}$

Verilenlere göre $\sin\hat{A}$ değerini bularak üçgenin kenar uzunlukları ile açı ölçülerinin sinüs değerleri arasında bir ilişki olup olmadığını yorumlayınız.

ÇÖZÜM



ABC üçgeninde BC kenarına ait [AH] yüksekliği çizilir. $\sin\hat{B}=\frac{3}{5}$ olduğundan |AH| = 3x ve |BH| = 5x yazılır.

ABH üçgeni 3 – 4 – 5 özel dik üçgeni olduğundan |BH| = 4x olur. |BC| = 20 birim olduğundan |HC| = 20 – 4x olur.

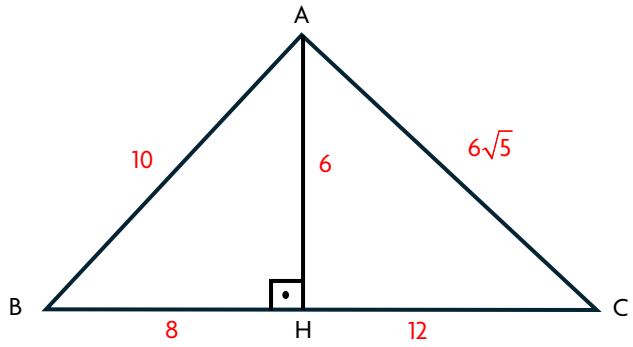
AHC dik üçgeninde $\sin\hat{C}=\frac{1}{\sqrt{5}}$ verildiğinden |AH| = a ve |AC| = $\sqrt{5}$a yazılır ve Pisagor teoreminden |HC| nun a cinsinden değeri bulunabilir:

$|AH|^2 + |HC|^2 = |AC|^2$

$a^2 + |HC|^2 = (\sqrt{5}a)^2$ olur. |HC| = 2a olur.

|AH| = a = 3x ve |HC| = 2a = 20 – 4x buradan 6x = 20 – 4x ve 10x = 20 eşitliğinden x = 2 birim olarak bulunur.

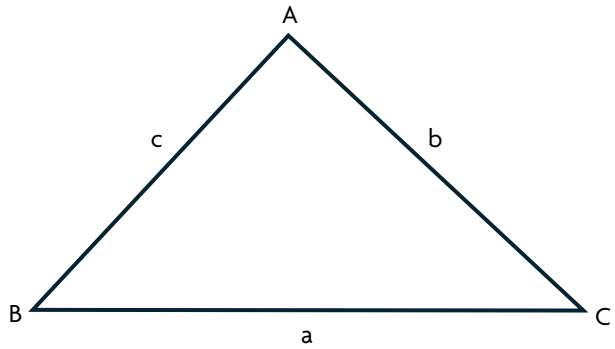
ABC üçgeninin alanı $\frac{20\cdot 6}{2}=\frac{10\cdot 6\sqrt{5}\cdot\sin\hat{A}}{2}$ ve $\sin\hat{A}=\frac{2}{\sqrt{5}}$ olarak bulunur.



Sonuç:

$\frac{20}{\frac{2}{\sqrt{5}}} = \frac{6\sqrt{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{10}{\frac{1}{\sqrt{5}}} = 10\sqrt{5}$ olduğundan $\frac{|BC|}{\sin\hat{A}} = \frac{|AC|}{\sin\hat{B}} = \frac{|AB|}{\sin\hat{C}}$ eşitliği bulunur.

ÖRNEK



ABC üçgen
|BC| = a birim
|AC| = b birim
|AB| = c birim

ABC üçgeninin alanı için $A(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin\widehat{A} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin\widehat{B} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\widehat{C}$ olarak veriliyor.

Buna göre $\frac{a}{\square} = \frac{b}{\square} = \frac{c}{\square}$ eşitliğinde boş bırakılan kutucukları uygun şekilde doldurunuz.

ÇÖZÜM

ABC üçgeninin alanı $A(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin\widehat{A} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin\widehat{B} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\widehat{C}$ eşitlikleri veriliyor.

$\frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin\widehat{A} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin\widehat{B} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\widehat{C}$ eşitliğinde ilk iki eşitlik ve son iki eşitlik kullanılarak sadeleştirmeler yapılır.

$\frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin\hat{A} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\hat{C}$ ve $\frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin\hat{B} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\hat{C}$

$c \cdot \sin\widehat{A} = a \cdot \sin\widehat{C}$ ve $c \cdot \sin\widehat{B} = b \cdot \sin\widehat{C}$

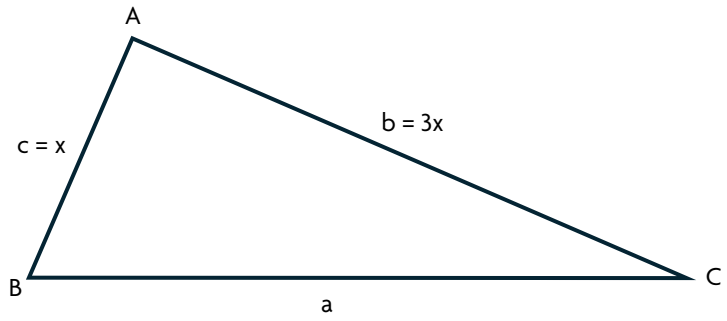
$\frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{c}{\sin\hat{C}}$ ve $\frac{b}{\sin\hat{B}} = \frac{c}{\sin\hat{C}}$ olur.

Buradan kutucuklara sırasıyla $\sin\widehat{A}$, $\sin\widehat{B}$ ve $\sin\widehat{C}$ yazılmalıdır.

ÖRNEK

Bir ABC üçgeninde $|AC| = 3 \cdot |AB|$ **olduğuna göre** $\frac{\sin^2\hat{B}}{\sin^2\hat{C}}$ **oranı kaçtır?**

ÇÖZÜM



$|AB| = x$ birim ise

$|AC| = 3x$ birim olur.

ABC üçgeninde sinüs teoremi uygulanırsa

$$\frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\hat{B}} = \frac{c}{\sin\hat{C}}$$

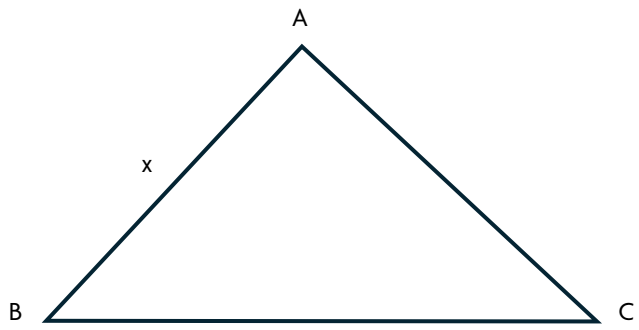
$\frac{\sin^2\hat{B}}{\sin^2\hat{C}}$ sorulduğundan $\frac{b}{\sin\hat{B}} = \frac{c}{\sin\hat{C}}$ eşitliği kullanılır.

$\frac{b}{\sin\hat{B}} = \frac{c}{\sin\hat{C}}$ eşitliğinin her iki tarafının karesi alınır.

$$\frac{b^2}{\sin^2\hat{B}} = \frac{c^2}{\sin^2\hat{C}}$$

$\frac{9x^2}{\sin^2\hat{B}} = \frac{x^2}{\sin^2 C}$ olduğundan $\frac{\sin^2\hat{B}}{\sin^2\hat{C}} = \frac{9x^2}{x^2} = 9$ olarak bulunur.

ÖRNEK



ABC üçgeni ile ilgili

$|AB| = x$ birim

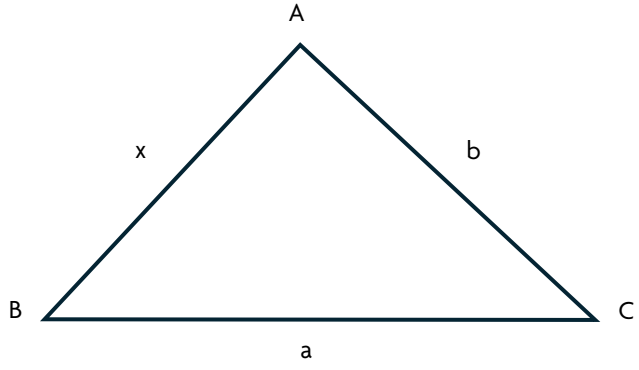
$$\frac{\sin\hat{B} \cdot \sin\hat{A}}{\sin\hat{C}} = \frac{1}{5}$$

$A(\widehat{ABC}) = 10$ birimkare

eşitlikleri veriliyor.

Buna göre x kaçtır?

ÇÖZÜM



ABC üçgeninin alanı:

$$A(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\widehat{C} = 10$$

ise $a \cdot b \cdot \sin\widehat{C} = 20$ olur.

ABC üçgeninde sinüs teoremi uygulanırsa

$$\frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\hat{B}} = \frac{x}{\sin\hat{C}}$$

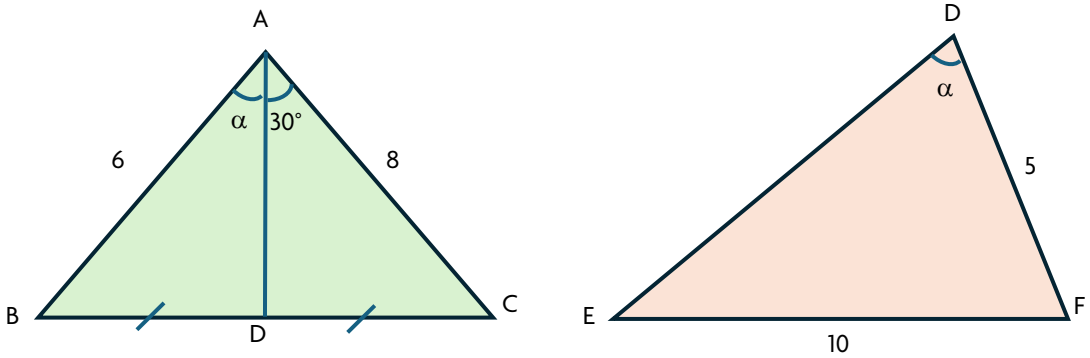
$$\frac{a \cdot b}{\sin\hat{A} \cdot \sin\hat{B}} = \frac{x^2}{\sin^2\hat{C}}$$

$$\frac{a \cdot b \cdot \sin\hat{C}}{\sin\hat{A} \cdot \sin\hat{B}} = \frac{x^2}{\sin\hat{C}} \Rightarrow \frac{\sin\hat{C}}{\sin\hat{A} \cdot \sin\hat{B}} = \frac{x^2}{20} \Rightarrow \frac{x^2}{20} = 5$$

$x^2 = 100$ ve buradan $x = 10$ birim olarak bulunur.

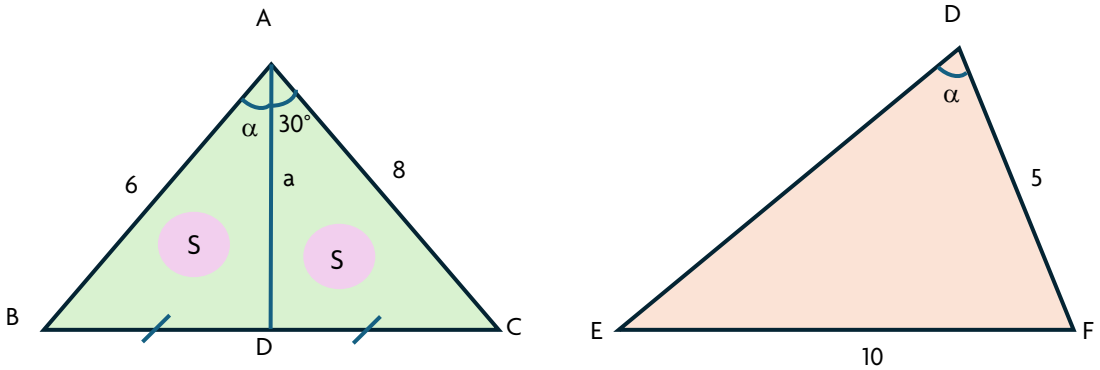
ÖRNEK

Aşağıda ABC ve DEF üçgenlerine ait bazı açı ölçüleri ile bazı kenar uzunlukları (birim cinsinden) verilmiştir.



Verilenlere göre $\sin\widehat{E}$ **değerini bulunuz.**

ÇÖZÜM



ABC üçgeninde ABD ve ADC üçgenlerinin yükseklikleri ortak olduğundan tabanları oranı alanları oranına eşit olur.

$|BD| = |DC|$ ise $A(\widehat{ABD}) = A(\widehat{ADC})$ olur.

$$A(\widehat{ABD}) = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot a \cdot \sin\alpha$$

$$A(\widehat{ADC}) = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot a \cdot \sin 30^\circ$$

$$\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot a \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot a \cdot \sin 30^\circ$$

$$6 \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} \cdot 8$$

$$\sin\alpha = \frac{2}{3} \text{ olarak bulunur.}$$

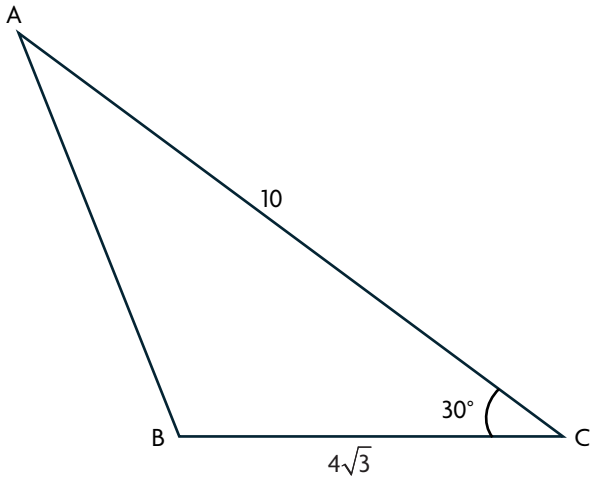
DEF üçgeninde sinüs teoremi uygulanarak bulunan sinα değeri kullanılır.

$\frac{|EF|}{\sin\alpha} = \frac{5}{\sin\hat{E}}$ olduğundan $\frac{10}{\frac{2}{3}} = \frac{5}{\sin\hat{E}}$

$30 \cdot \sin\widehat{E} = 10$ ve buradan $\sin\widehat{E} = \frac{1}{3}$ olarak bulunur.

KOSİNÜS TEOREMİ

ÖRNEK



ABC üçgen

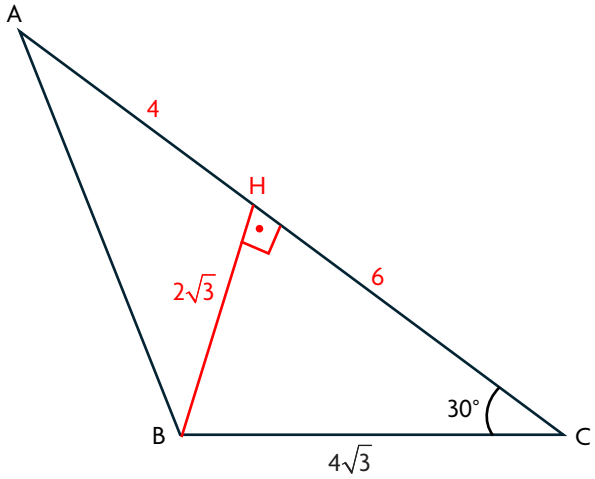
$|AC| = 10$ birim

$|BC| = 4\sqrt{3}$ birim

$m(\widehat{BCA}) = 30°$

Verilenlere göre AC kenarına ait yüksekliği çizerek |AB| nu bulunuz.

ÇÖZÜM



AC kenarına ait [BH] yüksekliği çizilir. BCH dik üçgeni 30°-60°-90° özel üçgeni olduğundan

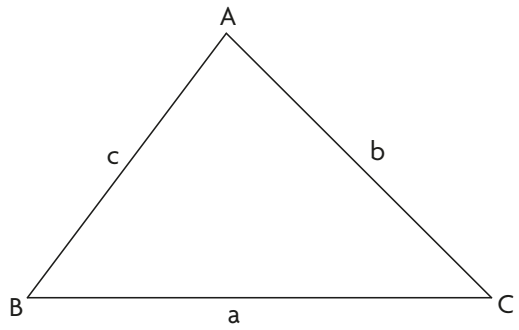
$|BH| = 2\sqrt{3}$ birim ve $|HC| = 6$ birim olur.

$|AC| = 10$ birim olduğundan $|AH| = 4$ birim olacaktır. ABH dik üçgeninde Pisagor teoremi uygulanırsa

$|AH|^2 + |BH|^2 = |AB|^2$

$4^2 + (2\sqrt{3})^2 = |AB|^2$ olur ve $|AB| = 2\sqrt{7}$ birim olur.

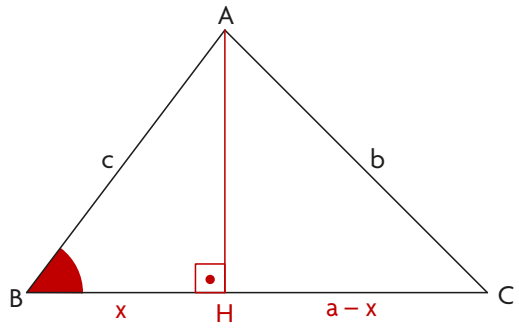
ÖRNEK



ABC bir üçgen
|AB| = c birim
|AC| = b birim
|BC| = a birim

Verilenlere göre |AC| nu a, c ve $\cos\hat{B}$ cinsinden bulunuz.

ÇÖZÜM



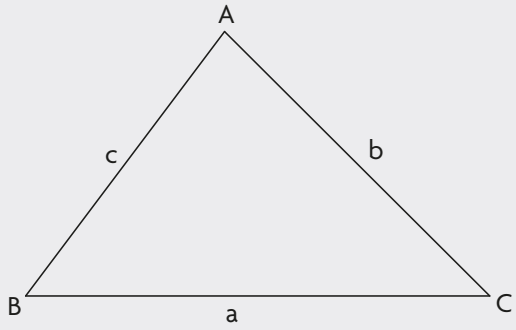
ABH üçgeninde
$|AH|^2 + x^2 = c^2$
$|AH|^2 = c^2 - x^2$

AHC üçgeninde
$|AH|^2 + (a - x)^2 = b^2$
$c^2 - x^2 + (a - x)^2 = b^2$
$c^2 - x^2 + a^2 - 2ax + x^2 = b^2$
$c^2 + a^2 - 2ax = b^2$

$$\cos\hat{B} = \frac{x}{c} \Rightarrow x = c \cdot \cos\hat{B}$$

$$c^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\hat{B} = b^2$$

NOT

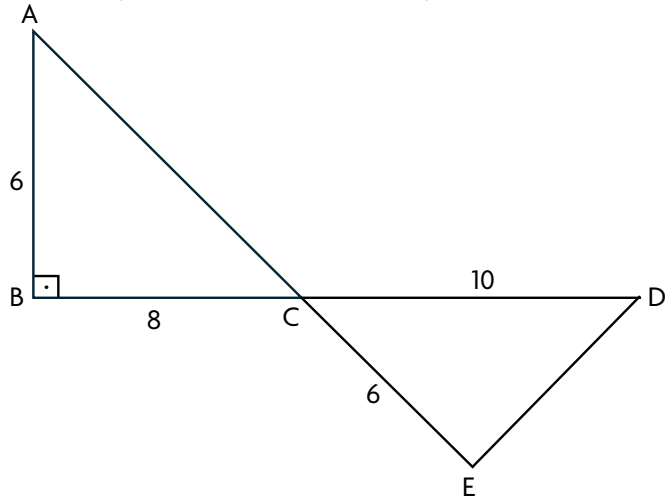


ABC üçgeninde verilenlere göre aşağıdaki eşitlikler sağlanır.
Bu eşitlikler **Kosinüs teoremi** olarak adlandırılır.

- $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\widehat{A}$
- $b^2 = c^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\widehat{B}$
- $c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot b \cdot a \cdot \cos\widehat{C}$

ÖRNEK

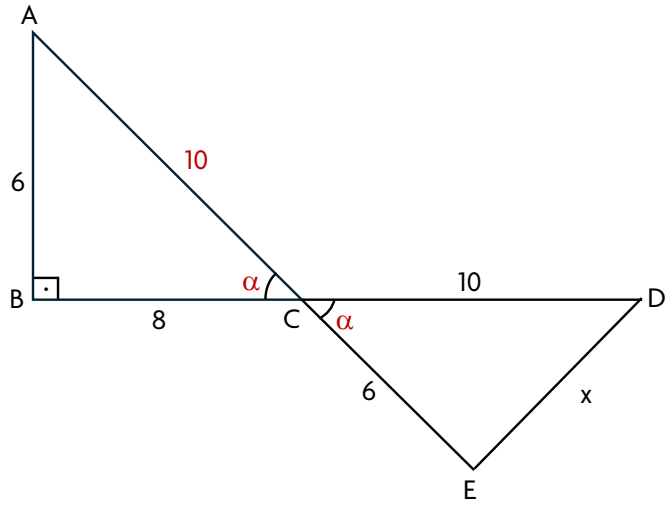
ABC dik üçgendir. B, C ve D noktaları doğrusal ve A, C ve E noktaları doğrusaldır.



[AB] ⊥ [BD], |AB| = 6 birim, |BC| = 8 birim ve |CD| = 10 birimdir.

Buna göre |DE| kaç birimdir?

ÇÖZÜM



ABC dik üçgeni 3-4-5 özel dik üçgeni olduğundan
|AC| = 10 birimdir.

CED üçgeninde kosinüs teoremi uygulanırsa

$x^2 = 6^2 + 10^2 - 2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot \cos\alpha$

ABC dik üçgeninden $\cos\alpha = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$ olarak bulunur.

$x^2 = 36 + 100 - 2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot \cos\alpha$

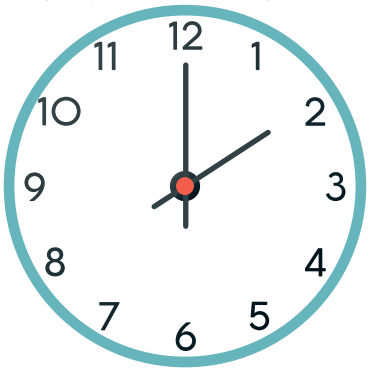
$x^2 = 36 + 100 - 2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot \frac{4}{5}$

$x^2 = 40$

$x = 2\sqrt{10}$ birim olarak bulunur.

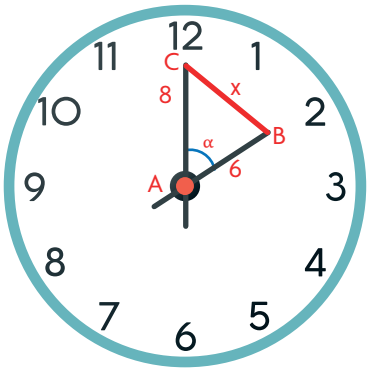
ÖRNEK

Aşağıda yelkovan uzunluğu 8 cm ve akrep uzunluğu 6 cm olan saat görseli verilmiştir.



Buna göre saat 02.00 iken akrep ile yelkovanın uç noktaları arasındaki uzaklığın kaç santimetre olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM



$\frac{360°}{12} = 30°$ olduğundan $\alpha = 60°$ olur.

Oluşan ABC üçgeninde kosinüs teoremi uygulanır.

$x^2 = 6^2 + 8^2 - 2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \cos\alpha$

$x^2 = 6^2 + 8^2 - 2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \cos 60°$

$x^2 = 6^2 + 8^2 - 2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2}$

$x^2 = 100 - 48 = 52$

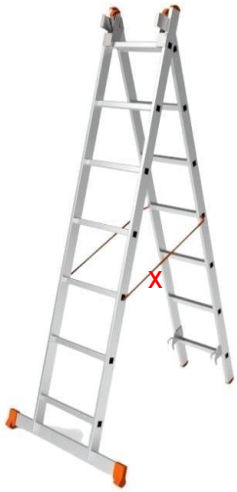
$x = 2\sqrt{13}$ cm olarak bulunur.

DEĞERLENDİRİYORUM

Amaç: Bu bölümde öğrendiklerinizi gözden geçirmenizi, kendi öğrenme sürecinizi değerlendirmenizi ve eksiklerinizi fark etmenizi amaçlıyoruz. Soruları dikkatle yanıtlayınız. Cevaplarınızı geri bildirimlerle karşılaştırarak eksik gördüğünüz noktaları tekrar ediniz.

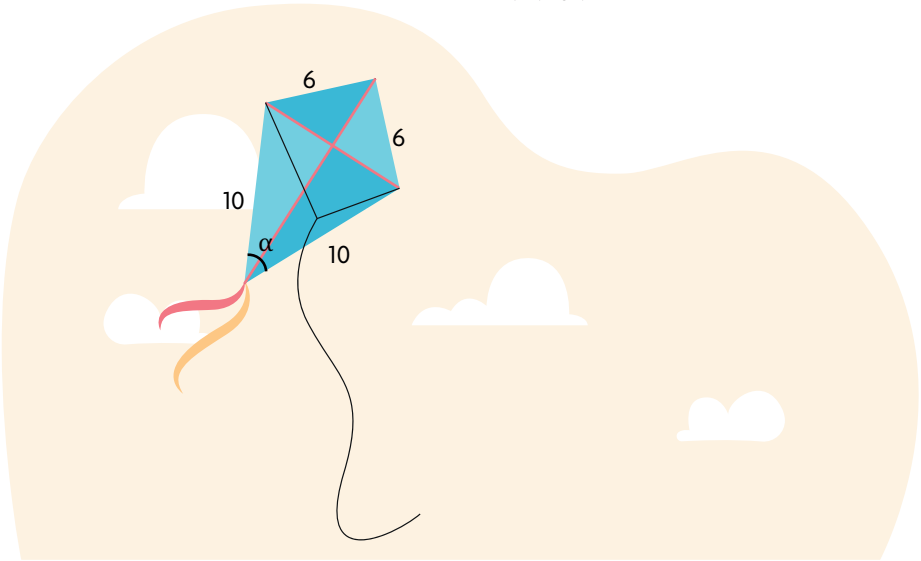
SORULAR

1. Şekilde üçgen formunda açılır-kapanır bir merdiven verilmiştir. Basamaklar, tepe noktasından itibaren her iki kolda eşit aralıklarla dizilmiştir. Ardışık basamaklar arasındaki mesafe 40 cm'dir.



Merdiven 60° açılıp merdivenin destek çubuğu ön tarafta dördüncü, arka tarafta üçüncü basamağa gelecek şekilde takıldığına göre destek çubuğunun uzunluğu x kaç santimetredir?

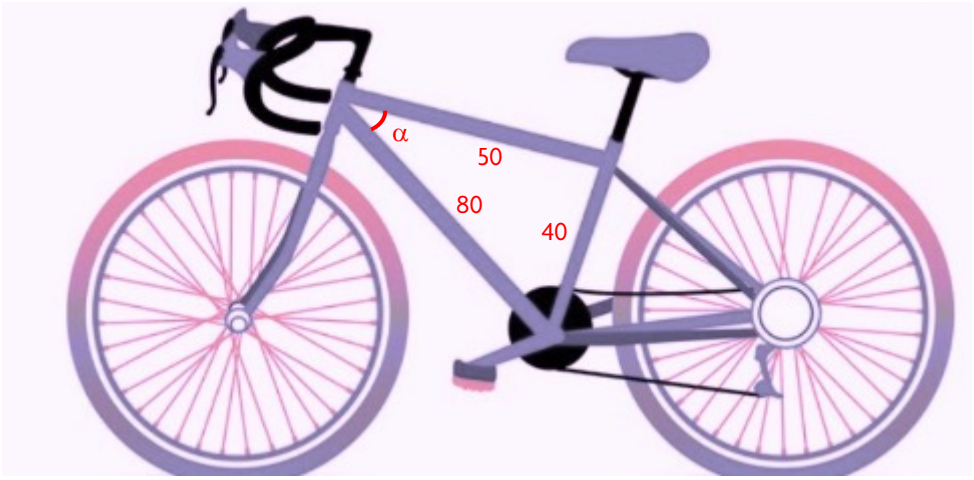
2. Tuba kardeşi Eslim için şekilde verilen uçurtmayı yapıyor.



Uçurtma, tabanları çakışık iki ikizkenar üçgenden oluşmaktadır. Üçgenlerin kenar uzunlukları 10 santimetre ve 6 santimetredir.

Üçgenlerin tepe açılarının ölçüleri toplamı 180° olduğuna göre cosα değerini bulunuz.

3.



Modern bisiklet tasarımlarında kadro geometrisi, sürüş konforu ve hız performansını belirleyen en kritik faktörlerden biridir. Kadronun temel üçgeni; alt boru (orta göbek ile baş boru arasındaki bağlantı), üst boru (sele borusu ile baş boru arasındaki bağlantı), sele borusu (orta göbek ile sele desteği arasındaki bağlantı) ile modellenir.

Şekilde verilen bisikletin gövdesinde yapılan ölçümler aşağıdaki gibidir.

Üst boru uzunluğu: 50 cm

Alt boru uzunluğu: 80 cm

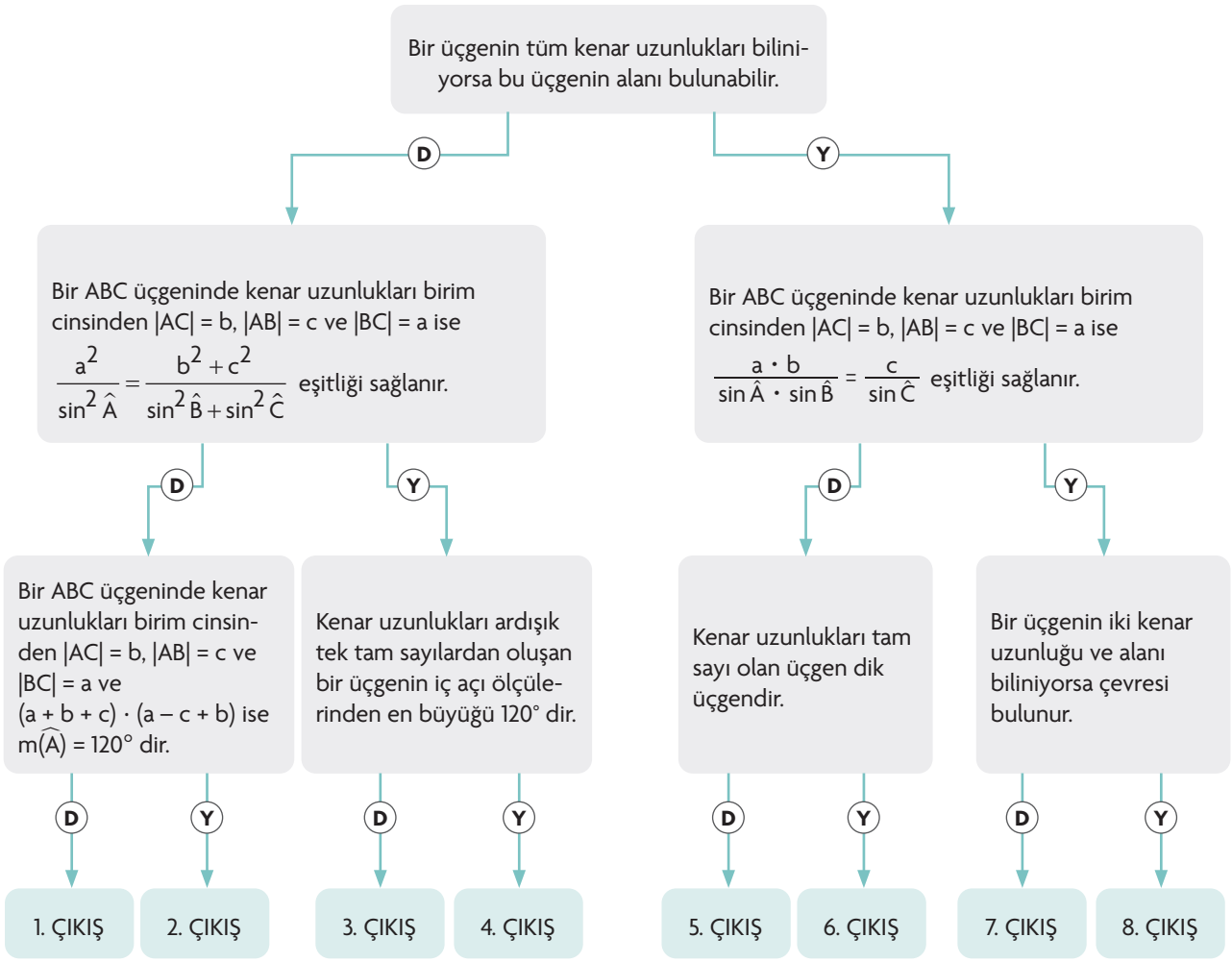
Sele borusu uzunluğu: 40 cm

Buna göre α açısının kosinüs değerini bulunuz.

4. Aşağıda verilen önermelerden doğru olanları D, yanlış olanları Y sütununda işaretleyiniz.

SORU NO	ÖNERME	DOĞRU	YANLIŞ
1	Herhangi bir üçgenin tüm kenar uzunlukları biliniyorsa bu üçgenin tüm iç açılarının ölçüleri trigonometrik cetvel yardımıyla bulunabilir.		
2	Herhangi bir üçgenin tüm iç açılarının ölçüleri biliniyorsa bu üçgenin herhangi bir kenar uzunluğu bulunabilir.		
3	Sinüs teoremi tüm üçgenlerde geçerlidir.		
4	Üç kenar uzunluğu bilinen bir üçgenin alanı bulunabilir.		
5	Bir üçgende kenar uzunluklarının iç açılarının ölçülerinin sinüslerine oranı eşittir.		
6	Bir üçgenin herhangi iki açısının ölçüsü ve bu açıların karşısındaki kenarlardan birinin uzunluğu biliniyor ise üçgenin bilinmeyen kenar uzunluğu bulunabilir.		
7	Bir dik üçgende kosinüs teoremi uygulanamaz.		

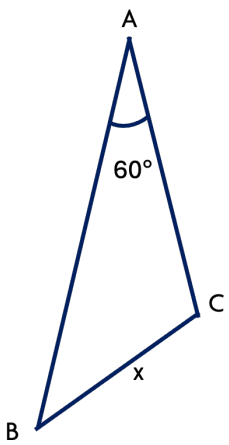
5. Aşağıda, Doğru (D)/Yanlış (Y) ifadeleri içeren tanılayıcı dallanmış bir ağaç bulunmaktadır. Verilen önermelerin doğru olduğunu düşünüyorsanız (D), yanlış olduğunu düşünüyorsanız (Y) seçeneğini işaretlemeniz gerekmektedir. İlk önermeden başlayarak yapacağınız Doğru (D)/Yanlış (Y) tercihleri ile 8 farklı çıkış noktasından birine ulaşarak doğru sonuca varınız.



GERİ BİLDİRİM

ÇÖZÜM 1.





Verilen şeklin daha iyi anlaşılması için ABC üçgeni şeklinde çizelim.

Şekilde merdiven açıldığında oluşan üçgen ABC üçgeni olsun. AB kenarı 4 basamaktan oluştuğu için uzunluğu $4 \cdot 40 = 160$ cm ve AC kenarı 3 basamaktan oluştuğu için uzunluğu $3 \cdot 40 = 120$ cm olur.

ABC üçgeninde kosinüs teoremi uygulanırsa;

$x^2 = 160^2 + 120^2 - 2 \cdot 160 \cdot 120 \cdot \cos 60°$

$x^2 = 100(16^2 + 12^2 - 2 \cdot 16 \cdot 12 \cdot \frac{1}{2})$

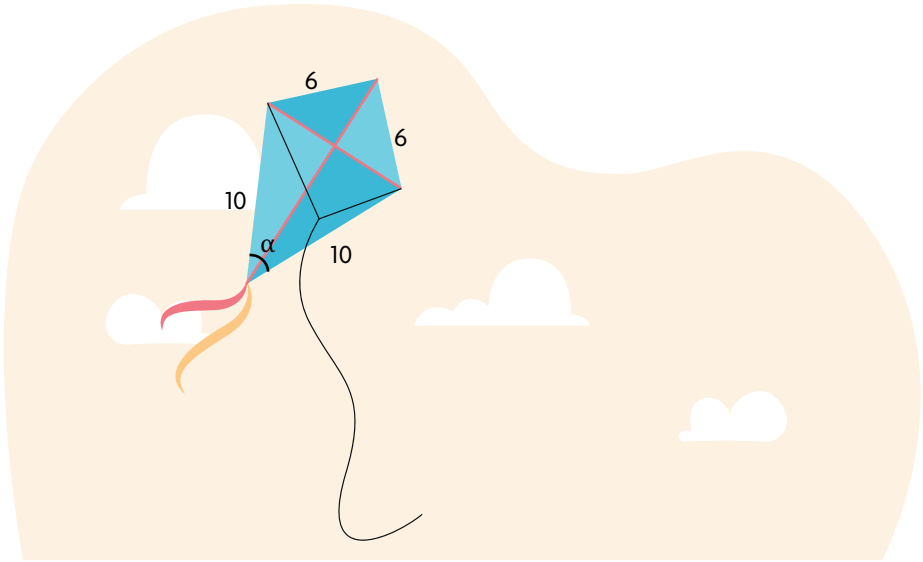
$x^2 = 100(256 + 144 - 2 \cdot 16 \cdot 12 \cdot \frac{1}{2})$

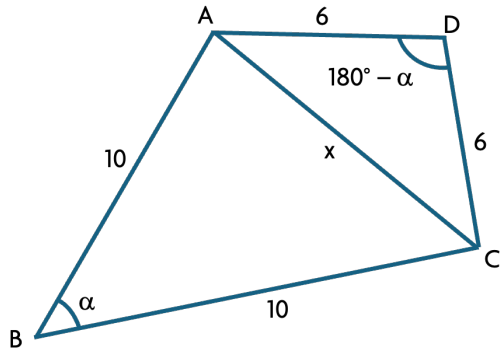
$x^2 = 100(256 + 144 - 192)$

$x^2 = 100 \cdot 208$

$x = 40\sqrt{13}$ cm olur.

ÇÖZÜM 2.





Şekilde verilen ikizkenar üçgenler ABC ve DAC olsun.

ABC üçgeninde kosinüs teoremi uygulanırsa;

$x^2 = 10^2 + 10^2 - 2 \cdot 10 \cdot 10 \cdot \cos\alpha$

$x^2 = 100 + 100 - 2 \cdot 10 \cdot 10 \cdot \cos\alpha$ ... (I)

DAC üçgeninde kosinüs teoremi uygulanırsa;

$x^2 = 6^2 + 6^2 - 2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot \cos(180° - \alpha)$

$x^2 = 36 + 36 - 2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot \cos(180° - \alpha)$ ... (II) denklemi elde edilir.

I ve II. denklemler eşitlenirse;

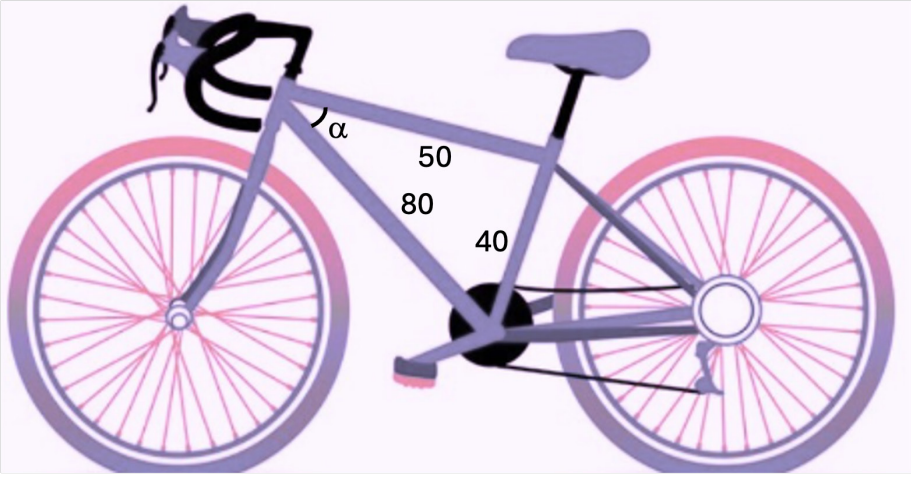
$100 + 100 - 2 \cdot 10 \cdot 10 \cdot \cos\alpha = 36 + 36 - 2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot \cos(180° - \alpha)$

$200 - 200 \cdot \cos\alpha = 72 - 72 \cdot \cos(180° - \alpha)$

$200 - 200 \cdot \cos\alpha = 72 + 72 \cdot \cos\alpha$

$128 = 272 \cdot \cos\alpha$ olduğundan $\cos\alpha = \frac{8}{17}$ olur.

ÇÖZÜM 3.



Oluşan üçgende kosinüs teoremi uygulanırsa;

$40^2 = 80^9 + 50^2 - 2 \cdot 80 \cdot 50 \cdot \cos\alpha$

$40 \cdot 40 = 100(8^2 + 5^2 - 2 \cdot 8 \cdot 5 \cdot \cos\alpha)$

$16 = 64 + 25 - 80 \cdot \cos\alpha$

$16 - 89 = -80 \cdot \cos\alpha$

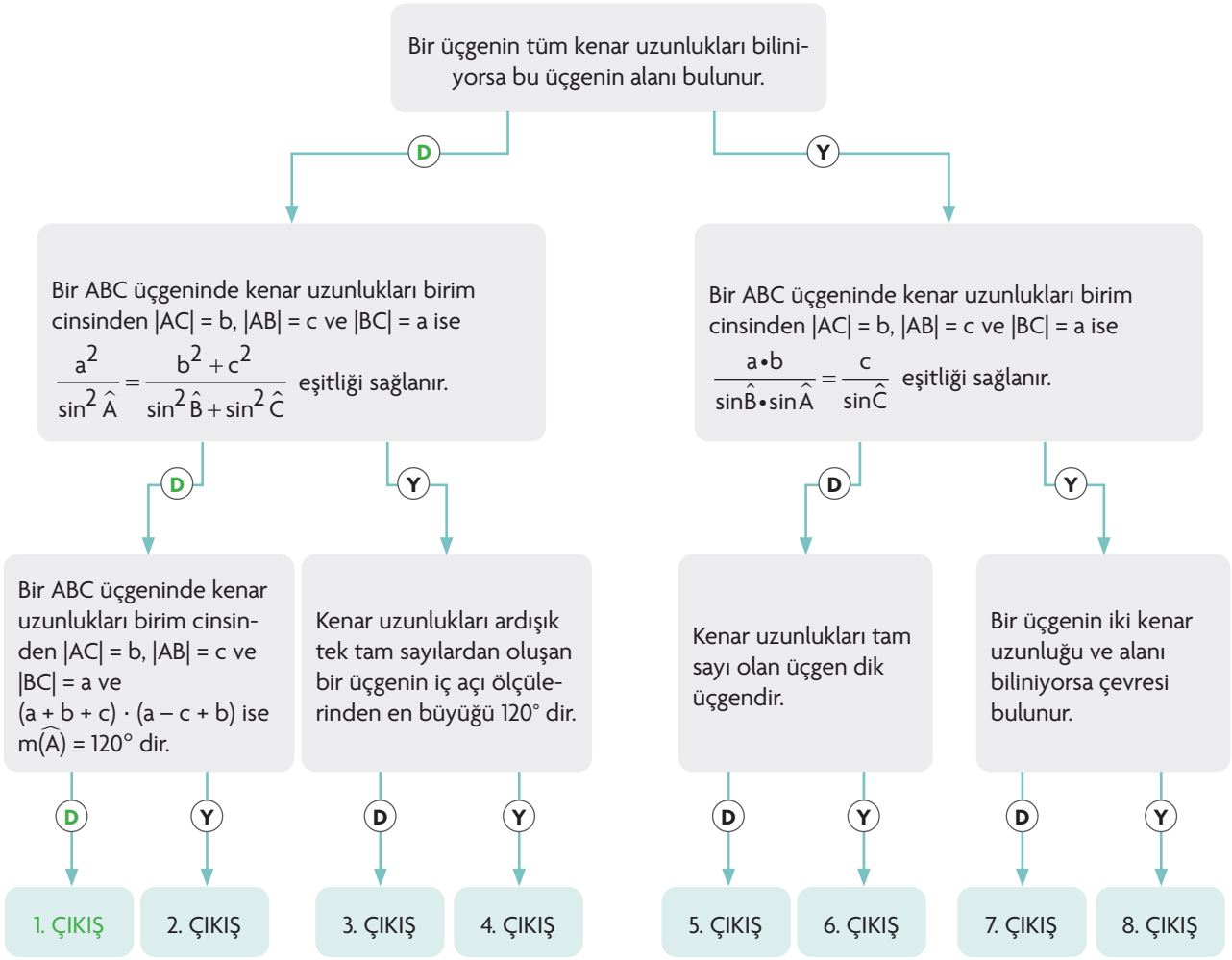
$-73 = -80 \cdot \cos\alpha$

$\cos\alpha = \frac{73}{80}$ olarak bulunur.

ÇÖZÜM 4.

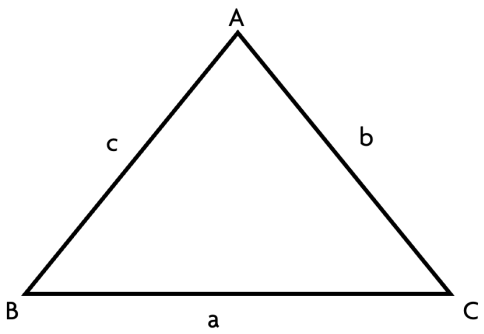
SORU NO	ÖNERME	DOĞRU	YANLIŞ
1	Herhangi bir üçgenin tüm kenar uzunlukları biliniyorsa bu üçgenin tüm iç açılarının ölçüleri trigonometrik cetvel yardımıyla bulunabilir.	✓	
2	Herhangi bir üçgenin tüm iç açılarının ölçüleri biliniyorsa bu üçgenin herhangi bir kenar uzunluğu bulunabilir.		✓
3	Sinüs teoremi tüm üçgenlerde geçerlidir.	✓	
4	Üç kenar uzunluğu bilinen bir üçgenin alanı bulunabilir.	✓	
5	Bir üçgende kenar uzunluklarının , bu kenarların karşısındaki iç açılarının ölçülerinin sinüslerine oranı eşittir.		✓
6	Bir üçgenin herhangi iki açısının ölçüsü ve bu açıların karşısındaki kenarlardan birinin uzunluğu biliniyor ise üçgenin bilinmeyen kenar uzunluğu bulunabilir.	✓	
7	Bir dik üçgende kosinüs teoremi uygulanamaz.		✓

ÇÖZÜM 5.


Bir üçgenin tüm kenar uzunlukları biliniyorsa bu üçgenin alanı bulunur.
D
Y
Bir ABC üçgeninde kenar uzunlukları birim cinsinden |AC| = b, |AB| = c ve |BC| = a ise $\frac{a^2}{\sin^2\hat{A}} = \frac{b^2+c^2}{\sin^2\hat{B}+\sin^2\hat{C}}$ eşitliği sağlanır.
Bir ABC üçgeninde kenar uzunlukları birim cinsinden |AC| = b, |AB| = c ve |BC| = a ise $\frac{a \cdot b}{\sin\hat{B} \cdot \sin\hat{A}} = \frac{c}{\sin\hat{C}}$ eşitliği sağlanır.
D
Y
D
Y
Bir ABC üçgeninde kenar uzunlukları birim cinsinden |AC| = b, |AB| = c ve |BC| = a ve (a + b + c) · (a – c + b) ise m(Â) = 120° dir.
Kenar uzunlukları ardışık tek tam sayılardan oluşan bir üçgenin iç açı ölçülerinden en büyüğü 120° dir.
Kenar uzunlukları tam sayı olan üçgen dik üçgendir.
Bir üçgenin iki kenar uzunluğu ve alanı biliniyorsa çevresi bulunur.
D
Y
D
Y
D
Y
D
Y
1. ÇIKIŞ
2. ÇIKIŞ
3. ÇIKIŞ
4. ÇIKIŞ
5. ÇIKIŞ
6. ÇIKIŞ
7. ÇIKIŞ
8. ÇIKIŞ

ÖĞRENDİKLERİM

SİNÜS TEOREMİ

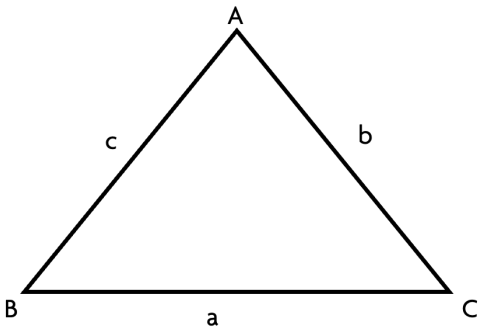


ABC üçgeninde

$$\frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\hat{B}} = \frac{c}{\sin\hat{C}}$$

bağıntısı vardır.

KOSİNÜS TEOREMİ



ABC üçgeninde

$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\hat{A}$

$b^2 = c^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\hat{B}$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\hat{C}$ bağıntıları vardır.

Bu bölümde öğrendiklerinizi özetlemenizi, günlük hayatta ve farklı derslerde kullanabileceğiniz bilgileri belirlemenizi amaçlıyoruz.

Sinüs ve kosinüs teoremleri ile ilgili verilen anahtar kavramları ve önemli bilgileri kendi cümlelerinizle yazınız.

SİNÜS TEOREMİ

.....

.....

.....

KOSİNÜS TEOREMİ

.....

.....

.....

GEOMETRİK ŞEKİLLER: Üçgende Açı-Kenar İlişkileri ve İspat Yöntemlerine Yönelik Yansıtıcı Yazı

Amaç

Bu çalışma, üçgenin açı ve kenar özelliklerini incelerken doğrulama ve ispat süreçlerini nasıl yapılandırdığınıza yönelik farkındalık oluşturmak amacıyla hazırlanmıştır.

Aşağıdaki soruları çözümlerinizden hareketle kısa ve açık cümlelerle yanıtlayınız.

1. Öğrendiğiniz bu temada dikkatinizi çeken veya önemli bulduğunuz noktaları yazınız.

2. Üçgenin açıları ve kenarları arasındaki ilişkilerin doğrulanmasına yönelik kullandığınız süreçleri gözden geçiriniz. Üçgen inşasında kullanılan açı ve kenar ilişkilerinin doğrulanmasına yönelik yöntemlerden size göre daha etkili olanlardan birini adımlarıyla açıklayınız.

3. Üçgenin açı ve kenar özelliklerinin bir üçgenin inşasındaki etkilerini gerekçeleriyle açıklayınız.

4. Üçgenlerdeki açı ve kenar bağıntılarının gerçek yaşamda nasıl kullanıldığını gösteren durumlara örnekler yazınız.

Daha fazlası için karekodu okutunuz.



İKİ KATEGORİK DEĞİŞKEN İÇEREN DAĞILIMLAR 1

BAŞLARKEN

Bu bölümde yer alan etkinlikler, bireysel öğrenme yolculuğunuzda size rehberlik etmek ve öğrenme sürecinizi desteklemek amacıyla hazırlanmıştır. Çalışmalarınızı yürütürken "Hazırlanıyorum", "İlişkilendiriyorum", "Uygulayarak Öğreniyorum", "Değerlendiriyorum", "Yansıtıcı Yazı" ve "Öğrendiklerim" etkinliklerini sırası ile takip etmeniz ve etkinliklerin sonunda yer alan geri bildirimleri inceleyerek bölümleri tamamlamanız beklenmektedir.

Bu çalışma kartında matematiğin günlük hayata olan katkılarına ilişkin çıkarımlarda bulunup aşağıdaki soruları yanıtlayabileceksiniz.

- **Seçtiğin bağlamda iki kategorik değişken nedir? Kategorileri nasıl tanımlanır?**
- **İki kategorik değişkenli veri toplamak/elde etmek için nasıl bir plan yapılır?**
- **Araştırma sorusu bağlamında toplanan/elde edilen iki kategorik değişkenli verileri analiz etmek için görselleştirme araçlarından uygun olanı nasıl seçilir?**

HAZIRLANIYORUM

Amaç: Bu bölümde, istatistiksel araştırma süreci ile ilgili ön bilgilerinizi hatırlamanızı ve temaya hazır hale gelmenizi amaçlıyoruz.

Aşağıda yer alan ifadeler, bu temada tamamlanması hedeflenen öğrenme çıktısını ele almadan önce sahip olmanız gereken bazı temel becerileri içermektedir. Lütfen her bir ifadeyi dikkatlice okuyunuz.

- Eğer ifadedeki bilgiye hâkim olduğunuzu düşünüyorsanız kutucuğu işaretleyiniz.
- Eğer konuyu henüz tam olarak bilmediğinizi ya da hatırlamadığınızı düşünüyorsanız kutucuğu boş bırakınız.

Bu çalışmanın amacı notla değerlendirilmeyecek olup amacı temaya ne ölçüde hazır olduğunuzu belirlemektir.

SORULAR	ÖN ÖĞRENME KONTROL LİSTESİ	
1	Betimsel araştırma soruları oluşturabilirim.	
2	Karşılaştırma gerektiren araştırma soruları oluşturabilirim.	
3	Kategorik ve nicel veri toplayabilirim.	
4	Elde ettiğim verilerden hareketle verileri görselleştirebilirim (sıklık tablosu, sütun grafiği, daire grafiği, çizgi grafiği, nokta grafiği, kök-yaprak gösterimi, histogram, kutu grafiği).	
5	Verileri özetleyebilirim (ortalama, tepe değer, ortanca, açıklık, ortalama mutlak sapma, standart sapma).	
6	Değişebilirlik kavramını değerlendirebilirim.	

"Ön Öğrenme Kontrol Listesi"ni doldurduktan sonra aşağıda verilen Kontrol Noktası sorularını çözünüz ve cevaplarınızı geri bildirim bölümünden kontrol ediniz.

KONTROL NOKTASI

SORU 1. Aşağıda verilen ifadelerden hangileri betimleyici istatistiksel araştırma sorusu, hangileri karşılaştırıcı istatistiksel araştırma sorusu niteliğindedir? İlgili boşluklara yazınız.

I. Sınıfınızdaki öğrencilerin en çok tercih ettiği meyve türlerinin eğilimi nedir? (.....)

II. 9. sınıf öğrencilerinin günlük kitap okuma süreleri eğilimi nasıldır? (.....)

III. Kız ve erkek öğrencilerin tercih ettikleri spor dalları arasında fark var mıdır? (.....)

IV. Şehir merkezinde yaşayan öğrenciler ile köyde yaşayan öğrencilerin internet kullanım amaçları arasında bir farklılık var mıdır? (.....)

V. Öğrencilerin en çok sahip olduğu evcil hayvan türü hangisidir? (.....)

SORU 2. Aşağıda verilen bilgileri inceleyerek tabloda doğru, yanlış ve bilmiyorum seçeneklerinden uygun olanı işaretleyiniz.

	Doğru	Yanlış	Bilmiyorum
a) Öğrencilerin **boy uzunlukları** nicel veridir.			
b) İnsanların **kan grupları** kategorik veridir.			
c) Öğrencilerin **yaşları** kategorik veridir.			
d) Arabaların **yakıt türü** (benzin, dizel, elektrik) nicel veridir.			

SORU 3. Aşağıda verilen grafik türlerini (A-D) yanda verilen açıklamalardan en uygun olanları ile (1-4) ile eşleştiriniz.

GRAFİK TÜRLERİ	
A	Histogram Grafiği
B	Nokta Grafiği
C	Kutu Grafiği
D	Daire Grafiği

AÇIKLAMALAR	
1	Verilerin yoğunluklarını sayı doğrusu üzerinde nokta işaretleriyle gösterir.
2	Bir veri grubunun medyanını, çeyrek değerlerini ve aykırı gözlemlerini gösteren özet grafiktir.
3	Bir araştırmada parça-bütün ilişkisinin yorumlanması için hazırlanır.
4	Nicel verilerin gruplandırılarak yan yana birleştirilmiş sütunlarla gösterildiği grafiktir.

A – ... B – ... C – ... D – ...

SORU 4. Bir öğrencinin bir hafta boyunca geçirdiği kitap okuma süreleri (dakika cinsinden) aşağıda verilmiştir.

25, 40, 30, 20, 44, 35, 30

Bu verilere göre aşağıdaki özetleme araçlarını belirleyerek ilgili cümleleri tamamlayınız.

I. Verilen veri grubunun **aritmetik ortalaması** ..... olarak elde edilir.

II. Verilen veri grubunun **tepe değeri (modu)** ..... olarak bulunur.

III. Verilen veri grubunun **ortancası (medyanı)** ..... olarak bulunur.

IV. Verilen veri grubunun **açıklığı** ..... olarak bulunur.

SORU 5. Aşağıda verilen durumları dikkatle inceleyiniz. Her durumun hangi değişebilirlik türüne ait olduğunu belirleyiniz ve ilgili seçeneği (A-D) boş kutucuğa yazınız.

1.	Aynı sıcaklık ölçümünü yapan iki termometrenin farklı değerler göstermesi	
2.	Bir bitkinin farklı bölgelerde farklı hızlarda büyümesi	
3.	Bir deneyde sonuçların kullanılan yöntemlere göre farklılaşması	
4.	Bir okul için yapılan araştırmada veri setinin başka bir sınıftan yeniden elde edilmesi	

Değişebilirlik Türleri	
A	Doğal ortamdan kaynaklı değişebilirlik
B	Ölçümden kaynaklı değişebilirlik
C	Müdahaleden kaynaklı değişebilirlik
D	Örneklemden kaynaklı değişebilirlik

GERİ BİLDİRİM

Aşağıda, "Kontrol Noktası"nda yer alan soruların ayrıntılı çözümleri verilmiştir. Cevaplarınızı kontrol ediniz. Bu bölüm, varsa eksik konularınızı belirlemenize yardımcı olacaktır.

Soruların çözümünde problem yaşadığınızı düşünüyorsanız aşağıdaki konuları tekrar gözden geçirmeniz faydalı olacaktır.

Sınıf: 9. Sınıf

Tema: İstatistiksel Araştırma Süreci

İnternet erişiminiz varsa eksik gördüğünüz konuları tamamlamak için MEBİ platformundaki içeriklerden de yararlanabilirsiniz.

KONTROL NOKTASI

ÇÖZÜM 1.

I. Sınıfınızdaki öğrencilerin en çok tercih ettiği meyve türlerinin eğilimi nedir? (Betimleyici)

II. 9. sınıf öğrencilerinin günlük kitap okuma süreleri eğilimi nasıldır? (Betimleyici)

III. Kız ve erkek öğrencilerin tercih ettikleri spor dalları arasında fark var mıdır? (Karşılaştıran)

IV. Şehir merkezinde yaşayan öğrenciler ile köyde yaşayan öğrencilerin internet kullanım amaçları arasında bir farklılık var mıdır? (Karşılaştıran)

V. Öğrencilerin en çok sahip olduğu evcil hayvan türü hangisidir? (Hiçbiri)

Betimleyen araştırma sorusu, belirli bir durumu veya olayı ayrıntılı bir şekilde incelemeyi hedefler. Genellikle "ne, kim, ne zaman, nerede" gibi soru sözcükleri içerir.

Karşılaştıran araştırma sorusu, iki ya da daha fazla grup veya durum arasındaki farklılıkları ortaya çıkarmayı amaçlar. Bu tür sorular genellikle "Daha fazla mı, daha az mı, farklı mı?" gibi ifadelerle oluşturulur.

ÇÖZÜM 2.

a) Öğrencilerin boy uzunlukları nicel veridir.

Doğru: Çünkü boy uzunlukları ölçülerek sayı ile ifade edilir. Ölçülebilir ve karşılaştırılabilir bir büyüklüktür.

b) İnsanların kan grupları kategorik veridir.

Doğru: Kan grupları (A, B, AB, 0) sayısal değer taşımaz, sınıflandırılabilme özelliğine sahiptir.

c) Öğrencilerin yaşları kategorik veridir.

Yanlış: Yaş, ölçülebilen ve sayısal olarak ifade edilebilen bir değişkendir. Bu nedenle nicel veridir, kategorik değildir.

d) Arabaların yakıt türü (benzin, dizel, elektrik) nicel veridir.

Yanlış: Yakıt türü sayısal olarak ölçülmez, sınıflandırılmaya dayanır. Bu nedenle kategorik veridir.

Nicel veriler, bir grubun özelliklerinin sayılması veya ölçülmesiyle elde edilen verilerdir.

Kategorik veriler, nesne veya bireyleri belirli sınıflara ayıran verilerdir. Sayısal büyüklük ifade etmez, sınıflandırma yapar.

ÇÖZÜM 3.

GRAFİK TÜRLERİ	
A	Histogram Grafiği
B	Nokta Grafiği
C	Kutu Grafiği
D	Daire Grafiği

AÇIKLAMALAR	
1	Verilerin yoğunluklarını sayı doğrusu üzerinde nokta işaretleriyle gösterir.
2	Bir veri grubunun medyanını, çeyrek değerlerini ve aykırı gözlemlerini gösteren özet grafiktir.
3	Bir araştırmada parça-bütün ilişkisinin yorumlanması için hazırlanır.
4	Nicel verilerin gruplandırılarak yan yana birleştirilmiş sütunlarla gösterildiği grafiktir.

A – 4 B – 1 C – 2 D – 3

ÇÖZÜM 4.

I. $\text{Aritmetik Ortalama} = \frac{20+25+30+30+35+40+44}{7} = 32$

II. **Tepe değer (Mod):** Veri setinin en çok tekrar eden değeri tepe değeridir. Buna göre verilen veri setinin tepe değeri (modu) 30'dur.

25, 25, 30, 30, 35, 40, 44

III. **Ortanca (medyan):** Verilen veri grubu küçükten büyüğe sıralandığında ortada kalan değer ortancadır. Veriler küçükten büyüğe doğru sıralandığında ortada kalan değer 30'dur.

25, 25, 30, 30, 35, 40, 44

IV. **Açıklık:** Bir veri grubundaki en büyük değer ile en küçük değer arasındaki farkı gösterir.

Açıklık = 44 – 20 = 24

ÇÖZÜM 5.

1.	Aynı sıcaklık ölçümünü yapan iki termometrenin farklı değerler göstermesi	B
2.	Bir bitkinin farklı bölgelerde farklı hızlarda büyümesi	A
3.	Bir deneyde sonuçların kullanılan yöntemlere göre farklılaşması	C
4.	Bir okul için yapılan araştırmada veri setinin başka bir sınıftan yeniden elde edilmesi	D

Değişebilirlik Türleri

A Doğal ortamdan kaynaklı değişebilirlik
B Ölçümden kaynaklı değişebilirlik
C Müdahaleden kaynaklı değişebilirlik
D Örneklemden kaynaklı değişebilirlik

İLİŞKİLENDİRİYORUM

Amaç: Bu bölümde ele alacağınız içerikleri zihninizde var olan bilgileriniz, yaşantılarınız ve diğer derslerde öğrendiklerinizle ilişkilendirmenizi bekliyoruz.

Sosyal Etkinliklere Katılıyor musun?

Bir okulda öğrencilerin ders dışı sosyal etkinliklere katılım durumları ile cinsiyetleri arasındaki ilişkinin incelenmesi amaçlanmaktadır. Bu bağlamda öğrencilerin cinsiyetleri (kız/erkek) ile sosyal etkinliklere katılım durumları (katılıyor/katılmıyor) arasındaki ilişki ele alınmaktadır. Bu konuya yönelik olarak 50 öğrenci ile yapılan araştırmaya ait veriler aşağıdaki tabloda verilmiştir.

	KATILIYORUM	KATILMIYORUM	TOPLAM
KIZ	18	7	25
ERKEK	10	15	25
TOPLAM	28	22	50

Tabloda kız ve erkek öğrencilerin etkinliklere katılım durumları karşılaştırıldığında farklılıklar görülmektedir.

Günlük yaşamda da benzer bir durumla karşılaşırız. Bazı öğrenciler sosyal kulüplere ya da etkinliklere daha çok katılırken (Örneğin kız öğrencilerin sosyal etkinliklere katılımı %36'dır.) bazıları derslerine yoğunlaşmayı ya da bireysel aktiviteleri tercih eder (Örneğin erkek öğrencilerin %30'u etkinliklere katılmaz).

Bu tür araştırmalar, sadece kız ve erkek öğrenciler arasında sayısal bir karşılaştırma yapmakla kalmaz aynı zamanda ders dışı etkinliklerin öğrencilerin günlük yaşamlarına kattığı değerleri de fark etmemizi sağlar. Elde edilen veriler, okul yönetimlerinin öğrencileri daha dengeli şekilde sosyal etkinliklere yönlendirmesi gerektiğine işaret edebilir.

Günlük yaşamdan örnekleri incelediğimizde tek nicel değişkenin yeterli olmadığını görüyoruz. Şimdi tek nicel değişkenin ötesine geçip **iki kategorik değişkenin dünyasına** adım atıyoruz. Göreli yüzdeler ve kümeli sütun grafiklerle örüntüleri okuyarak "İki kategorik değişken arasında ilişki var mı?" sorusuna yanıt arayacağız.

UYGULAYARAK ÖĞRENİYORUM

Amaç: Bu bölümde bilgilerinizi etkinlikler ve uygulamalarla pekiştirmenizi, öğrenmeyi daha kalıcı hale getirmenizi amaçlıyoruz.

Adım adım verilen etkinlik basamaklarını uygulayıp yönergelere dikkat ediniz. Çalışmanızı güvenli ve düzenli bir şekilde yapınız.

İKİ KATEGORİK DEĞİŞKENLİ VERİYE DAYALI İSTATİSTİKSEL BAĞLAM

ETKİNLİK

Aşağıda verilen Şema 1'de günlük yaşamdan alınmış bazı durumlar ve bu durumlar arasındaki ilişkiler verilmiştir. Bu ilişkilerin iki kategorik değişken arasında kurulmuş olması dikkat çekicidir. Buna göre aşağıda verilen soruları yanıtlayınız.

1) Şema 1'de verilen bağlamlar, iki kategorik değişkenli bağlamlardır. Nedeni ise her bağlamda birbirinden bağımsız olarak gözlemlenebilen ve belirli sınıflara ayrılabilen iki kategorik değişken bulunmaktadır.

Örneğin, sigara kullanma durumu (evet/hayır) ile akciğer rahatsızlığına yakalanma durumu (evet/hayır) gibi değişkenler hem kategoriktir hem de aralarındaki ilişki istatistiksel olarak incelenebilir. Şema 1'de verilen diğer örneklere ait kategorik değişkenleri belirleyiniz.

2) Farklı istatistiksel bağlamları belirleyerek Şema 1'de boş bırakılan kutucuklara yazınız.

3) Belirlediğimiz bu bağlamlar veri toplamayı gerektirir çünkü istatistiksel araştırma yapılabilmesi için gözlem ya da ölçme yoluyla veri toplanması zorunludur.

Örneğin, öğrencilerin kahvaltı alışkanlıklarını öğrenmek için anket uygulanabilir; tarımsal ürün verimliliği içinse tarım raporlarından veri alınabilir. Peki sizin belirlediğiniz bağlamlar veri toplamayı gerektirir mi? Neden?

4) Günlük hayatta en çok merak ettiğiniz veri toplamayı gerektiren iki kategorik değişkenli bağlamlar nelerdir?

Şema 1: *Gerçek Yaşam Durumları ve Bağlamları*



ÇÖZÜM

1) Şema 1'de verilen bağlamlara ait iki kategorik değişken aşağıda verilmiştir.

- Bağlam: Ders çalışma yöntemi ile sınav başarısı arasındaki ilişki

Değişkenler ve Kategoriler

Çalışma Yöntemi: Bireysel / Grup / Karma

Sınav Başarısı: Başarılı (≥%50) / Başarısız (<%50)

- Bağlam: Yağmurun yağma durumu ile barajlardaki doluluk arasındaki ilişki

Değişkenler ve Kategoriler

Yağış: Var / Yok

Doluluk Düzeyi: Yüksek (≥%70) / Orta (%40 – %69) / Düşük (< %40)

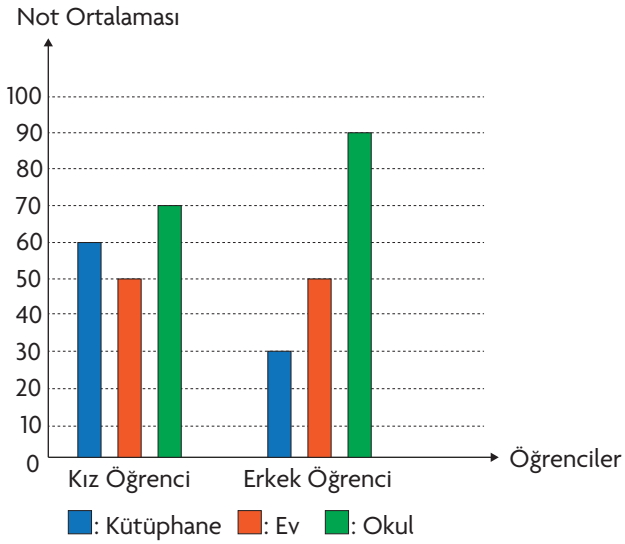
NOT: Etkinlikte sorulan 2, 3 ve 4. soruların çözümleri, özgün yorumlarınıza dayandığı için verilmemiştir.

SIRA SİZDE 1.

Aşağıda verilen gerçek yaşam durumları ile ilgili iki kategorik değişkenli veri toplamayı gerektiren bağlamlar oluşturarak tablodaki ilgili alanlara yazınız.

Geri Dönüşüm	
Spor	
Sosyal Medya	
Beslenme	

İKİ KATEGORİK DEĞİŞKEN ARASINDAKİ İLİŞKİLİLİĞE ODAKLANAN ARAŞTIRMA SORUSU OLUŞTURMA ETKİNLİK



Grafik 1

Grafik 1'de bir okulda yapılan araştırma sonucunda kız ve erkek öğrencilerin not ortalamaları, ders çalışma yerlerine (kütüphane, ev, okul) göre gösterilmiştir.

İki kategorik değişken arasındaki ilişkinin ortaya koyulmasına yönelik istatistiksel araştırma soruları oluşturulurken dikkat edilmesi gereken bazı temel ölçütleri inceleyelim.

Her bir ölçüt için Grafik 1'e uygun olan ve uygun olmayan örnekler verelim.

1. Amacı net olmalıdır.

İstatistiksel araştırma sorularında temel hedef açık bir biçimde ifade edilmelidir. Hazırlanan soruların amacı, değişkenler arasında ilişki kurmaya yönelik olmalıdır.

Uygun Örnek: Öğrencilerin cinsiyetleri ile ders çalışma yerleri (kütüphane/ev/okul) arasında bir ilişki var mıdır? (Soru iki kategorik değişken arasındaki ilişkiye odaklanmaktadır.)

Uygun Olmayan Örnek: Öğrencilerin ders çalışma alışkanlıkları onların akademik başarısını nasıl etkiler? (Belirli bir ilişki tanımlanmamış, ölçüt net değildir.)

2. Araştırmaya uygun olmalıdır.

Hazırlanan araştırma sorusu toplumsal, bilimsel ya da günlük yaşam açısından anlamlı ve faydalı olmalıdır. Sorunun cevabı, belirli bir problemi kavramaya veya çözmeye katkıda bulunmalıdır.

Uygun Örnek: Kız ve erkek öğrencilerin ders çalışma yerleri (kütüphane/ev/okul) ile not ortalamaları arasında bir ilişki var mıdır?
(Eğitim açısından anlamlıdır, öğrencilerin başarıya ulaşmalarında farklı çalışma ortamlarının etkisi görülmektedir.)

Uygun Olmayan Örnek: Öğrencilerin göz rengi ile ders çalışma yerleri (kütüphane/ev/okul) arasında bir ilişki var mıdır? (Bilimsel veya pratik açıdan anlamlı değildir, öğrencilerin başarısı ya da eğitimiyle ilgili yararlı bir bilgi sağlamaz.)

3. İlgilenilen grup (evren) açık olmalıdır.

Araştırma sorusunda üzerinde çalışılacak grup (evren) net biçimde tanımlanmalıdır. İncelemenin hangi topluluk ya da varlığı, nüfusu kapsadığı açıkça ifade edilmelidir.

Uygun Örnek: Lise öğrencilerinin cinsiyetleri (kız/erkek) ile ders çalışma yerleri (kütüphane/ev/okul) arasında bir ilişki var mıdır? (Evren, lise öğrencileri olarak net bir şekilde ifade edilmiştir.)

Uygun Olmayan Örnek: Bazı öğrencilerin ders çalışma yerleri ile not ortalamaları arasında bir ilişki var mıdır? (Hangi öğrencilerin kastedildiği belirsizdir, evren net değildir.)

4. Değişken açık bir şekilde görülmelidir.

Araştırma sorusunda kullanılan değişkenler açık ve anlaşılır biçimde belirtilmelidir. İki kategorik değişkenin ne olduğu net olarak tanımlanmalıdır.

Uygun Örnek: Öğrencilerin cinsiyetleri (kız/erkek) ile ders çalışma yerleri (kütüphane/ev/okul) arasında bir ilişki var mıdır? (Değişkenler cinsiyet ve ders çalışma yeri olarak net bir şekilde ifade edilmiştir.)

Uygun Olmayan Örnek: Öğrencilerin bazı özellikleri ile başarıları arasında bir ilişki var mıdır?
(Hangi özelliklerin incelendiği belirtilmemiştir, değişkenler belirsizdir.)

5. Veri toplanabilir olmalıdır.

Araştırma sorusunun yanıtlanabilmesi için gerekli verilerin elde edilebilir olması gerekir. İlgili veriler ya mevcut olmalı ya da toplanabilir nitelikte olmalıdır.

Uygun Örnek: Lise öğrencilerinin cinsiyetleri (kız/erkek) ile ders çalışma yerleri (kütüphane/ev/okul) arasında bir ilişki var mıdır? (Bu veriler anket veya gözlem yoluyla kolayca toplanabilir.)

Uygun Olmayan Örnek: Öğrencilerin gelecekteki ders çalışma tercihleri ile not ortalamaları arasında bir ilişki var mıdır? (Henüz gerçekleşmemiş bir durum söz konusu olduğu için bu verileri toplamak mümkün değildir.)

6. Değişebilirliği yansıtmalıdır.

Araştırma sorusu değişkenlerdeki farklılıkları yansıtmalıdır. Veriler, gözlemler arasındaki değişebilirliği ortaya koyabilmelidir.

Uygun Örnek: Öğrencilerin cinsiyetleri (kız/erkek) ile ders çalışma yerleri (kütüphane/ev/okul) arasında bir ilişki var mıdır? (Her iki değişken de kategoriktir ve öğrenciler arasında gözlemlenen farklılıklar değişebilirliği yansıtır.)

Uygun Olmayan Örnek: Lise öğrencilerinin matematik dersi sınav ortalaması nedir?
(Bu soru sadece mevcut bir durumu rapor eder, veri seti değişebilir değildir.)

7. Odaklanılan grup, araştırma yapmaya imkân vermelidir.

Araştırmanın odaklandığı grup, çalışmanın yapılmasına imkân tanımalıdır. İncelenen grubun araştırmayı uygulamaya elverişli olması ve verilerin pratik biçimde toplanabilmesi gerekir.

Uygun Örnek: Bir lisede öğrencilerin cinsiyetleri (kız/erkek) ile ders çalışma yerleri (kütüphane/ev/okul) arasında bir ilişki var mıdır? (Veriler aynı okuldan kolayca toplanabilir, araştırma uygulanabilirdir.)

Uygun Olmayan Örnek: Dünyadaki tüm öğrencilerin cinsiyetleri (kız/erkek) ile ders çalışma yerleri (kütüphane/ev/okul) arasında bir ilişki var mıdır? (Evren çok geniştir, verilerin toplanması pratik değildir, uygulanabilirlik düşüktür.)

8. **Kategorik veri toplamaya uygun olmalıdır.**

   Değişkenler kategorik ve belirli gruplara veya sınıflara ayrılabilir olmalıdır.

   Uygun Örnek: Öğrencilerin cinsiyetleri (kız/erkek) ile ders çalışma yerleri (kütüphane/ev/okul) arasında bir ilişki var mıdır? (Her iki değişken de kategoriktir, cinsiyet ve ders çalışma yeri gruplara ayrılabilir.)

   Uygun Olmayan Örnek: Öğrencilerin yaşları ile matematik sınavından aldıkları puanlar arasında bir ilişki var mıdır? (Yaş ve sınav puanı sürekli nicel verilerdir, kategorik veri değildir.)

SIRA SİZDE 2.

Aşağıda istatistiksel araştırma sorularının sahip olması gereken bazı temel ölçütlerin açıklamaları verilmiştir.

Her bir açıklamanın hangi ölçüte ait olduğunu belirleyip boş kutulara yazınız.

I. Sorunun yanıtı için gerekli veriler mevcut ya da toplanabilir nitelikte olmalıdır. Verinin elde edilemediği durumlarda araştırma sorusu uygun değildir.

Ölçüt:

II. Araştırmada incelenecek özellikler net biçimde ifade edilmelidir. İki kategorik değişken açıkça tanımlanmış olmalıdır.

Ölçüt:

III. Araştırma sorusu; toplumsal, bilimsel veya günlük yaşam açısından anlamlı olmalı ve bir problemin anlaşılmasına ya da çözümüne katkı sağlamalıdır.

Ölçüt:

IV. Hazırlanan araştırma sorusu net ve açık bir amaca sahip olmalıdır.

Ölçüt:

V. Araştırmanın yapılacağı grubun açıkça belirtilmesi gerekir.

Ölçüt:

İKİ KATEGORİK DEĞİŞKENLİ VERİ TOPLAMA PLANI YAPMA

ETKİNLİK

İstanbul'daki bir vakıf üniversitesi, öğrencilerin sosyal medya kullanım amaçları ile cinsiyetleri arasındaki ilişkiyi ortaya koymak amacıyla bir araştırma yapmayı planlamaktadır. Bu kapsamda sosyal medya kullanım amaçları (eğlence/sosyal etkileşim/bilgi edinme) ile cinsiyet (kadın/erkek) değişkenleri arasındaki farklılıkların incelenmesine karar verilmiştir. Bu doğrultuda üniversite, istatistiksel veri toplamaya başlamadan önce aşağıdaki araştırma sorusunu oluşturmuştur.



"Öğrencilerin sosyal medya kullanım amaçları (eğlence/sosyal etkileşim/bilgi edinme) ile cinsiyetleri (kadın/erkek) arasında istatistiksel açıdan anlamlı bir ilişki var mıdır?"

Üniversite, belirlediği araştırma sorusu doğrultusunda veri toplamaya başlamadan önce bir veri toplama planı hazırlamıştır. **Aşağıdaki planı inceleyiniz; hatalı adımları belirleyip düzeltiniz.**

UYARI

İstatistiksel araştırmalarda veri toplama planı, araştırmanın başarılı ve anlamlı sonuçlar üretmesi için kritik bir adımdır. İyi yapılandırılmış bir veri toplama planı; hangi verilerin nasıl ve kimden toplanacağına, hangi yöntemlerin kullanılacağına dair ayrıntılı bir yol haritası sunar.

1. **Veri Toplama Aracının Oluşturulması veya Belirlenmesi**

   Araç: 8-10 maddelik kısa **anket** (çoktan seçmeli)

2. **Evren ve Örneklemin Belirlenmesi**

   Evren: İstanbul'daki ilgili vakıf üniversitesinde öğrenim gören **lisans öğrencileri**

   Örneklem: 1, 2, 3 ve 4. sınıflardan **her kademeden 100 öğrenci** seçilecektir.

3. **Rastgeleliğin Sağlanması**

   Araştırmaya yalnızca **araştırmacının yakın arkadaşları ve kendi sınıfındaki öğrenciler** katılmıştır. Katılımcılar, kolay ulaşılabilir oldukları için seçilmiştir.

4. **Değişkenlerin Belirlenmesi**

   Bağımsız Değişken: Cinsiyet (kadın/erkek).

   Bağımlı Değişken: Sosyal medya kullanım amacı (eğlence/sosyal etkileşim/bilgi edinme).

5. **Verilerin Nerede, Ne Zaman, Nasıl ve Kimler Tarafından Toplanacağının Belirlenmesi**

   Yer/Zaman: "Müsait olduğumuz her yerde ve herhangi bir zamanda" veri toplanacaktır.

   Yöntem: Araştırmacılar, Instagram hikâyelerinde herkese açık bir anket linki paylaşacaktır.

   Sorumlular: "İsteyen herkes" toplayabilir.

   Akış: Ad-soyad ve öğrenci numarasının belirtilmesi zorunlu tutulacak, onam alınmayacak; yanıtlar anında sınıf mesajlaşma grubunda paylaşılacaktır.

6. **Verilerin Nasıl Kaydedileceğinin Belirlenmesi**

Kayıt Şablonu: Elektronik tablo

7. **Verilerin Gizliliğinin Sağlanması, Nesnel ve Dürüst Olunmasına Yönelik Önlemlerin Alınması**

   Gizlilik: Ad-soyad bilgileri toplanmaz, veriler anonim olarak ve sadece toplu sonuçlar hâlinde raporlanır.

   Onam: "Katılım gönüllüdür, istediğiniz anda bırakabilirsiniz." ifadesi anket girişinde yer alır.

   Tarafsızlık: Sorular yönlendirici değildir; ham veriler herhangi bir değişiklik yapılmadan saklanır.

ÇÖZÜM

Veri toplama planında 3 ve 5. adım hatalıdır.

3. **Rastgeleliğin Sağlanması**
   Araştırmaya yalnızca araştırmacının yakın arkadaşları ve kendi sınıfındaki öğrenciler katılmıştır. Katılımcıların seçimi kolay ulaşılabilir olmalarına göre yapıldığı için örneklem rastgele seçilmemiştir. Bu durumda sonuçların genellenebilirliği ortadan kalkar.

   Doğru bir uygulama için, fakülte ve sınıf bazında öğrenci listeleri alınmalı, her kademe içerisinden rastgele sayı üreteci kullanılarak katılımcılar seçilmelidir. Bu yöntem, örneklemin tarafsızlığını sağlar ve araştırma sonuçlarının güvenilirliğini artırır.

5. **Verilerin Nerede, Ne Zaman, Nasıl ve Kimler Tarafından Toplanacağının Belirlenmesi**

   Yer/Zaman: "Müsait olduğumuz her yerde ve herhangi bir zamanda" veri toplanacaktır. (Belirsiz ve tutarsızdır.)

   Yöntem: Araştırmacılar, Instagram hikâyesinde herkese açık bir anket linki paylaşacaktır.
   (Kendi kendini seçen örneklem vardır, doğrulama yoktur.)

   Sorumlular: "İsteyen herkes" toplayabilir. (Gözetim için bir standart yoktur.)

   Akış: Ad-soyad ve öğrenci numarasının belirtilmesi zorunlu tutulacak, onam alınmayacak; yanıtlar anında sınıf WhatsApp grubunda paylaşılacaktır. (Etik ihlali vardır ve gizlilik yoktur.)

   Doğru bir uygulama planı aşağıdaki gibi olabilir.

   Yer/Zaman: Veriler; üniversite kampüsünde, kütüphane ve ortak alanlarda, iki hafta içerisinde toplanacaktır.

   Yöntem: Katılımcılar, QR kod ile çevrim içi yayımlanan anketi dolduracak ya da araştırma görevlilerinin yönlendirmesiyle tablet üzerinden yüz yüze uygulama yapacaklardır.

   Sorumlular: Veri toplama süreci, rehber öğretim elemanının gözetiminde 3-4 araştırma görevlisi/öğrenci asistanı tarafından yürütülecektir.

   Akış: Kendilerine önce bilgilendirici onam formu sunulacak olan katılımcıların anketi doldurmaları sağlanacaktır (yaklaşık 3 dakika). Yanıtlar gizli tutulacak, sadece araştırma amacıyla kullanılacaktır.

Bu araştırma ile öğrencilerin sosyal medya kullanım amaçlarının cinsiyete göre nasıl farklılık gösterdiğini iki kategorik değişken üzerinden incelenmektedir. Araştırma sorusu belirlendikten sonra uygun bir veri toplama planı hazırlanmış ve bu plan doğrultusunda veriler toplanarak analiz edilmiştir. Analiz sonucunda elde edilen bilgiler; üniversite öğrencilerinin dijital platformlardaki davranışlarını anlamaya, sosyal medya kullanım alışkanlıklarını cinsiyet bağlamında değerlendirmeye ve bu doğrultuda yapılacak eğitim, rehberlik ve farkındalık çalışmalarına katkı sağlamaktadır.

SIRA SİZDE 3

Aşağıda istatistiksel araştırmalarda veri toplama planı oluşturulurken izlenmesi gereken bazı adımların açıklamaları verilmiştir.

Her bir açıklamanın hangi adıma ait olduğunu belirleyip boş kutulara yazınız.

1. Araştırmada incelenmek istenen özelliklerin veya ölçütlerin açıkça tanımlanmasıdır. Örneğin, öğrencilerin fiziksel aktivite düzeyi ile akademik başarıları arasındaki ilişki araştırılacaksa bu iki değişkenin belirlenmesi gerekir.

   Adım:

2. Araştırmanın tarafsız ve genellenebilir sonuçlar verebilmesi için örneklemin eşit şansla seçilmesidir. Örneğin, bir okulda öğrencilerin ders çalışma alışkanlıkları araştırılacaksa tüm öğrencilerin isimlerinin yazılarak rastgele seçilen 50 öğrenci örnekleme dâhil edilir.

   Adım:

3. Araştırmada kullanılacak verilerin hangi araçlarla toplanacağının belirlenmesidir. Anket, test, mülakat, gözlem formu ya da elektronik cihaz bu araçlara örnek olarak verilebilir.

   Adım:

4. Verilerin sistematik biçimde ne zaman, nerede ve kimler tarafından toplanacağının planlanmasıdır. Örneğin, sınav kaygısı araştırılıyorsa veriler, okul rehberlik öğretmeni tarafından hafta içi öğle tatilinde rehberlik servisinde toplanabilir.

   Adım:

5. Veri toplama sürecinde etik kurallara uyulmasıdır. Katılımcıların gönüllü olarak katılımı sağlanmalı, bilgileri gizli tutulmalı ve sonuçlar anonim olarak raporlanmalıdır.

   Adım:

İKİ KATEGORİK VERİYE DAYALI İSTATİSTİKSEL ARAŞTIRMALARDA VERİ ANALİZİ YAPMA VE SONUÇLARI YORUMLAMA

ETKİNLİK

Burak, öğrencilerin telefon kullanımındaki günlük alışkanlıklarını merak etmektedir. Özellikle sınıf arkadaşlarının telefonu en çok hangi amaçla kullandıkları ile uykuya geçme saatleri arasında bir ilişki olup olmadığını öğrenmek istemektedir. Bunun için arkadaşlarına "Telefonu en çok hangi amaçla kullanıyorsunuz ve genellikle saat kaçta uykuya geçiyorsunuz?" sorularını yönelterek istatistiksel bir araştırma yapmaya karar verir. Araştırmada telefon kullanım amacı (oyun/sosyal medya/ders/diğer) ile uykuya geçme saati (21.00 öncesi/21.00–23.00/23.00–01.00/01.00 sonrası) olmak üzere iki kategorik değişken belirlemiştir. Burak, bu değişkenlere uygun olarak aşağıda görseli verilen anketi hazırlar.

ANKET

Bu anket telefon kullanma amacıyla uykuya geçme saati arasındaki ilişkiyi incelemek amacıyla hazırlanmıştır.

Adı ve Soyadı: _____

Yönerge: Her bir maddeyi cevaplarken yalnızca bir seçeneği işaretleyiniz.

1. Telefonu en sık hangi amaçla kullanırsınız?

☐ Oyun ☐ Sosyal Medya ☐ Ders ☐ Diğer

2. Genellikle saat kaçta uykuya geçersiniz?

☐ 21.00 öncesi ☐ 21.00 – 23.00 ☐ 23.00 – 01.00 ☐ 01.00 sonrası

Burak, arkadaşlarına yaptığı anketten elde ettiği verileri analiz etmek için aşağıdaki tablolara yazmaktadır.

ÖĞRENCİ	TELEFON KULLANIM AMACI	UYKU SAATİ	ÖĞRENCİ	TELEFON KULLANIM AMACI	UYKU SAATİ
1. Öğrenci	Oyun	23.00 – 01.00	16. Öğrenci	Sosyal Medya	23.00 – 01.00
2. Öğrenci	Ders	21.00 – 23.00	17. Öğrenci	Oyun	21.00 – 23.00
3. Öğrenci	Sosyal Medya	01.00 sonrası	18. Öğrenci	Ders	21.00 – 23.00
4. Öğrenci	Oyun	23.00 – 01.00	19. Öğrenci	Sosyal Medya	23.00 – 01.00
5. Öğrenci	Diğer	01.00 sonrası	20. Öğrenci	Diğer	23.00 – 01.00
6. Öğrenci	Ders	21.00 – 23.00	21. Öğrenci	Oyun	01.00 sonrası
7. Öğrenci	Sosyal Medya	01.00 sonrası	22. Öğrenci	Diğer	21.00 – 23.00
8. Öğrenci	Oyun	01.00 sonrası	23. Öğrenci	Sosyal Medya	23.00 – 01.00
9. Öğrenci	Oyun	01.00 sonrası	24. Öğrenci	Ders	23.00 – 01.00
10. Öğrenci	Ders	23.00 – 01.00	25. Öğrenci	Sosyal Medya	23.00 – 01.00
11. Öğrenci	Ders	21.00 – 23.00	26. Öğrenci	Oyun	23.00 – 01.00
12. Öğrenci	Sosyal Medya	21.00 – 23.00	27. Öğrenci	Sosyal Medya	01.00 sonrası
13. Öğrenci	Diğer	21.00 – 23.00	28. Öğrenci	Diğer	21.00 – 23.00
14. Öğrenci	Diğer	21.00 – 23.00	29. Öğrenci	Sosyal Medya	01.00 sonrası
15. Öğrenci	Sosyal Medya	01.00 sonrası	30. Öğrenci	Ders	23.00 – 01.00

a) Araştırma kategorilerinden telefon kullanım amacı ve uykuya geçme saati değişkenleri, toplanan verilere göre Tablo 1'de verilmiştir.

Buna göre tabloyu doldurunuz.

Tablo 1

Amaç \ Saat	21.00 öncesi	21.00 – 23.00	23.00 – 01.00	01.00 sonrası	Toplam
Oyun					
Sosyal Medya					
Ders					
Diğer					
Toplam					30

b) Tablo 1'deki verileri kullanarak yüzdelik dağılımları gösteren Tablo 2'yi eksiksiz bir şekilde doldurunuz.

Tablo 2

Amaç \ Saat	21.00 öncesi	21.00 – 23.00	23.00 – 01.00	01.00 sonrası	Toplam
Oyun		%3,3			%23,3
Sosyal Medya				%16,7	
Ders	%0				
Diğer					
Toplam			%36,7		%100

ÇÖZÜM

a) Tablo 1'deki veriler, "Telefon Kullanım Amacı" ve "Uyku Saati" olmak üzere iki kategorik değişkene aittir. Her bir hücre, seçilen telefon kullanım amacı ile uykuya geçme saati kategorisinin birlikte kaç kez gözlendiğini göstermektedir.

Dolayısıyla bu tablo, iki yönlü tablo (çapraz tablo) olma özelliği taşımaktadır. Bu doğrultuda öğrenci listesinde yer alan veriler sayılarak her kategoriye karşılık gelen sıklıklar aşağıdaki tabloya yerleştirilmiş ve Tablo 1 doldurulmuştur.

İki Yönlü Tablo (Çapraz Tablo):

İki yönlü tablo, iki kategorik değişkenin kategorilerindeki sıklıkları bir tablo hâlinde sunar. Bu tabloda kategorik değişkenlerden biri satırlarda diğeri ise sütunlarda temsil edilir. Tablodaki her hücre, iki değişkenin kesiştiği noktada gözlenen sıklıkları gösterir.

Tablo 1

Amaç \ Saat	21.00 öncesi	21.00 – 23.00	23.00 – 01.00	01.00 sonrası	Toplam
Oyun	0	1	3	3	7
Sosyal Medya	0	1	4	5	10
Ders	0	4	3	0	7
Diğer	0	4	1	1	6
Toplam	0	10	11	9	30

b) Tablo 2'yi oluşturmak için Tablo 1'deki her bir hücre değeri, toplam kişi sayısına bölünür ve yüzdelik oranlar belirlenir.

Göreli Sıklık Tablosu: Bu tabloda her hücredeki değer, toplam öğrenci sayısına bölünerek hesaplanır. Göreli sıklık tablosu, verilerin genel dağılımını yüzdelik ya da ondalık değerlerle sunarak farklı kategoriler arasındaki karşılaştırmaları daha kolayhâle getirir.

Tablo 2

Amaç \ Saat	21.00 öncesi	21.00 – 23.00	23.00 – 01.00	01.00 sonrası	Toplam
Oyun	%0	%3,3	%10	%10	%23,3
Sosyal Medya	%0	%3,3	%13,3	%16,7	%33,3
Ders	%0	%13,3	%10	%0	%23,3
Diğer	%0	%13,3	%3,3	%3,3	%20
Toplam	%0	%33,3	%36,7	%30	%100

DEĞERLENDİRME

Göreli sıklık tablosu (Tablo 2) incelendiğinde

- **Sosyal medya kullanımı**, saat dilimi ilerledikçe artmaktadır. 21.00-23.00'te %3,3 iken 01.00 sonrasında %16,7 ile en yüksek orana ulaşmaktadır. Bu, geç saatlerde sosyal medya kullanımının baskın aktivite olduğu görülmektedir.
- **Ders çalışma**, en çok 21.00-23.00 saat diliminde (%13,3) görülür.
- **Diğer** aktiviteler, en çok 21.00-23.00 saat diliminde (%13,3) yoğunlaşmıştır ve ilerleyen saat dilimlerinde düşüş göstermiştir (%3,3).

Özellikle **ders** aktivitesinin erken saatlerde artması (21.00-23.00'te %13,3) ve gece yarısından sonra tamamen durması (01.00 sonrası %0), bu iki kategorik değişkenin birbirine bağımlı olabileceğine dair fikir sunabilir. Öte yandan **sosyal medya** kullanımının saat ilerledikçe artması, bu değişkenler arasında bir ilişki olacağını ortaya koyabilir.

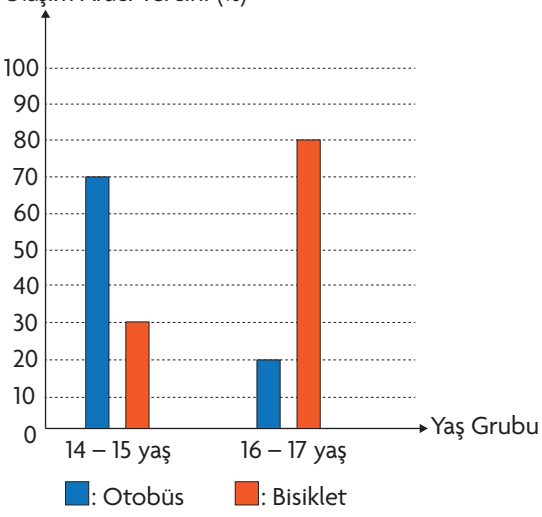
Ancak bu ilişki bir nedensellik anlamına gelmez. Bu dağılımlar, "Geç saatlerde ders çalışılmamasının nedeni, uyanık kalınan saat dilimidir." gibi kesin bir yargıya varmak için yeterli değildir. Örneğin, ders çalışma süresinin bitmesinin nedeni yorgunluk, ebeveyn kısıtlaması veya ders çalışmanın belirli bir saatte tamamlanması olabilir.

Sonuç: Tablo, öğrencilerin uyanık kalma saat dilimi ve aktivite tercihi arasında bir **ilişkinin varlığını** göstermektedir. Bu ilişki sadece gözlemlenen bir ortaklığı ifade eder. Bu ortaklığın bir nedensellik içerip içermediği yani bir değişkenin diğerine doğrudan etki edip etmediği ek araştırma ve analizler yapılmadan kesin olarak söylenemez.

NOT

İki kategorik değişkenli verilerde kullanılan görselleştirme araçları (çapraz tablolar, koşullu göreli sıklık tabloları, kümeli sütun grafikler vb.), değişkenler arasında bir ilişki durumu olup olmadığını görsel olarak anlamaya olanak tanır. Bu görselleştirmeler, değişkenler arasındaki ilişki durumunu ortaya koyar ancak bu ilişkiyi nedensellik olarak yorumlamak yanıltıcı olabilir. Özetle iki kategorik değişken arasındaki ilişki analiz edilirken yalnızca değişkenler arasında gözlemlenen bir ortaklık veya ilişki bulunduğu söylenebilir. Bu ortaklığın bir nedensellik içerdiğinin söylenebilmesi için ek araştırmalar ve analizler gereklidir.

ETKİNLİK



Grafik 2

Grafik 2, bir okulda öğrencilerin yaş gruplarına göre hangi ulaşım aracını tercih ettiklerini göstermektedir.

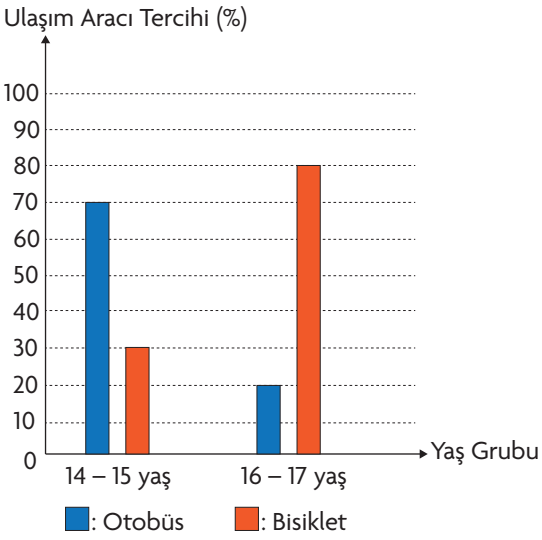
Grafik 2'yi inceleyerek aşağıdaki soruları yanıtlayınız.

a) Hangi yaş grubunda bisiklet tercihi daha fazladır?

b) Hangi yaş grubunda otobüs tercihi daha yüksektir?

c) Elde edilen sonuçlara göre yaş arttıkça ulaşım tercihlerinde nasıl bir değişim gözlenmektedir?

ÇÖZÜM



Grafik 2

Grafik 2'de öğrencilerin yaş gruplarına göre ulaşım aracı tercihleri, kümeli sütun grafiği ile gösterilmiştir. Kümeli sütun grafikler, göreli sıklıkları görselleştirmenin etkili bir yoludur. Bu grafikler, her bir kategori için diğer değişkenin dağılımını yüzde cinsinden temsil eder.

a) Bisiklet tercihi 16-17 yaş grubunda daha fazladır.

b) Otobüs tercihi 14-15 yaş grubunda daha yüksektir.

c) Grafik 2'ye göre yaş arttıkça öğrencilerin bisikleti tercih etme oranı artmakta, otobüsü tercih etme oranı ise azalmaktadır.

Kümeli Sütun Grafiği:

Kümeli sütun grafikleri, göreli sıklıkları görselleştirmenin etkili bir yoludur. Bu grafikler, her bir kategori için diğer değişkenin dağılımını yüzde cinsinden temsil eder.

SIRA SİZDE 4.

Okulda Geri Dönüşüm ve Çevre Farkındalığı Projesi



Bir okulun çevre kulübü, öğrencilerin doğaya karşı sorumluluk bilincini artırmak ve atıkların azaltılmasına katkı sağlamak amacıyla "Geri Dönüşüm ve Çevre Farkındalığı Projesi"ni başlatmıştır. Proje kapsamında okulda plastik, kâğıt, cam ve metal atıklar için ayrı ayrı geri dönüşüm kutuları yerleştirilmiş; öğrencilere bilgilendirici seminerler verilmiş ve çeşitli yarışmalar düzenlenmiştir.

Toplam 200 öğrencinin katıldığı bu projede, öğrencilerin çevreye duyarlılıkları hakkında ön test uygulanmış ve öğrencilerin çevre farkındalığı seviyeleri (düşük/orta/yüksek) belirlenmiştir. Ardından öğrencilerin bir ay boyunca geri dönüşüm kutularını kullanma durumları gözlenmiş ve geri dönüşüme katılım durumları (katıldı/katılmadı) kaydedilmiştir.

Proje sonunda öğretmenler, öğrencilerin "geri dönüşüm kutularını kullanma durumları" ile "çevre farkındalığı seviyeleri" arasında bir ilişki olup olmadığını araştırmak üzere bir veri toplama planı hazırlamıştır. Bu plan doğrultusunda elde edilen veriler Tablo 3'te verilmiştir.

Tablo 3'teki verilere ait göreli sıklıkları gösteren iki yönlü tabloyu ve çevre farkındalık seviyelerine göre geri dönüşüm kutularını kullanma durumları kümeli sütun grafiğini oluşturunuz.

Tablo 3

	Katıldı	Katılmadı	Toplam
Düşük	22	38	60
Orta	40	30	70
Yüksek	50	20	70
Toplam	112	88	200

GERİ BİLDİRİM

Bu bölümde yer alan geri bildirimler sayesinde kendi cevabınızı kontrol edebilir, hatalarınızı fark ederek gerekli düzeltmeleri yapabilirsiniz. Böylece konuyla ilgili öğrenmenizi pekiştirir ve benzer durumlarda daha doğru çözümler üretebilirsiniz.

SIRA SİZDE 1.

ÇÖZÜM

Geri Dönüşüm	Öğrencilerin tek kullanımlık plastik ürünleri tercih etme durumu (eden/etmeyen) ile geri dönüşüm etkinliklerine katılma sıklığı (hiç/ara sıra/düzenli) arasındaki ilişki.
Spor	Öğrencilerin spor yapma sıklığı (her gün/haftada birkaç kez/hiç) ile ders başarısı (yüksek/orta/düşük) arasındaki ilişki.
Sosyal Medya	Öğrencilerin sosyal medyayı kullanma amacı (eğlence/sosyal etkileşim/ders) ile günlük kullanma süresi (1 saatten az / 1–3 saat/3 saatten fazla) arasındaki ilişki.
Beslenme	Öğrencilerin hazır yemek tüketim sıklığı (haftada 1'den az/haftada 1–3 kez/haftada 4 ve üzeri) ile beden kitle indeksi (normal/kilolu/obez) arasındaki ilişki.

SIRA SİZDE 2.

ÇÖZÜM

I. Sorunun yanıtı için gerekli veriler mevcut olmalı ya da toplanabilir nitelikte olmalıdır. Verinin elde edilemediği durumlarda araştırma sorusu uygun değildir.

Ölçüt: Veri toplanabilir olmalıdır.

II. Araştırmada incelenecek özellikler net biçimde ifade edilmelidir. İki kategorik değişken açıkça tanımlanmış olmalıdır.

Ölçüt: Değişken açık bir şekilde görülmelidir.

III. Araştırma sorusu toplumsal, bilimsel veya günlük yaşam açısından anlamlı olmalı ve bir problemin anlaşılmasına ya da çözümüne katkı sağlamalıdır.

Ölçüt: Araştırmaya uygun olmalıdır.

IV. Hazırlanan araştırma sorusu net ve açık bir amaca sahip olmalıdır.

Ölçüt: Amacı net olmalıdır.

V. Araştırmanın yapılacağı grubun açıkça belirtilmesi gerekir.

Ölçüt: İlgilenilen grup (evren) net olmalıdır ya da açıkça belirtilmelidir.

SIRA SİZDE 3.

ÇÖZÜM

1. Araştırmada incelenmek istenen özelliklerin veya ölçütlerin açıkça tanımlanmasıdır. Örneğin, öğrencilerin fiziksel aktivite düzeyi ile akademik başarıları arasındaki ilişki araştırılacaksa bu iki değişkenin belirlenmesi gerekir.

   Adım: Değişkenlerin Belirlenmesi

2. Araştırmanın tarafsız ve genellenebilir sonuçlar verebilmesi için örneklemin eşit şansla seçilmesidir. Örneğin, bir okulda öğrencilerin ders çalışma alışkanlıkları araştırılacaksa tüm öğrencilerin isimlerinin yazılarak rastgele seçilen 50 öğrenci örnekleme dâhil edilir.

   Adım: Rastgeleliğin Sağlanması

3. Araştırmada kullanılacak verilerin hangi araçlarla toplanacağının belirlenmesidir. Anket, test, mülakat, gözlem formu ya da elektronik cihaz bu araçlara örnek olarak verilebilir.

   Adım: Veri Toplama Aracının Oluşturulması veya Belirlenmesi

4. Verilerin sistematik biçimde ne zaman, nerede ve kimler tarafından toplanacağının planlanmasıdır. Örneğin, sınav kaygısı araştırılıyorsa veriler, okul rehberlik öğretmeni tarafından hafta içi öğle tatilinde rehberlik servisinde toplanabilir.

   Adım: Verilerin Nerede, Ne Zaman, Nasıl ve Kimler Tarafından Toplanacağının Belirlenmesi

5. Veri toplama sürecinde etik kurallara uyulmasıdır. Katılımcıların gönüllü olarak katılımı sağlanmalı, bilgileri gizli tutulmalı ve sonuçlar anonim olarak raporlanmalıdır.

   Adım: Rastgeleliğin ve Verilerin Gizliliğinin Sağlanması, Nesnel ve Dürüst Olunması

SIRA SİZDE 4.

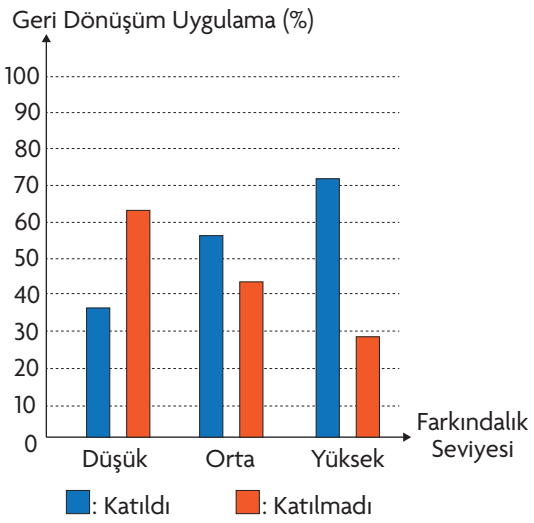
ÇÖZÜM

Göreli sıklık tablosu Tablo 4'te verilmiştir.

Tablo 4

	Katıldı	Katılmadı	Toplam
Düşük	0,11	0,19	0,30
Orta	0,2	0,15	0,35
Yüksek	0,25	0,1	0,35
Toplam	0,56	0,44	1

Çevre farkındalık seviyelerine göre geri dönüşüm kutularını kullanma durumları kümeli sütun grafiği Grafik 3'teki gibi oluşturulur.



Grafik 3

DEĞERLENDİRİYORUM

Amaç: Sevgili öğrencimiz; bu bölümde öğrendiklerinizi gözden geçirmeniz, kendi öğrenme sürecinizi değerlendirmeniz ve tema ile ilgili geliştirmeniz gereken noktaları fark etmeniz beklenmektedir. Soruları dikkatlice yanıtlayınız. Çözümlerinizi geri bildirim bölümünden kontrol ediniz.

SORULAR

1. Bir öğretmen, öğrencilerin **kahvaltı yapma durumu** (her gün/ara sıra/hiç) ile **ders esnasında odaklanma düzeyi** (yüksek/orta/düşük) arasında bir ilişki olup olmadığını araştırmak istemektedir. Bunun için 100 öğrenciden anket yoluyla veri toplanmış ve bu veriler aşağıdaki tabloya kaydedilmiştir.

Tablo 1

Odaklanma / Kahvaltı Durumu	Yüksek	Orta	Düşük	Toplam
Her gün	28	15	7	50
Ara sıra	10	15	5	30
Hiç	2	7	11	20
Toplam	40	37	23	100

Buna göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) Tablo 1'deki verileri kullanarak göreli sıklık tablosunu hazırlayınız.

b) Tablo 1'deki verileri kullanarak kahvaltı yapma durumuna göre koşullu göreli sıklık tablosunu hazırlayınız.

c) Göreli sıklık tablosunu inceleyerek kahvaltı yapma durumu ile odaklanma düzeyi arasındaki ilişkiyi yorumlayınız.

2. Bir okulda öğrencilerin **spor yapma durumu** (yapan/yapmayan) ile **ders başarı düzeyi** (yüksek/orta/düşük) arasındaki ilişki araştırılmak istenmiştir. 200 öğrenciden elde edilen veriler aşağıdaki tabloya kaydedilmiştir.

Tablo 2

Ders Başarısı / Spor Yapma	Yüksek	Orta	Düşük	Toplam
Spor Yapan	50	30	20	100
Spor Yapmayan	30	40	30	100
Toplam	80	70	50	200

Buna göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) Tablo 2'deki verileri kullanarak spor yapma durumuna göre koşullu göreli sıklıkları gösteren tabloyu oluşturunuz.

b) Spor yapma durumuna göre koşullu göreli sıklıkları gösteren kümeli sütun grafiğini çiziniz.

c) Elde edilen kümeli sütun grafiğini inceleyerek spor yapma durumunun ders başarısı ile ilişkisini yorumlayınız.

3. Öğrencilerin kitap okuma alışkanlığı ile ders dışı sosyal etkinliklere katılım durumları arasındaki ilişki, onların akademik başarıları ve kültürel gelişimlerinin desteklemesi açısından önemlidir. Yapılacak araştırmada bir lisedeki öğrencilerin kitap okuma alışkanlıkları ile sosyal etkinliklere katılım durumları arasındaki ilişki incelenecektir. Çalışma, okul yönetimine ve öğretmenlere öğrencilerin akademik ve sosyal gelişimleri hakkında anlamlı geri bildirim sağlamayı amaçlamaktadır.



Araştırma için kişisel bilgilerin yer almadığı çevrim içi bir anket formu hazırlanmıştır. Bu formda "Öğrencilerin Kitap Okuma Sıklığı" (düzenli/ara sıra/hiç) ve "Sosyal Etkinliklere Katılım Durumu" (katılıyor/katılmıyor) olmak üzere iki kategorik değişken üzerinden cevaplayacakları sorulara yer verilmiştir. Okulun farklı sınıf seviyelerinden rastgele seçilen 200 öğrenci araştırmaya dâhil edilmiştir. Anketler; eğitim yılının ikinci döneminde, kulüp faaliyetlerinin tamamlanmasının ardından okul yönetimi ve rehberlik servisi tarafından toplanacaktır. Elde edilen veriler; dijital bir veri tabanına kaydedilecek, ardından analiz için düzenli biçimde tabloya aktarılacaktır. Araştırmada öğrencilerin akademik başarısı ya da kişisel özellikleri temelinde herhangi bir yargıya varılmayacak yalnızca kitap okuma alışkanlığı ile sosyal etkinliklere katılım arasındaki ilişki incelenecektir.

Metinde bahsedilen istatistiksel araştırmayı veri toplama planında bulunması gereken ölçütler üzerinden aşağıda verilen kontrol formunu kullanarak değerlendiriniz. Metinde ölçüte karşılık gelen ifadeleri formdaki ilgili alanlara yazınız.

VERİ TOPLAMA PLANI ÖLÇÜTLERİ		METİNDE KARŞILIK GELEN İFADELER
Veri toplama aracı oluşturulmuştur veya belirlenmiştir.		
Evet ( )	Hayır ( )	
Evren ve örneklem belirlenmiştir.		
Evet ( )	Hayır ( )	
Örneklem belirlenirken rastgelelik sağlanmıştır.		
Evet ( )	Hayır ( )	
Değişkenler belirlenmiştir.		
Evet ( )	Hayır ( )	
Verilerin nerede, ne zaman, nasıl ve kimler tarafından toplanacağı belirlenmiştir.		
Evet ( )	Hayır ( )	
Verilerin nasıl kaydedileceği belirlenmiştir.		
Evet ( )	Hayır ( )	
Verilerin gizliliğinin sağlanmasıyla nesnel ve dürüst olunmasına yönelik önlemler alınmıştır.		
Evet ( )	Hayır ( )	

4. Bir teknoloji marketi, müşterilerinin çevrim içi alışveriş ve mağazadan alışveriş tercihleri ile ürün iade etme durumları arasında bir ilişki olup olmadığını incelemek istemektedir. Bu amaçla 400 müşteri üzerinde bir araştırma yapılmış ve elde edilen veriler aşağıdaki iki yönlü Tablo 3'te gösterilmiştir.

Tablo 3

İade Durumu / Alışveriş Tercihi	İade Eden	İade Etmeyen	Toplam
Çevrim İçi Alışveriş	80		
Mağazadan Alışveriş		220	
Toplam		280	400

Buna göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) Tablo 3'te boş bırakılan kısımları uygun şekilde doldurunuz.

b) İki kategorik değişken (alışveriş türü ve iade durumu) arasındaki ilişkiyi incelemeye yönelik bir istatistiksel araştırma sorusu yazınız.

c) Tablodaki verileri kullanarak göreli sıklık tablosunu oluşturunuz.

GERİ BİLDİRİM

Bu bölümde yer alan geri bildirimler sayesinde kendi cevabınızı kontrol edebilir, hatalarınızı fark ederek gerekli düzeltmeleri yapabilirsiniz. Böylece konuyla ilgili öğrenmenizi pekiştirir ve benzer durumlarda daha doğru çözümler üretebilirsiniz.

ÇÖZÜM 1.

a) **Göreli Sıklık Tablosu**

Odaklanma / Kahvaltı Durumu	Yüksek	Orta	Düşük	Toplam
Her gün	0,28	0,15	0,07	0,5
Ara sıra	0,1	0,15	0,05	0,3
Hiç	0,02	0,07	0,11	0,2
Toplam	0,4	0,37	0,23	1

b) Koşullu göreli sıklık, bir kategorik değişkene bağlı olarak diğer kategorik değişkenin yüzdelik dağılımını gösterir.

Tablo 1'deki verilerden yararlanarak oluşturulan kahvaltı yapma durumuna göre koşullu göreli sıklık tablosu aşağıda verilmiştir.
Not: Tabloda yer alan küsuratlı değerler, yaklaşık tam sayı değerleri ile ifade edilmiştir.

Koşullu Göreli Sıklık Tablosu

Odaklanma / Kahvaltı Durumu	Yüksek	Orta	Düşük	Toplam
Her gün	%56	%30	%14	%100
Ara sıra	%33	%50	%17	%100
Hiç	%10	%35	%55	%100

c) Göreli sıklık tablosu incelendiğinde her gün kahvaltı yapan öğrencilerin %28'i yüksek, %15'i orta, %7'si düşük odaklanma düzeyine sahiptir. Bu durum, düzenli kahvaltı yapan öğrencilerin derse daha iyi odaklandığını göstermektedir.

Ara sıra kahvaltı yapan öğrencilerde yüksek odaklanma %10'a düşerken orta odaklanma %15, düşük odaklanma ise %5 düzeyindedir. Bu grupta odaklanma dağılımı daha dengesizdir.

Hiç kahvaltı yapmayan öğrencilerin %11'i düşük, %7'si orta ve sadece %2'si yüksek odaklanma düzeyindedir.

Bu bulgular, kahvaltı yapmayan öğrencilerde odaklanma sorununun daha yaygın olduğunu ortaya koymaktadır.

Sonuç olarak bu verilerin kahvaltı yapma sıklığı arttıkça öğrencilerin derse daha yüksek düzeyde odaklanma eğilimi gösterdiği yorumu yapılabilir. Bu durum, öğrencilerin düzenli beslenme alışkanlıklarının akademik süreçlerdeki dikkat ve performansları üzerinde etkili olabileceğine dair bir fikir sunabilir.

UYARI

Burada gözlenen ilişki, kahvaltı yapmanın doğrudan odaklanmayı artırdığı ya da kahvaltı yapmamanın kesin olarak odaklanmayı azalttığı anlamına gelmez. Bu tür analizler yalnızca iki değişken arasındaki ilişkinin varlığını gösterir, sebep-sonuç ilişkisini kanıtlamaz.

ÇÖZÜM 2.

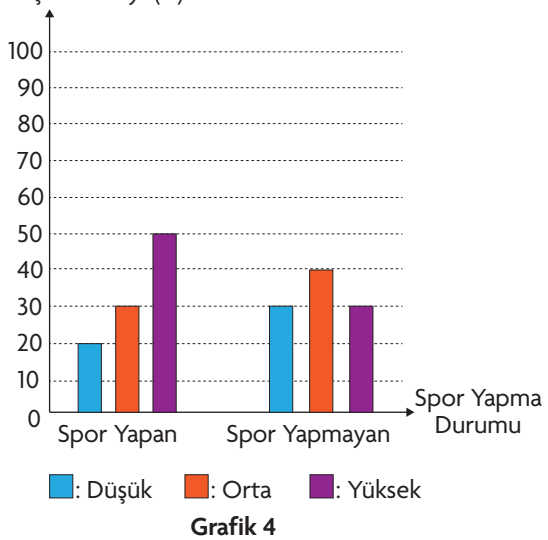
a) Koşullu göreli sıklık, bir kategorik değişkene bağlı olarak diğer kategorik değişkenin yüzdelik dağılımını gösterir.

Tablo 2'deki verilerden yararlanarak oluşturulan kahvaltı yapma durumuna göre koşullu göreli sıklık tablosu aşağıda verilmiştir.

Koşullu Göreli Sıklık Tablosu

Ders Başarısı / Spor Yapma	Yüksek	Orta	Düşük	Toplam
Spor Yapan	%50	%30	%20	%100
Spor Yapmayan	%30	%40	%30	%100

b) Başarı Düzeyi (%)



Grafik 4

Kümeli sütun grafikler, göreli sıklıkları görselleştirmenin etkili bir yoludur. Bu grafikler, her bir kategori için diğer değişkenin dağılımını yüzde cinsinden temsil eder. Buna göre spor yapma durumuna göre ders başarı düzeyini gösteren kümeli sütun grafiği Grafik 4'teki gibi oluşturulur.

c) Grafik 4 incelendiğinde spor yapan öğrencilerin yüksek başarı düzeyine sahip olma oranlarının spor yapmayanlara göre daha fazla olduğu görülmektedir. Spor yapmayan öğrencilerde ise orta başarı düzeyinde olma oranı daha yüksektir. Bu durum, düzenli olarak spor yapmanın öğrencilerin ders başarısını olumlu yönde etkileyebileceğini göstermektedir.

UYARI

Ancak unutulmamalıdır ki bu sonuç, spor yapmanın doğrudan ders başarısını artırdığı ya da düşürdüğü anlamına gelmez. Burada yalnızca iki değişken arasındaki ilişki gözlemlenmiştir. Yani spor yapma durumu ile ders başarısı arasında bir ilişki vardır fakat bu ilişkinin sebep-sonuç ilişkisi gösterdiği söylenemez.

ÇÖZÜM 3.

VERİ TOPLAMA PLANI ÖLÇÜTLERİ		METİNDE KARŞILIK GELEN İFADELER
Veri toplama aracı oluşturulmuştur veya belirlenmiştir.		Araştırma için kişisel bilgilerin yer almadığı **çevrim içi bir anket formu** hazırlanmıştır.
Evet (x)	Hayır ( )	
Evren ve örneklem belirlenmiştir.		**Okulun farklı sınıf seviyelerinden rastgele seçilen 200 öğrenci** araştırmaya dâhil edilmiştir.
Evet (x)	Hayır ( )	
Örneklem belirlenirken rastgelelik sağlanmıştır.		Okulun farklı sınıf seviyelerinden **rastgele seçilen** 200 öğrenci araştırmaya dâhil edilmiştir.
Evet (x)	Hayır ( )	
Değişkenler belirlenmiştir.		Bu formda "**Öğrencilerin Kitap Okuma Sıklığı**" ve "**Sosyal Etkinliklere Katılım Durumu**" olmak üzere iki kategorik değişken üzerinden cevaplayacakları sorulara yer verilmiştir.
Evet (x)	Hayır ( )	
Verilerin nerede, ne zaman, nasıl ve kimler tarafından toplanacağı belirlenmiştir.		Anketler; eğitim yılının ikinci döneminde, kulüp faaliyetlerinin tamamlanmasının ardından okul yönetimi ve rehberlik servisi tarafından toplanacaktır.
Evet (x)	Hayır ( )	
Verilerin nasıl kaydedileceği belirlenmiştir.		Elde edilen veriler; dijital bir veri tabanına kaydedilecek, ardından analiz için düzenli biçimde tabloya aktarılacaktır.
Evet (x)	Hayır ( )	
Verilerin gizliliğinin sağlanmasıyla nesnel ve dürüst olunmasına yönelik önlemler alınmıştır.		Araştırmada öğrencilerin akademik başarısı ya da kişisel özellikleri temelinde herhangi bir yargıya varılmayacak yalnızca kitap okuma alışkanlığı ile sosyal etkinliklere katılım arasındaki ilişki incelenecektir.
Evet (x)	Hayır ( )	

ÇÖZÜM 4.

a)

Tablo 3

İade Durumu / Alışveriş Tercihi	İade Eden	İade Etmeyen	Toplam
Çevrim İçi Alışveriş	80	60	140
Mağazadan Alışveriş	40	220	260
Toplam	120	280	400

b) Bu araştırmada iki kategorik değişken bulunmaktadır.

Değişken 1: Alışveriş türü (çevrim içi/mağazadan)

Değişken 2: Ürün iade durumu (iade eden/iade etmeyen)

Bu iki değişken arasındaki ilişkiyi incelemek için şu şekilde bir istatistiksel araştırma sorusu yazılabilir:

Müşterilerin alışveriş türleri (çevrim içi/mağazadan) ile ürün iade etme durumları (iade eden/iade etmeyen) arasında anlamlı bir ilişki var mıdır?

c) Göreli sıklık tablosu, her satır veya sütundaki değerlerin toplam içindeki yüzdelerini gösterir. Hesaplamalar sonucunda elde edilen göreli sıklık tablosu aşağıda verilmiştir.

Göreli Sıklık Tablosu

İade Durumu / Alışveriş Tercihi	İade Eden	İade Etmeyen	Toplam
Çevrim İçi Alışveriş	%20	%15	%35
Mağazadan Alışveriş	%10	%55	%65
Toplam	%30	%70	%100

ÖĞRENDİKLERİM

Amaç: Bu bölümde, öğrendiklerinizi özetlemeniz ve günlük hayatta ya da farklı derslerde kullanabileceğiniz bilgileri belirlemeniz amaçlanmaktadır. Aşağıda, özetinizi hazırlarken size yardımcı olması için iki kategorik değişkenli veriyle yürütülen istatistiksel araştırma sürecinin adım başlıkları verilmiştir. Başlıkların altındaki boşluklara, araştırma süreci adımlarıyla ilgili aklınızda kalanları kendi cümlelerinizle yazınız. Konuyla ilgili eklemek istediğiniz bilgileri, şemanın altında yer alan boşluğa yazabilirsiniz. Özetinizi hazırlarken zorlandığınızı düşünürseniz çalışma kartını tekrar gözden geçirmenizi öneririz.

İKİ KATEGORİK DEĞİŞKENLİ VERİ İLE İSTATİSTİKSEL ARAŞTIRMA SÜRECİ

a) İstatistiksel araştırma gerektiren gerçek yaşam durumlarını belirleme

.....
.....
.....
.....
.....

b) Araştırma Sorusu Oluşturma

.....
.....
.....
.....
.....

c) Veri Toplama Planı Yapma

.....
.....
.....
.....
.....

ç) Verileri Toplama/Elde Etme

.....
.....
.....
.....
.....

d) Analiz Yapma

.....
.....
.....
.....
.....

Daha fazlası için
karekodu okutunuz.



İKİ KATEGORİK DEĞİŞKEN İÇEREN DAĞILIMLAR 2

BAŞLARKEN

Bu bölümde yer alan etkinlikler, bireysel öğrenme yolculuğunuzda size rehberlik etmek ve öğrenme sürecinizi desteklemek amacıyla hazırlanmıştır. Çalışmalarınızı yürütürken "Hazırlanıyorum", "İlişkilendiriyorum", "Uygulayarak Öğreniyorum", "Değerlendiriyorum", "Yansıtıcı Yazı" ve "Öğrendiklerim" etkinliklerini sırası ile takip etmeniz ve etkinliklerin sonunda yer alan geri bildirimleri inceleyerek bölümleri tamamlamanız beklenmektedir.

Bu çalışma kartında matematiğin günlük hayata olan katkılarına ilişkin çıkarımlarda bulunup aşağıdaki soruları yanıtlayabileceksiniz.

- İki kategorik değişken arasındaki ilişkiyi analiz etmek ve bulguları yorumlamak için hangi istatistiksel yöntemler ve görselleştirme araçları kullanılmıştır veya kullanılabilir?
- Bu analizlerden elde edilen sonuçları nasıl yorumlar ve değişkenler arasında anlamlı bir ilişki olup olmadığına dair nasıl bir çıkarımda bulunursunuz?

HAZIRLANIYORUM

Amaç: Bu bölümde ön bilgilerinizi hatırlamanızı ve temaya hazırlıklı hâle gelmenizi amaçlıyoruz.

Aşağıda yer alan ifadeler, bu temada tamamlanması hedeflenen öğrenme çıktısını ele almadan önce sahip olmanız gereken bazı temel becerileri içermektedir Lütfen her bir ifadeyi dikkatlice okuyunuz.

- Eğer ifadedeki bilgiye hâkim olduğunuzu düşünüyorsanız kutucuğu işaretleyiniz.
- Eğer konuyu henüz tam olarak bilmediğinizi ya da hatırlamadığınızı düşünüyorsanız kutucuğu boş bırakınız.

Bu çalışma notla değerlendirilmeyecek olup amacı temaya ne ölçüde hazır olduğunuzu belirlemektir.

SORULAR	ÖN ÖĞRENME KONTROL LİSTESİ	
1	Verileri kontrol edip hatalı ya da eksik olanları fark edebilirim.	☐
2	Karşılaştırma yapabilirim.	☐
3	Tek değişkenli tablo ve verilere dayalı yorumlar yapabilirim.	☐
4	Temel matematiksel okuryazarlık becerisine sahibim.	☐
5	Basit çıkarımlar yapabilirim.	☐
6	Düşüncelerimi sözlü ve yazılı ifade edebilirim.	☐
7	Başkaları tarafından oluşturulan tek nicel değişkenli veri dağılımlarına dayalı sonuç veya yorumları tartışabilirim.	☐

KONTROL NOKTASI

SORU 1. Bir araştırmada "Öğrencilerin %80'i matematiği seviyor." sonucu paylaşılmıştır.

Bu sonucun güvenirliğini değerlendirebilmek için hangi bilgilerin verilmesi gerekir?

SORU 2. Bir gazetede şu haber yer almaktadır: "Ülke genelinde yapılan araştırmaya göre gençlerin %70'i kahvaltı yapmadan okula gidiyor."

Bu araştırmanın güvenilirliği hakkında ne gibi sorular sormalısınız?

SORU 3. Aşağıdaki tabloda öğrencilerin bilgisayar oyunu oynama durumlarının cinsiyete göre dağılımları verilmiştir.

Durum	Kız Öğrenci	Erkek Öğrenci
Oynuyor	12	18
Oynamıyor	18	12

Kız ve erkek öğrenciler arasında oyun oynama durumunu karşılaştırınız.

SORU 4. Aşağıdaki tabloda öğrencilerin en sevdiği ders durumlarının cinsiyete göre dağılımları verilmiştir.

Ders	Kız Öğrenci	Erkek Öğrenci
Türkçe	20	5
Matematik	10	15

Tabloya göre kız ve erkek öğrencilerin tercihleri arasında nasıl bir fark vardır? Yazınız.

SORU 5. Bir sınıftaki öğrencilerin en sevdikleri hayvanlarla ilgili yapılan araştırmanın sonuçları aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Hayvan	Öğrenci Sayısı
Kedi	12
Köpek	8
Kuş	5

a) En çok sevilen hayvan hangisidir?

b) Köpeği seven öğrencilerin toplam öğrenci sayısına oranı nedir?

SORU 6. Bir okuldaki öğrencilerin tercih ettikleri müzik türleri ile ilgili veriler aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Müzik Türü	Öğrenci Sayısı
Pop	15
Rap	10
Türk Halk	5
Klasik	10

a) Kaç öğrenci ankete katılmıştır?

b) En az tercih edilen müzik türü hangisidir?

c) Rap müziği tercih edenlerin toplam öğrenci sayısına oranı nedir?

SORU 7. Bir sınıfta 25 öğrencinin 15'i kitap okumaktadır.

Kitap okumayanların oranını yüzde olarak ifade ediniz.

SORU 8. Bir okulda 120 öğrenciden 48'i okul servisini kullanmaktadır.

Servis kullanan öğrencilerin yüzdesi kaçtır?

SORU 9. Aşağıdaki tabloda 10 A ve 10 B sınıfındaki öğrencilerin en sevdiği meyveler verilmiştir.

Meyve Türü	Öğrenci Sayısı
Elma	12
Portakal	10
Muz	8
Üzüm	14

En az tercih edilen meyve türü hangisidir?

SORU 10. Bir araştırmada şu sonuç elde edilmiştir:

Öğrencilerin %25'i düzenli spor yapmakta, %75'i yapmamaktadır.

Bu veriye dayanarak öğrenciler hakkında nasıl bir yorum yapılabilir?

SORU 11. Aşağıda Elif ile Ahmet arasında geçen bir konuşma verilmiştir.

Elif: Geçen gün gazetede bir haber okudum. Haberde "Bir üniversitedeki öğrencilerin günlük ortalama sosyal medya kullanım süresi 4 saattir" deniliyordu.

Ahmet: Evet ama bu biraz genelleyici değil mi? Benim etrafımdaki çoğu arkadaşım sosyal medyada günde en az 6 saat vakit geçiriyor.

Elif: Haberde yazıyorsa doğrudur bence. Demek ki çoğu öğrenci sosyal medyayı günde 4 saat kadar kullanıyor.

Buna göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) Elif'in yorumunu istatistiksel araştırma süreci açısından inceleyiniz. Elif'in yorumunun dayanağı nedir? Yazınız.

b) Bu yoruma yönelik olası bir hata veya eksiklik var mı? Tartışınız.

c) Tespit ettiğiniz hata veya eksikliği gidermek için Ahmet, Elif'e ne söylemelidir? Yazınız.

GERİ BİLDİRİM

Bu geri bildirim sayesinde kendi cevabınızı kontrol edebilir, hatalarınızı düzelterek öğrenmenizi pekiştirebilirsiniz.

KONTROL NOKTASI

ÇÖZÜM 1.

- Araştırmaya kaç öğrencinin katıldığı belirtilmeli.
- Katılımcıların tüm sınıfı veya okulu temsil edip etmediği açıklanmalı.
- Ölçüt net olmalı (Ör. "sevmek" neye göre belirlenmiş?).

Bu bilgiler olmadan verilen %80 sonucu tek başına güvenilir değildir.

ÇÖZÜM 2.

- Araştırmaya kaç kişi katılmış?
- Katılan öğrenciler farklı bölgelerden mi seçilmiş?
- Yaş grupları aynı mı?
- Araştırmayı kim yapmış, araştırma bağımsız mı?

Eğer bu sorular sorulmazsa sonuç yanıltıcı olabilir.

ÇÖZÜM 3.

Kız öğrencilerin $\frac{12}{30} = \frac{2}{5}$ i $\rightarrow$ $\frac{2}{5} \times 100 = 40 \Rightarrow$ %40'ı oyun oynarken

Erkek öğrencilerin $\frac{18}{30} = \frac{3}{5}$ i $\rightarrow$ $\frac{3}{5} \times 100 = 60 \Rightarrow$ %60'ı oyun oynamaktadır.

ÇÖZÜM 4.

Ders	Kız Öğrenci	Erkek Öğrenci
Türkçe	20	5
Matematik	10	15

- Kız öğrenciler arasında Türkçe daha çok tercih edilirken
- Erkek öğrenciler arasında matematik daha çok tercih edilmiştir.

ÇÖZÜM 5.

Hayvan	Öğrenci Sayısı
Kedi	12
Köpek	8
Kuş	5

a) En çok sevilen hayvan kedidir.

b) $\frac{\text{Köpeği seven öğrenci sayısı}}{\text{toplam}} = \frac{8}{12+8+5} = \frac{8}{25}$ bulunur.

ÇÖZÜM 6.

Müzik Türü	Öğrenci Sayısı
Pop	15
Rap	10
Türk Halk	5
Klasik	10

a) 15 + 10 + 5 + 10 = 40 öğrenci katılmıştır.

b) En az tercih edilen müzik türü Türk halk müziğidir. (5 öğrenci)

c) Rap müziği tercih edenlerin oranı $\frac{10}{40} = \frac{1}{4}$ bulunur.

ÇÖZÜM 7.

Kitap okumayanların sayısı 25 − 15 = 10 olur.

O hâlde oran $\frac{10}{25} = \frac{10 \cdot 4}{25 \cdot 4} = \frac{40}{100} = \%40$ şeklinde bulunur.

ÇÖZÜM 8.

$\frac{48}{120} = \frac{2}{5}$ olarak bulunur.

$\frac{2}{5} \times 100 = 40 \Rightarrow \%\,40$ olarak bulunur.

ÇÖZÜM 9.

Meyve Türü	Öğrenci Sayısı
Elma	12
Portakal	10
Muz	8
Üzüm	14

En az tercih edilen meyve türü 8 kişinin tercihiyle muz olmuştur.

ÇÖZÜM 10.

- Spor yapmayan öğrenciler büyük çoğunluktadır.
- Spor yapanların oranı oldukça düşüktür.
- Bu durum, öğrencilerin sağlıklı yaşam alışkanlıklarının yeterince gelişmediğini gösterebilir.

ÇÖZÜM 11.

a) Elif'in yorumu, **gazetede verilen "ortalama 4 saat kullanma" bilgisini** doğrudan doğruya tüm öğrenciler için geçerli kabul etmesine dayanmaktadır.

Başka bir deyişle Elif, tek bir istatistiksel ölçü olan **ortalama** üzerinden genelleme yapmaktadır.

b) Ortalama tek başına yeterli değildir. Çünkü dağılım hakkında bilgi vermez.

Örneğin; bazı öğrenciler 1 saat, bazıları 7 saat kullanıyor olabilir. Bu durumda sosyal medya kullanımının ortalaması yaklaşık 4 saate çıkabilir.

Elif'in hatası: Ortalama → "Çoğu öğrenci 4 saat civarında sosyal medya kullanıyor" sonucuna ulaşmaktır.

Hâlbuki **medyan, tepe değer (mod), dağılım aralığı** gibi ölçüler olmadan bu genelleme hatalıdır.

c) Ahmet şöyle diyebilir:

"Gazetede yazan ortalama 4 saat bilgisi, tüm öğrencilerin aynı şekilde 4 saat civarında vakit geçirdiğini göstermez. Bazıları çok az, bazıları çok fazla kullanıyor olabilir. Bunun için dağılımın nasıl olduğuna, ortalamanın yanında medyana veya en sık görülen değere de bakmamız gerekir."

İLİŞKİLENDİRİYORUM

Amaç: Bu bölümde yeni öğreneceğiniz temayı; zihninizde var olan bilgileriniz, yaşantılarınız ve diğer derslerde öğrendiklerinizle ilişkilendirmenizi bekliyoruz.

Aşağıda film hakkında yapılan yorumlar ile ilgili dikkat edilmesi gerekenleri içeren metni okuyunuz. Bu yorumlar hakkındaki sosyal medya-film yorumu siteleri karşılaştırmalarını dikkatle inceleyiniz.

1. Sosyal medyada kullanıcılar hızlı, duygusal ve kısa ifadeler kullanma eğilimindedir. Film değerlendirme sitelerinde ise kullanıcılar daha bilinçli, ayrıntılı ve puanlama temelli yorumlar yaparlar. Platformların amacı, kullanıcı kitlesi ve paylaşım alışkanlıkları farklılıkların temel nedenleridir.

2. Sosyal medyada beğeni ya da hayal kırıklığını duygusal bir şekilde ifade etme eğilimi yüksektir. Film sitelerinde ise kullanıcılar genellikle filmin senaryosu, oyunculuk, müzik, görsellik gibi teknik unsurlara dikkat ederek yorum yaparlar.

3. Sosyal medyada yorumlar daha anlık duygu aktarımına yönelik ve kısadır. ("Çok güzeldi!", "Hiç beğenmedim." gibi). Film değerlendirme sitelerinde ise uzun, ayrıntılı ve gerekçelendirilmiş yorumlar bulunur. Ayrıca puanlama sistemi ile desteklenir.

4. Sosyal medya kullanıcıları sadece duygusal ve aşırı uç yorumlara bağlı kalmamalı, tek bir platformdaki yorumlara dayanarak karar vermemeli, kullanıcıların kişisel tercihlerinin farklı olabileceğini göz önünde bulundurmalıdır.

5. Sosyal medyanın geniş ve heterojen kitlesi, yorumların çeşitliliğini artırır ama güvenilirliği azaltabilir. Film değerlendirme siteleri ise daha çok sinema meraklılarının uğradığı yerlerdir. Bu nedenle yorumlar genellikle daha bilinçli, detaylı ve eleştirel olabilir.

6. Yorumların sayısı ve güvenilirliği, yorumların ayrıntı düzeyi, kullanıcıların benzer içeriklere yaptıkları değerlendirmeler, puanlama sistemi ve genel ortalama değerlendirmeler.

7. Sosyal medyada duygusal ve öznel yorumlar ağır basarken değerlendirme sitelerinde daha analitik ve puanlı yorumlar vardır. Bu farklılık, Elif'in karar verirken hangi görüşe daha fazla güveneceği konusunda kararsız kalmasına yol açabilir. Ayrıca farklı türdeki yorumları ortak bir ölçütle değerlendirmek zor olabilir.

UYGULAYARAK ÖĞRENİYORUM

Amaç: Bu bölümde bilgilerinizi etkinlikler ve uygulamalarla pekiştirmenizi, öğrenmeyi daha kalıcı hâle getirmenizi amaçlıyoruz.

Etkinlikte verilen adımları dikkatle uygulayınız. Çalışmanızı dikkatli ve düzenli bir şekilde yapınız.

ETKİNLİK: İki Kategorik Değişkene Dayalı Bulguları Tartışma

Aşağıda verilen örnek iddiayı ve bu iddiaya yönelik soruları inceleyiniz:

Bir sosyal medya paylaşımında, bir ankete dayandırılarak şu iddia ortaya atılıyor: "Geceleri 'ışık açık' uyuyan (Evet/Hayır) kişilerin, 'sabahları yorgun uyandığını' (Evet/Hayır) belirtme oranı daha yüksek bulundu. Demek ki odadaki ışık, uyku kalitesini doğrudan bozuyor ve yorgunluğa neden oluyor."

Bu iddiayı ve çıkarımı, "Değerlendirme Süreci" adımlarını kullanarak tartışınız:

a) Bu çalışmadaki iki kategorik değişken ve bu değişkenlerin kategorileri nelerdir?

b) Paylaşımda öne sürülen yorum, değişkenler arasında bir **korelasyon (ilişki)** mu yoksa bir **nedensellik (sebep-sonuç)** mi iddia etmektedir?

c) Işık açık uyumanın" sabah yorgunluğuna neden olduğu sonucuna varmak için bu bulgu tek başına yeterli midir? Neden?

d) Bu iki durum (ışıkta uyuma ve yorgunluk) arasındaki ilişkiyi açıklayabilecek **alternatif faktörler** veya **karıştırıcı değişkenler** neler olabilir? (İpucu: Bu iki durumu da aynı anda etkileyebilecek üçüncü bir faktör düşününüz.)

ÇÖZÜM

a) Değişkenler ve Kategoriler:

Değişken 1: Uyumada ışık durumu (Kategorik: Evet/Hayır)

Değişken 2: Sabah yorgun uyanma durumu (Kategorik: Evet/Hayır)

b) Korelasyon/Nedensellik Sorgulaması:

Bulgu ("...oranı daha yüksek bulundu.") bir **korelasyondur (ilişkidir).**

Ancak çıkarım ("...ışık... doğrudan bozuyor ve yorgunluğa neden oluyor.") açık bir **nedensellik** iddiasıdır.

c) Yeterlilik:

Hayır, yeterli değildir. İki değişkenin birlikte gözlemlenmesi (korelasyon), birinin diğerine sebep olduğunu kanıtlamaz.

d) Alternatif Açıklamalar ve Karıştırıcı Değişkenler:

Bu ilişki **sahte** olabilir. Araya üçüncü bir faktör giriyor olabilir.

Örnek Karıştırıcı Değişken: "Kaygı Düzeyi" (Anksiyete) veya "Stres".

"Yüksek kaygı" seviyesine sahip bir kişi, hem gece güvende hissetmek için "ışığı açık bırakma" eğiliminde olabilir hem de kaygı nedeniyle "kötü bir uyku çekip sabah yorgun uyanma" durumunu yaşayabilir. Bu senaryoda, yorgunluğun asıl nedeni "ışık" değil hem ışığı açık bırakmaya hem de yorgunluğa neden olan "kaygı" faktörüdür. Gözlemlediğimiz ilişki, "kaygı" adlı karıştırıcı değişken tarafından yaratılmış sahte bir ilişkidir.

ÖRNEK

Bir halk sağlığı araştırmacısı, insanların gece atıştırması yapma alışkanlığı ile kilo alma durumu arasında bir ilişki olup olmadığını incelemiştir. Çalışma sonucunda elde edilen veriler aşağıdaki iki yönlü tabloda verilmiştir.

Gece atıştırması	Kilo Alan	Kilo Almayan	Toplam
Yapan	60	40	100
Yapmayan	30	70	100
Toplam	**90**	**110**	**200**

Buna göre

a) Araştırmacının "Gece atıştırması yapanlar daha fazla kilo almaktadır." şeklindeki çıkarımının dayanağı nedir? Nicel olarak gösteriniz.

b) Araştırmacının bu çıkarımında hangi hatalar/yanılgılar olabilir? En az üç madde hâlinde açıklayınız.

c) Eğer bulguları doğru ve daha güvenilir şekilde ifade etmek isteseydi ne demeliydi? Doğru sonucu gerekçesiyle yazınız ve bu konuda yapılabilecek ek analiz/çalışma önerilerini sıralayınız.

İki kategorik değişkenli verilere dayalı istatistiksel sonuç ve yorumların geçerliliğini değerlendirme süreci; istatistiksel yorumların doğruluğunu artırmak, yanlılığı en aza indirmek ve elde edilen sonuçların güvenilirliğini sağlamak için kritik öneme sahiptir.

ÇÖZÜM

Verilere göre

Gece atıştırması **yapanlarda** kilo alma oranı

60 / 100 = **%60**'tır.

Gece atıştırması **yapmayanlarda** kilo alma oranı

30 / 100 = **%30**'dur.

Buna göre gece atıştırması yapanların kilo alma olasılığı, yapmayanlarınkinin iki katıdır.

b) Nedensellik yanılgısı: İki değişken arasında ilişki gözlenmesi, birinin diğerine doğrudan neden olduğunu göstermez. Gece atıştırması ile kilo alma arasında ilişki varsa bile gece atıştırmasının doğrudan kilo aldırdığını kanıtlamaz.

Etkileyen değişkenlerin göz ardı edilmesi: Kilo alımını etkileyebilecek başka faktörlerin (günlük toplam kalori alımı, fiziksel aktivite düzeyi, metabolizma, uyku kalitesi, diyet alışkanlıkları, ilaç kullanımı, yaş, cinsiyet vb.) kontrol edilmediği görülmüştür. Bu değişkenler hem gece atıştırmasını hem de kilo almayı etkileyerek yanıltıcı ilişkiye yol açabilir.

Seçim veya gözlem yanlılığı: Örneklem rastgele seçilmemiş veya farklı gruplar, farklı şekilde raporlamış olabilir. Örneğin; gece atıştırması yapanlar sağlık durumları, yaşam tarzları veya anketi doldurma eğilimleri bakımından farklı olabilir.

Ölçüm hatası / tanım farklılıkları: "Gece atıştırması" ve "kilo almak" nasıl tanımlanıp ölçüldü? Belirli bir zaman dilimi, porsiyon veya objektif kilo ölçümü olmadan sonuçlar güvenilir olmayabilir.

"Bu veriler, incelenen örneklemde gece atıştırması yapan bireylerin kilo alma oranının (%60) gece atıştırması yapmayanlara (%30) göre daha yüksek olduğunu göstermektedir. Ancak bu ilişki nedensellik kanıtı değildir, diğer potansiyel etkenler (günlük kalori alımı, fiziksel aktivite, uyku düzeni, yaş, cinsiyet vb.) kontrol edilmeden gece atıştırmasının doğrudan kilo alımına neden olduğunu söylemek doğru olmaz." Çünkü gözlemsel iki değişken arasındaki basit bir dağılım nedensel bağlantıyı göstermez.

İstatistiksel Temellendirmeler

İki kategorik değişkenli verilere dayalı istatistiksel sonuç ve yorumların geçerliliğini değerlendirmek için analizlerin doğru temellere dayandırılıp dayandırılmadığı incelenir. Bu süreçte kullanılan veri toplama yöntemi, örnekleme yöntemi, kullanılan analiz araçlarının uygunluğu ve yorumların elde edilen verilere dayalı olup olmadığı gibi unsurlar göz önünde bulundurulur.

Hatalar ve Yanlılıklar

İki kategorik değişkenli verilere dayalı sonuçlar incelenirken olası hatalar veya yanlılıkların tespit edilmesi önemlidir. Verilerin toplandığı süreçte örneklem yanlılığı, küçük örneklem büyüklüğü veya yanlış ölçüm gibi hatalar ilişkililik analizini yanıltabilir. Ayrıca analizde kullanılan görselleştirme araçlarının seçimi ya da yorumların varsayımlara dayalı olarak yapılması da yanlış çıkarımlara yol açabilir.

Örneklem Yanlılığı (seçim veya gözlem yanlılığı): Araştırmada seçilen katılımcıların hedef kitleyi temsil etmemesi durumudur. Bu yanlılık, sonuçların genellenebilirliğini zayıflatır. Örneğin, sadece belirli bir yaş grubundan veri toplanması, yaşa bağlı değişkenlerin etkisini abartabilir.

Ölçüm Yanlılığı: Veri toplama araçlarının sistematik olarak hatalı sonuçlar üretmesiyle ortaya çıkar. Yanlı sorular, yönlendirici ifadeler veya tutarsız gözlem kriterleri bu tür yanlılığa neden olabilir. Ölçüm aracının geçerliliği ve güvenilirliği bu açıdan oldukça önemlidir.

Nedensellik Yanılgısı: İki değişken arasında gözlenen ilişkiyi, doğrudan nedensel bir bağ gibi yorumlama hatasıdır. Nitel verilerde korelasyonlar sıkça gözlemlenir ancak bu ilişkilerin neden-sonuç şeklinde sunulması, bilimsel geçerliliği zedeleyebilir.

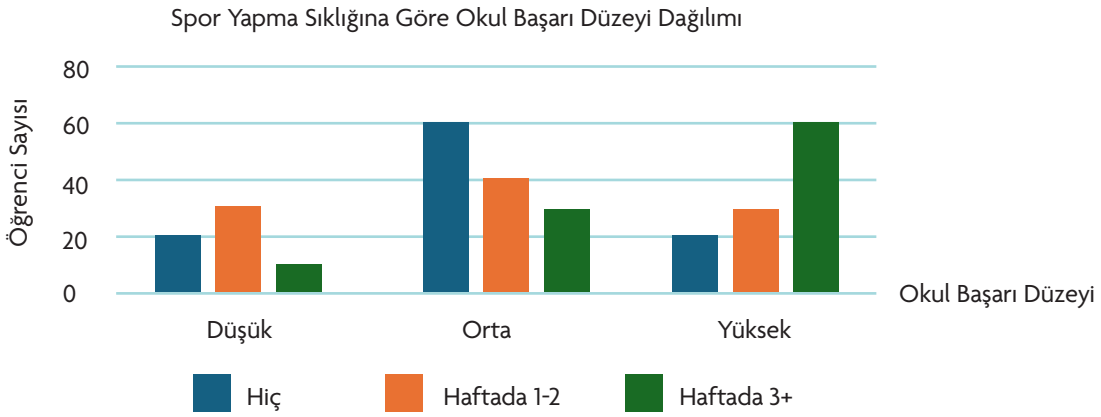
Eksik Değişken Yanlılığı: Analize dâhil edilmeyen ama sonuçları etkileyen önemli bir değişkenin göz ardı edilmesidir.

Sonuçların ve Yorumların Çürütülmesi veya Kabul Edilmesi

Elde edilen istatistiksel sonuç ve yorumlar, eldeki verilere ve yapılan analizlere dayalı olarak ya kabul edilir ya da çürütülür. Yorumlar, verilerin sunduğu bulgularla uyumluysa ve mantıksal temellere dayandırılıyorsa kabul edilebilir. Ancak yorumlarda mantık hataları, genelleme yanılgıları veya veri analizinde eksiklikler bulunuyorsa bu yorumlar çürütülür ve doğru analiz yöntemleriyle düzeltilir.

SIRA SİZDE 1.

Bir sağlık araştırmacısı, öğrencilerin spor yapma sıklığı (hiç, haftada 1-2, haftada 3 ve üzeri) ile okul başarı düzeyi (düşük, orta, yüksek) arasındaki ilişkiyi incelemiştir. Araştırmadan elde edilen veriler aşağıdaki sütun grafiğinde gösterilmiştir.



Araştırmacı yaptığı inceleme sonunda şu sonuca ulaşmıştır:

"Haftada 3 ve üzeri spor yapan öğrencilerin okul başarısı diğer öğrencilere göre daha yüksektir. Bu da sporu artırmanın doğrudan okul başarısını yükselttiğini göstermektedir."

Buna göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) Araştırmacının yaptığı çıkarımın dayanağı nedir? Açıklayınız.

b) Araştırmacının çıkarımını inceleyiniz, hatalı ya da eksik yönlerini yazınız.

c) Doğru sonuç ne olmalıdır? Gerekçesiyle açıklayınız.

GENELLEME AŞAMASI

Yukarıdaki gece atıştırması ve spor sıklığı örneklerini dikkatle inceleyiniz. Başkaları tarafından oluşturulan iki kategorik değişkenli verilerin incelenmesi ve veriler hakkında yorum yapılması konusunda aşağıdaki sorular size rehberlik edecektir.

- Araştırma iki kategorik değişken barındırıyor mu?(ör. spor sıklığı-başarı düzeyi)
- Sebep-sonuç ilişkisi belirtilmiş mi?
- Başka faktörlerin de olup olmadığı belirlendi mi?
- Verinin temsil gücü yeterli mi?
- Başkasının yorumu doğru veriye dayanıyor mu, yorum kabul edilebilir mi?
- Yanlış genellemeler veya nedensellik hataları varsa nasıl gerekçe sunulabilir?

NOT

İstatistiksel Temellendirmeler

Kategorik verilerle yapılan analizlerde kullanılan istatistiksel yöntemlerin geçerliliği ve güvenilirliği sorgulanmalıdır.

Sonuçların anlamlılığı, kullanılan yöntemin veri yapısına uygunluğuna bağlıdır.

Yorumlar sadece sayısal verilere değil bağlamsal ve teorik temellere de dayanmalıdır.

⚠ **Hatalar ve Yanlılıklar**

Veri toplama sürecindeki sistematik hatalar veya örneklem yanlılıkları sonuçları çarpıtabilir.

Yorumlarda kişisel önyargılar veya varsayımlar, analizlerin nesnelliğini zedeleyebilir.

İstatistiksel anlamlılık, pratikteki önemle karıştırılmamalıdır.

⚠ **Sonuçların ve Yorumların Çürütülmesi veya Kabul Edilmesi**

Bir yorumun kabulü, hem istatistiksel hem de mantıksal tutarlılıkla desteklenmelidir.

Alternatif açıklamalar ve karşıt veriler dikkate alınarak yorumlar test edilmelidir.

Yorumların geçerliliği, sadece veriye değil, yorumun açıklayıcı gücüne de bağlıdır.

SIRA SİZDE 2.

Aşağıdaki tablo, iki farklı mahallede yaşayan bireylerin geri dönüşüm alışkanlıklarını göstermektedir.

Mahalle	Geri Dönüşüm Yapan	Geri Dönüşüm Yapmayan	Toplam
A	70	30	100
B	40	60	100
Toplam	**110**	**90**	**200**

Bir kişi bu tabloyu yorumlayarak şu çıkarımda bulunmuştur: **B Mahallesi sakinleri çevreye duyarsız. Geri dönüşüm yapmadıkları için çevre bilinci düşük.**

Yukarıdaki yorumda yapılan akıl yürütmeyi değerlendiriniz. Bu yorumun hangi yönleri eleştirel düşünme açısından sorunlu olabilir? Veriye dayalı çıkarım yaparken hangi değişkenler göz önünde bulundurulmalıdır? Açıklayınız.

ÖRNEK

Bir araştırmacı, öğrencilerin tabloda belirtilen derste not tutma yöntemi (Deftere yazma, Tablet kullanma, Hiç not tutmama) ile derste dikkat dağınıklığı yaşama durumu (Evet/Hayır) arasındaki ilişkiyi incelemiştir. Araştırma sonucunda elde edilen veriler aşağıdaki iki yönlü tabloda gösterilmiştir.

Not Tutma Yöntemi	Dikkat Dağılıyor (Evet)	Dikkat Dağılmıyor (Hayır)	Toplam
Deftere Yazma	25	35	60
Tablet Kullanma	30	20	50
Hiç Not Tutmama	40	10	50
Toplam	**95**	**65**	**160**

Araştırmacı tabloya bakarak şu yorumu yapmıştır:

Deftere yazan öğrenciler, tablet kullanan ya da hiç not tutmayanlara göre daha az dikkat dağınıklığı yaşamaktadır. Bu nedenle deftere not tutmak dikkat toplamayı sağlar.

Buna göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) Araştırmacının yaptığı çıkarımın dayanağı nedir? Açıklayınız.

b) Araştırmacının yaptığı çıkarımda olası hataları/yanlılıkları belirtiniz.

c) Doğru bir istatistiksel yorum yaparak sonucu yeniden yazınız.

ÇÖZÜM

a)

Araştırmacı, deftere yazanların daha az dikkat dağınıklığı yaşadığı yorumunu tabloya bakarak yapmıştır.

Deftere yazma, tablet kullanma ve not tutmama durumlarının dikkat dağınıklığı açısından kendi içlerindeki oranları şunlardır:

Deftere yazma: 25/60 ≅ **%41.7** (dikkat dağınıklığı oranı)

Tablet: 30/50 = **%60.0**

Hiç not tutmama: 40/50 = **%80.0**

Bu sayılara göre örneklemde en düşük dikkat dağınıklığı oranı deftere yazanlara aittir. Bu nedenle araştırmacı bu çıkarımı yapmıştır.

b)

Nedensellik yanılgısı: Gözlemsel tablo, bir ilişki gösterir ama deftere yazmanın doğrudan neden olduğunu kanıtlamaz.

Diğer değişkenleri dikkate almama: Örneğin öğrencinin derse karşı olan ilgi düzeyi, dersin zorluğu, öğretmen uygulamaları, yaş/sınıf düzeyi, önceki akademik başarı, sınıf disiplini gibi faktörler hem not tutma yöntemini hem de dikkat düzeyini etkileyebilir. Bu faktörlerin kontrol edilmediği görülmüştür.

Seçim (Örneklem) yanlılığı: Örneklem rastgele seçilmedi ise ya da öğrenciler kendi durumlarını hatalı raporladıysa sonuçlar yanıltıcı olabilir.

Ölçüm belirsizliği: "Dikkat dağınıklığı" nasıl ölçüldü? (Öznel anket mi, öğretmen gözlemi mi?) Tanım ve ölçüm net değilse güven azdır.

c)

Bu örneklemde, deftere not tutan öğrencilerin gözlenen dikkat dağınıklığı oranı yaklaşık %41.7 ile tablet kullanan (%60) ve hiç not tutmayan (%80) öğrencilere göre daha düşüktür. Ancak bu bir gözlemsel ilişki olup deftere yazmanın doğrudan dikkat toplayıcı bir sebep olduğunu kanıtlamaz. Başka değişkenler (ör. öğrencinin derse ilgisi, sınıf düzeyi, öğretmen uygulamaları) ilişkiyi açıklıyor olabilir. Bu nedenle nedensellik iddiası için ek analizler veya kontrollü çalışmalar gereklidir."

GERİ BİLDİRİM

Bu geri bildirim sayesinde kendi cevabınızı kontrol edebilir, hatalarınızı düzelterek öğrenmenizi pekiştirebilirsiniz.

SIRA SİZDE 1.

ÇÖZÜM

a) Araştırmacı, grafikte **haftada 3 ve üzeri spor yapanlarda "yüksek başarı" düzeyindeki öğrenci sayısının (60)** diğer iki gruba göre belirgin şekilde fazla olduğunu görerek şu çıkarıma ulaşmıştır:

"Haftada 3 ve üzeri spor yapan öğrencilerin başarı düzeyi daha yüksektir."

Haftada 3 ve üzeri spor yapan grubun yüksek başarı oranı = 60/100 = **%60**'tır.

Spor yapmayanlar grubu yüksek başarı oranı = 20/100 = **%20**'dir.

Haftada 1-2 spor yapan grup yüksek başarı oranı = 30/100 = **%30**'dur.

Buna göre haftada 3 ve üzeri spor yapanların yüksek başarı oranı diğer gruplardan anlamlı biçimde yüksektir.

b) Nedensellik yanılgısı: Verilen grafikte spor sıklığı ile başarı arasında ilişki görülebilir ancak spor yapmanın doğrudan başarıyı artırdığını kanıtlamaz. Başka faktörler de etkili olabilir.

Değişkenlerin göz ardı edilmesi: Aile desteği, ders çalışma süresi, sosyoekonomik durum, okul kaynakları, zekâ düzeyi, öğretmen kalitesi gibi değişkenler hem spor yapma olasılığını hem de başarıyı etkileyebilir. Bu değişkenlerin kontrol edilmediği görülmüştür.

Örnekleme ya da ölçüm yanlılığı: Örneklem rastgele seçilmemiş olabilir veya başarı/düzey tanımları net olmayabilir (puan aralıkları, sınav zamanı vs.).

c) Verileri incelenen örneklemde haftada 3 ve üzeri spor yapan öğrencilerde "yüksek başarı" oranının (%60) diğer gruplara göre daha yüksek olduğunu göstermektedir. Ancak bu gözlemsel ilişki, spor yapmanın doğrudan başarıyı artırdığını kanıtlamaz. Bu ilişkiyi doğrulamak için başka etkenlerin de (sosyoekonomik durum, ders çalışma süresi, aile desteği vb.) kontrol edildiği daha güçlü çalışmalar gereklidir.

SIRA SİZDE 2.

ÇÖZÜM

A Mahallesi'nde geri dönüşüm yapanların oranı, B Mahallesi'ndekinden daha yüksektir.

Bu durum, A Mahallesi'nde geri dönüşüm davranışının daha yaygın olduğunu düşündürmektedir.

Araştırmacı, "B Mahallesi sakinleri çevreye duyarsızdır. Geri dönüşüm yapmadıkları için çevre bilinci düşüktür." demiştir.

Bu yorumda nedensellik yanılgısı vardır. Diğer bir deyişle sadece geri dönüşüm yapmama davranışına bakarak "Çevre bilinci düşüktür." sonucuna varılmıştır. Oysa çevre bilincini etkileyen başka faktörler de olabilir.

- Mahallede geri dönüşüm kutularının yeterli olmaması
- Belediyenin geri dönüşüm hizmetini etkin sunmaması
- Bilgilendirme eksikliği
- Ekonomik veya sosyokültürel farklılıklar

A Mahallesi'nde geri dönüşüm yapanların oranı (%70), B Mahallesi'ndekinden (%40) daha yüksektir. Ancak bu farkın nedeni sadece mahalle sakinlerinin çevre bilinciyle açıklanamaz. Geri dönüşüm davranışını etkileyebilecek başka faktörler (altyapı, bilgilendirme, imkanlar) de araştırılmalıdır.

DEĞERLENDİRİYORUM

Amaç: Bu bölümde öğrendiklerinizi gözden geçirmenizi, kendi öğrenme sürecinizi değerlendirmenizi ve eksiklerinizi fark etmenizi amaçlıyoruz.

Soruları dikkatle yanıtlayınız. Cevaplarınızı geri bildirimlerle karşılaştırarak eksik gördüğünüz noktaları tekrar ediniz.

SORULAR

1. Bir araştırmada öğrencilerin spor yapma durumu (Yapıyor/Yapmıyor) ile ders başarı düzeyi (Yüksek/Düşük) arasındaki ilişki incelenmiştir.

Spor Yapma Durumu	Yüksek Başarı	Düşük Başarı	Toplam
Yapıyor	45	25	70
Yapmıyor	20	30	50
Toplam	**65**	**55**	**120**

Araştırmacı, "Spor yapan öğrencilerin ders başarısı daha yüksektir bu nedenle spor yapmak başarıyı artırır." yorumunu yapmıştır.

Buna göre

a) Araştırmacının yaptığı çıkarımın dayanağı nedir? Yazınız.

b) Bu çıkarımda hata/yanlılık var mıdır? Açıklayınız.

c) Araştırmacının yorumu doğru mudur? Eğer değilse doğru bir yorum nasıl olmalıdır?

2. Bir araştırmada öğrencilerin kitap okuma sıklığı (Sık/Seyrek) ile sınav kaygısı düzeyi (Yüksek/Düşük) arasındaki ilişki incelenmiştir.

Kitap Okuma	Yüksek Kaygı	Düşük Kaygı	Toplam
Sık	15	45	60
Seyrek	40	20	60
Toplam	**55**	**65**	**120**

Araştırmacı "Sık kitap okuyan öğrencilerde sınav kaygısı düşüktür, kitap okumak kaygıyı azaltır." sonucuna ulaşmıştır.

Buna göre

a) Araştırmacının yaptığı çıkarımın dayanağı nedir? Yazınız.

b) Bu çıkarımda hata/yanlılık var mıdır? Açıklayınız.

c) Araştırmacının yorumu doğru mudur? Eğer değilse doğru bir yorum nasıl olmalıdır?

3. Bir belediye, kent içi ulaşım planlamasını geliştirmek amacıyla vatandaşların eğitim seviyeleri ile tercih ettikleri ulaşım araçları arasındaki ilişkiyi inceleyen bir araştırma yapmıştır. Katılımcılara işe veya okula giderken en sık kullandıkları ulaşım aracı sorulmuştur. Sonuçlar aşağıdaki grafikte gösterilmiştir.

Eğitim Seviyesi	Toplu Taşıma	Özel Araç	Bisiklet
Ortaokul	30	5	5
Lise	25	15	10
Üniversite	20	25	15

Belediye yetkilileri bu grafiğe dayanarak "Eğitim seviyesi arttıkça bireyler, çevre dostu ulaşım araçlarını daha az tercih etmektedir." değerlendirmesini yapmıştır.

Buna göre

a) Belediye yetkililerinin yaptığı değerlendirmeyi inceleyerek varsa mantıksal veya istatistiksel hataları belirtiniz.

b) Tespit ettiğiniz hataların gerekçesini sunarak daha sağlıklı bir değerlendirme için önerinizi yazınız.

c) Bu verilerle eğitim seviyesi ile çevre dostu ulaşım tercihi arasında nedensel bir ilişki kurulabilir mi? Gerekçenizi belirtiniz.

GERİ BİLDİRİM

Bu geri bildirim sayesinde kendi cevabınızı kontrol edebilir, hatalarınızı düzelterek öğrenmenizi pekiştirebilirsiniz.

ÇÖZÜM 1.

a) Spor yapanların yaklaşık %64'ü (45/70) yüksek başarılı iken spor yapmayanlarda bu oran %40'tır.

b) Hata: Nedensellik yanılgısı. Başarı sadece spora bağlanamaz.

c) Doğru yorum: Spor yapanlarda yüksek başarı oranı daha fazladır; ancak başarıyı etkileyen başka faktörler de olabilir.

ÇÖZÜM 2.

a) Sık okuyanlarda düşük kaygı oranı %75, seyrek okuyanlarda yaklaşık %33'tür.

b) Hata: Nedensellik hatası. Kaygıyı sadece kitap okumaya bağlamak yanlıştır.

c) Doğru yorum: Sık kitap okuyan öğrencilerde düşük kaygı oranı daha fazladır ancak başka etkenler de rol oynuyor olabilir.

ÇÖZÜM 3.

a) "Eğitim seviyesi arttıkça bireyler çevre dostu ulaşım araçlarını daha az tercih etmektedir."

Genelleme hatası: Üniversite mezunları bisikleti en çok kullanan grup olabilir (15 kişi), bu çevre dostu tercihin arttığını da gösterebilir.

Tanım belirsizliği: Toplu taşıma çevre dostu sayılabilir ancak bu değerlendirmede dışlanmış gibi görünüyor.

Oranlar göz ardı edilmiş: Üniversite mezunlarının toplam sayısı daha fazla olabilir. Bu durumda bisiklet kullananların oranı daha düşük ya da daha yüksek olabilir.

b) Yüzdelik oranlar kullanılmalı: Her eğitim seviyesindeki katılımcı sayısına göre ulaşım tercihlerinin oranları hesaplanmalı.

Araçların çevresel etkileri net tanımlanmalı: Hangi araçların "çevre dostu" olduğu açıkça belirtilmeli.

Veri yorumunda dikkatli bir dil kullanılmalı: "Eğitim seviyesi ile çevre dostu ulaşım tercihi arasında karmaşık bir ilişki gözlemlenmiştir." gibi daha nötr ve analitik bir ifade tercih edilmeli.

c) Bu verilerle nedensel bir ilişki kurulamaz. Çünkü

Gözlemsel veri kullanılmıştır: Katılımcıların davranışları gözlemlenmiş, deneysel bir müdahale yapılmamıştır.

Kontrol değişkenleri eksik: Gelir düzeyi, yaş, yaşanılan bölge gibi faktörler ulaşım tercihini etkileyebilir.

ÖĞRENDİKLERİM

Amaç: Bu bölümde öğrendiklerinizi özetlemenizi, günlük hayatta ve farklı derslerde kullanabileceğiniz bilgileri belirlemenizi amaçlıyoruz.

Aşağıda, başlıkların altındaki boşluklara bu değerlendirme süreci adımlarıyla ilgili aklınızda kalanları kendi cümlelerinizle yazınız. Konuyla ilgili eklemek istediğiniz bilgileri, şemanın altında yer alan boşluğa yazabilirsiniz. Özetinizi hazırlarken zorlandığınızı düşünürseniz çalışma kartını tekrar gözden geçirmenizi öneririz.

İKİ KATEGORİK DEĞİŞKENLİ VERİYE DAYALI BULGULARI DEĞERLENDİRME SÜRECİ

a) Bağlamı ve İddiayı Anlama

(Sunulan çalışmanın, haberin veya raporun temel iddiası nedir? Hangi soruya yanıt aranıyor?)

.....

.....

b) Değişkenleri ve Kategorileri Tanımlama

(İlişkisi incelenen iki kategorik değişken tam olarak nedir? Bu değişkenlerin kategorileri (seçenekleri) nelerdir ve nasıl tanımlanmıştır?)

.....

.....

c) Sunulan Veri ve Analiz Yöntemini İnceleme

[Veriler nasıl sunuluyor? (ör. çapraz tablo, göreli yüzdeler, yığılmış sütun grafiği vb.) Bu sunum, iddiayı desteklemek için yeterli ve açık mı?]

.....

.....

ç) Korelasyon-Nedensellik İlişkisini Sorgulama

[Sunulan yorum, değişkenler arasında sadece bir "ilişki" olduğunu mu belirtiyor yoksa birinin diğerine "neden olduğunu" (nedensellik) mu iddia ediyor?]

.....

.....

d) Alternatif Açıklamaları/Karıştırıcı Değişkenleri Belirleme

[Bu iki değişken arasındaki ilişkiyi açıklayabilecek başka "gizli" veya "üçüncü" faktörler (karıştırıcı değişkenler) olabilir mi? (ör. sosyoekonomik durum, yaş, vb.)]

.....

.....

e) Genel Sonucu ve Geçerliliği Değerlendirme

(Tüm bu adımlar ışığında, sunulan bulgu ve buna dayalı yapılan yorum ne kadar güçlü ve güvenilirdir? Araştırmanın sınırlılıkları nelerdir?)

.....

.....

İSTATİSTİKSEL ARAŞTIRMA SÜRECİ

İki Kategorik Değişkenli Verilerle İstatistiksel Araştırma ve Yorumlama Yönelik Yansıtıcı Yazı

Amaç

Bu çalışma, iki kategorik değişken arasındaki ilişkiyi ele alan gerçek yaşam durumları üzerinden istatistiksel araştırma yapma ve veri dağılımlarını grafikler, özetler ve yorumlar yoluyla değerlendirme becerilerinize yönelik farkındalık oluşturmak amacıyla hazırlanmıştır.

Aşağıdaki soruları yanıtlarken kullandığınız yöntemi ve ulaştığınız sonuçları göz önünde bulundurunuz.

1. Öğrendiğiniz bu temada dikkatinizi çeken veya önemli bulduğunuz noktaları yazınız.

2. İki kategorik değişken arasındaki ilişkililiği inceleyebilme ve bu ilişkiye dayalı karar verebilme becerinizi gözden geçiriniz. Bu süreçte, ilişkililiği ortaya koymada daha etkili olduğunu düşündüğünüz yaklaşımı belirtiniz ve tercihinizin gerekçesini açıklayınız.

3. İki kategorik değişken arasındaki ilişkililiği incelemeye yönelik yürütülen istatistiksel araştırma sürecinde kullandığınız istatistiksel görsellerden, özetlerden ve sonuçlardan nasıl yararlandığınızı; bu verilere dayalı yorum, çıkarım veya tahminlerinizi hangi gerekçelerle oluşturduğunuzu kısaca açıklayınız.

4. İki kategorik değişken arasındaki ilişkiyi incelemeye yönelik istatistiksel çalışmalarda edindiğiniz deneyimin gerçek yaşamda ya da matematiğin farklı alanlarında nasıl kullanılabileceğini örneklerle açıklayınız.

Daha fazlası için karekodu okutunuz.



BİR DOĞAL SAYININ ASAL ÇARPANLARI VE BÖLENLERİ

BAŞLARKEN

Bu bölümde yer alan etkinlikler, bireysel öğrenme yolculuğunuzda size rehberlik etmek ve öğrenme sürecinizi desteklemek amacıyla hazırlanmıştır. Çalışmalarınızı yürütürken "Hazırlanıyorum", "İlişkilendiriyorum", "Uygulayarak Öğreniyorum", "Değerlendiriyorum", "Yansıtıcı Yazı" ve "Öğrendiklerim" etkinliklerini sırası ile takip etmeniz ve etkinliklerin sonunda yer alan geri bildirimleri inceleyerek bölümleri tamamlamanız beklenmektedir.

Sevgili öğrencimiz, bu bölümde doğal sayıların çarpanları ve bölenleri konusunu öğreneceksiniz. Matematikte çarpanlar ve bölenler, sayıların yapısını anlamamıza yardımcı olan temel kavramlardır. Bir sayının hangi sayılarla tam bölünebildiğini bilmek, hem günlük hayatta hem de ileri matematik konularında önemli bir beceridir.

Bu çalışmada

- Bir doğal sayının bölenlerini bulmayı,
- Çarpan kavramını anlamayı,
- Asal çarpanlara ayırma yöntemini keşfetmeyi,
- Ve bu bilgilerin problem çözmede nasıl kullanılacağını öğreneceksiniz.

Matematiğin en temel yapı taşlarından biri olan çarpanlar ve bölenler konusuna birlikte adım atalım.

HAZIRLANIYORUM

Amaç: Bu bölümde ön bilgilerinizi hatırlamanızı ve temaya hazırlıklı hâle gelmenizi amaçlıyoruz.

Aşağıda yer alan ifadeler, bu temada tamamlanması hedeflenen öğrenme çıktısını ele almadan önce sahip olmanız gereken bazı temel becerileri içermektedir Bu çalışma notla değerlendirilmeyecek olup amacı temaya ne ölçüde hazır olduğunuzu belirlemektir.

- Aşağıdaki soruları dikkatle inceleyiniz.
- Eğer ifadede belirtilen bilgiye hâkim olduğunuzu düşünüyorsanız kutucuğu işaretleyiniz.
- Eğer konuyu henüz tam olarak bilmediğinizi veya hatırlamadığınızı düşünüyorsanız kutucuğu boş bırakınız.

	ÖN ÖĞRENME KONTROL LİSTESİ	✓
1	Doğal sayılar kümesini tanıyabilirim.	☐
2	Tek sayı ve çift sayı kavramlarını ayırt edebilirim.	☐
3	Bir sayının bölenlerini ve katlarını bulabilirim.	☐
4	Asal sayıları ve asal olmayan sayıları tanıyabilirim.	☐
5	Bir sayının çarpanlarını listeleyebilirim.	☐
6	Bölme işlemini yapabilirim	☐
7	Kalansız bölünebilme kurallarını bilirim.	☐

"Ön Öğrenme Kontrol Listesi"ni doldurduktan sonra aşağıda verilen kontrol noktası sorularını çözünüz ve cevaplarınızı kontrol ediniz.

KONTROL NOKTASI

SORU 1. Aşağıdaki sayıları inceleyiniz. Doğal sayı olanları belirleyiniz. Doğal sayı olmayanların hangi sayı kümesinde yer aldığını yazınız.

Sayı	Doğal Sayı mı?	Açıklama
0	☐	
– 3	☐	
4,5	☐	
12	☐	

SORU 2. Aşağıda tek ve çift sayılarla ilgili önermeler verilmiştir. Önermelerin doğruluk ve yanlışlık durumunu belirleyip ilgili kutucukları işaretleyiniz.

Önermeler	Doğru	Yanlış
"17 tektir çünkü 2'ye bölünmez."	☐	☐
"28 tektir çünkü sonu 8 ile biter."	☐	☐
"30 çifttir çünkü 2'ye tam bölünür."	☐	☐

SORU 3. Asal sayılarla ilgili aşağıda verilen ifadelerden doğruluk ve yanlışlık durumunu belirleyip ilgili kutucukları işaretleyiniz.

	Doğru	Yanlış
"7 sadece 1 ve 7'ye bölünür, o yüzden asaldır."	☐	☐
"9 asal sayıdır. Çünkü 9 = 3 × 3'tür."	☐	☐
"11 asal sayıdır. Çünkü 1 ve 11 dışında böleni yoktur."	☐	☐

SORU 4. 12 sayısının pozitif tam sayı bölenlerini ve asal bölenlerini yazınız.

Bölenler: .....

Asal Bölenler: .....

SORU 5. Aşağıdaki ifadelerde boş bırakılan yerlere uygun sayıları yazınız.

a) Bir sayı ____ ile bölünebiliyorsa sayının rakamlarının basamağındaki rakam çift olmalıdır.

b) Bir sayı ____ ile bölünebiliyorsa sayının rakamlarının toplamı 3'ün katıdır.

c) Bir sayı ____ ile bölünebiliyorsa sayının birler basamağındaki rakam 0 veya 5'tir.

d) Bir sayı ____ ile bölünebiliyorsa sayının birler basamağındaki rakam 0'dır.

GERİ BİLDİRİM

Bu geri bildirim sayesinde kendi cevabınızı kontrol edebilir, hatalarınızı düzelterek öğrenmenizi pekiştirebilirsiniz.

KONTROL NOKTASI

ÇÖZÜM 1.

Soru	0	– 3	4,5	12
Doğal sayı mı?	✓	×	×	✓

0 ve 12 doğal sayıdır. – 3 negatif sayı ve 4,5 ondalıklı sayı olduğu için doğal sayı değildir.

ÇÖZÜM 2.

Önermeler	Doğru	Yanlış
"17 tektir çünkü 2'ye bölünmez."	☑ (17 sayısı 2'ye tam bölünemediği için tek sayıdır.)	☐
"28 tektir çünkü sonu 8 ile biter."	☐	☒ (28 sayısı 2'ye tam bölünebildiği için çift sayıdır.)
"30 çifttir çünkü 2'ye tam bölünür."	☑ (30 sayısı 2'ye tam bölünebildiği için çift sayıdır.)	☐

HATIRLATMA

Doğal sayılar kümesi $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ biçimindedir.

Negatif ve ondalıklı sayılar doğal sayı değildir.

Bir sayı 2'ye kalansız bölünüyorsa çifttir, bölünemiyorsa tektir.

ÇÖZÜM 3.

	Doğru	Yanlış
"7 sadece 1 ve 7'ye bölünür o yüzden asaldır."	☑	☐
"9 asal sayıdır. Çünkü 9 = 3 × 3'tür."·	☐	☒
"11 asal sayıdır. Çünkü 1 ve 11 dışında böleni yoktur."	☑	☐

Asal sayılar yalnızca 1'e ve kendisine kalansız bölünebilen, 1'den büyük doğal sayılardır.

ÇÖZÜM 4.

12'nin pozitif tam sayı bölenleri: 1, 2, 3, 4, 6, 12

Asal bölenleri: 2, 3

HATIRLATMA

Kural	Kontrol Edilen Özellik
2 ile bölünebilme	Birler basamağındaki rakam çift sayı olmalıdır.
3 ile bölünebilme	Sayının rakamlarının toplamı 3'ün katı olmalıdır.
5 ile bölünebilme	Birler basamağındaki rakam 0 veya 5 olmalıdır.
10 ile bölünebilme	Birler basamağındaki rakam 0 olmalıdır.

ÇÖZÜM 5.

a) Bir sayı **__2__** ile bölünebiliyorsa sayının birler basamağındaki rakam çift olmalıdır.

b) Bir sayı **__3__** ile bölünebiliyorsa sayının rakamlarının toplamı 3'ün katıdır.

c) Bir sayı **__5__** ile bölünebiliyorsa sayının birler basamağındaki rakam 0 veya 5'tir.

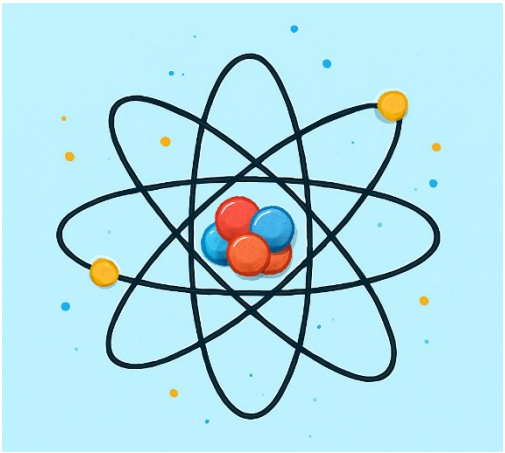
d) Bir sayı **__10__** ile bölünebiliyorsa sayının birler basamağındaki rakam 0'dır.

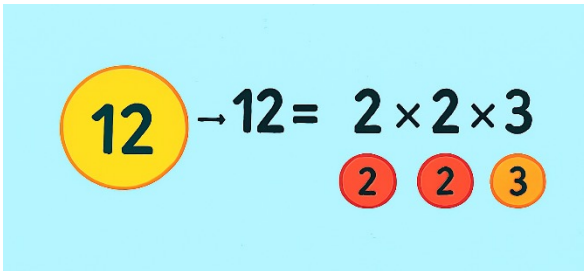
İLİŞKİLENDİRİYORUM

Amaç: Bu bölümde yeni öğreneceğiniz temayı; zihninizde var olan bilgileriniz, yaşantılarınız ve diğer derslerde öğrendiklerinizle ilişkilendirmenizi bekliyoruz.

Fen Bilimleri dersinde tüm maddelerin atomlardan; atomların da proton, nötron ve elektron gibi temel parçacıklardan oluştuğunu öğreniriz. Her bileşik madde, farklı elementlerin belirli oranlarda birleşmesiyle meydana gelir.

Matematikte de 1'den büyük her doğal sayı, kendisini oluşturan asal sayıların çarpımıyla ifade edilir. Bu asal sayılar, sayının en küçük yapı taşlarıdır.





UYGULAYARAK ÖĞRENİYORUM

Amaç: Bu bölümde bilgilerinizi etkinlikler ve uygulamalarla pekiştirmenizi, öğrenmeyi daha kalıcı hâle getirmenizi amaçlıyoruz. Örnek ya da etkinliklerde verilen adımları dikkatle uygulayınız. Çalışmanızı dikkatli ve düzenli bir şekilde yapınız.

Matematikte asal sayılar, "bölünmezlik" özellikleriyle bilinir. Her doğal sayının asal çarpanlara ayrılabilmesi, onları sayıların en temel yapı taşları hâline getirir. Bu özellik, yüzyıllar boyunca yalnızca teorik bir merak konusu gibi görünse de, günümüzde internetin güvenliği için vazgeçilmez bir araç hâline gelmiştir.

RSA şifreleme sistemi, bu dönüşümün en çarpıcı örneğidir. Sistem, iki büyük asal sayının çarpımından elde edilen devasa sayıların çarpanlara ayrılmasının zorluğunu kullanır. Küçük sayılar için asal çarpanlara ayırma işlemi kolaydır.

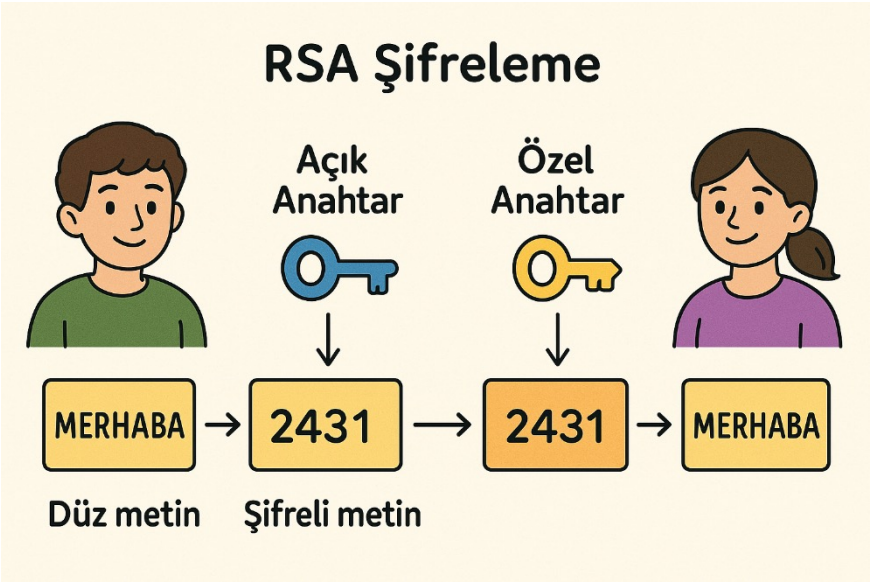
$120 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5$

Ancak yüzlerce basamaklı bir sayının asal çarpanlarını bulmak, günümüz bilgisayarlarının bile altından kalkamayacağı kadar karmaşık bir problemdir. İşte RSA'nın güvenliği tam da bu noktada ortaya çıkar. Büyük asal sayıların çarpımı kolaydır fakat bu çarpımı tersine çevirmek yani sayının asal çarpanlarını bulmak oldukça zordur.

Bugün kullandığımız banka kartlarının güvenliği, e-devlet sistemlerine girişlerimiz, hatta arkadaşlarımızla yaptığımız mesajlaşmalar bu matematiksel prensip sayesinde korunmaktadır. Bir öğrencinin gözünden bakıldığında şu çarpıcı gerçek ortaya çıkar:

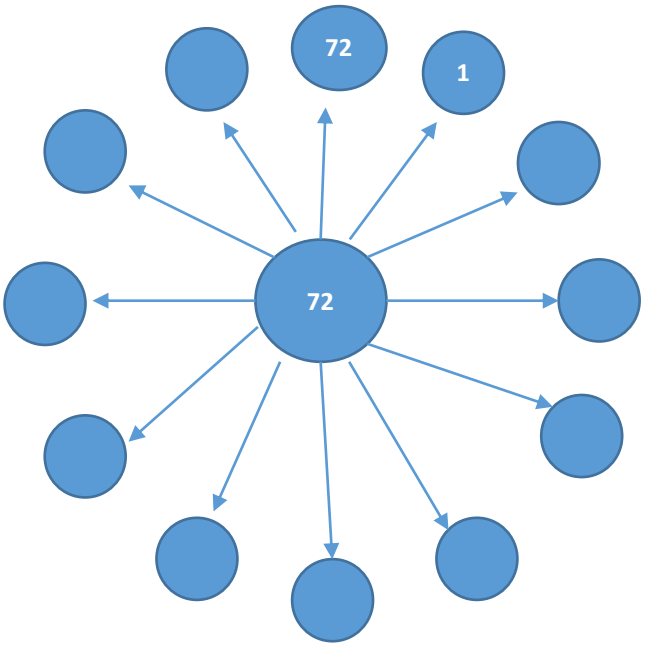
Asal sayılar, yalnızca ders kitaplarında karşılaşılan soyut kavramlar değil günlük hayatımızın görünmez güvenlik duvarlarıdır.

Matematiğin soyut bir kavramı olan asal sayılar, dijital çağda somut bir güce dönüşmüştür. Onlar olmadan internet güvenliği çöker, modern iletişim sistemleri savunmasız kalır. Bu nedenle asal sayılar, yalnızca matematiksel bir merak değil aynı zamanda çağımızın en stratejik kaynaklarından biridir.



ETKİNLİK 1.

Aşağıda verilen şekildeki boş dairelerin içine 72'nin pozitif tam sayı bölenlerini yazınız.



HATIRLATMA

Her pozitif doğal sayı 1'e ve kendisine tam bölünür.

ETKİNLİK 2.

Aşağıdaki tabloda verilen sayıların pozitif tam sayı bölenlerini ve bölen sayılarını örnekteki gibi yazınız.

Sayı	Bölenleri	Bölen Sayısı
12	1, 2, 3, 4, 6, 12	6
18		
24		
36		
41		

A ve n birer pozitif tam sayı; $p_1, p_2, ..., p_n$ asal sayı ve $a_1, a_2, ..., a_n$ pozitif tam sayı olmak üzere A tam sayısının

$$A = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot ..... \cdot p_n^{a_n}$$

şeklinde yazılmasına A sayısının asal çarpanlarına ayrılışı denir.

Buna göre

- $p_1, p_2, ..., p_n$ sayıları A'nın asal çarpanlarıdır.
- A sayısının pozitif tam sayı bölenlerinin sayısı $(a_1+1)\cdot(a_2+1)\cdot.....\cdot(a_n+1)$ ile hesaplanır.

ÖRNEK

Bir laboratuvarda numune tüplerinin karışmaması için özel bir şifreleme sistemi kullanılmaktadır. Her tüp, içindeki örneğe ait 2, 3, 5, 7 ve 11 asal çarpanlarından oluşan bir sıra numarası taşır. Bu numaralar asal çarpanlara ayrılarak kodlanır ve her asal çarpan bir harf ile temsil edilir.

Asal Sayı	Harf Karşılığı
2	A
3	B
5	C
7	D
11	E

Her asal çarpanın üssü, ilgili harfin hemen sağına yazılır. Tüp üzerindeki kod, asal çarpanların küçükten büyüğe sıralanmasıyla oluşturulur. Eğer bir asal sayı çarpan olarak yoksa o harf yazılmaz.

Örneğin; tüp numarası 210 ise

$210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ asal çarpanların üsleri 1 olduğundan kodlama **A1B1C1D1** şeklindedir.

Eğer tüp numarası 1800 ise

$1800 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2$ olduğundan kodlama **A3B2C2** şeklindedir.

Buna göre

a) Numarası 2520 olan tüpün şifrelenmiş hâlini yazınız.

b) Kodlanmış hâli A3B2C1D2E1 olan tüpün numarasını bulunuz.

ÇÖZÜM

a) $2520 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \rightarrow$ **A3B2C1D1**

b) A3B2C1D2E1 $\rightarrow 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 11 \rightarrow$ **194040**

SIRA SİZDE 1.

Şifreli bir yazışmada Türk harfleri, alfabetik sıralamaya göre 2'den 30'a kadar numaralandırılır. Daha sonra bu sayısal değerler asal çarpanlarına ayrılır ve yazışmada kullanılan metin aşağıda açıklanan yöntemle şifrelenir.

- Metindeki harflerin sayısal karşılıkları yazılır.
- Yazılan sayılar asal çarpanlarına ayrılır. Asal çarpanları küçükten büyüğe ve soldan sağa doğru çarpım biçiminde yazılarak sayılar ifade edilir.
- Her bir asal çarpanın kuvveti asal sayının sağına yazılarak harfin şifreli karşılığı oluşturulur.
- Şifreli yazılışta harfler arasında bir, kelimeler arasında iki boşluk bırakılacaktır.
- Şifrelenen metindeki noktalama işaretleri değiştirilmeyecektir.

Örneğin, "**BİLGİ GÜÇTÜR**" cümlesinin şifrelenmiş hâli aşağıda verilmiştir.

Harf	Sayı	Asal Çarpan	Kod
B	3	3^1	**31**
İ	13	13^1	**131**
L	16	2^4	**24**
G	9	3^2	**32**
İ	13	13^1	**131**
			(iki boşluk)
G	9	3^2	**32**
Ü	27	3^3	**33**
Ç	5	5^1	**51**
T	25	5^2	**52**
Ü	27	3^3	**33**
R	22	$2^1 \cdot 11^1$	**21111**

Şifre: 31 131 24 32 131 32 33 51 52 33 21111

Buna göre

a) "TÜRKİYE CUMHURİYETİ" **ifadesinin şifresini oluşturunuz.**

b) Aşağıdaki şifre dizisinin karşılığı olan kelimeyi bulunuz.

171 21 52 71 171 21 52 131 3151

SIRA SİZDE 2.

Aşağıdaki tabloda verilen doğal sayıların asal çarpanları, pozitif tam sayı bölenleri ve negatif tam sayı bölenleri yazılacaktır.

Verilen örneğe uygun şekilde tabloyu doldurunuz ve soruları cevaplayınız.

Sayı	Asal Çarpanlarına Ayrılmış Hâli	Pozitif Tam Sayı Bölenleri	Negatif Tam Sayı Bölenleri
20	$2^2 \cdot 5$		
15			
28			
27			

a) 20 sayısının asal çarpanlarını kullanarak bölen sayısını formülle bulunuz. Daha sonra tablodaki değerlerle karşılaştırarak sonucu doğrulayınız.

b) 15 ve 28 sayılarının bölenlerini karşılaştırınız. Asal çarpan sayısı arttıkça bölen sayısında nasıl bir değişim olur? Açıklayınız.

c) Bir doğal sayının pozitif bölenleri ile negatif bölenleri arasında nasıl bir ilişki vardır? Açıklayınız.

ç) Yukarıdaki tabloya göre "Bir doğal sayının asal çarpanlarının üslü gösterimindeki üslerin birer artırılıp çarpılması, o sayının pozitif tam sayı bölenlerinin sayısını verir." önermesini örneklerle doğrulayınız.

d) Bir market çalışanı 28 şişeyi kasalara eşit sayıda yerleştirmek istiyor. Kasaların içine konabilecek şişe sayısı, 28'in bölenlerinden biri olmalıdır.

Buna göre

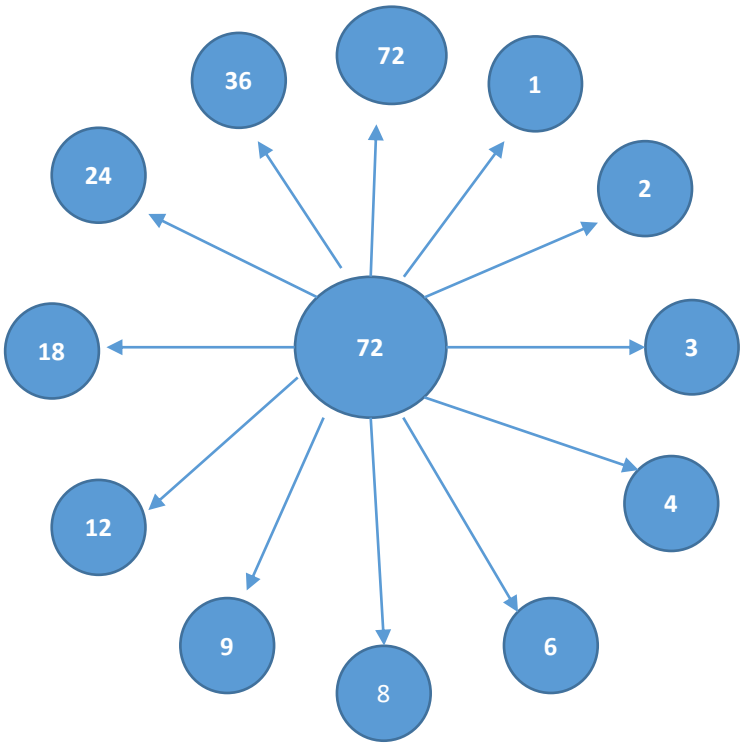
- **Kaç farklı şekilde kasalama yapılabilir?**
- **En az kaç kasa gerekir?**
- **Bu problemi çözerken asal çarpanlar ve bölenler bilgisinin nasıl işe yaradığını açıklayınız.**

GERİ BİLDİRİM

Bu geri bildirim sayesinde kendi cevabınızı kontrol edebilir, hatalarınızı düzelterek öğrenmenizi pekiştirebilirsiniz.

ETKİNLİK 1

ÇÖZÜM



ETKİNLİK 2.

ÇÖZÜM

Sayı	Bölenleri	Bölen Sayısı
12	1, 2, 3, 4, 6, 12	6
18	1, 2, 3, 6, 9, 18	6
24	1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24	8
36	1, 2, 3 , 4, 6, 9, 12, 18, 36	9
41	1, 41	2

SIRA SİZDE 1.

ÇÖZÜM

a) Önce harflerin sayısal karşılıklarını ve asal çarpanlarına ayrılmış halini bulalım.

- T → $25 = 5^2$
- Ü → $27 = 3^3$
- R → $22 = 2^1 \cdot 11^1$
- K → $15 = 3^1 \cdot 5^1$
- İ → $13 = 13^1$
- Y → $29 = 29^1$
- E → $7 = 7^1$

(boşluk)

- C → $4 = 2^2$
- U → $26 = 2^1 \cdot 13^1$
- M → $17 = 17^1$
- H → $11 = 11^1$
- U → $26 = 2^1 \cdot 13^1$
- R → $22 = 2^1 \cdot 11^1$
- İ → $13 = 13^1$
- Y → $29 = 29^1$
- E → $7 = 7^1$
- T → $25 = 5^2$
- İ → $13 = 13^1$

Bu durumda oluşan şifre

52 33 21111 3151 131 291 71 22 21131 171 111 21131 21111 131 291 71 52 131

b) Şifre 171 21 52 71 171 21 52 131 3151 şeklindeyse

$171 \rightarrow 17^1 \rightarrow$ M

$21 \rightarrow 2^1 \rightarrow$ A

$52 \rightarrow 5^2 \rightarrow$ T

$71 \rightarrow 7^1 \rightarrow$ E

$171 \rightarrow 17^1 \rightarrow$ M

$21 \rightarrow 2^1 \rightarrow$ A

$52 \rightarrow 5^2 \rightarrow$ T

$131 \rightarrow 13^1 \rightarrow$ İ

$3151 \rightarrow 3^1 \cdot 5^1 \rightarrow$ K

Verilen şifrenin kelime karşılığı MATEMATİKtir.

SIRA SİZDE 2.

ÇÖZÜM

Sayı	Asal Çarpanlarına Ayrılmış Hâli	Pozitif Tam Sayı Bölenleri	Negatif Tam Sayı Bölenleri
20	$2^2 \cdot 5$	1, 2, 4, 5, 10, 20	–1, –2, –4, –5, –10, –20
15	$3 \cdot 5$	1, 3, 5, 15	–1, –3, –5, –15
28	$2^2 \cdot 7$	1, 2, 4, 7, 14, 28	–1, –2, –4, –7, –14, –28
27	3^3	1, 3, 9, 27	–1, –3, –9, –27

a) $20 = 2^2 \cdot 5$ olduğundan

$(2 + 1) \cdot (1 + 1) = 6$

Tabloyu incelediğimizde pozitif tam sayı bölen sayısının 6 olduğunu görürüz.

b) 15 ve 28 in pozitif bölen sayıları incelendiğinde 28 in bölen sayısının daha fazla olduğunu görüyoruz. Dolayısıyla asal çarpanların kuvveti arttıkça bölen sayısının da arttığını gözlemliyoruz.

c) Herhangi bir sayının pozitif tam sayı bölen sayısı ile negatif tam sayı bölen sayısı birbirine eşittir.

ç) Örneğin $28 = 2^2 \cdot 7$

Bu durumda pozitif tam sayı bölen sayısı $(2 + 1) \cdot (1 + 1) = 6$'dır. Tabloyu incelediğimizde 28'in pozitif tam sayı bölen sayısının 6 olduğunu görüyoruz. Bu durumda verilen önerme doğrudur.

d) 28'in bölenleri: 1, 2, 4, 7, 14, 28.

- Kasaların içine konabilecek şişe sayısı bu bölenlerden biri olmalıdır. Yani 6 farklı şekilde kasalama yapılabilir.
- En az kasa için her kasaya en çok şişe konmalıdır → 28 şişenin hepsi bir kasaya yerleştirilebilir. → 1 kasa.
- 28'in asal çarpanlarını bulup bölen sayısını hesapladığımızda, kasalara eşit dağıtımın hangi seçeneklerle yapılabileceğini hemen görebiliyoruz. Yani asal çarpanlar sayesinde bölenleri sistematik biçimde buluyoruz.

DEĞERLENDİRİYORUM

Amaç: Bu bölümde, öğrendiklerinizi gözden geçirmenizi, kendi öğrenme sürecinizi değerlendirmenizi ve eksiklerinizi fark etmenizi amaçlıyoruz

Soruları dikkatle yanıtlayınız. Cevaplarınızı geri bildirimlerle karşılaştırarak eksik gördüğünüz noktaları tekrar ediniz.

SORULAR

1. Aşağıda verilen ifadelerin her birinin doğruluk ve yanlışlık durumlarını belirleyiniz. Değerlendirmelerinizi gerekçelendirerek açıklayınız.

	İfade	Doğru	Yanlış	Gerekçe
1	Bir doğal sayının asal çarpanları 2 ve 3 ise bu sayı 6'ya kesinlikle bölünür.	☐	☐	
2	Bir doğal sayının asal çarpanlarının sayısı arttıkça pozitif tam sayı bölenlerinin sayısı da artar.	☐	☐	
3	Pozitif tam sayı bölenlerinin sayısı ile negatif tam sayı bölenlerinin sayısı her zaman eşittir.	☐	☐	
4	Asal çarpanları aynı olan iki doğal sayının tam sayı bölenlerinin sayısı daima eşittir.	☐	☐	
5	Bir doğal sayının asal çarpanları arasında 5 varsa bu sayı 25'e kesinlikle bölünür.	☐	☐	
6	Bir doğal sayının asal çarpanlarının üslü gösterimindeki üslerin birer artırılıp çarpılması, pozitif tam sayı bölen sayısını verir.	☐	☐	
7	54 sayısının asal çarpanları 2 ve 3'tür; bu nedenle 54, 6'ya tam bölünebilir.	☐	☐	
8	Asal çarpanları farklı olan iki doğal sayının tam sayı bölenlerinin sayısı eşit olabilir.	☐	☐	
9	1 sayısının asal çarpanı olmadığı için pozitif tam sayı bölenlerinin sayısı bulunamaz.	☐	☐	
10	Bir doğal sayının asal çarpanları arasında 2 varsa bu sayı kesinlikle çifttir.	☐	☐	

2. Bir pastacı, 48 kurabiyeyi her sırada eşit sayıda olacak şekilde bir tepsiye dizmek istiyor.

Buna göre

- **Pastacı bu kurabiyeleri kaç farklı şekilde dizebilir?**

- **Her bir durum için tepsideki bir sırada kaç kurabiye bulunur?**

3. Mert'in yaşı, pozitif tam sayı bölenlerinin sayısı 3 olan 500'den küçük doğal sayıların adedine eşittir. Elif'in yaşı ise Mert'in yaşından büyük ve pozitif tam sayı bölenlerinin sayısı 4 olan en küçük doğal sayıdır.

Buna göre Mert ile Elif'in yaşlarını bulunuz.

4. Bir öğretmen, sınıfındaki 36 öğrenci ile her grupta eşit sayıda öğrencinin bulunacağı bir grup çalışması planlayacaktır.

Buna göre

- **Gruptaki kişi sayısının alabileceği kaç farklı değer vardır?**

- **Grup sayısı en az 4, en fazla 10 olacak şekilde oluşturulduğunda gruptaki kişi sayısı kaç farklı değer alabilir?**

5. 150 metre uzunluğundaki bir dekor şeridi, aşağıdaki kurallara göre kesilerek uzunlukları metre cinsinden tam sayı olan özdeş şeritlere ayrılacaktır.

- Parça sayısı en az 4 olmalıdır.
- Her şeridin uzunluğu en az 5 metre olmalıdır.

Buna göre

a) Bu şeridin ayrılacağı parça sayısının kaç farklı değer alabileceğini bulunuz.

b) Şerit uzunluklarının hangi değerleri alabileceğini bulunuz.

6. Bir kültür merkezi, 72 metrekarelik bir sergi alanını panellerle çevrelemek istemektedir. Sergi alanı dikdörtgen şeklindedir ve alanın her bir kenarının uzunluğu metre cinsinden tam sayıdır. Panellerin metre başına maliyeti 150 TL'dir.

Buna göre

a) 72 metrekarelik alan için olası dikdörtgen boyutlarını (uzunluk × genişlik) bulunuz.

b) Her boyut için toplam panel maliyetini hesaplayınız.

c) En düşük maliyetle panel döşemesi için kültür merkezinin hangi boyutları seçmesi gerektiğini belirleyiniz.

GERİ BİLDİRİM

Bu geri bildirim sayesinde kendi cevabınızı kontrol edebilir, hatalarınızı düzelterek öğrenmenizi pekiştirebilirsiniz.

ÇÖZÜM 1.

	İfade	Doğru	Yanlış	Gerekçe
1	Bir doğal sayının asal çarpanları 2 ve 3 ise bu sayı 6'ya kesinlikle bölünür.	☑	☐	Çünkü $6 = 2 \cdot 3$ Sayı hem 2'ye hem 3'e bölünebildiği için 6'ya da bölünebilir.
2	Bir doğal sayının asal çarpanlarının sayısı arttıkça pozitif tam sayı bölenlerinin sayısı da artar.	☑	☐	Asal çarpan sayısı arttıkça bölen oluşturma kombinasyonları da artar.
3	Pozitif tam sayı bölenlerinin sayısı ile negatif tam sayı bölenlerinin sayısı her zaman eşittir.	☑	☐	Her pozitif bölenin negatif karşılığı vardır. Örneğin: 6 → 1, 2, 3, 6 ve -1, -2, -3, -6.
4	Asal çarpanları aynı olan iki doğal sayının tam sayı bölenlerinin sayısı daima eşittir.	☐	☒	Aynı asal çarpanlara sahip olsalar da üsleri farklı olabilir. Örneğin: $12 = 2^2 \cdot 3$, $6 = 2 \cdot 3$. Bölen sayıları farklıdır.
5	Bir doğal sayının asal çarpanları arasında 5 varsa bu sayı 25'e kesinlikle bölünür.	☐	☒	$25 = 5^2$ Ama asal çarpanlar arasında sadece 5 varsa 25'e bölünmesi için 5'in karesi olması gerekir. Örneğin: 10'nun asal çarpanları 2 ve 5'tir ama 25'e bölünmez.
6	Bir doğal sayının asal çarpanlarının üslü gösterimindeki üslerin birer artırılıp çarpılması, pozitif tam sayı bölen sayısını verir.	☑	☐	Pozitif tam sayı bölen sayısı, sayının asal çarpanlarının üslerinin 1 artırılıp çarpılmasıyla elde edilir.
7	54 sayısının asal çarpanları 2 ve 3'tür; bu nedenle 54, 6'ya tam bölünebilir.	☑	☐	$6 = 2 \cdot 3$'tür. 354 hem 2'ye hem 3'e bölünebildiği için 6'ya da bölünür.
8	Asal çarpanları farklı olan iki doğal sayının tam sayı bölenlerinin sayısı eşit olabilir.	☑	☐	Örneğin: $6 = 2 \cdot 3$ → 4 böleni var, $8 = 2^3$ → 4 böleni var. Asal çarpanlar farklı ama bölen sayısı aynıdır.
9	1 sayısının asal çarpanı olmadığı için pozitif tam sayı bölenlerinin sayısı bulunamaz.	☐	☒	1'in asal çarpanı yoktur ama kendisi bir bölendir. Pozitif tam sayı böleni sadece 1'dir.
10	Bir doğal sayının asal çarpanları arasında 2 varsa bu sayı kesinlikle çifttir.	☑	☐	2'ye bölünebilen her sayı çifttir. 2 asal çarpan olarak varsa sayı çifttir.

ÇÖZÜM 2.

Kurabiyeler sıralara eşit sayıda dizileceğine göre sıra sayısı, 48'in bölenleri olmalıdır.

1. 48'in pozitif bölenlerini bulalım:

- 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48

2. Her bölen için sıra düzeni:

- 1 sıra → her sırada 48 kurabiye
- 2 sıra → her sırada 24 kurabiye
- 3 sıra → her sırada 16 kurabiye
- 4 sıra → her sırada 12 kurabiye
- 6 sıra → her sırada 8 kurabiye
- 8 sıra → her sırada 6 kurabiye
- 12 sıra → her sırada 4 kurabiye
- 16 sıra → her sırada 3 kurabiye
- 24 sıra → her sırada 2 kurabiye
- 48 sıra → her sırada 1 kurabiye

3. Sonuç:

- Pastacı 10 farklı şekilde sıra oluşturabilir.
- Her durumda, sıra sayısı ile sıradaki kurabiye sayısının çarpımı 48'i verir.

ÇÖZÜM 3.

- Pozitif bölen sayısı 3 olan sayılar, asal sayıların kareleridir.

500'den küçük olanlar: 4, 9, 25, 49, 121, 169, 289, 361.

- Toplam 8 tane sayı var.

Mert'in yaşı = 8'dir.

- Elif'in yaşı, 8 'den büyük ve pozitif tam sayı bölen sayısı 4 ise 10 olmalıdır. Çünkü 10'un bölenleri: 1, 2, 5, 10 → 4 tane

Elif'in yaşı = 10'dur.

ÇÖZÜM 4.

a) 36'nın pozitif tam sayı bölenlerini bulalım:

- Bölenler: 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36

Her bölen, "grup sayısı" veya "gruptaki öğrenci sayısı" olarak düşünülebilir.

b) Grup sayısı en az 4, en fazla 10 olacaksa grup sayısı 4, 6 veya 9 olabilir.

Bu nedenle 4 grup × 9 öğrenci, 6 grup × 6 öğrenci veya 9 grup × 4 öğrenci düzeni oluşturulabilir.

ÇÖZÜM 5.

a) 150'nin pozitif tam sayı bölenlerini bulalım.

Bölenler: 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 25 , 30 , 50, 75, 150

- **Parça sayısı ≥ 4**
- **Parça uzunluğu ≥ 5 metre**

Buna göre uygun eşleşmeleri bulalım:

Parça Sayısı	Parça Uzunluğu (metre)
5	30
6	25
10	15
15	10
25	6
30	5

b) Şerit uzunlukları 5, 6, 10, 15, 25, 30 metre olabilir.

ÇÖZÜM 6.

a) Dikdörtgenin olası boyutları

(1, 72), (2, 36), (3, 24), (4, 18), (6, 12), (8, 9)

b)

Boyutlar (m x m)	Çevre (metre)	Maliyet (TL)
1 × 72	2 · (1 + 72) = 146	146 · 150 = 21900
2 × 36	2 · (2 + 36) = 76	76 · 150 = 11400
3 × 24	2 · (3 + 24) = 54	54 · 150 = 8100
4 × 18	2 · (4 + 18) = 44	44 · 150 = 6600
6 × 12	2 · (6 + 12) = 36	36 · 150 = 5400
8 × 9	2 · (8 + 9) = 34	34 · 150 = 5100

c) En düşük maliyet için en küçük çevre oluşturulmalı yani 8 m × 9 m seçilmelidir.

ÖĞRENDİKLERİM

Amaç: Bu bölümde öğrendiklerinizi özetlemenizi, günlük hayatta ve farklı derslerde kullanabileceğiniz bilgileri belirlemenizi amaçlıyoruz.

Aşağıdaki tablonun ilgili satırında verilen ifadeyi dikkatle okuyunuz, kendi durumunuzu "Kendi Değerlendirmeniz" sütununu "Tamamlandı" anlamında (tik) veya "Eksik" anlamında (X) ile işaretleyiniz, gerekçenizi ve geliştirme notlarınızı "Notlarınız" sütununa kısa ve açık biçimde yazınız.

Aşağıdaki tabloda, **asal çarpanlara ayırma tanımı** ile **bölenlere ilişkin temel bilgiler** birlikte ve özet hâlde verilmiştir.

Temel Varsayım

a, b, c: birbirinden **farklı asal sayılar**

k, m, n: **pozitif tam sayılar**

$A = a^k \cdot b^m \cdot c^n$

Asal çarpanlar ve Bölenler	Açıklama
Asal çarpanlara ayırma	Bir doğal sayının, birbirinden farklı asal sayıların kuvvetleri çarpımı şeklinde yazılmasıdır.
A sayısının asal çarpanları	a, b, c
Pozitif tam sayı bölen sayısı	$(k + 1) \cdot (m + 1) \cdot (n + 1)$
Negatif tam sayı bölen sayısı	Pozitif tam bölen sayısına eşittir.
Toplam tam sayı bölen sayısı	$2 \cdot (k + 1) \cdot (m + 1) \cdot (n + 1)$
Tam sayı bölenlerin toplamı	Daima **0**'dır.
Asal bölenler	Sadece a, b, c
Asal olmayan tam sayı bölen sayısı	Toplam tam sayı bölen sayısından asal bölen sayısı çıkarılarak bulunur.

NOT

Asal bölenler, sayıyı bölen **asal sayılardır.**

Aşama	Öğrenme Alanı	Kendi Değerlendirmeniz (✓ / X)	Notlarınız
Hazırlanıyorum	Doğal sayılar kümesini, tek-çift sayı kavramlarını ve bölen-kat ilişkilerini hatırlayabildiniz mi?		
İlişkilendiriyorum	Asal çarpanların sayıların temel yapı taşları olduğunu ve bu bilgiyi günlük yaşamla (örneğin RSA şifreleme) ilişkilendirebildiniz mi?		
Uygulayarak Öğreniyorum	Verilen doğal sayıları asal çarpanlarına ayırarak bölenlerini doğru bir biçimde bulabildiniz mi?		
Değerlendiriyorum	Çözümlerinizdeki hataları fark ederek bölen–çarpan ilişkilerini formüllerle doğrulayabildiniz mi?		
	Bir doğal sayının bölen sayısını asal çarpanların üsleriyle ilişkilendirip bu bilgiyi günlük problemlerde kullanabildiniz mi?		
	Bölen-çarpan ilişkilerini farklı örnekler üzerinde karşılaştırıp, genelleyerek yeni durumlara uygulayabiliyor musunuz?		

Daha fazlası için karekodu okutunuz.



EBOB-EKOK

BAŞLARKEN

Bu bölümde yer alan etkinlikler, bireysel öğrenme yolculuğunuzda size rehberlik etmek ve öğrenme sürecinizi desteklemek amacıyla hazırlanmıştır. Çalışmalarınızı yürütürken "Hazırlanıyorum", "İlişkilendiriyorum", "Uygulayarak Öğreniyorum", "Değerlendiriyorum", "Yansıtıcı Yazı" ve "Öğrendiklerim" etkinliklerini sırası ile takip etmeniz ve etkinliklerin sonunda yer alan geri bildirimleri inceleyerek bölümleri tamamlamanız beklenmektedir.

Sayılar arasındaki bölünebilme ilişkilerini çözümlememizi sağlayan EBOB(En Büyük Ortak Bölen) ve EKOK (En Küçük Ortak Kat) kavramları, günlük yaşamda karşılaştığımız birçok problemin temelini oluşturur. Bu kavramlar, kaynakların ve nesnelerin eş parçalara ayrılmasından farklı aralıklarla gerçekleşen periyodik olayların aynı anda ne zaman tekrarlanacağının hesaplanmasına kadar geniş bir alanda çözüm sunar.

- Hareket noktası aynı olan iki otobüs, farklı saat aralıklarıyla sefer yapıyorsa aynı durakta yeniden ne zaman karşılaşacaklarını hiç düşündünüz mü?
- Pasta, çikolata veya kalemleri arkadaşlarınız aralarında eşit bir şekilde paylaşırken bazı parçaların arttığını fark ettiniz mi?
- Farklı uzunluktaki süs iplerinden hiç artmadan eşit uzunlukta parça çıkarmak istediniz mi?
- Spor salonunda yan yana çalışan iki kişiden biri 8, diğeri 12 tekrar yapıyorsa aynı anda başlayıp tekrar ne zaman denk geleceklerini hiç merak ettiniz mi?

HAZIRLANIYORUM

Amaç: Bu bölümde, sayılar ile ilgili ön bilgilerinizi hatırlamanızı ve temaya hazır hale gelmenizi amaçlıyoruz.

Aşağıda yer alan ifadeler, bu temada tamamlanması hedeflenen öğrenme çıktısını ele almadan önce sahip olmanız gereken bazı temel becerileri içermektedir.

Lütfen her bir ifadeyi dikkatlice okuyunuz.

• Eğer ifadedeki bilgiye hâkim olduğunuzu düşünüyorsanız kutucuğu işaretleyiniz.

• Eğer konuyu henüz tam olarak bilmediğinizi ya da hatırlamadığınızı düşünüyorsanız kutucuğu boş bırakınız.

Bu çalışmanın amacı notla değerlendirilmeyecek olup amacı temaya ne ölçüde hazır olduğunuzu belirlemektir.

SORULAR	ÖN DEĞERLENDİRME KONTROL LİSTESİ	EVET	HAYIR
1	Üslü sayılarda dört işlem yapabilirim.		
2	Üslü denklemleri çözebilirim.		
3	Asal sayı ve aralarında asal olma kavramlarını bilirim.		
4	Bir doğal sayıyı asal çarpanlara ayırabilirim.		
5	Bir sayının pozitif bölen sayısını hesaplayabilirim.		

"Ön Öğrenme Kontrol Listesi"ni doldurduktan sonra aşağıda verilen "Kontrol Noktası" sorularını çözünüz ve cevaplarınızı kontrol ediniz.

KONTROL NOKTASI

SORU 1.

$16^3 \cdot 125^2$ **sayısı kaç basamaklıdır?**

SORU 2. Bir fabrikada 500 işçinin katıldığı üç aşamalı bir eğitim programı düzenlenmektedir. Her aşamanın sonunda, o aşamaya katılan işçilerin $\frac{2}{5}$'i bir sonraki aşamaya geçebilmektedir.

Bu eğitim programının her üç aşamasını başarıyla tamamlayan kaç işçi olduğunu bulunuz.

SORU 3. a ve b iki doğal sayı olsun.

$a^2 - b^2 = 19$

olduğuna göre $a \cdot b$ **değerini bulunuz.**

SORU 4. $(2x - y)$ ile $(x + 2y)$ aralarında asal iki sayıdır.

$\frac{2x-y}{x+2y} = \frac{66}{78}$ **olduğuna göre x ve y sayılarını bulunuz.**

SORU 5. Aşağıdaki sayıları asal çarpanlara ayırınız.

2500 =

$12^3 + 36^3 =$

$15^n \cdot 6^{n+1} =$

SORU 6. Bir sınıfta 20 öğrenci bulunmaktadır. Öğretmen, elindeki 60 kartı bir grup öğrenciye eşit miktarda dağıtacaktır. Ancak her öğrenciye düşen kart sayısının bir asal sayı olması gerekmektedir.

Buna göre kartlar kaç farklı şekilde dağıtılabildiğini bulunuz.

SORU 7. $\frac{1500}{n}$ **sayısı pozitif bir çift sayıya eşit olduğuna göre n nin alabileceği farklı değerleri bulunuz.**

SORU 8. Bir bahçıvan, 84 tane gül fidesini bahçesindeki saksılara eşit sayıda ve artırmadan dikmek istiyor. Bahçıvan her saksıya en az 5, en fazla 20 fide dikecek ve tüm fideleri kullanacaktır.

Buna göre bahçıvanın kullanabileceği saksı sayısı olan n nin alabileceği farklı değerleri bulunuz.

SORU 9. Bir okul, 48 kişilik bir öğrenci grubuyla piknik düzenleyecektir. Piknikte kullanılacak tek tip piknik masaları vardır ve her masaya eşit sayıda öğrenci oturacaktır.

Buna göre okulun kaç farklı masa düzeni planlayabileceğini bulunuz.

GERİ BİLDİRİM

Bu geri bildirim sayesinde kendi cevabınızı kontrol edebilir, hatalarınızı düzelterek öğrenmenizi pekiştirebilirsiniz.

KONTROL NOKTASI

ÇÖZÜM 1.

$16^3 = \left(2^4\right)^3 = 2^{12}$

$125^2 = \left(5^3\right)^2 = 5^6$

$2^{12} \cdot 5^6$

$= 2^6 \cdot 2^6 \cdot 5^6$

$= 64 \cdot 10^6$

$= 64000 \ldots 0$ (6 tane)

8 basamaklı

HATIRLATMA

$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

$a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$

$\left(a^x\right)^y = a^{x \cdot y}$

ÇÖZÜM 2.

1. Aşama: $500 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)$

2. Aşama: $500 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2$

3. Aşama: $500 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^3 = 500 \cdot \frac{8}{125} = 32$ kişi olur.

ÇÖZÜM 3.

$a^2 - b^2 = \underbrace{(a-b)}_{1} \cdot \underbrace{(a+b)}_{19} = 19$

$a + b = 19$

$a - b = 1$

$+$

$2a = 20$

$a = 10$

$b = 9$

$a \cdot b = 90$

ÇÖZÜM 4.

(2x – y) ile (x + 2y) aralarında asal iki sayı olduğuna göre

$\frac{2x-y}{x+2y}=\frac{66}{78}$ kesri en sade hâlde yazılır.

O hâlde $\frac{2x-y}{x+2y}=\frac{11}{13}$ şeklinde yazılır.

$\begin{matrix}2x-y=11\\ x+2y=13\end{matrix}$ → x = 7 ve y = 3 olur.

HATIRLATMA

$\frac{a}{b}\in Q$ ve $b\neq 0$ olmak üzere x ile y ve a ile b aralarında asal iken $\frac{x}{y}=\frac{a}{b}$ ise

x = a ve y = b olmalıdır.

ÇÖZÜM 5.

$2500 = 25 \cdot 100 = 5^2 \cdot 10^2$
$= 5^2 \cdot 2^2 \cdot 5^2$
$= 2^2 \cdot 5^4$

$12^3 + 36^3 = 12^3 + 12^3 \cdot 3^3 = 12^3 \cdot (1 + 27)$
$= 4^3 \cdot 3^3 \cdot 28$
$= 2^6 \cdot 3^3 \cdot 2^2 \cdot 7^1$
$= 2^8 \cdot 3^3 \cdot 7^1$

$15^n \cdot 6^{n+1} = 3^n \cdot 5^n \cdot 6^n \cdot 6^1$
$= 3^n \cdot 5^n \cdot 3^n \cdot 2^n \cdot 2^1 \cdot 3^1$
$= 2^{n+1} \cdot 3^{2n+1} \cdot 5^n$

HATIRLATMA

x, y, z pozitif tam sayılar ve a, b, c birbirinden farklı asal sayılar olmak üzere A doğal sayısı,

$A = a^x \cdot b^y \cdot c^z$

şeklinde yazılıyor ise a, b ve c sayılarına A sayısının asal çarpanları denir.

ÇÖZÜM 6.

1500 sayısının asal çarpanlara ayrılmış hâli $1500 = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^3$ şeklinde olur.

$\frac{1500}{n}$ sayısı çift olduğuna göre 1500'ün tek pozitif bölen sayısına bakalım.

$1500 = 2^{\not 2} \cdot 3^{1} \cdot 5^{3}$
$(1 + 1) \cdot (3 + 1) = 8$ tanedir.

Tüm pozitif bölen sayısı = (2 + 1) · (1 + 1) · (3 + 1) = 24 tanedir.

O hâlde 24 – 8 = 16 tane farklı değer vardır.

HATIRLATMA

a, b, c pozitif tam sayılar ve p, r, s birbirinden farklı asal sayılar olsun.

$A = p^a \cdot r^b \cdot s^c$ sayısının pozitif bölenlerinin sayısı,

$(a + 1) \cdot (b + 1) \cdot (c + 1)$ formülüyle bulunur.

ÇÖZÜM 7.

Saksı sayısı n olmak üzere

$5 \leq \frac{84}{n} \leq 20$

84'ün bölenleri; 1, 2, 3, 4, 6, 7, 12, 14, 21, 28, 42, 84 olur.

Buradaki uygun n değerleri; 6, 7, 12, 14 olup n nin alabileceği 4 farklı değer vardır.

ÇÖZÜM 8.

48'in pozitif tam bölen sayısını bulmak için 48'i asal çarpanlarına ayıralım.

$48 = 2^4 \cdot 3^1$

Pozitif tam bölen sayısı = $(4 + 1) \cdot (1 + 1) = 10$ tanedir.

Bu durumda 10 farklı masa düzeni planlayabilmek mümkündür.

İLİŞKİLENDİRİYORUM

Amaç: Bu bölümde ele alacağınız içerikleri zihninizde var olan bilgileriniz, yaşantılarınız ve diğer derslerde öğrendiklerinizle ilişkilendirmenizi bekliyoruz.

Verilen metni veya örneği okuyunuz. Ardından soruları yanıtlayınız. Cevaplarınızı kendi yaşamınızdan ya da çevrenizden örneklerle destekleyiniz.

ÖRNEK



Bir atölyede 18 litre tahin ve 12 litre pekmez bulunmaktadır. Her iki ürün de birbirine karıştırılmadan eşit hacimli şişelere hiç artmayacak şekilde doldurulmak isteniyor.

Buna göre şişelerin hacmi <u>en fazla</u> kaç litre olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM



- 18 litre tahini tam olarak bölebilecek şişe hacimleri: 1, 2, 3, 6, 9, 18 litre
- 12 litre pekmezi tam olarak bölebilecek şişe hacimleri: 1, 2, 3, 4, 6, 12 litre
- Her ikisini de tam bölebilen şişelerin ortak hacimleri: 1, 2, 3, 6 litre



Bu durumda kullanabilecek en büyük şişe hacmi 6 litre olmalıdır.

- 18 ÷ 6 = 3 şişe tahin
- 12 ÷ 6 = 2 şişe pekmez



Burada EBOB (En Büyük Ortak Bölen) kavramını kullandık.
EBOB(18, 12) = 6 olur.

ÖRNEK



Depoda, 4 litrelik bidonlarda tahin ve 5 litrelik bidonlarda pekmez bulunmaktadır. Tüm bidonlar tamamen boşaltılıp eşit hacimli daha büyük kaplara hiç artmayacak şekilde konmak istenmektedir.

Buna göre bu kaplar <u>en az</u> kaç litre olduğunu bulunuz

ÇÖZÜM

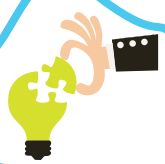


- Tahin miktarı: 4'ün katları olacak → 4, 8, 12, 16, 20, 24, ...
- Pekmez miktarı: 5'in katları olacak → 5, 10, 15, 20, 25, 30, ...
- Her ikisinin de ortak katı olan en küçük miktar: 20 litre



Kullanmanız gereken kaplar en az 20 litre olmalıdır.

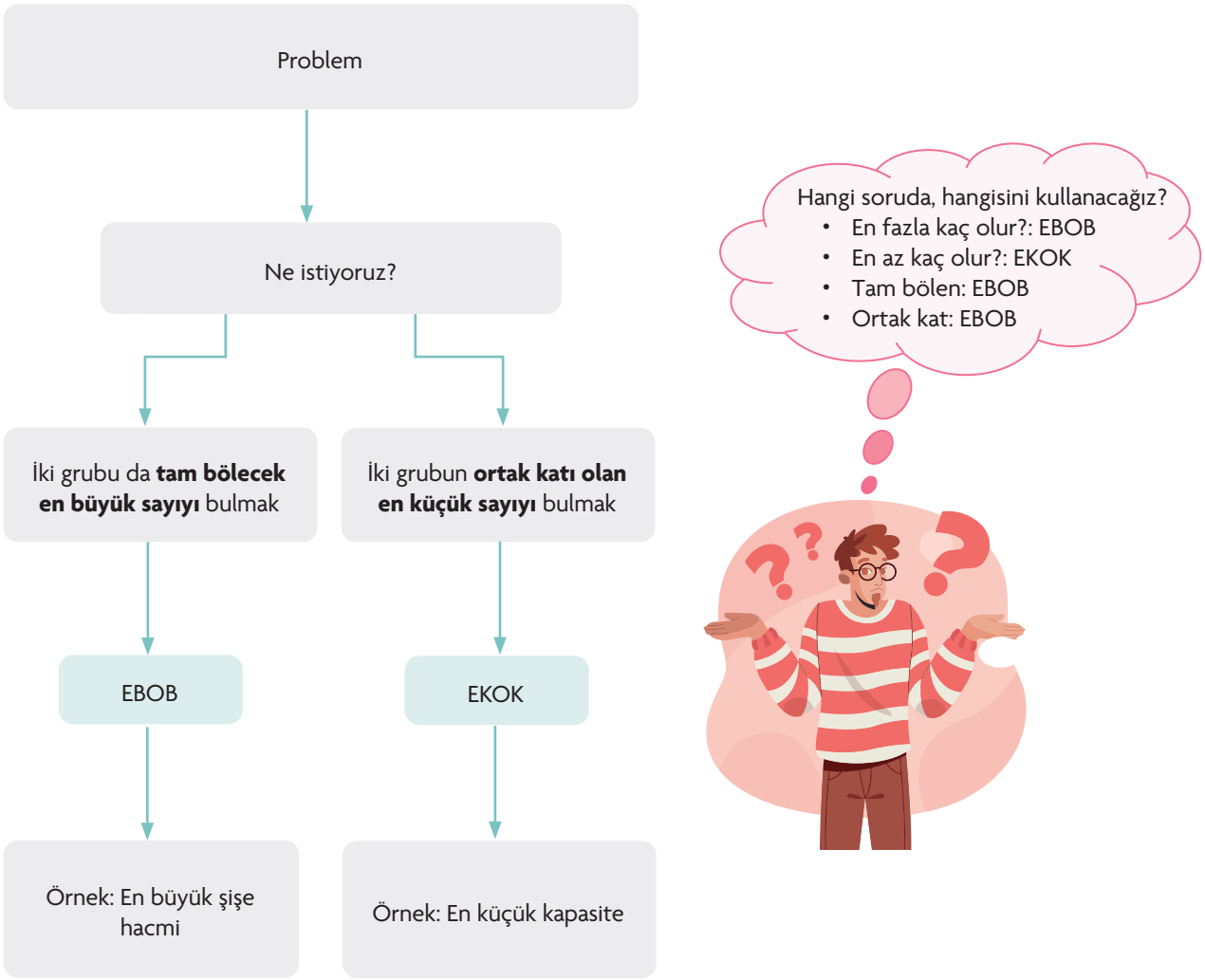
- Tahin bidonlarından: $20 \div 4 = 5$ bidon
- Pekmez bidonlarından: $20 \div 5 = 4$ bidon



Burada EKOK (En Küçük Ortak Kat) kavramını kullandık.
EKOK(4, 5) = 20 olur.

EBOB–EKOK

- Gördüğünüz gibi gıda imalathanesi çalışanı, iki farklı ürünü (tahin ve pekmez) aynı büyüklükteki şişelere doldurabilmek için EBOB'u kullandı. Böylece en büyük şişe hacmini kolayca buldu.
- Aynı imalathane, farklı büyüklükteki bidonlardaki ürünleri daha büyük kaplara aktarırken bu sefer EKOK'u kullandı. Çünkü yeni kapların hacmi, hem tahin bidonlarının hem de pekmez bidonlarının hacimlerinin tam katı olmalıydı.
- Bir markette gördüğünüz aynı boydaki tahin ve pekmez kavanozlarının neden standart hacimleri olduğunu hiç düşündünüz mü? İşte bu standartlaşmanın arkasında, üreticilerin verimlilik için yaptığı EBOB–EKOK hesapları yatar!
- Bir kargo şirketinin paketleri belirli standart kutulara yerleştirmesinin nedenini hiç merak ettiniz mi? Aslında bunun nedeni, paketleri en az boşluk ve fireyle, maksimum kapasiteyle yerleştirebilmek için yapılan EBOB hesaplarıdır.



UYGULAYARAK ÖĞRENİYORUM

Amaç: Bu bölümde bilgilerinizi etkinlikler ve uygulamalarla pekiştirmenizi, öğrenmeyi daha kalıcı hâle getirmenizi amaçlıyoruz.

Adım adım verilen etkinlik basamaklarını uygulayınız.

Deney, problem ya da etkinliklerde verilen adımları dikkatle uygulayınız. Çalışmanızı dikkatli ve düzenli bir şekilde gerçekleştiriniz.

ÖĞRENME YOLCULUĞUNA BAŞLARKEN

En Büyük Ortak Bölen (EBOB) ve En Küçük Ortak Kat (EKOK), yalnızca temel aritmetik bilgisini değil aynı zamanda günlük yaşamda karşılaştığımız organize etme ve optimize etme problemlerini çözme becerisini de geliştiren önemli bir konudur. Sizlere şu alanlarda katkı sağlayacağı düşünülmektedir:

Planlama ve Optimizasyon: EBOB ve EKOK, kaynakları en verimli şekilde kullanmak veya işleri senkronize etmek için kullanılır. Bu yöntemler, bir işletmeci için stok ve sipariş yönetiminden bir ev hanımı için alışveriş listesi hazırlamaya kadar geniş bir uygulama alanına sahiptir.

Gerçek Yaşam Uygulamaları:

- **EBOB:** İki farklı meyve suyunu eşit ve en büyük hacimli şişelere doldurmak, fayans veya halı döşerken en büyük kare biçimindeki parçayı bulmak, bir grup insanı en büyük ve eşit sayıda takıma ayırmak için kullanılır.
- **EKOK:** İki otobüsün aynı duraktan tekrar birlikte kalkacağı süreyi hesaplamak, zil ve alarmların tekrar aynı anda çalacağı zamanı bulmak, farklı uzunluktaki tahtalardan eşit ve en kısa parçalar kesmek için kullanılır.

Matematiksel Akıl Yürütme ve İlişkilendirme: EBOB ve EKOK'u bulmak için kullandığınız asal çarpanlara ayırma yöntemi, sayıların "DNA"sını incelemek gibidir. Bu süreç, sayılar arasındaki gizli ilişkileri görmenizi ve matematiksel yapıyı daha derinden anlamanızı sağlar.

Problem Çözme Stratejileri: Bir problemi çözmeye başlamadan önce "Bu bir EBOB mu yoksa EKOK problemi mi?" sorusunu sormak, analitik düşünme ve problemi kategorize etme becerinizi geliştirir. Bu, karmaşık görünen birçok sözel problemin çözümü için sistematik bir yaklaşım kazandırır.

ÖRNEK

$a = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^3$

$b = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^2$

$c = 2^3 \cdot 5^1$

olduğuna göre EBOB(a, b, c) değeri kaçtır?

ÇÖZÜM

EBOB(a, b, c) değerinin bulunması için her asal çarpan için üslerden küçük olanı alırız.

$a = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^3$

$b = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^2$ → $EBOB(a, b, c) = 2^2 \cdot 3^0 \cdot 5^1 = 4 \cdot 1 \cdot 5 = 20$

$c = 2^3 \cdot 5^1$

ÖRNEK



Bu ürünler birbirine karıştırılmadan kilogram cinsinden eşit ağırlıkta poşetlenecektir.

Buna göre bu işlem için en az kaç poşete ihtiyaç vardır?

ÇÖZÜM

1. Ürünler ayrı ayrı poşetlenecek ve her bir ürün için poşetlerin ağırlığı eşit olacak. Ayrıca poşet ağırlığı, her bir ürün miktarını tam bölen bir sayı olmalıdır.

   En az poşet sayısı için poşet ağırlığı olduğunca büyük olmalıdır.

   Bu durumda poşet ağırlığı 180, 144, 240 sayılarının **en büyük ortak böleni (EBOB)** olur.

2. **EBOB'u hesaplayalım.**

   $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$

   $144 = 2^4 \cdot 3^2$

   $240 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5$

   Ortak asal çarpanlar: 2 ve 3

   En küçük üsler: 2^2 ve 3^1

   EBOB(180, 144, 240) = $2^2 \cdot 3^1 = 12$ kg

3. **Her üründen kaç poşet çıkar?**

   Un :180 ÷ 12 = 15 poşet

   Bulgur :144 ÷ 12 = 12 poşet

   Nohut :240 ÷ 12 = 20 poşet

4. **Toplam poşet sayısı**

   15 + 12 + 20 = 47 poşettir.

HATIRLATMA

- A ve B aralarında asal sayılar olmak üzere EBOB(A, B) = 1'dir.
- EBOB(A, B) = n ise A = n · p ve B = n · k olup p ile k aralarında asaldır.

ÖRNEK

A ve B birbirinden farklı tam sayılar olmak üzere

EBOB(A, B) = 30

olduğuna göre A + B nin alabileceği en küçük değeri bulunuz.

ÇÖZÜM

EBOB(A, B) = 30 ise

$A = 30 \cdot k$
$B = 30 \cdot m$ } k ile m aralarında asal olmalıdır.

A + B toplamının en az olabilmesi için k = 1 ve m = 2 alalım.

A + B = 30 · 1 + 30 · 2 = 90 olur.

ÖRNEK

a ve b pozitif tam sayılar olmak üzere

- EBOB (a, b) = 6
- a + b = 72

olduğuna göre kaç farklı (a, b) sıralı ikilisi olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

EBOB(a, b) = 6 olduğuna göre

$a = 6 \cdot m$
$b = 6 \cdot n$ } m ile n aralarında asal olmalıdır.

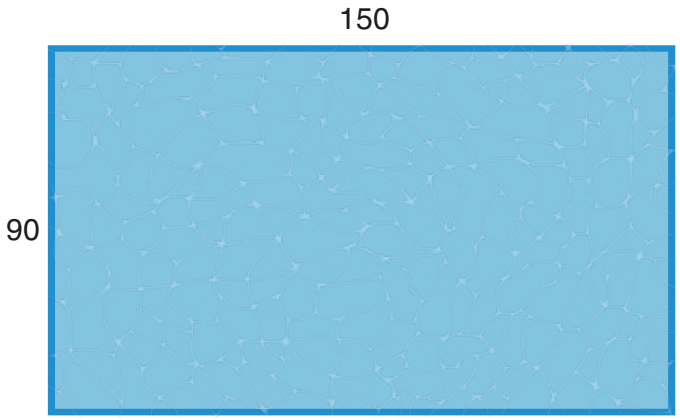
a + b = 6m + 6n = 72

m + n = 12

m	n
1	11
5	7
7	5
11	1

} 4 tane (a, b) sıralı ikilisi vardır.

ÖRNEK

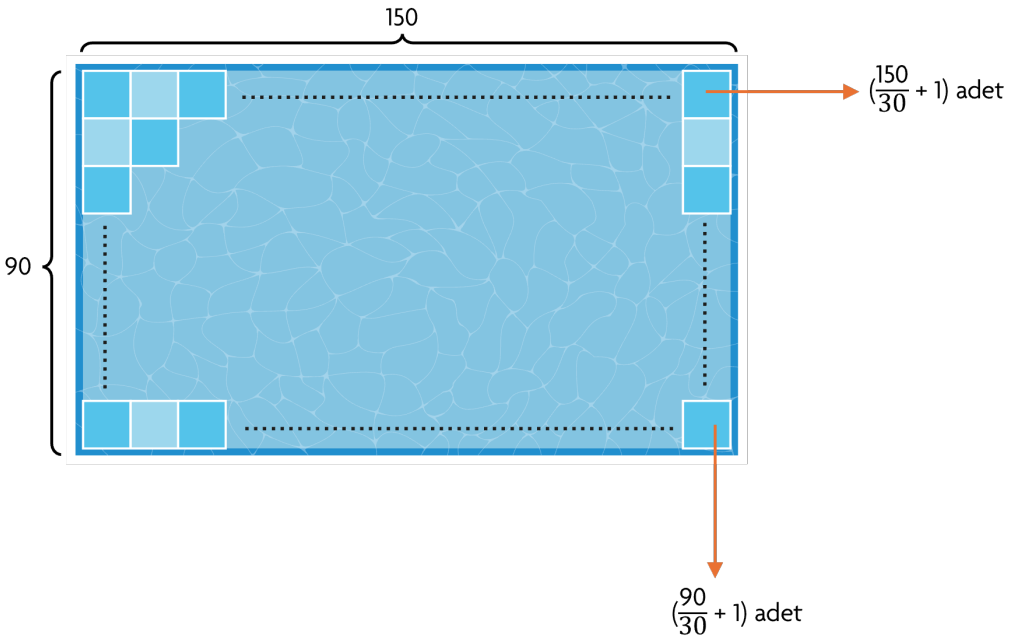


Yukarıda ölçüleri verilen yüzme havuzu, eş kare fayanslarla döşenecek ve her fayansın köşesine birer fıskiye yerleştirilecektir.

Görevlinin elinde 12 adet fıskiye bulunduğuna göre tüm fayans köşelerine fıskiye yerleştirmek için en az kaç tane fıskiyeye ihtiyacı vardır?

ÇÖZÜM

Fayansın kenar uzunluğu: EBOB(90, 150) = EBOB($2^1 \cdot 3^2 \cdot 5^1$, $2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^2$) = 30 metredir.



Fıskiye sayısı: $\left(\frac{150}{30}+1\right)\cdot\left(\frac{90}{30}+1\right)=6\cdot4=24$ adet

Gereken fıskiye sayısı: 24 – 12 = 12 adettir.

ÖRNEK

$a = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^3$

$b = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^2$

$c = 2^3 \cdot 5^1$

olduğuna göre EKOK(a, b, c) değeri kaçtır?

ÇÖZÜM

EKOK (a, b, c) bulmak için; sayılar asal çarpanlarına ayrılır. Ardından, ortak olan ve olmayan tüm asal çarpanlardan, üssü en büyük olanlar seçilerek birbiriyle çarpılır.

$a = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^3$

$b = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^2$ → EKOK(a, b, c) = $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^3$

$c = 2^3 \cdot 5^1$

ÖRNEK

Mehmet; elindeki kartları altışar saydığında 4 kart, sekizer saydığında 6 kart ve onar saydığına 8 kart artmaktadır.

Mehmet'in kart sayısı 300'den fazla olduğuna göre kart sayısı en az kaçtır?

ÇÖZÜM

Kart sayısı: $6a + 4 = 8b + 6 = 10c + 8$

Kart sayısı A olsun.

$A = 6a + 4 = 8b + 6 = 10c + 8$

$A + 2 = 6a + 6 = 8b + 8 = 10c + 10$

$A + 2 = 6(a + 1) = 8(b + 1) = 10(c + 1)$

$6x$ $8y$ $10z$

Kart sayısının 2 fazlası

Kart sayısının 2 fazlası 6, 8 ve 10'un bir katı olmalıdır.

$A + 2 = EKOK(6, 8, 10)$

$EKOK(6, 8, 10) = EKOK\ (2^1 \cdot 3^1, 2^3, 2^1 \cdot 5^1) = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^1 = 120$

Kart sayısı 300'den fazla olduğuna göre 120'nin katlarını alalım.

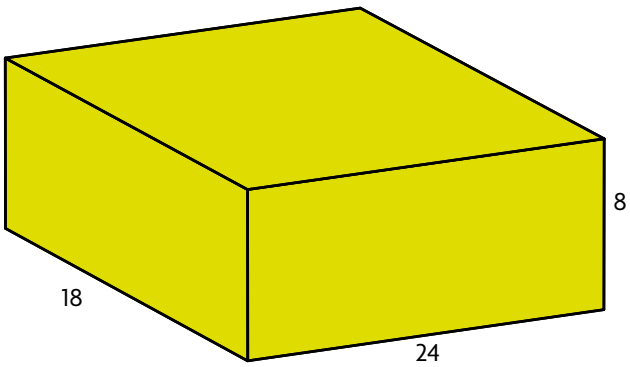
120, 240, 360, 480, ...

Kart sayısının en az olabilmesi için

$A + 2 = 360$

$A = 358$ olur.

ÖRNEK



Boyutları 8 birim, 18 birim ve 24 birim olan dikdörtgenler prizması şeklindeki cisimlerle küp oluşturulacaktır.

Bunun için bu küpün bir ayrıtının uzunluğu en az kaç birim olmalıdır?

ÇÖZÜM

Prizmanın boyut uzunlukları: 8 birim, 18 birim, 24 birimdir.

Bu sayıların EKOK'u, küpün ayrıt uzunluklarının tam katı olmalıdır.

EKOK(8, 18, 24) = EKOK(2^3, $2 \cdot 3^2$, $2^3 \cdot 3^1$) = $2^3 \cdot 3^2 = 72$

O hâlde küpün bir ayrıtının uzunluğu, en az bu EKOK değerine eşit olmalıdır.

Küpün bir ayrıt uzunluğu en az 72 birimdir.

HATIRLATMA

a ve b aralarında asal iki pozitif tam sayı olsun.

EKOK(a, b) = a · b olur.

ÖRNEK

x ve y aralarında asal pozitif tam sayılar olmak üzere

EKOK (x, y) = 630

$$y + \frac{18}{x} = 2x$$

olduğuna göre y – x değeri kaçtır?

ÇÖZÜM

$$y + \frac{18}{x} = 2x$$

$$\underbrace{y \cdot x}_{\text{EKOK}(x,y)} + 18 = 2x \cdot x$$

$630 + 18 = 2x^2$
$2x^2 = 648$
$x^2 = 324$
$x = 18$

→

$y \cdot x = 630$
$y \cdot 18 = 630$
$y = 35$

→

$y - x = 35 - 18 = 17$ olur.

HATIRLATMA

- EBOB (a, b) ≤ a ≤ b ≤ EKOK (a, b) dir.
- a ile b aralarında asal sayılar ise

  EBOB(a, b) = 1

  EKOK (a, b) = a · b dir.
- EBOB(a, b) · EKOK(a, b) = a · b dir.
- a tek sayı ise EBOB(a, a + 2) = 1

  a çift sayı ise EBOB(a, a + 2) = 2'dir.

EBOB-EKOK problemlerinde
- Parçadan bütünü elde etmek için EKOK işlemi uygulanır.
- Bütünden parçayı elde etmek için EBOB işlemi uygulanır.

ÖRNEK

a ve b pozitif tam sayılar olmak üzere

EKOK(a, b) = 140

$\frac{a}{5}=\frac{b}{4}$

olduğuna göre EBOB(a, b) değeri kaçtır?

ÇÖZÜM

$\frac{a}{5}=\frac{b}{4}$ ise 4a = 5b

$\left.\begin{matrix} a = 5k \\ b = 4k \end{matrix}\right\}$ EBOB(a, b) = k

EKOK(a, b) · EBOB(a, b) = a · b

$140 \cdot k = 5k \cdot 4k$

$140k = 20k^2$

k= 7 bulunur dolayısıyla EBOB(a, b)= 7 olur.

ÖRNEK

a ve b pozitif tam sayılar olmak üzere

EBOB(a, b) = 8

EKOK(a, b) = 160

olduğuna göre a + b değeri <u>en çok</u> kaçtır?

ÇÖZÜM

EBOB(a, b) = 8

$a = 8k$
$b = 8m$ } k ile m aralarında asaldır.

EKOK(a, b) · EBOB (a, b) = a · b

$8 \cdot 160 = 8k \cdot 8m$

$20 = k \cdot m$

k ile m aralarında asal olduğundan (k, m) değerleri (1, 20), (4, 5), (5, 4) ve (20, 1) olur.

a + b toplamının en çok olması için k ve m arasındaki farkın en çok olduğu değerler olmalıdır.

$a = 8 \cdot 1 = 8$

$b = 8 \cdot 20 = 160$

a + b = 8 + 160 = 168 olur.

SIRA SİZDE 1.

Bir kenar uzunluğu 180 cm olan kare şeklindeki bir oyun alanının tabanı, kenar uzunlukları tam sayı cinsinden a ve b cm olan dikdörtgen biçimindeki eş karo taşları en az sayıda kullanılarak taşların aralarında boşluk kalmayacak şekilde kaplanıyor.

Karo taşlarının kenar uzunlukları arasında $4 \cdot a = 5 \cdot b$ eşitliği sağlanmaktadır.

Buna göre bir karo taşının çevre uzunluğu kaç santimetredir? Bulunuz.

SIRA SİZDE 2.

Bir okulda 80 litre süt, 140 litre ayran ve x litre meyve suyu; aynı büyüklükteki şişelere karıştırılmadan ve artmayacak şekilde doldurulacaktır. Bu işlem için en az 45 şişe gerekmektedir.

Buna göre x kaçtır?

SIRA SİZDE 3.

Zeynep, Elif ve Sema; sırasıyla 3, 5 ve 8 günde bir kütüphaneye gidiyorlar. Üçü ilk kez pazartesi günü kütüphanede karşılaşmışlardır.

Buna göre üçü yeniden birlikte kütüphaneye gidene kadar geçen sürede Zeynep, kaç kez kütüphanede arkadaşları olmadan ders çalışmıştır? Bulunuz.

SIRA SİZDE 4.

a, b ve c birbirinden farklı doğal sayılar olmak üzere

EKOK(a, b) = 300

EBOB(a, b, c) = 20

eşitlikleri verilmektedir.

Buna göre a + b + c değeri en az kaçtır?

SIRA SİZDE 5.

x ile y ardışık çift sayılar olmak üzere

EKOK(x, y) + EBOB(x, y) = 422

eşitliği verilmektedir.

Buna göre x + y değeri kaçtır?

SIRA SİZDE 6.

18 metre, 24 metre ve 30 metre uzunluğundaki üç demir çubuk, eşit uzunlukta parçalara ayrılacaktır.

Kesim işlemi için her kesim başına 4 TL ödenecektir.

Buna göre bu iş için en az kaç TL ödenir?

SIRA SİZDE 7.

x, y, z ve A birer doğal sayı olmak üzere

$$x = \frac{A}{15} \quad , \quad y = \frac{A}{35} \quad , \quad z = \frac{A}{14}$$

eşitlikleri verilmektedir.

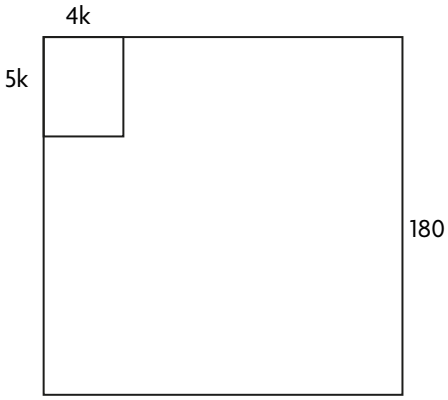
EBOB(x, y, z) = 4 **olduğuna göre x + y + z toplamı kaçtır?**

GERİ BİLDİRİM

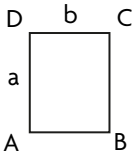
Bu geri bildirim sayesinde kendi cevabınızı kontrol edebilir, hatalarınızı düzelterek öğrenmenizi pekiştirebilirsiniz.

SIRA SİZDE 1.

ÇÖZÜM



$4 \cdot a = 5 \cdot b$



a = 5k

b = 4k

Bu durumda $\frac{180}{4k} \in \mathbb{Z}$ ve $\frac{180}{5k} \in \mathbb{Z}$ olmalıdır.

Başka bir deyişle $\frac{45}{k}$ ve $\frac{36}{k}$ tam sayı olmalıdır.

k = EBOB(45, 36) = 9

a = 5k= 45 cm

b = 4k= 36 cm

Ç(ABCD) = 2 · (45 + 36) = 162 cm olur.

SIRA SİZDE 2.

ÇÖZÜM

Şişe hacmi = EBOB(80, 140) = 20 litre

$$\frac{80}{20} + \frac{140}{20} + \frac{x}{20} = 45$$

$$\frac{x}{20} = 34$$

x = 680 litre olur.

SIRA SİZDE 3.

ÇÖZÜM

Üçü birlikte EKOK(3, 5, 8) = 120 günde bir karşılaşırlar.

Bu zaman zarfında Zeynep, $\frac{120}{3} = 40$ defa kütüphaneye gider.

Zeynep ve Elif, EKOK(3, 5) = 15 günde bir karşılaşırlar.

O hâlde bu zaman zarfında $\frac{120}{15} = 8$ defa birlikte çalışırlar.

Zeynep ve Sema, EKOK(3, 8) = 24 günde bir karşılaşırlar.

O hâlde bu zaman zarfında $\frac{120}{24} = 5$ defa birlikte çalışırlar.

Üçünün birlikte olduğu gün sayısı 120 günde 1 gündür.

O hâlde Zeynep 40 – (5 + 8 –1) = 28 gün arkadaşları olmadan kütüphanede çalışmıştır.

SIRA SİZDE 4.

ÇÖZÜM

EKOK(a, b) = 300

EBOB(a, b, c) = 20

$\left.\begin{array}{l} a = 20k \\ b = 20m \end{array}\right\}$ k ile m aralarında asal sayılar

EKOK(a, b) = 20 · k · m = 300 ise k · m = 15 olur.

a + b toplamının en az olması için k = 3 ve m = 5 olur.

O hâlde a = 20k = 60 ve b = 20m= 100 olur.

c değeri en az 20 olur.

a + b + c = 60 + 100 + 20 = 180 bulunur.

SIRA SİZDE 5.

ÇÖZÜM

x ile y ardışık çift sayılar ise

x = 2k ve y = 2(k + 1) olur.

EBOB(x, y) = 2

EKOK(x, y) = 2 · k · (k + 1)

2 + 2k(k + 1) = 422

1+ k·(k + 1) = 211

k(k + 1) = 210

k = 14 elde edilir.

Bu durumda x = 28 ve y = 30 olur.

x + y = 28 + 30 = 58'dir.

SIRA SİZDE 6.

ÇÖZÜM

Eşit uzunlukta parçalara ayırabilmek için her parçanın uzunluğu, çubukların uzunluklarını tam bölen bir sayı olmalıdır. En büyük parça uzunluğunu bulmak için EBOB(18,24,30) bulunur.

$18 = 2 \cdot 3^2$
$24 = 2^3 \cdot 3$
$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$

} EBOB(18,24,30) = $2 \cdot 3 = 6$

O hâlde her parça uzunluğu 6 m olmalıdır.

Her bir demir çubuk;

18 ÷ 6 = 3 parça,

24 ÷ 6 = 4 parça,

30 ÷ 6 = 5 parçaya ayrılır.

Bir çubuk n parçaya ayrılıyorsa n – 1 kesim gerekmektedir.

18 m çubuk: 3 parça için 2 kesim
24 m çubuk: 4 parça için 3 kesim
30 m çubuk: 5 parça için 4 kesim

} Toplam kesim sayısı = 2 + 3 + 4 = 9 olur.

Her kesim için 4 TL ödenecek olursa toplam: $9 \cdot 4 = 36$ TL ödenir.

SIRA SİZDE 7.

ÇÖZÜM

A = 15x = 35y = 14z

A = k · EKOK(15, 35, 14)

A = 210k

Bu durumda

x = 14k
y = 6k
z = 15k

} EBOB(x, y, z) = k ve k = 4 olduğuna göre

x + y + z = 35k = 140 olur.

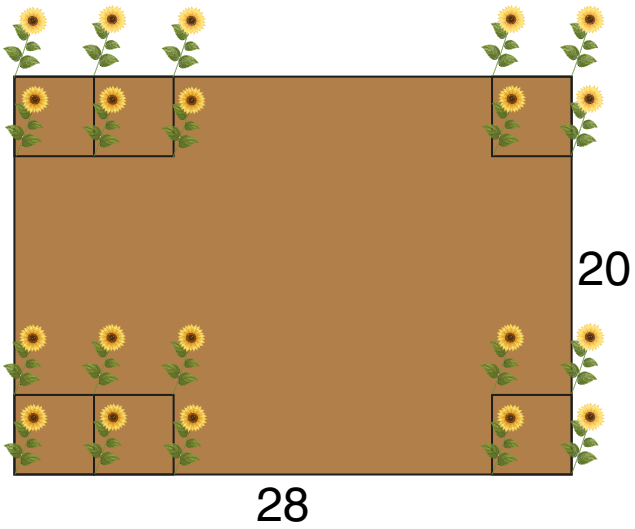
DEĞERLENDİRİYORUM

Amaç: Bu bölümde öğrendiklerinizi gözden geçirmenizi, kendi öğrenme sürecinizi değerlendirmenizi ve eksiklerinizi fark etmenizi amaçlıyoruz.

Soruları dikkatle yanıtlayınız. Cevaplarınızı geri bildirimlerle karşılaştırarak eksik gördüğünüz noktaları tekrar ediniz.

SORULAR

1.



Bir dikdörtgen şeklindeki ayçiçeği tarlasının ölçüleri yukarıdaki şekildeki gibidir. Tarla eş karelere ayrılacak ve her bir karenin köşesine birer ayçiçeği tohumu ekilecektir.

Buna göre bu işlem için <u>en az</u> kaç tane ayçiçeği tohumuna ihtiyaç olduğunu bulunuz.

2. AB, CD, EF iki basamaklı doğal sayılar olmak üzere

EBOB(AB, CD) = 4

EBOB(AB, EF) = 6

eşitlikleri verilmiştir.

Buna göre AB + CD + EF toplamının <u>en çok</u> kaç olduğunu bulunuz.

3. **a, b ve c pozitif tam sayı;** EBOB(a, b) = c **olmak üzere**

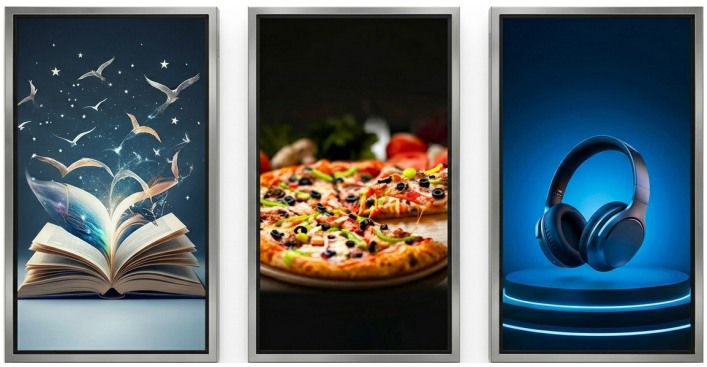
I. EBOB(a^2, b^2) = c^2

II. EBOB(a · b, b^2) = c^2

III. c tek ise a · b tektir.

ifadelerinden hangileri her zaman doğrudur?

4.



Bir alışveriş merkezindeki üç farklı reklam panosu; sırasıyla 18, 27 ve 36 saniyelik aralıklarla yanıp sönmektedir.

Üçü ilk kez saat 14.30'da birlikte yanmıştır.

Buna göre üçünün birlikte yanması 9. kez saat kaçta gerçekleşir? Bulunuz.

5. x, y ve z doğal sayı olmak üzere

$T = 4x + 2 = 6y + 4 = 8z - 2$

eşitliği verilmiştir.

Buna göre üç basamaklı en küçük T doğal sayısının rakamları toplamını bulunuz.

6.



Yukarıda verilen kenar uzunlukları 8 cm ve 18 cm olan dikdörtgen şeklindeki fayanslar yan yana yapıştırılarak en küçük boyutlu bir kare oluşturulmuştur.

Buna göre kullanılan fayansların sayısını bulunuz.

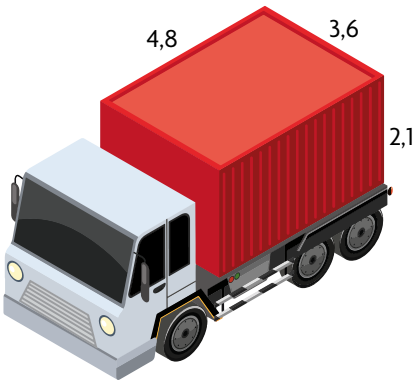
7. **EBOB'ları 15 ve EKOK'ları 270 olan iki sayının toplamı tek sayı olduğuna göre farklarının mutlak değeri en az kaçtır? Bulunuz.**

8. Bir pastanede her bir kurabiye paketinin ağırlığı, 50 gramdan az ve birbirine eşittir. İki müşterinin satın aldığı kurabiye paketlerinin toplam ağırlıkları aşağıdaki gibidir.

- Birinci müşteri: 450 gram
- İkinci müşteri: 630 gram

Buna göre ikinci müşterinin aldığı paket sayısı ile birinci müşterinin aldığı paket sayısı arasındaki fark en az kaçtır? Bulunuz.

9.



Yukarıda, kasasının ayrıt uzunlukları 2,1 metre, 3,6 metre ve 4,8 metre olan dikdörtgenler prizması biçiminde olan bir kamyon görseli verilmiştir. Bu kamyon ile taşınacak yüklerin eş küp biçimindeki kutular olması planlanmaktadır.

Buna göre bu kamyona en az kaç tane küp biçiminde kutu sığabildiğini hesaplayınız.

GERİ BİLDİRİM

Bu geri bildirim sayesinde kendi cevabınızı kontrol edebilir, hatalarınızı düzelterek öğrenmenizi pekiştirebilirsiniz.

ÇÖZÜM 1.

Karelerin eş ve kenar uzunluğunun en fazla olması için

EBOB(20, 28) bulunur.

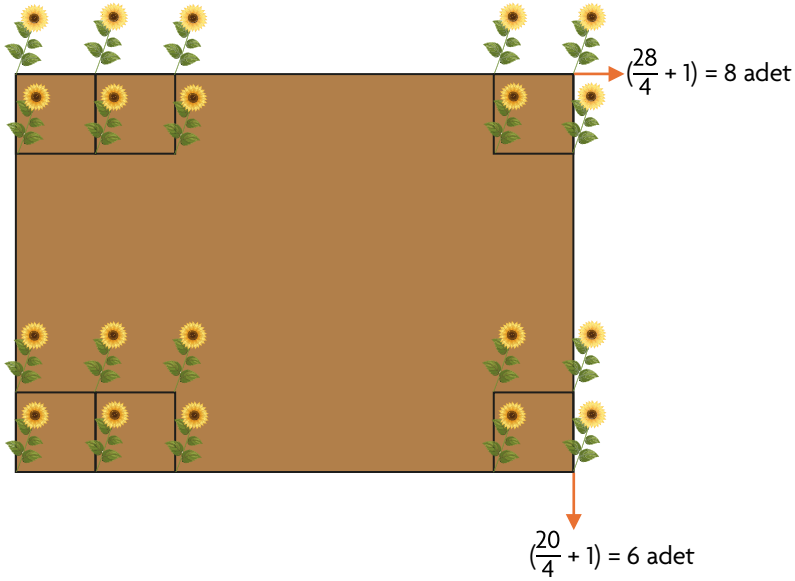
$20 = 2^2 \cdot 5$
$28 = 2^2 \cdot 7$
} EBOB(20, 28) = $2^2 = 4$

O hâlde eş karelerin bir kenar uzunluğu 4 metre olur.

Bahçedeki kare sayısı

Kısa kenar boyunca: 20 ÷ 4 = 5 kare
Uzun kenar boyunca: 28 ÷ 4 = 7 kare

Toplam kare = 5 · 7 = 35



Kısa kenar boyunca köşe sayısı = 5 + 1 = 6

Uzun kenar boyunca köşe sayısı = 7 + 1 = 8

Toplam tohum sayısı = 6 · 8 = 48 olur.

ÇÖZÜM 2.

EBOB(AB, CD) = 4 ve EBOB(AB, EF) = 6 ise

AB = 12k

AB = 96
CD = 92
EF = 90
} alabiliriz.

Bu durumda AB + CD + EF en fazla 96 + 92 + 90 = 278 olur.

ÇÖZÜM 3.

$a = c \cdot k$
$b = c \cdot m$ } k ile m aralarında asal sayılardır.

I. $a^2 = c^2 \cdot k^2$ ve $b^2 = c^2 \cdot m^2$

EBOB$(a^2, b^2) = c^2$ (Doğru)

II. $a \cdot b = c^2 \cdot k \cdot m$

$b^2 = c^2 \cdot m^2$

EBOB$(a \cdot b , b^2) = c^2 \cdot m$ (Yanlış)

III. EBOB(a, b) = 3 olsun.

a = 6 ve b = 15 olabilir.

a · b çift olur. (Yanlış)

ÇÖZÜM 4.

$18 = 2 \cdot 3^2$

$27 = 3^3$

$36 = 2^2 \cdot 3^2$

Ortak periyot, EKOK$(18, 27, 36) = 2^2 \cdot 3^3 = 4 \cdot 27 = 108$ saniye olur.

Panoların ilk ortak yanma saati 14.30 ise 9. kez birlikte yanma saati, (9-1) · 108 = 864 saniye sonra olur (ilk yanma saati 1. kabul edildiğinden).

864 saniye = 14 dakika 24 saniye

Sonuç olarak

14 saat 30 dakika + 14 dakika 24 saniye = 14 saat + 44 dakika + 24 saniye

olup 14:44:24'te panoların ışıkları birlikte yanar.

ÇÖZÜM 5.

$T = 4x + 2 = 6y + 4 = 8z - 2$

$T + 2 = 4x + 2 + 2 = 6y + 4 + 2 = 8z - 2 + 2$

$T + 2 = 4(x + 1) = 6(y + 1) = 8z$

$T + 2 = k \cdot$ EKOK$(4, 6, 8)$

24

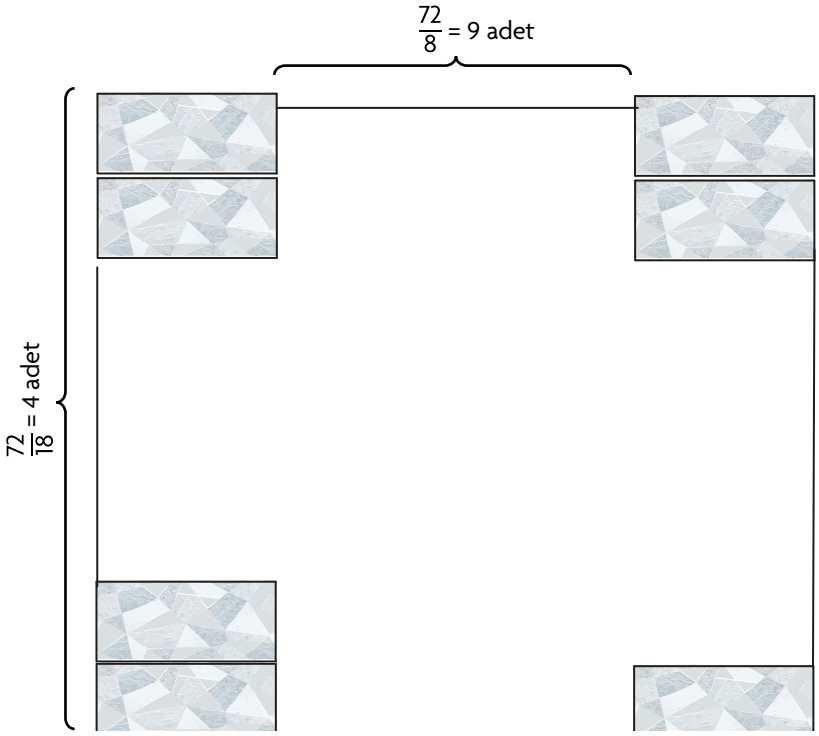
T + 2 ; 24, 48, 96, 120, ... olabilir.

T + 2 = 120

T = 118 olup rakamları toplamı 1 + 1 + 8 = 10 olur.

ÇÖZÜM 6.

Karenin bir kenarı EKOK(8, 18) = 72 cm'dir.



Toplam = 4 · 9 = 36 adet

ÇÖZÜM 7.

a = 15k
b = 15m
} k + m toplamı tek sayıdır.

a · b = 15 · k · m = 270

k · m = 18

1 18
2 9
} Biri tek, biri çift sayı

k = 2 ve m = 9 için farklarının mutlak değeri en az olur.

a = 15k = 30

b = 15m = 135

|a – b| = 105'tir.

ÇÖZÜM 8.

Kurabiye paketinin ağırlığı x gram olsun.

x sayısı, 630 ve 450'yi bölen bir sayı olmalıdır.

EBOB(630, 450) = 90'dır.

Paketin ağırlığı 50'den az olduğundan 630 ve 450'yi bölen 50'den küçük bir sayı olmalıdır.

50'den küçük olan ve her iki sayıyı bölen sayı 45'tir.

O hâlde 2. müşteri $\frac{630}{45} = 14$ adet alır.

1. müşteri $\frac{450}{45} = 10$ adet alır.

Aralarındaki fark: 14 – 10 = 4 olur.

ÇÖZÜM 9.

Kutunun bir ayrıt uzunluğu

EBOB(210, 360, 480) = 30 cm'dir.

$$\text{Kutu sayısı} = \frac{\text{Kamyon kasasının hacmi}}{\text{Küp hacmi}}$$

$$\frac{210 \cdot 360 \cdot 480}{30 \cdot 30 \cdot 30} = 1344 \text{ adet olur.}$$

ÖĞRENDİKLERİM

Amaç: Bu bölümde öğrendiklerinizi özetlemenizi, günlük hayatta ve farklı derslerde kullanabileceğiniz bilgileri belirlemenizi amaçlıyoruz.

Verilen bilgileri dikkatle okuyunuz. Temanın temel kavramlarını, önemli noktalarını ve aralarındaki bağlantıları gözden geçirerek öğrenmenizi pekiştiriniz.

Asal Çarpanlara Ayırma

x, y, z pozitif tam sayılar ve a, b, c birbirinden farklı asal sayılar olmak üzere A doğal sayısı

$$A = a^x \cdot b^y \cdot c^z$$

şeklinde yazılıyor ise a, b ve c sayılarına A sayısının asal çarpanları denir.
Asal çarpanlara ayırma yöntemi EBOB ve EKOK hesaplamalarının temelidir.

a, b, c pozitif tam sayılar ve p, r, s birbirinden farklı asal sayılar olsun.

$$A = p^a \cdot r^b \cdot s^c$$

sayısının pozitif bölenlerinin sayısı $(a + 1) \cdot (b + 1) \cdot (c + 1)$ formülüyle bulunur.

EBOB (En Büyük Ortak Bölen)

Tanım: Sayıları tam bölen en büyük ortak sayıdır.
EBOB bulunurken ortak asal çarpanların **küçük üsleri** alınır.

- EBOB(A,B) = n ise A = np, B = nk (p ve k aralarında asal)
- A ve B aralarında asal ise EBOB(A, B) = 1
- EBOB(a, b, c) bulunurken ortak asal çarpanların en küçük üsleri alınır.
- Ardışık çift sayılar için x = 2k, y = 2(k+1) ise EBOB(x, y) = 2
- a tek iseEBOB(a, a+2) = 1
- a çift iseEBOB(a, a+2) = 2
- $EBOB(a^2, b^2) = (EBOB(a, b))^2$

EKOK (En Küçük Ortak Kat)

Tanım: Sayıların ortak katlarının en küçüğüdür.

EKOK bulunurken tüm asal çarpanların **büyük üsleri** alınır.

- A ve B aralarında asal ise EKOK(A,B) = A · B
- EKOK(a,b,c) bulunurken her asal çarpanın en büyük üssü alınır.

EBOB-EKOK İlişkileri

- EBOB(a, b) · EKOK(a,b) = a · b
- EBOB(a, b) ≤ a ≤ b ≤ EKOK(a,b)
- EBOB(A, B) = 1 ise EKOK(A,B) = A · B
- EBOB(A, B) = n ise A = nk, B = nm (k ve m aralarında asal)

Problem Tipleri

- En büyük eş parça uzunluğu → EBOB
- En az kesim sayısı → EBOB
- En büyük kare fayans → EBOB
- En küçük ortak zaman → EKOK
- Tekrar eden olayların aynı anda gerçekleşmesi → EKOK
- Ortak kapasitenin en küçüğü → EKOK
- Tekrar problemlerinde T = k · EKOK(a, b, c)
- Bir çubuk n parçaya ayrılıyorsa kesim sayısı n – 1 dir

Daha fazlası için karekodu okutunuz.



BÖLME İŞLEMİNDE KALAN BULMA

BAŞLARKEN

Bu bölümde yer alan etkinlikler, bireysel öğrenme yolculuğunuzda size rehberlik etmek ve öğrenme sürecinizi desteklemek amacıyla hazırlanmıştır. Çalışmalarınızı yürütürken "Hazırlanıyorum", "İlişkilendiriyorum", "Uygulayarak Öğreniyorum", "Değerlendiriyorum", "Yansıtıcı Yazı" ve "Öğrendiklerim" etkinliklerini sırası ile takip etmeniz ve etkinliklerin sonunda yer alan geri bildirimleri inceleyerek bölümleri tamamlamanız beklenmektedir.

Bu çalışma kartında;

Bölme işleminde bölüm ve kalanı doğru bulmayı,

Kalanın her zaman bölen sayıdan küçük olduğunu,

2, 3, 4, 5, 8, 9 ve 10 ile bölünebilme kurallarını,

Sayı dizilerinde tekrar eden örüntüleri fark etmeyi

öğreneceksiniz. Matematiğin soyut gibi görünen bu kavramlarının aslında günlük yaşamın düzenini açıklayan güçlü araçlar olduğunu keşfedeceksiniz.

HAZIRLANIYORUM

Amaç: Bu bölümde ön bilgilerinizi hatırlamanızı ve temaya hazırlıklı hâle gelmenizi amaçlıyoruz.
Aşağıda yer alan ifadeler, bu temada tamamlanması hedeflenen öğrenme çıktısını ele almadan önce sahip olmanız gereken bazı temel becerileri içermektedir.

- Lütfen her bir ifadeyi dikkatlice okuyunuz.
- Eğer ifadedeki bilgiye hakim olduğunuzu düşünüyorsanız kutucuğu işaretleyiniz.
- Eğer konuyu henüz tam olarak bilmediğinizi ya da hatırlamadığınızı düşünüyorsanız kutucuğu boş bırakınız.

SORULAR	ÖN ÖĞRENME KONTROL LİSTESİ	
1	Doğal sayılarla dört işlem yapabilirim.	☐
2	Bir sayıyı başka bir sayıya böldüğümde bölüm ve kalanı bulabilirim.	☐
3	Bir sayının bölenlerini ve katlarını bulabilirim.	☐
4	Kalanın her zaman bölen sayıdan küçük olduğunu bilirim.	☐
5	EKOK kavramını bilirim.	☐
6	EBOB kavramını bilirim.	☐
7	Bir sayı dizisinde tekrar eden örüntüyü fark edebilirim.	☐

"Ön Öğrenme Kontrol Listesi"ni doldurduktan sonra aşağıda verilen "Kontrol Noktası" sorularını çözünüz ve cevaplarınızı kontrol ediniz.

KONTROL NOKTASI

SORU 1. Aşağıdaki tabloda verilen işlemlerin sonuçlarını bulup sonuç sütununa yazınız.

	Sonuç
$5 + 2 \cdot 3$	
$12 + 3 \cdot (4 + 7)$	
$4 \cdot 7 - 3 \cdot 6$	
$5 \cdot (7 - 4) + 15 \div (12 - 7)$	

SORU 2. Aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) Bir kütüphanede 125 tane aynı kalınlıkta kitap bulunmaktadır. Bu kitaplar, her rafta 12 kitap olacak şekilde raflara yerleştirilecektir.

Buna göre tam dolu olan raf sayısını ve artan kitap sayısını bulunuz.

b) Bir tiyatro salonunda 16 sıra ve her sırada 18 koltuk bulunmaktadır. Bir tiyatro oyununu izlemek için salona gelen 275 seyirci, her sıraya 18 kişi oturacak şekilde ilk sıradan başlanarak yerleştirilecektir.

Buna göre tam olarak dolan sıra sayısı ve son sırada boş kalan koltuk sayısını bulunuz.

SORU 3. Bir pastanede üretilen 24 kurabiye, her kutuda eşit sayıda kurabiye olacak şekilde kutulara yerleştirilecektir.

Kutulardaki kurabiye sayısı, 24'ün bir böleni olduğuna göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) 24'ün pozitif tam sayı bölenlerini yazınız.

b) Bu bölenlere karşılık gelen kutu düzenlerini belirtiniz.

SORU 4. Bir öğretmen sınıfındaki öğrencilerin bir kısmına 32 kalemi eşit şekilde dağıtmak istemektedir. Her öğrenciye 7 kalem verdiğinde bazı kalemlerin arttığını görmüştür.

Buna göre

a) Kaç öğrenciye 7 kalem verilebilir?

b) Öğrencilere yedişer kalem verildiğinde kaç kalem artar?

c) Artan kalem sayısının neden 7'den küçük olduğunu açıklayınız.

SORU 5. Bir havaalanında iç hatlar ve dış hatlar olmak üzere iki farklı servis, havaalanı girişindeki durağa uğramaktadır.

İç hatlar servisi her 20 dakikada bir, dış hatlar servisi ise her 30 dakikada bir durağa uğramaktadır.

Bu iki servis saat 08.00'de birlikte durağa gelmiştir.

Buna göre

a) Saat 08.00'den sonra bu iki servis ilk kez birlikte durağa geldiklerinde saat kaçı gösterir, bulunuz.

b) Saat 08.00 ile bir sonraki birlikte geliş zamanı arasında iç hatlar servisi ve dış hatlar servisi kaç kez durağa uğramıştır, bulunuz

SORU 6. Bir okulda düzenlenen bir etkinlikte öğrenciler için hediye paketleri hazırlanacaktır.

Her pakete eşit sayıda kalem ve silgi konulacaktır.

Kalemler 48 adet,

Silgiler ise 60 adet olarak temin edilmiştir.

Her paketteki kalem ve silgi sayıları birbirine eşit olacak ve malzemelerin tamamı kullanılacak şekilde paketleme yapılmak istenmektedir.

a) En fazla kaç paket hazırlanabilir, bulunuz.

b) Her pakette kaç kalem ve kaç silgi bulunur, hesaplayınız.

SORU 7. Aşağıdaki sayı dizisi belirli bir kurala göre oluşturulmuştur.

3, 5, 8, 3, 5, 8, 3, 5, 8...

Buna göre bu dizinin 120. terimi kaçtır?

GERİ BİLDİRİM

Bu geri bildirim sayesinde kendi cevabınızı kontrol edebilir, hatalarınızı düzelterek öğrenmenizi pekiştirebilirsiniz.

KONTROL NOKTASI

ÇÖZÜM 1.

	Sonuç
$5 + 2 \cdot 3$	$5 + 6 = 11$
$12 + 3 \cdot (4 + 7)$	$12 + 3 \cdot 11 = 12 + 33 = 45$
$4 \cdot 7 - 3 \cdot 6$	$28 - 18 = 10$
$5 \cdot (7 - 4) + 15 \div (12 - 7)$	$5 \cdot 3 + 15 \div 5 = 15 + 3 = 18$

ÇÖZÜM 2.

a) 125 tane kitap, her rafta 12 kitap olacak şekilde yerleştirilmek istendiğinden 125 12'ye bölünmelidir.

$$\begin{array}{r|l} 125 & 12 \\ -120 & 10 \\ \hline 5 & \end{array}$$

Bu durumda 10 tane rafa on ikişer kitap yerleştirilir ve 5 kitap artar.

b) Bu salonda 16 sıra ve her sırada 18 koltuk varsa toplam $16 \cdot 18 = 288$ koltuk vardır. 275 seyirci, her sırada 18 kişi olacak şekilde yerleştirileceğinden 275 18'e bölünür.

$$\begin{array}{r|l} 275 & 18 \\ -270 & 15 \\ \hline 5 & \end{array}$$

Bu durumda ilk 15 sıradaki koltuklar dolar ve son sırada 5 kişi oturur.
Son sıradaki boş koltuk sayısı $18 - 5 = 13$ olarak bulunur.

ÇÖZÜM 3.

a) 24'ün pozitif tam sayı bölenleri

1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 ve 24'tür.

b) Her kutuya 1 kurabiye konursa → 24 kutu
Her kutuya 2 kurabiye konursa → 12 kutu
Her kutuya 3 kurabiye konursa → 8 kutu
Her kutuya 4 kurabiye konursa → 6 kutu
Her kutuya 6 kurabiye konursa → 4 kutu
Her kutuya 8 kurabiye konursa → 3 kutu
Her kutuya 12 kurabiye konursa → 2 kutu
Her kutuya 24 kurabiye konursa → 1 kutu
oluşturulur.

ÇÖZÜM 4.

a) 32 kalem her öğrencide yedişer kalem olacak şekilde paylaştırılacağından 32 7'ye bölünmelidir.

$$\begin{array}{r|l} 32 & 7 \\ \hline 28 & 4 \\ \hline 4 & \end{array}$$

Bu durumda 4 öğrenciye yedişer kalem verilebilir.

b) 32'nin 7'ye bölümünden kalan 4 olduğu için 4 kalem artar.

c) Artan kalem sayısı 7'den küçük olmak zorundadır çünkü 7'den büyük olursa en az 1 öğrenciye daha 7 kalem verilebilir.

ÇÖZÜM 5.

a) İki servisten biri 20 dakikada bir, diğeri 30 dakikada bir durağa uğradığı için 20 ve 30'un EKOK'unu bulmamız gerekir. EKOK (20, 30) = 60'tır.
EKOK'un 60 olması iki servisin 60 dakikada bir durağa beraber gelmesi anlamına gelir.
Saat 08.00'de durağa beraber geldiklerine göre bir sonraki durakta denk gelmeleri 60 dakika sonra saat 09.00'da olur.

b) Bu süre zarfında iç hatlar servisi iki kez, dış hatlar servisi bir kez durağa gelmiştir.

ÇÖZÜM 6.

a) Oluşturulacak hediye paketi sayısını bulmak için 48 kalem ve 60 silginin EBOB'u bulunmalıdır.
EBOB (48, 60) = 12
Bu durumda en fazla 12 paket oluşturulabilir.

b) Her pakette 48 ÷ 12 = 4 kalem ve 60 ÷ 12 = 5 silgi bulunur.

ÇÖZÜM 7.

Sayı dizisi incelendiğinde her 3 terimden sonra dizinin tekrar ettiği görülür.
Bu durumda bize sorulan terimi bulmak için verilen sayı 3'e bölünür.
Kalan 1 ise 1. terimi, kalan 2 ise 2.terimi, kalan 0 ise 3. terimi verir.
120 sayısı 3'e tam bölündüğü için kalan 0'dır. Böylece 120. terim 8'dir.

HATIRLATMA

En az biri sıfırdan farklı iki veya daha fazla doğal sayının pozitif ortak bölenlerinin en büyüğüne bu sayıların **en büyük ortak böleni** denir. A ile B doğal sayılarının en büyük ortak böleni EBOB(A, B) ile gösterilir.

En az biri sıfırdan farklı iki veya daha fazla doğal sayının pozitif ortak katlarının en küçüğüne bu sayıların **en küçük ortak katı** denir. A ile B doğal sayılarının en küçük ortak katı EKOK(A, B) ile gösterilir.

Aralarında asal olan doğal sayıların en büyük pozitif ortak böleni 1'dir.

Pozitif iki tam sayının çarpımı, sayıların en küçük pozitif ortak katı ile en büyük pozitif ortak böleninin çarpımına eşittir. A ve B pozitif iki tam sayı olmak üzere

$A \cdot B = EBOB(A, B) \cdot EKOK(A, B)$ dir.

Birbirinden farklı doğal sayıların pozitif ortak bölenlerinin en küçüğü her zaman 1'dir.

İLİŞKİLENDİRİYORUM

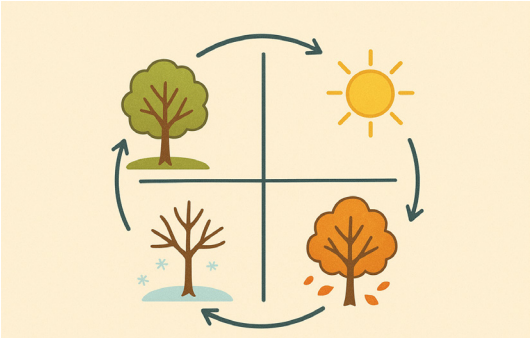
Amaç: Bu bölümde yeni öğreneceğiniz temayı; zihninizde var olan bilgileriniz, yaşantılarınız ve diğer derslerde öğrendiklerinizle ilişkilendirmenizi bekliyoruz.

Bu bölümde, doğal sayılarla yapılan bölme işlemlerinde kalanın nasıl belirlendiğini ve kalanın günlük yaşamda karşılaştığınız düzenli tekrarlarla nasıl ilişkilendirilebileceğini öğreneceksiniz. Arkadaşlar arasında eşya paylaştırılırken artan miktar, haftanın günleri hesaplanırken ortaya çıkan fazlalık ya da saat hesaplarında döngü sonunda kalan fark, matematikteki "kalan" kavramının günlük hayattaki karşılıklarıdır. Bölme işlemi yalnızca sayılarla değil yaşamın düzenli tekrarlarıyla da bağlantılıdır.

10 elmayı 3 arkadaşa eşit paylaştırdığınızda her birine üçer elma düşer ve 1 elma artar. İşte bu artan elma "kalan"dır. Bölme işlemi, günlük hayattaki paylaşımın matematiksel karşılığıdır.

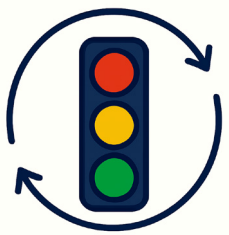
25 öğrenci, dörder kişilik sıralara oturduğunda 6 sıra tamamen dolar ama 1 öğrenci tek başına oturur. Tek başına oturan öğrenci, bölme işlemindeki "kalan"ı temsil eder.

Bugün günlerden perşembe ise 10 gün sonra hangi gün olduğunu bulmak için 10'u 7'ye böleriz. Bölüm 1, kalan 3'tür. Yani perşembeden 3 gün ileri gidince pazar olur. Kalan, döngüsel tekrarların sonucunu belirler.





UYGULAYARAK ÖĞRENİYORUM



Amaç: Bu bölümde bilgilerinizi etkinlikler ve uygulamalarla pekiştirmenizi, öğrenmeyi daha kalıcı hâle getirmenizi amaçlıyoruz.

Matematikte bölme işlemi yalnızca bir sayıyı başka bir sayıya kaç kez bölebileceğimizi değil aynı zamanda bu işlem sonunda geriye ne kaldığını da gösterir.

Bu "kalan" kavramı, ilk bakışta küçük ve önemsiz gibi görünse de dijital dünyada çok büyük bir rol oynar.

Örneğin bilgisayar bilimlerinde bir verinin hangi sunucuya yönlendirileceği, hangi işlemciye atanacağı, hatta hangi renk kodunun seçileceği gibi birçok işlem, bölme ve kalan mantığına dayanır.

Bir sayı belirli bir değere bölünür, kalan ise sistemin karar vermesini sağlar.

Bu mantık modüler aritmetik olarak adlandırılır.

Modüler sistemler; günümüzde şifreleme algoritmalarının, zaman hesaplamalarının, veri paketlerinin ve hatta müzik ritimlerinin temelini oluşturur.

Örneğin bir dijital saat, 24 saatlik döngüde çalışır. Saat 00.00 iken 27 saat geçtiğinde saat 03.00'tür. Çünkü 27'nin 24 ile bölümünden kalan 3'tür.

2, 5, 10, 4 ve 8 ile Bölünebilme

ÖRNEK Tablolarda verilen sayıların sırasıyla 2, 5, 10, 4 ve 8 ile bölümünden kalanları örnekteki gibi basamak çözümlemelerini yaparak bulunuz.

a)

Kural \ Sayılar	124	233	185	392	420
2 ile Bölümünden Kalan	124 = 100 + 20 + 4 Kalan 0 + 0 + 0 = 0 (2 ile tam bölünür.)				

b)

Kural \ Sayılar	128	230	325	132	146
5 ile Bölümünden Kalan	128 = 100 + 20 + 8 Kalan 0 + 0 + 3 = 3				

c)

Kural \ Sayılar	120	235	184	342	428
10 ile Bölümünden Kalan	120 = 100 + 20 + 0 Kalan 0 + 0 + 0 = 0 (10 ile tam bölünür.)				

ç)

Kural \ Sayılar	140	243	182	324	441
4 ile Bölümünden Kalan	140 = 100 + 40 + 0 Kalan 0 + 0 + 0 = 0 (4 ile tam bölünür.)				

d)

Kural \ Sayılar	132	240	186	332	413
8 ile Bölümünden Kalan	132 = 100 + 30 + 2 Kalan 4 + 6 + 2 = 12 12 = 10 + 2 Kalan 2 + 2 = 4				

ÇÖZÜM

a)

Kural \ Sayılar	124	233	185	392	420
2 ile Bölümünden Kalan	124 = 100 + 20 + 4 Kalan 0 + 0 + 0 = 0 (2 ile tam bölünür.)	233 = 200 + 30 + 3 Kalan 0 + 0 + 1= 1	185 = 100 + 80 + 5 Kalan 0 + 0 + 1 = 1	392 = 300 + 90 + 2 Kalan 0 + 0 + 0 = 0	420 = 400 + 20 + 0 Kalan 0 + 0 + 0 = 0

b)

Kural \ Sayılar	128	230	325	132	146
5 ile Bölümünden Kalan	128 = 100 + 20 + 8 Kalan 0 + 0 + 3 = 3	230 = 200 + 30 + 0 Kalan 0 + 0 + 0 = 0	325 = 300 + 20 + 5 Kalan= 0 + 0 + 0 = 0	132 = 100 + 30 + 2 Kalan 0 + 0 + 2 = 2	146 = 100 + 40 + 6 Kalan 0 + 0 + 1 = 1

c)

Kural \ Sayılar	120	235	184	342	428
10 ile Bölümünden Kalan	120 = 100 + 20 + 0 Kalan 0 + 0 + 0 = 0 (10 ile tam bölünür.)	235 = 200 + 30 + 5 Kalan 0 + 0 + 5 = 5	184 = 100 + 80 + 4 Kalan 0 + 0 + 4 = 4	342 = 300 + 40 + 2 Kalan 0 + 0 + 2 = 2	428 = 400 + 20 + 8 Kalan 0 + 0 + 8 = 8

ç)

Kural \ Sayılar	140	243	182	324	441
4 ile Bölümünden Kalan	140 = 100 + 40 + 0 Kalan 0 + 0 + 0 = 0 (4 ile tam bölünür.)	243 = 200 + 40 + 3 Kalan 0 + 0 + 3 = 3	182 = 100 + 80 + 2 Kalan 0 + 0 + 2 = 2	324 = 300 + 20 + 4 Kalan 0 + 0 + 0 = 0	441 = 400 + 40 + 1 Kalan 0 + 0 + 1 = 1

d)

Kural \ Sayılar	132	240	186	332	413
8 ile Bölümünden Kalan	132 = 100 + 30 + 2 Kalan 4 + 6 + 2 = 12 12 = 10 + 2 Kalan 2 + 2 = 4	240 = 200 + 40 + 0 Kalan 0 + 0 + 0 = 0	186 = 100 + 80 + 6 Kalan 4 + 0 + 6 = 10 10 = 10 + 0 Kalan 2 + 0 = 0	332 = 300 + 30 + 2 Kalan 4 + 6 + 2 = 12 12 = 10 + 2 Kalan 2 + 2 = 4	413 = 400 + 10 + 3 Kalan 0 + 2 + 3 = 5

ÖRNEK

Bir meyve suyu fabrikasında her biri 156 litre karışık meyve suyu içeren beş büyük tank bulunmaktadır. Fabrika, bu meyve sularını 2, 4, 5, 8 ve 10 litrelik şişelere doldurarak satışa sunmaktadır.

Her tank yalnızca bir şişe türü ile dolum yapan ayrı bir dolum hattına bağlıdır. Dolum işlemi tamamlandıktan sonra tankta meyve suyu artarsa bu artan miktarlar özel bir boru sistemiyle tek bir toplama tankında birleştirilmektedir.

Buna göre toplama tankında biriken toplam meyve suyu miktarını bulunuz.

ÇÖZÜM

Şişeleme yapıldıktan sonra tankta biriken meyve suyu miktarlarını bulmak için 156 sayısının 2, 4, 5, 8 ve 10 ile bölümünden kalanlar bulunur.
156 sayısının 2 ile bölümünden kalan 0, 4 ile bölümünden kalan 0, 5 ile bölümünden kalan 1, 8 ile bölümünden kalan 4, 10 ile bölümünden kalan 6'dır.
Buna göre şişeleme sonrasında kalan meyve sularının birleştirildiği tanktaki meyve suyu miktarı
0 + 0 + 1 + 4 + 6 = 11 litre olur.

HATIRLATMA

Bir sayının 2 ile bölümünden kalan, o sayının birler basamağındaki rakamın 2 ile bölümünden kalandır.

Bir sayının 5 ile bölümünden kalan, o sayının birler basamağındaki rakamın 5 ile bölümünden kalandır.

Bir sayının 10 ile bölümünden kalan, o sayının birler basamağındaki rakamın 10 ile bölümünden kalandır.

Bir sayının 4 ile bölümünden kalan, son iki basamağındaki sayının 4 ile bölümünden kalandır.

Bir sayının 8 ile bölümünden kalan, son üç basamağını oluşturan sayının 8 ile bölümünden kalandır.

SIRA SİZDE 1.

Bir boya fabrikasında her biri 210 litre boya içeren beş büyük kazan bulunmaktadır.

Boya; farklı boyutlardaki 2, 4, 5, 8 ve 10 litrelik boya kovalarına tam dolacak şekilde aktarılmaktadır.

Her kazanda yalnızca bir kova türü kullanılarak aktarım yapılacaktır. Aktarma işlemi tamamlandıktan sonra kazanda kalan boya özel bir toplama kazanına aktarılacaktır.

Buna göre toplama kazanında biriken toplam boya miktarını bulunuz.

ÖRNEK

Tablolarda verilen sayıların 3 ve 9 ile bölümünden kalanları örnekteki gibi basamak çözümlemelerini yaparak bulunuz.

a)

Kural \ Sayılar	132	240	185	332	412
3 ile Bölümünden Kalan	132 = 100 + 30 + 2 Kalan 1 + 0 + 2 = 3 3 sayısının 3 ile bölümünden kalan 0'dır.				

b)

Kural \ Sayılar	145	240	185	332	412
9 ile Bölümünden Kalan	145 = 100 + 40 + 5 Kalan 1 + 4 + 5 = 10 10 sayısının 9 ile bölümünden kalan 1'dir.				

ÇÖZÜM

a)

Kural \ Sayılar	132	240	185	332	412
3 ile Bölümünden Kalan	132 = 100 + 30 + 2 Kalan 1 + 0 + 2 = 3 3 sayısının 3 ile bölümünden kalan 0'dır.	240 = 200 + 40 + 0 Kalan 2 + 1 + 0 = 3 3 sayısının 3 ile bölümünden kalan 0'dır.	185 = 100 + 80 + 5 Kalan 1 + 2 + 2 = 5 5 sayısının 3 ile bölümünden kalan 2'dir.	332 = 300 + 30 + 2 Kalan 0 + 0 + 2 = 2	412 = 400 + 10 + 2 Kalan 1 + 1 + 2 = 4 4 sayısının 3 ile bölümünden kalan 1'dir.

b)

Kural \ Sayılar	145	240	185	332	412
9 ile Bölümünden Kalan	145 = 100 + 40 + 5 Kalan 1 + 4 + 5 = 10 10 sayısının 9 ile bölümünden kalan 1'dir.	240 = 200 + 40 + 0 Kalan 2 + 4 + 0 = 6	185 = 100 + 80 + 5 Kalan 1 + 8 + 5 = 14 14 sayısının 9 ile bölümünden kalan 5'tir.	332 = 300 + 30 + 2 Kalan 3 + 3 + 2 = 8	412 = 400 + 10 + 2 Kalan 4 + 1 + 2 = 7

HATIRLATMA

Kalan sayı her zaman bölen sayıdan küçüktür.

ÖRNEK

Aralarında Deniz ve Efe'nin de bulunduğu beş kişilik bir arkadaş grubu, lunaparkta jeton satın almak amacıyla gişeye gelir. Gruptaki kişiler ve aldıkları jetonlarla ilgili bilgiler aşağıda verilmiştir.

Jetonların fiyatları türlerine göre değişmektedir.

Altın jetonların satış fiyatı 9 TL, gümüş jetonların satış fiyatı 3 TL'dir.

Gruptaki kişilerin yanlarında getirdikleri paralar 85, 119, 195, 102 ve 154 TL'dir.

Herkes yalnızca yanında getirdiği para kadar alışveriş yapmıştır.

Deniz sadece gümüş jeton, Efe ise sadece altın jeton satın almıştır.

Deniz ve Efe ödemelerini yaptıktan sonra yanlarında getirdikleri paralardan sırasıyla 2 ve 6 TL kalmıştır.

Buna göre Deniz ve Efe'nin yanlarında getirdikleri paraların kaç TL olduğunu bulunuz.

ÇÖZÜM

Efe y tane altın jeton almış olsun.

Altın jetonların satış fiyatı 9 TL olup, Efe'nin ödeme yaptıktan sonra 6 TL'si kaldığından yanında getirdiği paranın cebirsel temsili (9y + 6) TL şeklindedir.

Dolayısıyla Efe'nin yanında getirdiği para 9 ile bölündüğünde 6 kalanını veren bir sayı olmalıdır. Bu şarta uyan sayı 195 TL'dir.

Deniz x tane gümüş jeton almış olsun.

Gümüş jetonların satış fiyatı 3 TL olup Deniz'in ödeme yaptıktan sonra 2 TL'si kaldığı için yanında getirdiği paranın cebirsel temsili (3x + 2) TL şeklindedir.

Dolayısıyla Deniz'in yanında getirdiği para 3 ile bölündüğünde 2 kalanını veren bir sayı olmalıdır. Bu şarta uyan sayı 119 TL'dir.

HATIRLATMA

Bölme Algoritması

$$\begin{array}{r|l} a & b \\ \hline - & c \\ \hline k & \end{array}$$

a, b, c ve k doğal sayıları için bölme algoritmasına göre $a = b \cdot c + k$ ve $k < b$ olmak üzere a nın b ile bölümünden kalan k dir.

NOT

Bir sayının 3 ile bölümünden kalan, o sayının rakamları toplamının 3 ile bölümünden kalana eşittir.
Bir sayının 9 ile bölümünden kalan, o sayının rakamları toplamının 9 ile bölümünden kalana eşittir.

SIRA SİZDE 2.

Bir müzik okulunda öğrenciler için özel konser biletleri hazırlanmıştır. Öğrencilerden, öğretmenlerinin tahtaya yazdığı üç basamaklı ABC doğal sayısının rakamlarını kullanarak kendi bilet numaralarını üretmeleri istenmektedir. Öğrenciler aşağıdaki adımları takip ederler:

Her öğrenci, tahtaya yazılan sayının rakamlarının yerlerini değiştirerek yeni bir üç basamaklı sayı oluşturur.

ABC sayısı ile kendi oluşturduğu sayı arasındaki farkın mutlak değerini bulur.

Bulduğu sayıyı bilet numarası olarak belirler.

Öğretmen, beş kişilik bir gruptaki öğrencilerden belirledikleri bilet numaralarını ayrı kâğıtlara yazarak almıştır. Öğretmen kağıtta yazan numaraların 108, 189, 252, 360, 475 olduğunu görünce bir öğrencinin hatalı bilet numarası ürettiğini fark etmiştir.

Buna göre hatalı üretilen bilet numarasını bulunuz.

ÖRNEK

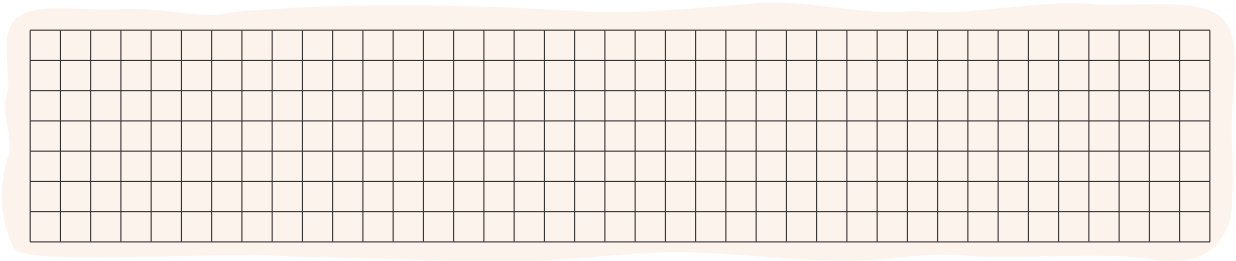
Üç basamaklı 4A5 sayısının 9 ile bölümünden kalan 3'tür.

Üç basamaklı ve rakamları farklı 2AB sayısının 4 ile bölümünden kalan 1'dir.

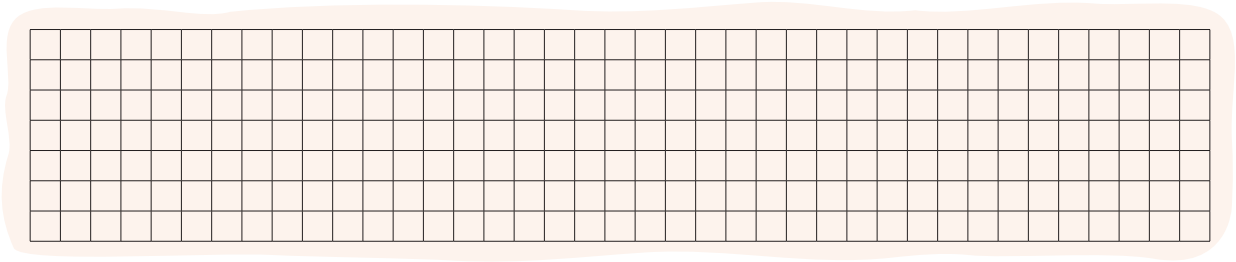
Dört basamaklı 5ABC sayısının 8 ile bölümünden kalan 6'dır.

Buna göre beş basamaklı 45ACB sayısının

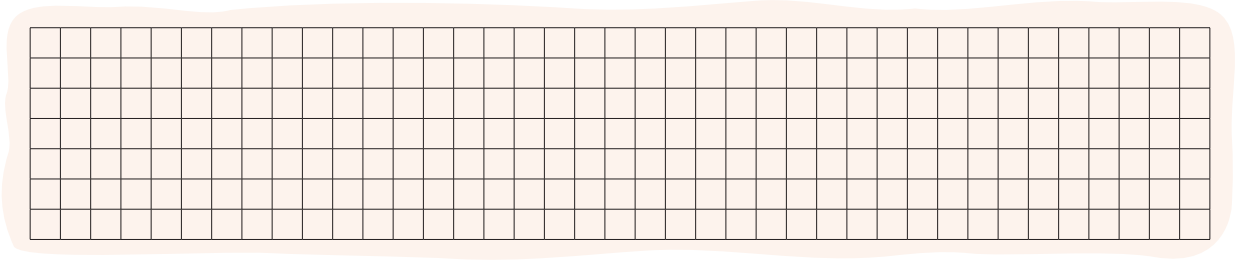
a) 5 ile bölümünden kalanı bulunuz.



b) 9 ile bölümünden kalanı bulunuz.



c) 12 ile bölümünden kalanı bulunuz.



ÇÖZÜM

Üç basamaklı 4A5 sayısının 9 ile bölümünden kalan 3 ise k bir doğal sayı olmak üzere sayının rakamlarının toplamı 9k + 3 şeklindedir. Bu durumda A = 3 olur.

Rakamları farklı üç basamaklı 2AB sayısının 4 ile bölümünden kalan 1 ise t bir doğal sayı olmak üzere AB = 4t + 1 şeklindedir. A = 3 olduğundan B de 7 olmak zorundadır.

Dört basamaklı 5ABC sayının 8 ile bölümünden kalan 6 ise m bir doğal sayı olmak üzere ABC = 8m + 6 şeklindedir. A = 3 ve B = 7 olduğundan C sayısı da 4 olur.

Bu durumda beş basamaklı sayı 45347 olur.

a) Bu sayının 5 ile bölümünden kalan, birler basamağındaki rakamın 5 ile bölümünden kalana eşittir.

Dolayısıyla 7'nin 5 ile bölümünden kalan 2 ve böylece 45347 sayısının 5 ile bölümünden kalan 2'dir.

b) Bu sayının 9 ile bölümünden kalan, rakamları toplamının 9 ile bölümünden kalana eşittir. Sayının rakamları toplamı 4 + 5 + 3 + 4 + 7 = 23'tür. 23'ün 9 ile bölümünden kalan 5 olduğundan 45347 sayısının 9 ile bölümünden kalan 5'tir.

c) Bu sayının 12 ile bölümünden kalanı bulmak için doğrudan sayıyı 12'ye bölebiliriz ya da sayının 3 ve 4 ile bölümünden kalanları bulup her iki kalana da bölen eklemesi yaparak eşitlendiği yerde kalanı belirleyebiliriz.

Sayının rakamları toplamı 23 olduğundan 3 ile bölümünden kalan 2'dir. Dolayısıyla kalan 2, 5, 8, 11 olabilir.

Sayının 4 ile bölümünden kalan, son iki basamağı olan 47'nin 4 ile bölümünden kalana eşittir. 47'nin 4 ile bölümünden kalan 3'tür. Bu durumda kalan 3, 7, 11 olabilir. İki durumda da 11 kalanına ulaştığımızdan bu sayının 12 ile bölümünden kalan 11'dir.

SIRA SİZDE 3.

Üç basamaklı 64A sayısının 9 ile bölümünden kalan 5'tir.

Üç basamaklı ve rakamları farklı 3AB sayısının 4 ile bölümünden kalan 3'tür.

Dört basamaklı 7ABC sayısının 8 ile bölümünden kalan 2'dir.

Buna göre beş basamaklı 62CBA sayısının

a) 3 ile bölümünden kalanı bulunuz.

b) 5 ile bölümünden kalanı bulunuz.

c) 15 ile bölümünden kalanı bulunuz.

ÖRNEK

Rakamları farklı dört basamaklı 46XY sayısının 20 ile bölümünden kalan 9'dur.

Buna göre X rakamının alabileceği değerlerin toplamını bulunuz.

ÇÖZÜM

46XY doğal sayısının 20 ile bölümünden kalan 9 ise bu sayının 4 ile bölümünden kalan 1, 5 ile bölümünden kalan 4 olur.

5 ile bölümünden kalan 4 ise Y = 4'ten sayı 46X4 veya Y = 9'dan sayı 46X9 olmalıdır. Sayının rakamlarının farklı olacağı belirtildiği için Y = 9 olmalıdır.

Sayının 4 ile bölümünden kalan 1 ise 46X9 için 10X + 9 = 4k +1 ise X in alabileceği değerler 0, 2, 4, 6 ve 8 olur.

Rakamları farklı olacağından 4 ve 6 değerlerini yazamayız.

Bu durumda X in alabileceği değerler toplamı 0 + 2 + 8 = 10 bulunur.

SIRA SİZDE 4.

Rakamları farklı dört basamaklı 39AB doğal sayısının 15 ile bölümünden kalan 11'dir.

Buna göre A rakamının alabileceği değerlerin toplamını bulunuz.

GERİ BİLDİRİM

Bu geri bildirim sayesinde kendi cevabınızı kontrol edebilir, hatalarınızı düzelterek öğrenmenizi pekiştirebilirsiniz.

SIRA SİZDE 1.

ÇÖZÜM

Her kazanda 210 litre boya var ve her kazanda yalnızca bir tür kova kullanılacak. Kovalar 2, 4, 5, 8 ve 10 litreliktir.

Bu durumda 210'u kovaların litrelerine tek tek bölerek kalanları bulalım.

2 litrelik kovalar:

210 ÷ 2 = 105 tam kova, kalan **0 litre**

4 litrelik kovalar:

210 ÷ 4 = 52 tam kova, kalan **2 litre**

5 litrelik kovalar:

210 ÷ 5 = 42 tam kova, kalan **0 litre**

8 litrelik kovalar:

210 ÷ 8 = 26 tam kova, kalan **2 litre**

10 litrelik kovalar:

210 ÷ 10 = 21 tam kova, kalan **0 litre**

Toplama kazanında kalanlar:

2 litrelik → 0 litre

4 litrelik → 2 litre

5 litrelik → 0 litre

8 litrelik → 2 litre

10 litrelik → 0 litre

Toplam = 0 + 2 + 0 + 2 + 0 = 4 litre

SIRA SİZDE 2.

ÇÖZÜM

Bir üç basamaklı sayının rakamlarını yer değiştirince, asıl sayı ile olan farklar her zaman 9'un katı olur.

Örneğin ABC – ACB farkında basamak çözümlemesi yapılırsa;

100A + 10B + C – 100A – 10C – B = 9B – 9C olur ve 9B – 9C sayısı 9'un bir katıdır.

9 ile bölünebilme kuralında sayının rakamları toplamı 9'un katı olursa sayı 9'a tam bölünüyordu.

Bu durumda bilet numarası 475 olamaz. Çünkü 475 sayısının rakamları toplamı 16'dır ve 16, 9'un bir katı değildir.

SIRA SİZDE 3.

ÇÖZÜM

Bir sayının 9'a bölümünden kalan, rakamları toplamının 9'a bölümünden kalan ile aynıdır. Bu durumda 64A sayısının 9 ile bölümünden kalanı bulmak için rakamları toplamına bakarız. 64A sayısın rakamları toplamı 10 + A olur. Bu sayının 9 ile bölümünden kalanın 5 olması için A rakamının 4 olması gerekir. A = 4

Bir sayının 4'e bölümünden kalan, son iki basamağının 4 ile bölümünden kalana eşittir.

A = 4 olduğuna göre 34B sayısının 4 ile bölümünden kalanın 3 olması için B sayısının 3 veya 7 olması gerekir. 34B sayısının rakamları birbirinden farklı olduğundan B sayısı 7 olmalıdır. B = 7

Bir sayının 8 ile bölümünden kalan sayının son üç basamağının 8 ile bölümünden kalana eşittir.

A = 4 ve B = 7 olduğuna göre 7ABC sayısının 8 ile bölümünden kalanın 2 olması için C sayısının 4 olması gerekir. Çünkü 474 sayısının 8 ile bölümünden kalan 2'dir. C = 4

Bu durumda beş basamaklı 62CBA sayısı 62474'tür.

a) Sayının 3 ile bölünden kalanı bulmak için sayının rakamları toplamının 3 ile bölümünden kalana bakmak gerekirdi.

Rakamlar toplamı: 6 + 2 + 4 + 7 + 4 = 23 olup 23 ÷ 3 → kalan 2'dir.

b) Sayının 5 ile bölümünden kalanı bulmak için sayının birler basamağının 5 ile bölümünden kalana bakmak gerekirdi.

Birler basamağı 4 olduğundan sayının 5 ile bölümünden kalan 4'tür.

c) Sayının 15 ile bölümünden kalanı bulmak için 3 ve 4 ile bölümünden kalana bakmak gerekirdi.

Sayının 3 ile bölümünden kalan 2 ve 5 ile bölümünden kalan 4 olduğundan sayının 15 ile bölünden kalan 14'tür.

SIRA SİZDE 4.

ÇÖZÜM

Bir sayının 15'e bölümünden kalanını bulmak için hem 3 ve 5 ile bölümünden kalanları bulmamız gerekirdi.

Sayının 15 ile bölümünden kalan 11 olduğuna göre sayının 5 ile bölümünden kalan 1'dir. Çünkü 11'in 5 ile bölümünden kalan 1'dir. Bu durumda sayının birler basamağı olan B sayısı 1 veya 6 olur.

Sayının 15 ile bölümünden kalan 11 olduğundan sayının 3 ile bölümünden kalan 2'dir. Çünkü 11'in 3 ile bölümünden kalan 2'dir.

Sayının rakamları toplamı 3 + 9 + A + B = 12 + A + B olur.

Bu durumda B = 1 ise 13 + A'nın 3 ile bölümünden kalan 2 olması için A'nın 1, 4, veya 7 olması gerekir. Sayının rakamları farklı olduğundan A sayısı 1 olamaz.

B = 6 ise 18 + A'nın 3 ile bölümünden kalan 2 olması için A'nın 2, 5, veya 8 olması gerekir.

A'nın alabileceği değerler: 2, 4, 5, 7, 8'dir.

Toplam = 2 + 4 + 5 + 7 + 8 = 26 olur.

DEĞERLENDİRİYORUM

Amaç: Bu bölümde, öğrendiklerinizi gözden geçirmenizi, kendi öğrenme sürecinizi değerlendirmenizi ve eksiklerinizi fark etmenizi amaçlıyoruz.

Soruları dikkatle yanıtlayınız. Cevaplarınızı geri bildirimlerle karşılaştırarak eksik gördüğünüz noktaları tekrar ediniz.

SORULAR

1. Bir lojistik merkezinde bulunan ürünlerin etiket numaraları belirli kurallara göre verilmiştir. Meyve suyu, içme suyu ve sıvı yağ ürünlerine ait etiket numaralarıyla ilgili aşağıdaki bilgiler verilmektedir:

Meyve suyu ürününün etiket numarası 5 ile bölündüğünde 4, 8 ile bölündüğünde 4 kalanını verir.

İçme suyu ürününün etiket numarası 9 ile bölündüğünde 8, 10 ile bölündüğünde 9 kalanını verir.

Sıvı yağ ürününün etiket numarası 3 ile bölündüğünde 0, 4 ile bölündüğünde 2 kalanını verir.

Görevli, bazı ürünlere kontrol fişi bırakmıştır. Bu fişlerde yazan etiket numaraları 524, 532, 539, 548, 555 ve 558'dir.

Buna göre verilen ürünlerden her birine (meyve suyu, içme suyu ve sıvı yağ) ait etiket numarasını bulunuz.

2. Bir kütüphanede raf etiketleri dört basamaklı sayılardan oluşmaktadır.

Bir raf etiketinde yazan "R52S" sayısının aşağıda verilen şartları sağladığı bilinmektedir.

4 ile bölümünden kalan 1'dir.

5 ile bölümünden kalan 4'tür.

9 ile bölümünden kalan 5'tir.

Buna göre bu şartları sağlayan raf etiketlerinin numarasını bulunuz.

3. Dikdörtgenler prizması biçimindeki bir yüzme havuzu ile ilgili aşağıdakiler bilinmektedir.

Havuzun üst yüzeyinin uzun kenarı 150 metreden, kısa kenarı 80 metreden büyüktür.

Havuzun üst yüzeyinin uzun kenarı boyunca köşelerden ikişer metre uzakta olması şartıyla her 8 metrede bir aydınlatma direği yerleştirilecektir.

Havuzun üst yüzeyinin kısa kenarı boyunca köşelerden birer metre uzakta olması şartıyla her 5 metrede bir güvenlik kamerası yerleştirilecektir.

Buna göre havuzun üst yüzeyinin çevre uzunluğunun alabileceği en küçük değerin kaç metre olduğunu bulunuz.

4. Bir tünel hattının uzunluğu ölçülmek istenmektedir. Görevli hattın uzunluğu ile ilgili aşağıdaki bilgileri vermektedir:

Hattın uzunluğu metre cinsinden dört basamaklı bir sayıdır.

Binler basamağı 4, yüzler basamağı 6'dır.

Her 24 metrede bir işaret direği dikildiğinde hattın sonunda 12 metrelik bir bölüm işaretsiz kalmaktadır.

Buna göre tünel hattının uzunluğunun alabileceği en büyük değerin kaç metre olduğunu bulunuz.

5. Bir arkeoloji kazısında bulunan antik bir tabletin üzerine beş basamaklı bir sayı kazınmıştır.

Kazı ekibi bu sayıyı defterlerine 572PR şeklinde kodlamıştır. Tablet üzerindeki sayı ile ilgili aşağıdakiler bilinmektedir.

Tüm rakamları birbirinden farklıdır.

18 ile bölümünden kalan 11'dir.

Buna göre tabletin üzerindeki sayının rakamları toplamını bulunuz.

GERİ BİLDİRİM

Bu geri bildirim sayesinde kendi cevabınızı kontrol edebilir, hatalarınızı düzelterek öğrenmenizi pekiştirebilirsiniz.

ÇÖZÜM 1.

Lojistik merkezindeki paletlerin etiket numaralarıyla ilgili verilen koşullar şunlardır:

1. Meyve Suyu Paleti:

   Etiket numarası hem 5 ile bölündüğünde hem de 8 ile bölündüğünde kalan 4 olmalıdır.

   Kontrol fişlerinde yer alan sayılardan 524 sayısı bu koşulları sağlar.

   Dolayısıyla meyve suyu paletinin etiketi 524'tür.

2. İçme Suyu Paleti:

   Etiket numarası 9 ile bölündüğünde kalan 8, 10 ile bölündüğünde kalan 9 olmalıdır.

   Bu koşul son basamağın 9 olmasını gerektirir. Fişlerde sonu 9 ile biten sayı 539'dur.

   Bu durumda içme suyu paletinin etiketi 539'dur.

3. Sıvı Yağ Paleti:

   Etiket numarası 3 ile tam bölünebilmeli ve 4 ile bölündüğünde kalan 2 olmalıdır.

   Fişlerde bu koşulu sağlayan sayı 558'dir.

   Bu nedenle sıvı yağ paletinin etiketi 558'dir.

ÇÖZÜM 2.

Kütüphanedeki raf etiketleri dört basamaklı sayılardan oluşmaktadır. Etikette yazan "R52S" sayısının bazı koşulları sağladığı bilinmektedir. Söz konusu koşullar şunlardır:

1. **5 ile Bölümünden Kalan 4 Olma Koşulu:**

   Bir sayının 5 ile bölümünden kalan birler basamağını belirler.

   Son basamak S olduğuna göre S yerine gelecek rakam 4 ya da 9 olabilir.

2. **4 ile Bölümünden Kalan 1 Olma Koşulu:**

   Bir sayının 4 ile bölümünden kalanı son iki basamak belirler.

   Son iki basamak "2S" olduğuna göre bu koşulu sağlayan değer S = 9'dur.

3. **9 ile Bölümünden Kalan 5 Olma Koşulu:**

   Bir sayının 9 ile bölümünden kalanı rakamlarının toplamı belirler.

   Etiket "R529" olduğuna göre rakamların toplamı R + 5 + 2 + 9 = R + 16'dır.

Bu toplamın 9'a bölümünden kalan 5 olmalıdır. Buradan R = 7 elde edilir.

Bu durumda verilen şartları sağlayan etiket numarası 7529'dur.

ÇÖZÜM 3.

Dikdörtgenler prizması şeklindeki bir havuzun üst yüzeyinin uzun kenarı 150 metreden, kısa kenarı ise 80 metreden büyük olduğu bilinmektedir. Kenarlara yerleştirilecek aydınlatma direkleri ve güvenlik kameraları için özel koşullar verilmiştir. Havuzun üst yüzeyinin uzun kenarının L ve kısa kenarının S olarak adlandırıldığını düşününüz.

1. Havuzun Uzun Kenarı ile İlgili Koşula Ait Çözüm:

Direkler, köşelerden ikişer metre uzaklıktan başlayacak ve her 8 metrede bir yerleştirilecektir. Bu durumda havuzun üst yüzeyinin uzun kenarının her iki köşesinden 2 metre uzaklıkta bir direk bulunmalıdır. Bu durumda havuzun uzun kenarının uzunluğu L, 8'in katı üzerine 4 eklenmiş bir sayı olmalıdır. L > 150 metre olduğundan bu koşulu sağlayan en küçük değer L = 156 metredir.

2. Havuzun Kısa Kenarı ile İlgili Koşula Ait Çözüm:

Kameralar, köşelerden birer metre uzaklıktan başlayacak ve her 5 metrede bir yerleştirilecektir. Bu durumda havuzun üst yüzeyinin kısa kenarının her iki köşesinden 1 metre uzaklıkta kamera bulunmalıdır. Bu durumda havuzun kısa kenarının uzunluğu S, 5'in katı üzerine 2 eklenmiş bir sayı olmalıdır. S > 80 metre olduğundan bu koşulu sağlayan en küçük değer S = 82 metredir.

3. Çevre Uzunluğu:

Dikdörtgenin çevresi $2 \cdot (L + S)$ formülüyle bulunur. Bu durumda

$2 \cdot (156 + 82) = 2 \cdot 238 = 476$ metre olarak bulunur.

ÇÖZÜM 4.

Tünel hattının uzunluğu metre cinsinden dört basamaklı sayı, bu sayının binler basamağı 4 ve yüzler basamağı 6 olduğuna göre uzunluk 4600 ile 4699 arasındadır. Her 24 metrede bir işaret direği dikildiğinde hattın sonunda 12 metrelik bölümün işaretsiz kalması, uzunluğun 24 ile bölümünden kalanının 12 olduğunu gösterir.

4600 sayısının 24 ile bölümünden kalan 16'dır. 24'ün katlarının 12 fazlasına ulaşmak için 4600'e 20 eklememiz gerekir ki 4620 bu koşulu sağlayan en küçük sayıdır. Bu biçimde yirmi dörder artırarak 4620, 4644, 4668 ve 4692 değerlerini elde ederiz. Aralıktaki en büyük değer 4692'dir ve 4692'nin 24 ile bölümünden kalan 12'dir.

Sonuç olarak tünel hattının uzunluğunun alabileceği en büyük değer 4692 metredir.

ÇÖZÜM 5.

Tablet üzerindeki sayı beş basamaklıdır ve "57200 + 10P + R" şeklinde kodlanmıştır. Başka bir deyişle sayı 57200 + 10P + R biçimindedir. Tüm rakamların farklı olduğu ve sayının 18 ile bölümünden kalanın 11 olduğu bilinmektedir.

18 ile bölümünden kalanın 11 olma koşulu için sayı 18'e bölündüğünde kalanın 11 olması demek; sayı 2'ye bölündüğünde kalanın 1, 9'a bölündüğünde kalanın 2 olması demektir. Bu durumda birler basamağı tek sayı olmalı ve sayının rakamları toplamı 9'a bölündüğünde 2 kalanını vermelidir. Buna göre sayının rakamları toplamı 5 + 7 + 2 + P + R = 14 + P + R olmalıdır. Buradan k bir tam sayı olmak üzere P + R = 9k + 6 elde edilir. Ayrıca birler basamağı olan R tek sayı olmak zorundadır.

Bu şartı sağlaması için P = 6 ve R = 9 olmalıdır. Böylece sayı 57269 olur ve tüm rakamlar birbirinden farklıdır.

Sayının rakamlarının toplamı 5 + 7 + 2 + 6 + 9 = 29'dur.

ÖĞRENDİKLERİM

Amaç: Bu bölümde, öğrendiklerinizi özetlemenizi, günlük hayatta ve farklı derslerde kullanabileceğiniz bilgileri belirlemenizi amaçlıyoruz.

Verilen bilgileri dikkatle okuyunuz. Temanın temel kavramlarını, önemli noktalarını ve bağlantılarını gözden geçirerek öğrenmenizi pekiştiriniz.

Bölünebilme Kuralı	Açıklama
Bir sayının 2 ile bölümünden kalan, o sayının birler basamağındaki rakamın 2 ile bölümünden kalandır.	Bir sayının 2 ile bölümünden kalanlar 0 veya 1 olabilir. Sayı çift ise sayının 2 ile bölümünden kalan 0, sayı tek ise sayının 2 ile bölümünden kalan 1'dir.
Bir sayının 5 ile bölümünden kalan, o sayının birler basamağındaki rakamın 5 ile bölümünden kalandır.	Bir sayının 5 ile bölümünden kalanlar 0, 1, 2, 3 veya 4 olabilir. Kalanı sayının birler basamağı belirler. Örneğin bir sayının birler basamağı 8 ise bu sayının 5 ile bölümünden kalan 3'tür.
Bir sayının 10 ile bölümünden kalan, o sayının birler basamağındaki rakamın 10 ile bölümünden kalandır.	Bir sayının 10 ile bölümünden kalanlar 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 veya 9 olabilir. Kalanı sayının birler basamağı belirler. Örneğin bir sayının birler basamağı 7 ise bu sayının 10 ile bölümünden kalan 7'dir.
Bir sayının 4 ile bölümünden kalan, son iki basamağındaki sayının 4 ile bölümünden kalandır.	Bir sayının 4 ile bölümünden kalanlar 0, 1, 2 veya 3 olabilir. Kalanı sayının son iki basamağı belirler. Örneğin bir sayının son iki basamağı 12 ise bu sayının 4 ile bölümünden kalan 0'dır. Çünkü 12, 4'e tam bölünür.
Bir sayının 8 ile bölümünden kalan, son üç basamağını oluşturan sayının 8 ile bölümünden kalandır.	Bir sayının 8 ile bölümünden kalanlar 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 veya 7 olabilir. Kalanı sayının son üç basamağı belirler. Örneğin bir sayının son üç basamağı 124 ise bu sayının 8 ile bölümünden kalan 4'tür.
Bir sayının 3 ile bölümünden kalan, o sayının rakamları toplamının 3 ile bölümünden kalana eşittir.	Bir sayının 3 ile bölümünden kalanlar 0, 1 veya 2 olabilir. Kalanı sayının rakamları toplamı belirler. Örneğin bir sayının rakamları toplamı 8 ise sayının 3 ile bölümünden kalan 2'dir.
Bir sayının 9 ile bölümünden kalan, o sayının rakamları toplamının 9 ile bölümünden kalana eşittir.	Bir sayının 9 ile bölümünden kalanlar 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 veya 8 olabilir. Kalanı sayının rakamları toplamı belirler. Örneğin bir sayının rakamları toplamı 13 ise sayının 9 ile bölümünden kalan 4'tür.
Kalan sayı her zaman bölen sayıdan küçüktür.	Bir bölme işleminde bölen a, kalan k ise $0 \leq k < a$ dır.

SAYILAR

Asal Çarpanlar, Bölenler ve EKOK-EBOB Yönelik Yansıtıcı Yazı

Amaç: Bu çalışma, doğal sayıların asal çarpanlarını ve bölenlerini inceleyerek çıkarımlar yapmanıza; EBOB, EKOK ve bir sayının belirli sayılara bölümünden kalanlara ilişkin muhakeme becerilerinize yönelik farkındalık oluşturmak amacıyla hazırlanmıştır.

Aşağıdaki soruları çözerken kullandığınız yöntemi ve ulaştığınız sonuçları göz önünde bulundurarak kısa ve açık cümlelerle yanıtlayınız.

1. Öğrendiğiniz bu temada dikkatinizi çeken veya önemli bulduğunuz noktaları yazınız.

2. Doğal sayıların bölenleri ve katlarıyla ilgili matematiksel muhakeme yapma sürecinizi gözden geçiriniz. Bu süreçten yararlanarak doğal sayının asal çarpanları ile EKOK ve EBOB'u arasındaki ilişkileri ifade ediniz.

3. Bir doğal sayının belirli doğal sayılara bölünmesinden elde edilen kalanlar üzerine muhakeme yaparken kullandığınız stratejilere örnekler veriniz.

4. Bir doğal sayının asal çarpanları kullanılarak çözülebilecek bir gerçek yaşam durumuna örnek veriniz. Bu örnekte asal çarpanları nasıl kullandığınızı açıklayınız.

Daha fazlası için karekodu okutunuz.



FONKSİYONUN TANIMI

BAŞLARKEN

Bu bölümde yer alan etkinlikler, bireysel öğrenme yolculuğunuzda size rehberlik etmek ve öğrenme sürecinizi desteklemek amacıyla hazırlanmıştır. Çalışmalarınızı yürütürken "Hazırlanıyorum", "İlişkilendiriyorum", "Uygulayarak Öğreniyorum", "Değerlendiriyorum", "Yansıtıcı Yazı" ve "Öğrendiklerim" etkinliklerini sırası ile takip etmeniz ve etkinliklerin sonunda yer alan geri bildirimleri inceleyerek bölümleri tamamlamanız beklenmektedir.

Bu çalışma kartında matematiğin günlük hayata olan katkılarına ilişkin çıkarımlarda bulunup aşağıdaki soruları yanıtlayabileceksiniz.

- Günlük yaşamda karşılaşılan tüm olayların doğası gereği doğrusal ilişkiler üzerine kurulu olduğu ileri sürülebilir mi?
- Bir ilişkinin fonksiyon olarak adlandırılabilmesi için sağlaması gereken ön koşullar nelerdir?
- Gerçek sayılarda tanımlı fonksiyonların grafik ve cebirsel temsilleri ile nitel özellikleri hakkında nasıl bir yargıda bulunulabilir?

HAZIRLANIYORUM

Amaç: Bu bölümde, işleyeceğimiz konuyla ilgili ön bilgilerinizi hatırlamanızı ve konuya hazırlıklı hâle gelmenizi amaçlıyoruz.

Aşağıda yer alan ifadeler, bu temada tamamlanması hedeflenen öğrenme çıktısını ele almadan önce sahip olmanız gereken bazı temel becerileri içermektedir. Lütfen her bir ifadeyi dikkatlice okuyunuz.

- Eğer ifadedeki beceriye hâkim olduğunuzu düşünüyorsanız kutucuğu işaretleyiniz.
- Eğer beceriye yönelik eksikliklerinizin olduğunu düşünüyorsanız ya da bu beceri üzerine herhangi bir deneyiminiz yoksa kutucuğu boş bırakınız.

ÖN ÖĞRENME KONTROL LİSTESİ	✓
Doğrusal referans fonksiyona dönüşümler uygulayarak farklı doğrusal fonksiyonlar türetebilirim.	☐
Doğrusal referans fonksiyondan türetilen fonksiyonların cebirsel ve grafik temsili arasında geçiş yapabilirim.	☐
Cebirsel ve grafik temsilleri üzerinden doğrusal referans fonksiyonu ve bu fonksiyondan türetilen fonksiyonların nitel özelliklerini inceleyebilirim.	☐

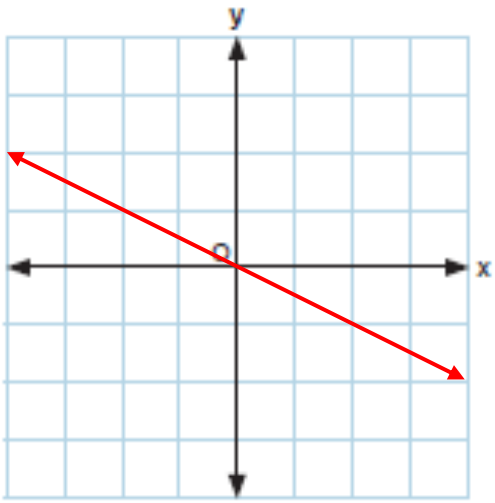
"Ön Öğrenme Kontrol Listesi"ni doldurduktan sonra aşağıda verilen "Kontrol Noktası" sorularını çözünüz ve cevaplarınızı kontrol ediniz.

KONTROL NOKTASI

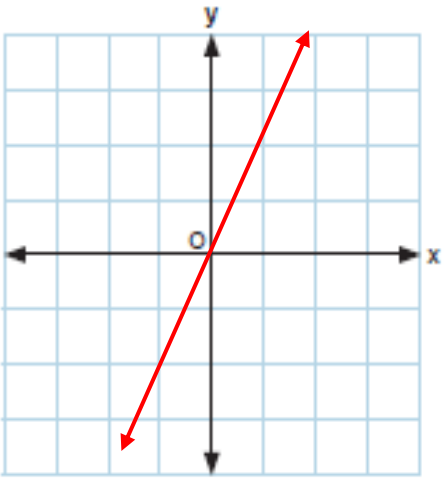
SORU 1. Aşağıda f, g, h ve k doğrusal fonksiyonlarının cebirsel temsilleri ve grafikleri karışık olarak verilmiştir.

a) Her cebirsel ifadeyi doğru grafikle eşleştirerek ilgili grafiğin numarasını tablodaki boşluğa yazınız.

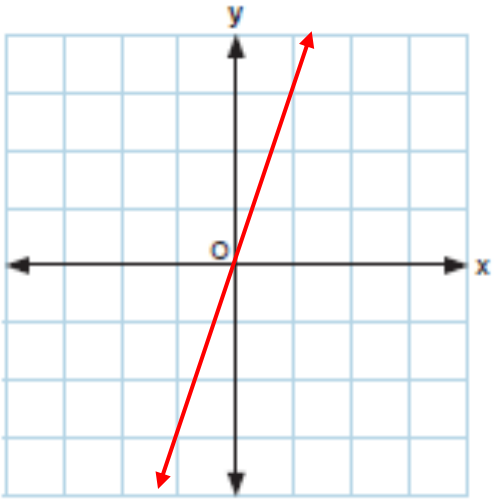
I.



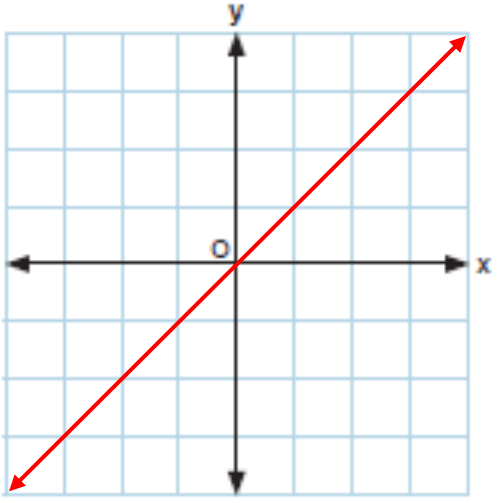
II.



III.



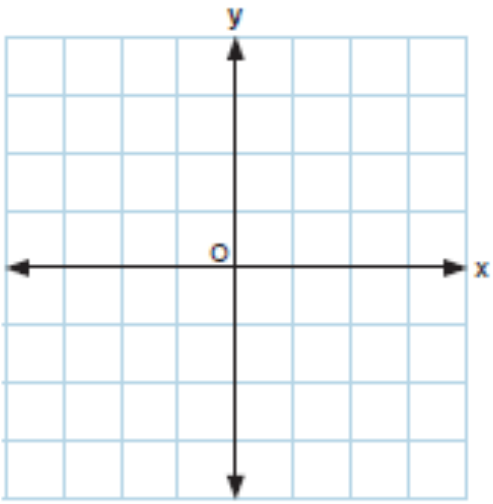
IV.



Fonksiyonun Cebirsel Temsili	Grafik Numarası
f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, f(x) = x	
g: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, g(x) = 2x	
h: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = -\frac{1}{2}x$	
k: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, k(x) = 3x	

b) f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, f(x) = x fonksiyonunun grafiğinin x ekseni boyunca negatif yönde (sola) 2 birim ötelenmesi ile t fonksiyonunun grafiği ,t fonksiyonunun grafiğinin y ekseni boyunca negatif yönde (aşağıya) 1 birim ötelenmesi ile s fonksiyonunun grafiği oluşturulmuştur.

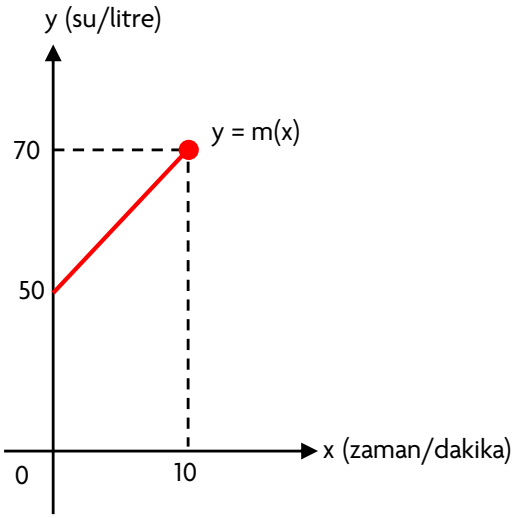
Buna göre t ve s fonksiyonlarının cebirsel ifadelerini yazıp grafiklerini çiziniz.



SORU 2. 70 litrelik bir akvaryumun tamamen doldurulması sürecine ait m fonksiyonunun grafiği yanda verilmiştir.

a) Bu süreci temsil eden m fonksiyonunun bağımlı ve bağımsız değişkenlerini belirleyiniz.

b) Fonksiyonun cebirsel temsilini yazınız.



c) Grafiğe veya cebirsel temsile bakarak aşağıdaki tabloyu tamamlayınız ve fonksiyonun bire birliğini inceleyiniz.

Fonksiyonun Cebirsel Temsili	Tanım Kümesi	Görüntü Kümesi	İşareti		Sıfırı	Artanlığı - Azalanlığı	Maksimum Değer	Minimum Değer
			Pozitif Değer Aldığı Aralık	Negatif Değer Aldığı Aralık				
m(x) = ...								

GERİ BİLDİRİM

Aşağıda, "Kontrol Noktası"nda yer alan soruların ayrıntılı çözümleri verilmiştir. Soru çözümlerinin devamında yer alan "Değerlendirme ve Dönüt" bölümleri, varsa eksik konularınızı belirlemenize yardımcı olacaktır.

İnternet erişiminiz varsa eksik gördüğünüz konuları tamamlamak için MEBİ platformundaki içeriklerden de yararlanabilirsiniz.

KONTROL NOKTASI

ÇÖZÜM 1.

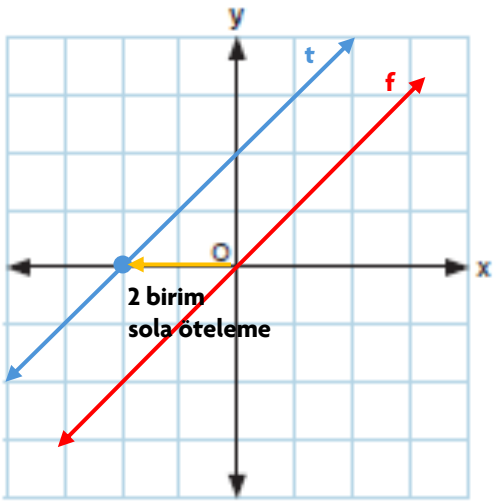
Fonksiyonun Cebirsel Temsili	Grafik Numarası
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x$	IV
$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = 2x$	II
$h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, h(x) = -\frac{1}{2}x$	I
$k: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, k(x) = 3x$	III

- **f(x) = x** şeklinde tanımlı f referans fonksiyonu, tanım aralığındaki her elemanı kendisine eşlemektedir. Örneğin, grafik (1, 1) noktasından geçer. Bu fonksiyonu temsil eden doğrunun eğimi 1'dir. Bu nedenle f fonksiyonu, **IV numaralı grafikle** eşleşir.
- **g(x) = 2x** şeklinde tanımlı g fonksiyonu, tanım aralığındaki her elemanı 2 katı ile eşlemektedir. Örneğin, grafik (1, 2) noktasından geçer. Bu fonksiyonu temsil eden doğrunun eğimi 2'dir. g fonksiyonunun grafiği, f fonksiyonunun grafiğine göre y eksenine daha yakındır. Bu nedenle g fonksiyonu, **II numaralı grafikle** eşleşir.
- **k(x) = 3x** şeklinde tanımlı k fonksiyonu, tanım aralığındaki her elemanı 3 katı ile eşlemektedir. Bu fonksiyonu temsil eden doğrunun eğimi 3'tür. Örneğin, grafik (1, 3) noktasından geçer. Verilen doğrular arasında eğiminin mutlak değeri en büyük olan doğru olduğundan grafiği y eksenine en yakın olanıdır. Bu nedenle k fonksiyonu, **III numaralı grafikle** eşleşir.
- $h(x) = -\frac{1}{2}x$ şeklinde tanımlı h fonksiyonu, tanım aralığındaki her elemanı -1/2 katı ile eşlemektedir. Örneğin, grafik (2, –1) noktasından geçer. Bu fonksiyonu temsil eden doğrunun eğimi -1/2'dir. Eğim negatiftir ve fonksiyon azalandır. Bu nedenle h fonksiyonu, **I numaralı grafikle** eşleşir.

b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x$ fonksiyonunun grafiğinin x ekseni boyunca negatif yönde (sola) 2 birim ötelenmesi ile t fonksiyonunun grafiği, t fonksiyonunun grafiğinin y ekseni boyunca negatif yönde (aşağıya) 1 birim ötelenmesi ile s fonksiyonunun grafiği oluşturulmuştur.

$f(x) = x$
$t(x) = f(x+2) = x+2$

olarak bulunur. t fonksiyonunun grafiği, f referans fonksiyonunun grafiğinin 2 birim sola ötelenmesiyle yandaki gibi oluşturulur.



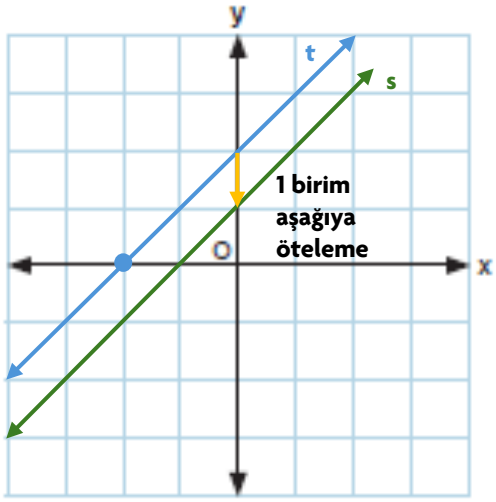
$t(x) = x + 2$

$s(x) = t(x) - 1$

$= (x + 2) - 1$

$= x + 1$

olarak bulunur. s fonksiyonunun grafiği, t fonksiyonunun grafiği 1 birim aşağıya ötelenerek yandaki gibi oluşturulur.



Değerlendirme ve Dönüt

Bu tür sorularda, fonksiyonun kuralındaki katsayıların grafiğin özelliklerini nasıl etkilediğini ve doğrusal referans fonksiyona dönüşümler uygulanarak farklı doğrusal fonksiyonların nasıl oluşturulduğunu anlamak esastır.

Bu sorunun çözümünde zorluk yaşadıysanız olası nedenler arasında

- Fonksiyonun cebirsel temsilinden eğimi doğru belirleyememek,
- Eğimin pozitif veya negatif olmasının grafiğin yönü üzerindeki etkisini karıştırmak,
- Eğim katsayısının büyüklüğünün (mutlak değerinin) grafiğin y eksenine yakınlığı ile olan ilişkisini yanlış yorumlamak,
- Grafiklerin eksenlere olan yakınlıklarını birbiriyle karıştırmak,
- Doğrusal referans fonksiyona dönüşümler uygulayarak farklı doğrusal fonksiyonların oluşturulması sürecinde zorluk yaşamak sayılabilir.

Sorunun çözümünde problem yaşadığınızı düşünüyorsanız aşağıdaki konuları tekrar gözden geçirmeniz faydalı olacaktır.

Sınıf: 9. Sınıf

Tema: Nicelikler ve Değişimler

Gerçek Sayılarda Tanımlı Doğrusal Fonksiyonlar ve Nitel Özellikleri

ÇÖZÜM 2.

a) Grafikte x ekseni zamanı, y ekseni ise su miktarını göstermektedir.

Akvaryumdaki su miktarı, geçen zamana göre değişmektedir.

Bu nedenle

- **Bağımsız Değişken:** Dakika cinsinden geçen süre (x)
- **Bağımlı Değişken:** Akvaryumdaki litre cinsinden su miktarı (y veya m(x))

b) Grafiği yorumlayarak sistemin kuralını çıkarabiliriz.

1. Başlangıç Durumu: Grafiğe baktığımızda, zamanın 0 olduğu anda (x = 0) akvaryumdaki su miktarının (y) 50 litre olduğunu görüyoruz.

2. Bitiş Durumu: Süreç **10 dakika** sonunda tamamlandığında akvaryumdaki su miktarı 70 litreye ulaşıyor.

3. Değişim Miktarı: 10 dakika içinde akvaryuma eklenen su miktarı: 70 litre - 50 litre = 20 litredir.

4. Değişim Hızı (Oranı): Dakikadaki su artış hızını bulmak için toplam artışı süreye bölerek: 20 litre/10 dakika = 2 litre/dakikaya ulaşırız.

"Başlangıçta içinde 50 litre su bulunan akvaryum, dakikada 2 litre su eklenerek doldurulmaktadır."

Doğrusal fonksiyonlar f(x) = ax + b formundadır. Burada

- b, x = 0 için fonksiyonun başlangıç değeridir (y eksenini kestiği nokta). Grafikten b = 50 olduğunu görüyoruz.
- a, fonksiyonun eğimidir (değişim oranı). Yukarıda değişim hızı (oranı) 2 litre/dakika olarak hesaplandığından a = 2'dir.

m fonksiyonunun cebirsel temsili **m(x) = 2x + 50** olarak yazılabilir.

c) Elde edilen m(x) = 2x + 50 fonksiyonu ve grafikte verilen süreç ([0, 10] aralığı) dikkate alınarak m fonksiyonunun nitel özellikleri aşağıdaki gibi belirlenir.

- **Fonksiyonun Cebirsel Temsili: m(x) = 2x + 50**
- **Tanım Kümesi:** Grafiğin x ekseninde kapsadığı aralıktır.

  Süreç 0. dakikada başlayıp 10. dakikada bitmektedir. **[0, 10]**
- **Görüntü Kümesi:** Tanım kümesindeki değerlere karşılık gelen y değerleridir.

  Süreç 50 litre ile başlayıp 70 litrede bitmektedir. **[50, 70]**
- **İşareti:** Grafik x ekseninin üst bölgesinde kaldığından **[0, 10]** aralığındaki tüm değerler için **pozitiftir. Negatif** değer aldığı aralık **yoktur.**
- **Sıfırı:** Fonksiyonun değerinin 0'a eşit olduğu x değeridir. Grafiğe bakıldığında grafiğin x eksenini kestiği nokta yoktur. Cebirsel temsilden yararlanılarak 2x + 50 = 0 denklemi çözüldüğünde x = – 25 bulunur. Bu değer, [0, 10] tanım kümesine dahil olmadığı için fonksiyonun bu aralıkta bir sıfırı **yoktur.**
- **Artanlığı-Azalanlığı:** Fonksiyonun eğimi (a = 2) pozitif olduğu için (x değerleri artarken fonksiyonun aldığı değerler de arttığı için) fonksiyon tanım kümesi boyunca daima **artan**dır.
- **Maksimum Değeri:** Fonksiyonun görüntü kümesinde aldığı en büyük değer **70**'tir.
- **Minimum Değeri:** Fonksiyonun görüntü kümesinde aldığı en küçük değer **50**'dir.
- **Bire Birliği:** fonksiyonun tanım kümesindeki her farklı x değerine için farklı bir y değeri karşılık gelmektedir. Dolayısıyla fonksiyon bire birdir.

Değerlendirme ve Dönüt

Bu tarz sorular; sözel bir durumu matematiksel olarak modelleme, bu modelin grafiksel ve cebirsel gösterimleri arasında geçiş yapma gibi çok yönlü beceriler gerektirmektedir.

Eğer soruların herhangi birinin çözümünde tereddüt yaşadıysanız veya kavramsal olarak emin olamadığınız noktalar olduysa temel bilgilerinizi pekiştirmek amacıyla **9. sınıf müfredatındaki "Doğrusal Fonksiyonlar ve Doğrusal Fonksiyonların Nitel Özellikleri"** konusunu yeniden gözden geçirmeniz faydalı olacaktır. Bu temel konu üzerindeki hâkimiyetiniz, ilerleyen çalışmalardaki başarınızı doğrudan destekleyecektir.

İLİŞKİLENDİRİYORUM

Amaç: Bu bölümde yeni öğreneceğiniz konuyu; zihninizde var olan bilgileriniz, yaşantılarınız ve diğer derslerde öğrendiklerinizle ilişkilendirmenizi bekliyoruz.

Verilen metni okuyunuz. Günlük yaşamda karşımıza çıkan tüm olayların her zaman doğrusal ilişki içerip içermediğini irdeleyiniz.

DOĞRUSAL MODELLERİN ÖTESİNE, FONKSİYONLARIN GENİŞ DÜNYASINA GEÇİŞ

9. sınıfta, gerçek sayılar kümesi üzerinde tanımlı doğrusal fonksiyonları ayrıntılı olarak incelediniz. Sabit bir hızla yol alan bir aracın konumu, her ay aynı miktarda paranın birikim hesabına eklenmesi veya sabit ücretle çalışan bir abonelik hizmetinin maliyeti gibi **değişim oranının sabit olduğu** birçok durumu, doğrusal fonksiyonlarla başarıyla modellediniz. Sizce yaşadığımız dünyada her olgu sabit bir hız ve öngörülebilir bir doğrusal yapı içerisinde midir? Günlük yaşamda karşılaşılan tüm olayların doğası gereği doğrusal ilişkiler üzerine kurulu olduğu ileri sürülebilir mi?

Fizik ve Hareket:

Yüksek bir yerden bırakılan bir cismin serbest düşme hareketini düşünelim. Bu cismin hızı sabit midir yoksa her geçen saniye yer çekiminin etkisiyle artar mı?

Biyoloji ve Popülasyon Dinamikleri:

Bir bakteri kültürünün veya bir salgının ilk günlerdeki yayılma hızı ile bir ay sonraki yayılma hızı aynı mıdır? Değişim oranının sabit olduğu söylenebilir mi?

Meteoroloji ve İklim:

Bir yaz gününde sabah saat 08.00'de hava sıcaklığı 5°C, öğleyin saat 12.00'de ise 15°C ölçülüyor. Bu durumda sıcaklık artışı sabah saatlerinden öğlene kadar her saat başına eşit miktarda mı gerçekleşmiştir (doğrusal artış) yoksa bazı saatlerde hızlı artıp bazı saatlerde daha yavaş mı artmıştır (doğrusal olmayan değişim)?

Ekonomi ve Teknoloji:

Piyasaya yeni sürülen bir akıllı telefon modelinin popülerlik artışını ele alalım. İlk aylardaki hızlı talep artışı ile pazarın doygunluğa ulaştığı bir yıl sonraki talep artışının oranı farklılık gösterir mi?

UYGULAYARAK ÖĞRENİYORUM

Amaç: Bu bölümde bilgilerinizi etkinlikler ve uygulamalarla pekiştirmenizi, öğrenmeyi daha kalıcı hâle getirmenizi amaçlıyoruz.

Etkinliklerde verilen adımları dikkatle uygulayınız. Uygulama, problem çözme ya da etkinlik yönergelerine dikkat ediniz. Çalışmanızı güvenli ve dikkatli bir şekilde yapınız.

GERÇEK SAYILARDA FONKSİYON OLMA ŞARTLARI

ETKİNLİK 1.

Bir okul projesi kapsamında internetten **500 MB boyutunda** bir video dosyası indirilmektedir. İndirme hızı sabit olduğunda geçen süre (x) ile indirilen dosya miktarı (f(x)) arasındaki ilişki **doğrusal bir fonksiyon** ile ifade edilebilir. Bilgisayar ekranında bu süreci gösteren bir ilerleme çubuğu bulunmaktadır.

Bağımsız Değişken (x): İndirmenin başlangıcından itibaren geçen süre (saniye).

Bağımlı Değişken (f(x)): O ana kadar indirilen dosya miktarı (MB).

a) Sorgulama

Aşağıdaki soruları verilen doğrusal fonksiyon örneği üzerinden yanıtlayınız.

- İndirme işlemi boyunca ölçüm yapılan her saniye için bir "indirilen dosya miktarı" değeri bulunur mu? Açıklayınız.
- İndirmenin tam olarak 30. saniyesinde indirilen dosya miktarı **aynı anda** hem **100 MB** hem de **150 MB** olabilir mi? Açıklayınız.
- "Bir ilişkinin doğrusal fonksiyon belirtmesi için her bir bağımsız değişkene **bir ve yalnız bir** bağımlı değişken karşılık gelmesi gerekir." önermesinin doğruluğunu irdeleyiniz.

b) Çıkarım ve Genelleme

"Eğer internet bağlantısı belirli zaman aralıklarında yavaşlayıp hızlansaydı bu durumda indirilen dosya miktarını gösteren, grafik doğrusal değil eğrisel bir artış biçiminde gerçekleşirdi. Böyle bir senaryoda, sorgulama bölümündeki soruların yanıtları değişir mi?

Bu düşünceden yola çıkarak bir ilişkinin **doğrusal olsun ya da olmasın genel olarak bir fonksiyon olarak adlandırılabilmesi için** sahip olması gereken temel koşullar nelerdir? Kendi cümlelerinizle açıklayınız.

Kuralım: .....

NOT

$A \neq \emptyset$ ve $A \subseteq \mathbb{R}$ olmak üzere $\forall x \in A$ için bir ve yalnız bir $f(x) \in \mathbb{R}$ varsa f ye A dan $\mathbb{R}$'de tanımlı bir **fonksiyon** denir ve $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $y = f(x)$ şeklinde gösterilir.

A tanım kümesinden $\mathbb{R}$ değer kümesine tanımlı bir f ilişkisinin ($f: A \rightarrow \mathbb{R}$) fonksiyon olabilmesi için aşağıda verilen koşulları sağlaması gerekir.

- Tanım kümesindeki her bir bağımsız değişkene bir bağımlı değişkenin karşılık gelmesi gerekir.
- Bir bağımsız değişkene birden fazla bağımlı değişken karşılık gelemez.

ETKİNLİK 2.

Gerçek Yaşam Senaryolarını Sınıflandırma

Aşağıda günlük yaşamdan iki farklı durum ve bu durumlardaki değişkenler arasındaki ilişkiler tanımlanmıştır. Her bir senaryoyu dikkatlice inceleyerek tanımlanan ilişkinin **"Doğrusal Fonksiyon", "Doğrusal Olmayan Fonksiyon"** kategorilerinden hangisine ait olduğunu belirlediğiniz durumun nedenini kısaca açıklayınız.

1. Senaryo: Taksi Yolculuğu

Bir taksiye binildiğinde taksimetre belirli bir açılış ücreti ile çalışmaya başlar ve gidilen her kilometre için bu ücretin üzerine sabit bir tutar eklenir.

Girdi (Bağımsız Değişken): Taksiyle gidilen mesafe (kilometre).

Çıktı (Bağımlı Değişken): Yolculuk sonunda ödenecek toplam ücret (TL).

Sınıflandırma: .....

Açıklama: .....

2. Senaryo: Bir Yaz Günü Hava Sıcaklığı

Gün boyunca gerçekleştirilen hava durumu ölçümlerinde, sabah saatlerinde sıcaklığın yükseldiği; öğleden sonra en yüksek değerine ulaştığı ve akşam saatlerine doğru yeniden azaldığı gözlemlenmektedir.

Girdi (Bağımsız Değişken): Günün saati (Örneğin: 09:00, 14:00, 19:00.).

Çıktı (Bağımlı Değişken): O saatte ölçülen hava sıcaklığı (°C).

Sınıflandırma: .....

Açıklama: .....

Fonksiyon Olma Şartlarının Geometrik Yorumu

Grafiği verilen ilişkinin fonksiyon olarak kabul edilebilmesi için sağlaması gereken iki temel ilke vardır:

1. Tanım kümesindeki **her bir elemanın** mutlaka bir görüntüsü (karşılığı) olmalıdır.

2. Tanım kümesindeki bir elemanın değer kümesinde **yalnızca bir tane** görüntüsü olmalıdır.

HATIRLATMA

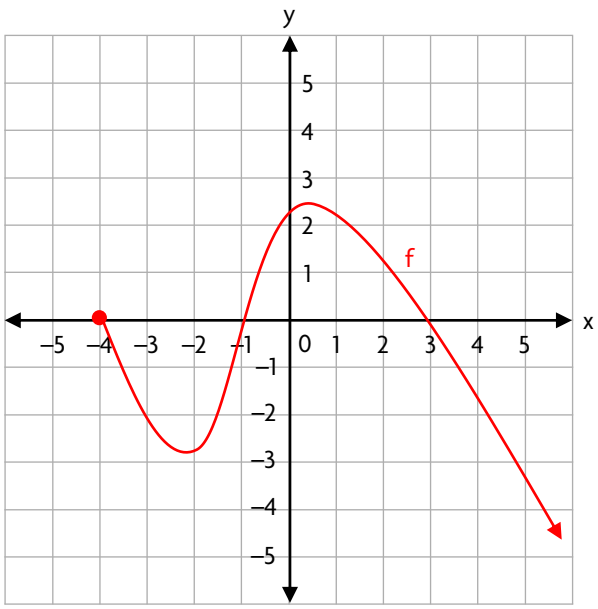
$f: A \rightarrow B$

Tanım Kümesi — Değer Kümesi

ÖRNEK

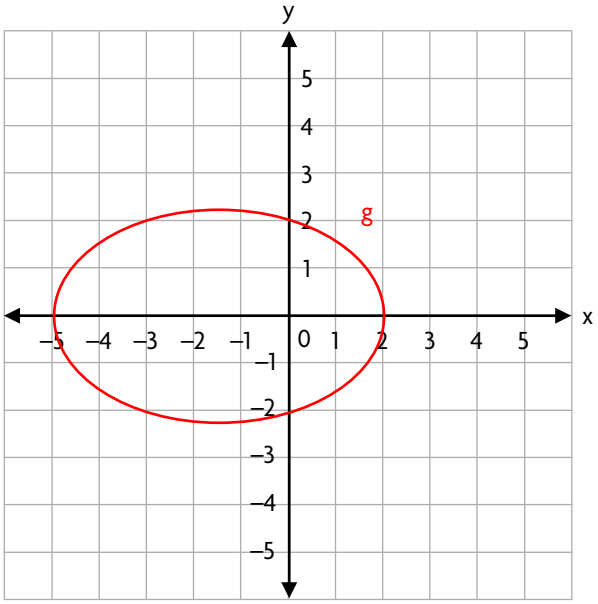
Aşağıda $y = f(x)$ ve $y = g(x)$ olmak üzere bazı grafik temsilleri verilmiştir.

$f: [-4, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$



Grafik 1

$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

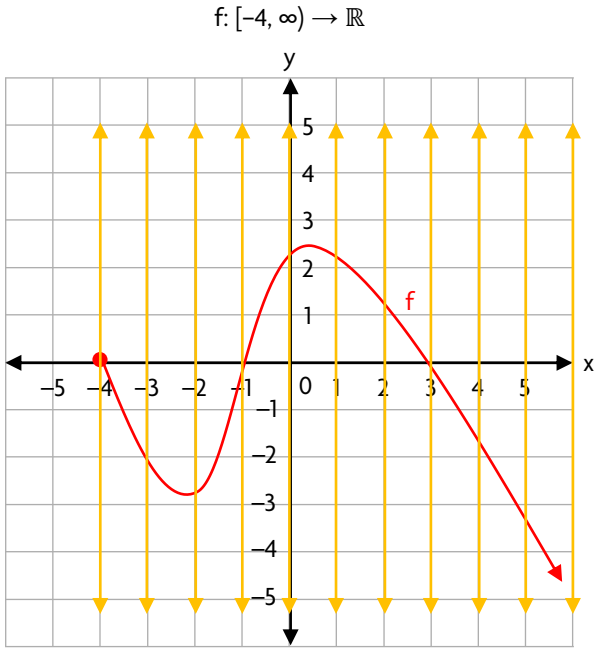


Grafik 2

Verilen tanım kümelerine göre grafik temsillerinin fonksiyon olma şartlarını taşıyıp taşımadığını belirleyiniz.

ÇÖZÜM

Grafik 1'de f ile verilen grafik temsilinde tanım kümesindeki $\forall x \in [-4, \infty)$ için **yalnız bir** $f(x) = \mathbb{R}$ olduğundan **f fonksiyondur.**



Grafik 1

Dikey Doğruları Bir Araç Olarak Kullanmak

c tanım kümesinin bir elemanı olmak üzere x = c dikey doğrusu üzerindeki her noktanın ortak özelliği apsislerinin aynı olmasıdır.

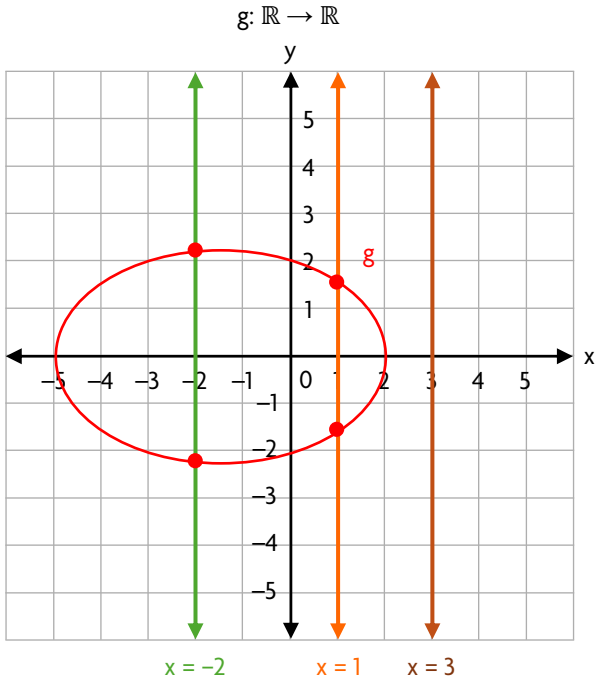
Eğer bu doğru grafiği **birden fazla noktada** keserse, aynı apsis değerinin birden fazla ordinatla eşleşmesi söz konusu olur.

Eğer bu doğru grafiği **hiç kesmezse**, seçilen apsis değerinin hiçbir görüntüsü bulunmamış olur.

Bu iki durumu birlikte değerlendirerek, grafiği verilen ilişkinin fonksiyon olma koşullarını sağlayabilmesi için x = c doğrusunun grafik ile kaç noktada kesişmesi gerekir? Düşününüz.

Yukarıdaki sorgulamaları dikkate alarak grafiği verilen ilişkinin fonksiyon olup olmadığını belirlemede kullanılacak kuralı kendi ifadelerinizle yazınız.

Kuralım: .....



Grafik 2

Grafik 2'de, g ile verilen grafik temsilinde tanım kümesindeki $\exists x \in \mathbb{R}$ için birden fazla $g(x) \in \mathbb{R}$ değeri bulunduğundan ya da $\exists x \in \mathbb{R}$ için hiçbir $g(x) \in \mathbb{R}$ değeri bulunmadığından **g fonksiyon değildir.**

Örneğin:

x = − 2 doğrusu çizildiğinde grafiği iki tane noktada kesmektedir.

x = 3 doğrusu ise grafiği hiçbir noktada kesmez.

x = 1 doğrusu çizildiğinde grafiği iki tane noktada kesmektedir.

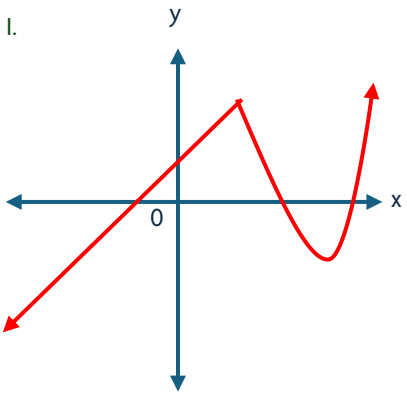
Bu şekilde örnekler artırılabilir.

Grafiği verilen ilişkinin fonksiyon olmadığını kanıtlamak için fonksiyon olma şartlarından herhangi birini ihlal eden **tek bir örnek** göstermek **yeterlidir**.

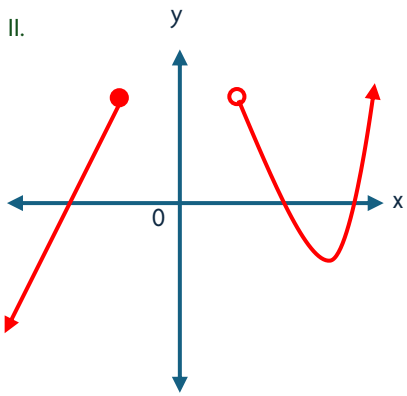
SIRA SİZDE 1.

Aşağıda verilen grafiklerden hangileri $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon grafiği olabilir?

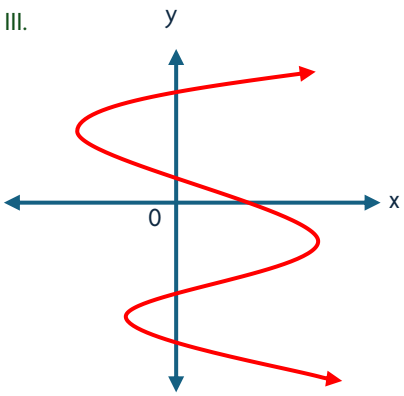
I.



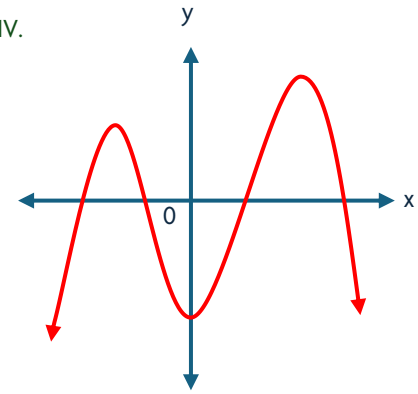
II.



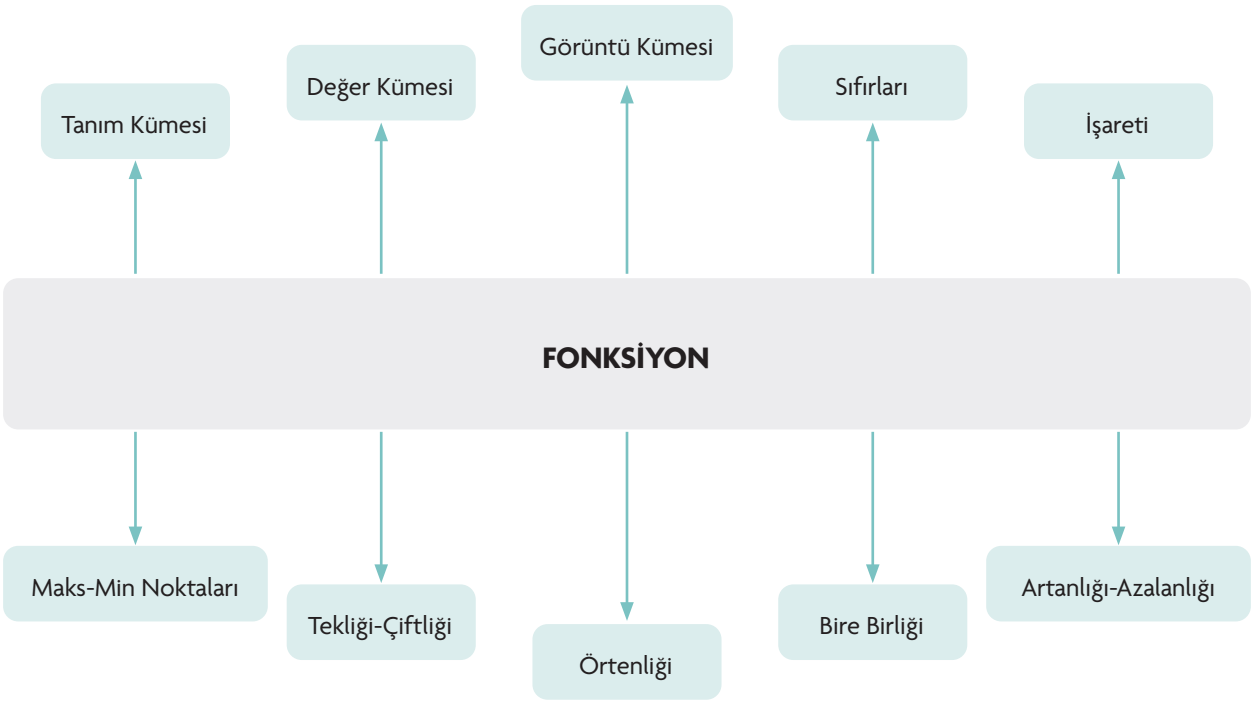
III.



IV.

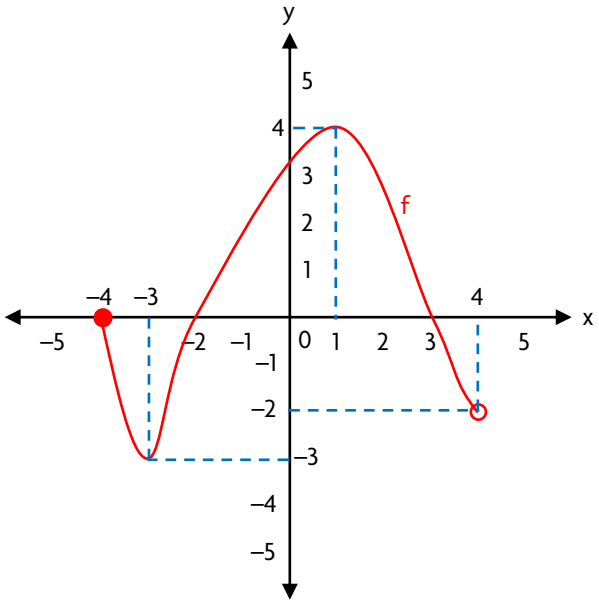


GERÇEK SAYILARDA TANIMLI FONKSİYONLARIN NİTEL ÖZELLİKLERİ



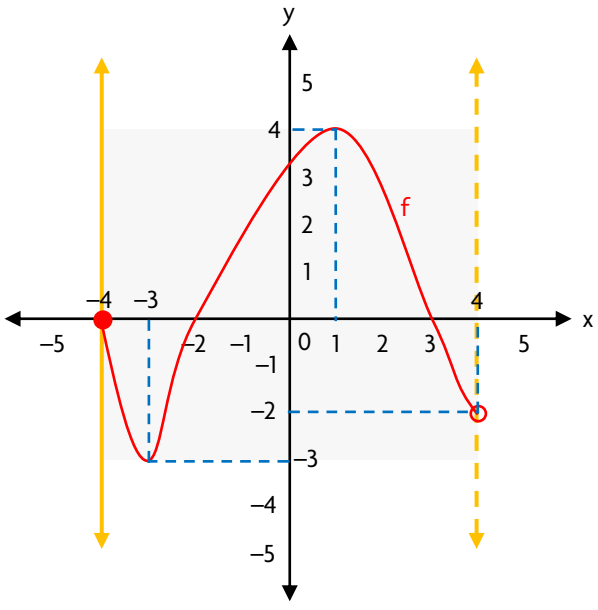
ÖRNEK

Yanda grafiği verilen f fonksiyonunun tanım kümesini, görüntü kümesini, sıfırlarını, pozitif ve negatif olduğu aralıkları, artan ve azalan olduğu aralıkları, maksimum ve minimum değerlerini ve bu değerleri aldıkları noktaları bulunuz. Fonksiyonun bire birliğini inceleyiniz.



ÇÖZÜM

- f fonksiyonunun **tanım kümesi** [–4, 4) dır.



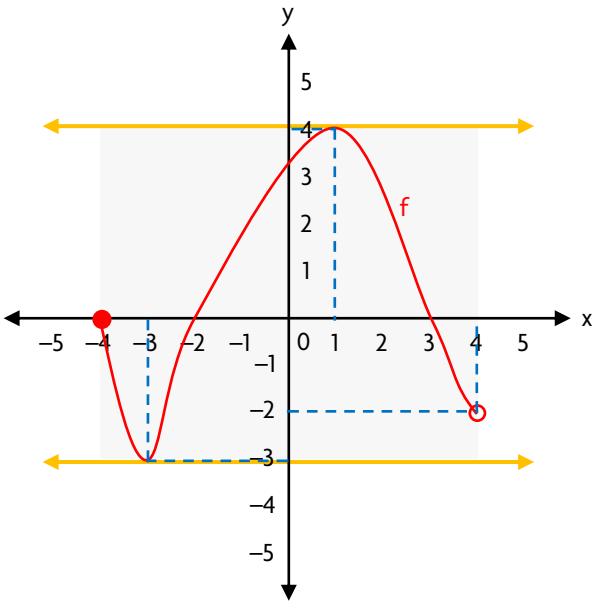
Bir fonksiyonun tanım kümesi, grafiği oluşturan tüm noktaların apsislerinin (x-koordinatlarının) oluşturduğu kümedir. Grafiksel olarak bu küme, fonksiyon grafiğinin **x-ekseni üzerindeki dik izdüşümü**ne karşılık gelir.

Tanım kümesini belirlerken grafiğin sınır noktaları var ise bu değerlerin kümeye dahil edilip edilmediği hassasiyetle incelenmelidir.

f fonksiyonunun grafiği, **x = –4'te içi dolu (dâhil)** bir nokta ile başlayıp **x = 4'te içi boş (hariç)** bir nokta ile bitmektedir. Bu nedenle tanım kümesi **[–4, 4)** dır.

- f fonksiyonunun **görüntü kümesi** [–3, 4] dır.

Bir fonksiyonun görüntü kümesi, grafiği oluşturan tüm noktaların ordinatlarının (y-koordinatlarının) oluşturduğu kümedir. Bu küme, fonksiyon grafiğinin **y-ekseni üzerindeki dik izdüşümüne** karşılık gelir.



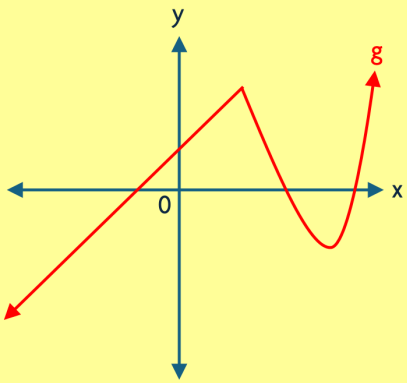
- f fonksiyonunun **maksimum değeri** 4, **minimum değeri** –3'tür.

Görüntü Kümesi
[–3, 4]

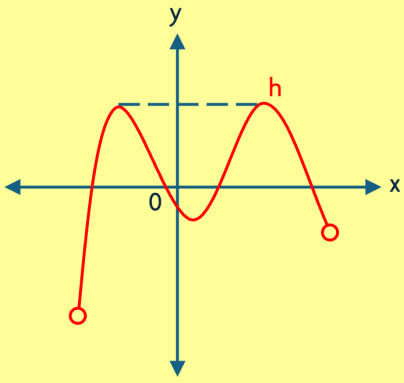
Minimum değeri: –3
Minimum değerini x = –3'te alır.

Maksimum değeri: 4
Maksimum değerini x = 1'de alır.

Bir fonksiyonun maksimum değeri, fonksiyonun aldığı değerlerin en büyüğü, minimum değeri ise fonksiyonun aldığı değerlerin en küçüğüdür.



Her fonksiyonun maksimum ya da minimum değeri bulunabilir mi?



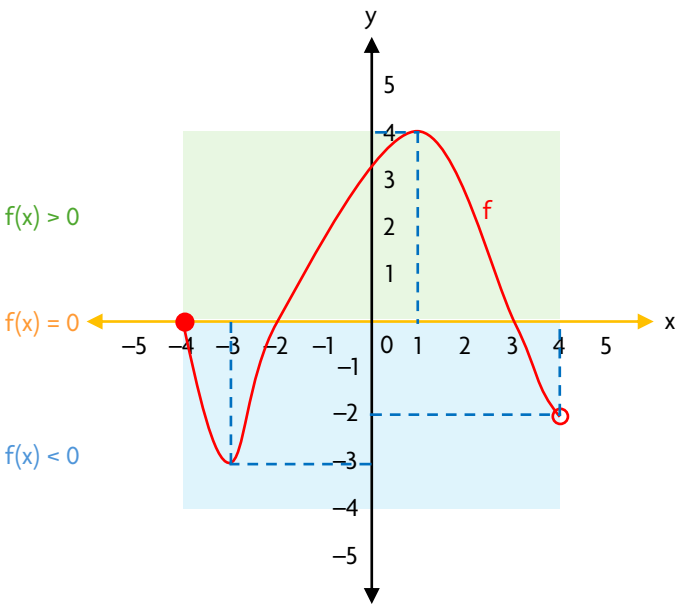
Bir fonksiyonun maksimum ya da minimum değer aldığı nokta varsa yalnız bir tane olmak zorunda mıdır?

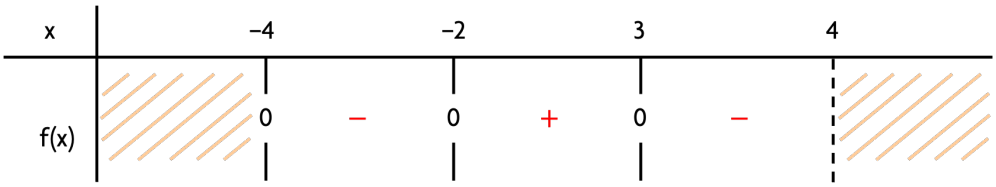
g ve h fonksiyonlarının grafiklerini inceledikten sonra önemli gördüğünüz noktaları aşağıda bırakılan yere not alınız.

.....

.....

- Fonksiyonunun sıfırları; −4, −2 ve 3'tür.





- f fonksiyonunun **pozitif olduğu aralık** (− 2, 3), **negatif olduğu aralık**lar ise (− 4, − 2) ve (3, 4) dır.

f fonksiyonunda **f(x) = 0** eşitliğini sağlayan x değerlerine f fonksiyonunun sıfırı denir.

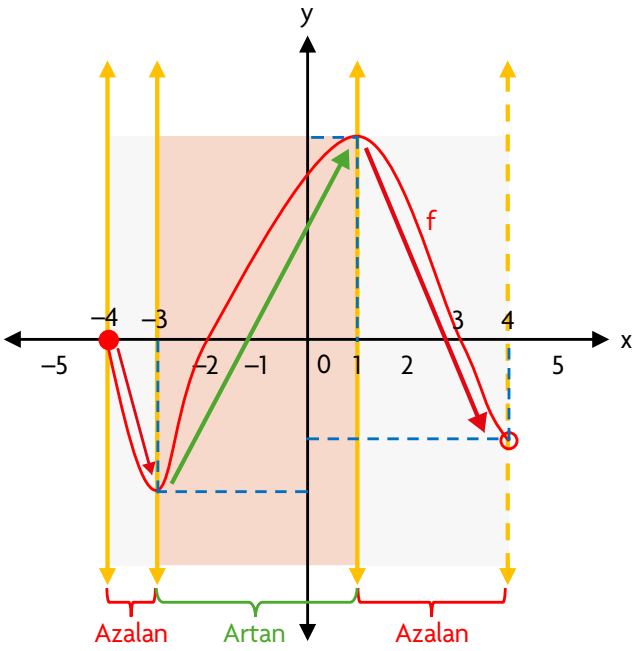
f fonksiyonunda **f(x) < 0** eşitsizliğini sağlayan x değerleri için fonksiyon **negatif** değerli, **f(x) > 0** eşitsizliğini sağlayan x değerleri için fonksiyon **pozitif** değerlidir.

- f fonksiyonu;

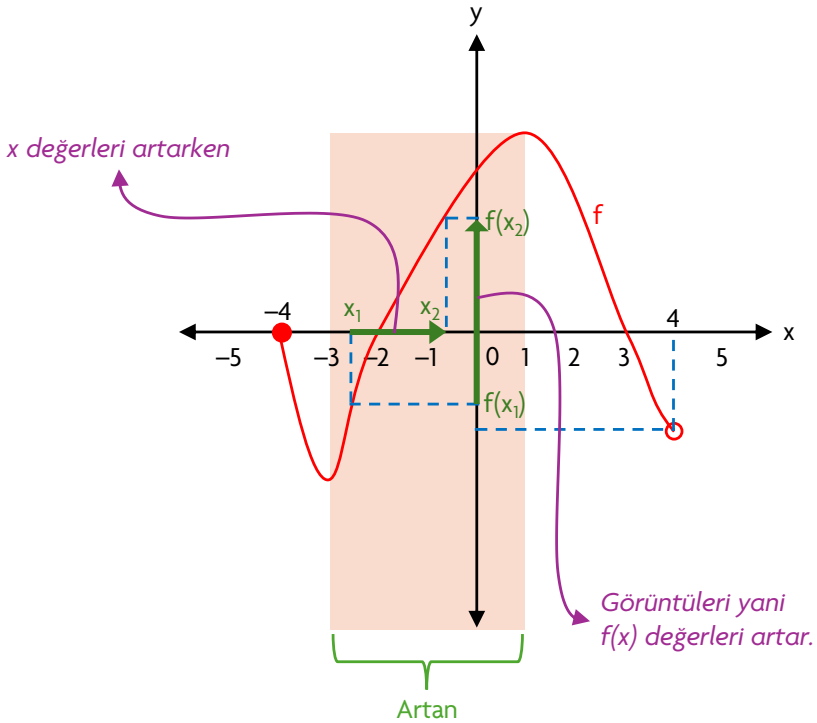
[−4, −3] nda **azalan**,

[−3, 1] nda **artan** ve

[1, 4) nda **azalan**dır.



- Bir aralıktaki her x_1, x_2 apsis değeri için $x_1 < x_2$ iken $f(x_1) < f(x_2)$ koşulu sağlanıyorsa fonksiyon bu aralıkta artandır.



NOT

Bir f fonksiyonunun **artan olduğu bilinen bir alt aralığında** f(a) < f(b) ise a < b olmak zorundadır.

- Bir aralıktaki her x_1, x_2 için $x_1 < x_2$ iken $f(x_1) > f(x_2)$ koşulu sağlanıyorsa fonksiyon bu aralıkta azalandır.

f fonksiyonunun azalan olduğu aralıklarda grafiği inceleyerek aşağıda verilen cümleleri uygun şekilde tamamlayınız.

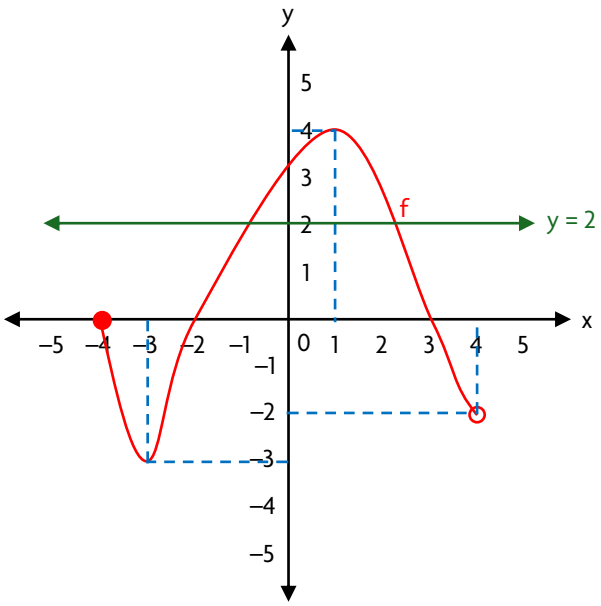
f fonksiyonunun azalan olduğu aralıklarda *x değerleri artarken görüntüleri yani f(x) değerleri* ..... .

Bir f fonksiyonunun **azalan olduğu bilinen bir alt aralığında** f(a) < f(b) ise ..... olmak zorundadır.

- a, b ∈ [–4, 4) için a ≠ b iken f(a) = f(b) olacak şekilde a ve b sayıları bulunabildiğinden **f fonksiyonu bire bir değil**dir. Örneğin, f(–4) = f(–2) = 0.

Yatay Doğruları Bir Araç Olarak Kullanmak

Görüntü kümesindeki her bir değere, tanım kümesinde yalnızca bir x değeri karşılık geliyorsa f fonksiyonu bire birdir.



🤔 y = 2 doğrusu, f fonksiyonunun grafiğini kaç noktada keser?

🤔 f fonksiyonunun değerinin 2 olduğu kaç nokta bulunabilir?

🤔 f fonksiyonunun bire birliği ile f fonksiyonunu kesen yatay doğrular arasında nasıl bir ilişki kurulabilir?

Tanım kümesindeki farklı elemanların görüntülerinin de farklı olmasını gerektiren bu özellik, **grafiksel olarak nasıl** test edilebilir?

Yukarıdaki soruların cevaplarından yola çıkarak grafik üzerinde çizilen yatay doğrular ile fonksiyonun bire birliği arasında nasıl bir ilişki kurulabileceğini kendi cümlelerinizle ifade ediniz.

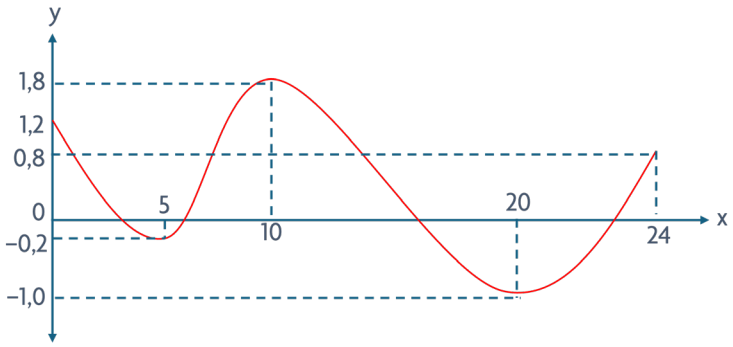
Kuralım: .....

ETKİNLİK 3.

Deniz Seviyesi Değişimi (Gelgit)

Denizlerde gelgit, Ay ve Güneş'in çekim etkisiyle su seviyesinin düzenli biçimde yükselip alçalması olayıdır. Deniz seviyesi, gelgit etkisiyle gün içinde birkaç kez yükselir (pozitif değerler) ve alçalır (negatif değerler).

Aşağıda başlangıç noktası deniz seviyesini ve saat 00.00'ı göstermek üzere bir limana ait bir günlük zamana (sa.) bağlı deniz seviyesinin değişimini (m) gösteren grafik verilmiştir.



a) Grafik temsilinde, bir güne ait deniz seviyesinin değişimi gösterilen limanda geçmişte yapılan ölçümlerde en düşük deniz seviyesi –3 m, en yüksek deniz seviyesi ise +2,5 m olarak kaydedilmiştir.

Verilen bilgiye göre yapılan tüm ölçümlerin aralığı değer kümesi, grafikteki ölçümlerin aralığı ise görüntü kümesi olarak kabul edilirse değer kümesi ile görüntü kümesi arasındaki ilişki hakkında ne söylenebilir?

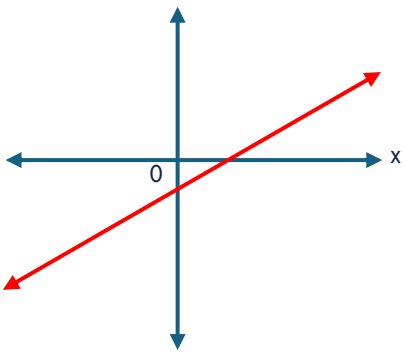
b) "Bir f fonksiyonunda tanım kümesindeki elemanlar, değer kümesindeki elemanlarla değer kümesinin hiçbir elemanı açıkta kalmayacak şekilde eşleşiyorsa f fonksiyonu örtendir." **Bu tanıma göre (a) şıkkındaki değer ve görüntü kümeleri arasındaki ilişkiyi kullanarak fonksiyonun örten olma durumunu belirleyiniz ve gerekçelendiriniz.**

f: A → B olmak üzere tanım kümesindeki elemanların f fonksiyonu altındaki görüntülerinin oluşturduğu kümeye **görüntü kümesi** denir. Bu küme f(A) ile gösterilir.
f: A → B fonksiyonunda A kümesi tanım kümesini, B kümesi ise değer kümesini temsil etmektedir.
Eğer f fonksiyonunun değer kümesi olan B, fonksiyonun görüntü kümesi olan f(A) kümesine eşit ise (f(A) = B) bu fonksiyona **örten** fonksiyon denir.

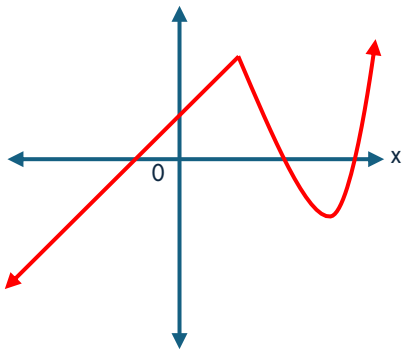
SIRA SİZDE 2.

Aşağıda verilen grafiklerden hangileri, $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ örten bir fonksiyon grafiği olabilir?

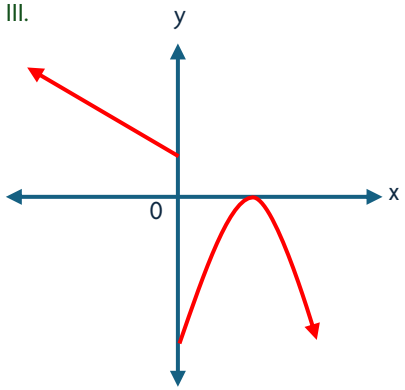
I.



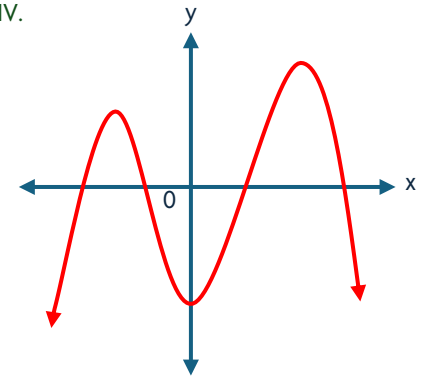
II.



III.



IV.



UYGULAMA: Fonksiyonların Cebirsel ve Grafik Temsilleri Üzerinden Teklik ve Çiftlik Analizi

- **Aşağıdaki gerçek sayılarda tanımlı f ve g fonksiyonlarının cebirsel temsillerinden yararlanarak tabloları tamamlayınız.**

$f(x) = x^2 + 3$

x	f(x)	x	f(x)
2	$2^2 + 3 = 4 + 3 = 7$	-2	$(-2)^2 + 3 = 4 + 3 = 7$
3		-3	
5		-5	
$\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{2}$	

🤔 Tablo incelendiğinde fonksiyonun davranışında simetriye ya da belirli bir özelliğe dair bir bulguya ulaşılabilir mi?

🤔 Tanım kümesindeki her bir eleman için f(x) ile f(– x) arasında nasıl bir ilişki bulunmaktadır? İlişkinin sebebi sizce neye dayanır?

$g(x) = x^3$

x	g(x)	x	g(x)
2	$2^3 = 8$	-2	$(-2)^3 = -8$
3		-3	
5		-5	
$\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{2}$	

🤔 Tablo incelendiğinde fonksiyonun davranışında simetriye ya da belirli bir özelliğe dair bir bulguya ulaşılabilir mi?

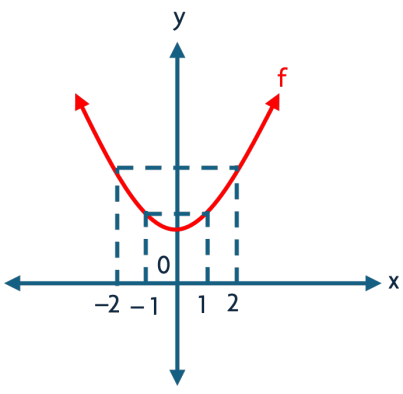
🤔 Tanım kümesindeki her bir eleman için g(x) ile g(−x) arasındaki ilişkiyi inceleyiniz ve bu ilişkiyi fonksiyonun özelliklerini kullanarak açıklayınız.

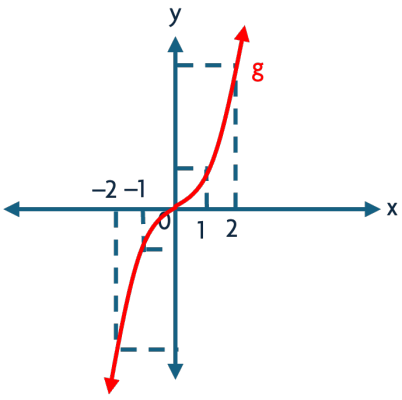
$A \subset \mathbb{R}$, $B \subset \mathbb{R}$, $f: A \longrightarrow B$ ve $g: A \longrightarrow B$ olmak üzere $\forall x_0 \in A$ için
$f(-x_0) = f(x_0)$ şartını sağlayan f fonksiyonuna **çift fonksiyon,**
$g(-x_0) = -g(x_0)$ şartını sağlayan g fonksiyonuna **tek fonksiyon** denir.

- **Gerçek sayılarda tanımlı** $f(x) = x^2 + 3$ **ve** $g(x) = x^3$ **fonksiyonlarının tekliğini ve çiftliğini belirleyip aşağıda boş bırakılan yere yazınız.**

.....
.....

- Aşağıda f ve g fonksiyonlarına ait grafikler verilmiştir.





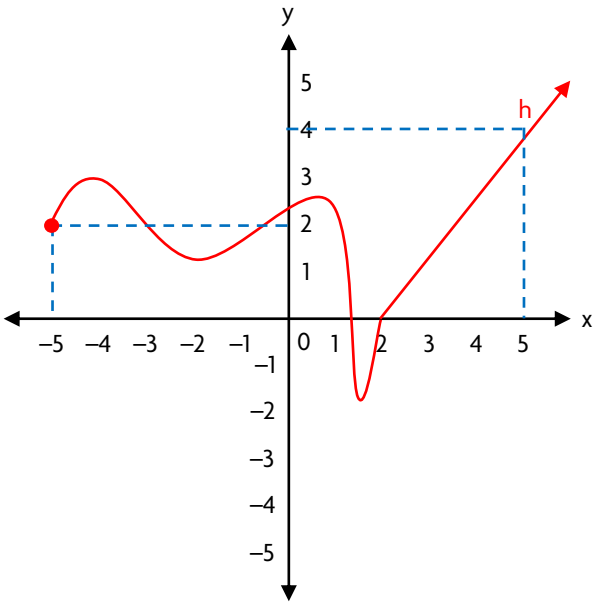
Grafikler incelenerek grafiklerin sahip oldukları noktaya veya doğruya göre simetri özellikleri ile fonksiyonun tek ya da çift olması arasında bir ilişki kurulabilir mi? Düşüncelerinizi birkaç cümle ile boş bırakılan yere yazınız.

.....
.....

Tanım kümesindeki bir a gerçek sayısı için f(a) = f(−a) = b ise fonksiyonun grafiği, (a, b) ve (−a, b) noktalarından geçer. (a, b) ve (−a, b) noktaları y eksenine göre simetriktir. Bu koşul tanım kümesindeki her a gerçek sayısı için sağlandığından **çift fonksiyonların grafikleri, y eksenine göre simetriktir.**
Benzer şekilde tanım kümesindeki bir a gerçek sayısı için g(a) = b ise g(−a) = −b olacağından fonksiyonun grafiği, (a, b) ve (−a, −b) noktalarından geçer. (a, b) ve (−a, −b) noktaları orijine göre simetriktir. Bu koşul tanım kümesindeki her a gerçek sayısı için sağlandığından **tek fonksiyonların grafikleri, orijine göre simetriktir.**

ÖRNEK

"Bir fonksiyon tek ya da çift olmak zorunda değildir." ifadesini aşağıda verilen h fonksiyonunun grafiği ile ilişkilendirerek elde ettiğiniz çıkarımları yazınız.



ÇÖZÜM

h fonksiyonu, ne tek ne de çift fonksiyondur. h fonksiyonunun tek ve çift fonksiyonların her ikisinin de geometrik özelliklerini kesin olarak sağlamadığını göstermek için koşulları sağlamayan birer örnek vermek yeterlidir.

h fonksiyonunun grafiği; (− 5, 2) ve (5, 4) noktalarından geçmektedir, h(− 5) = 2 ve h(5) = 4'tür.

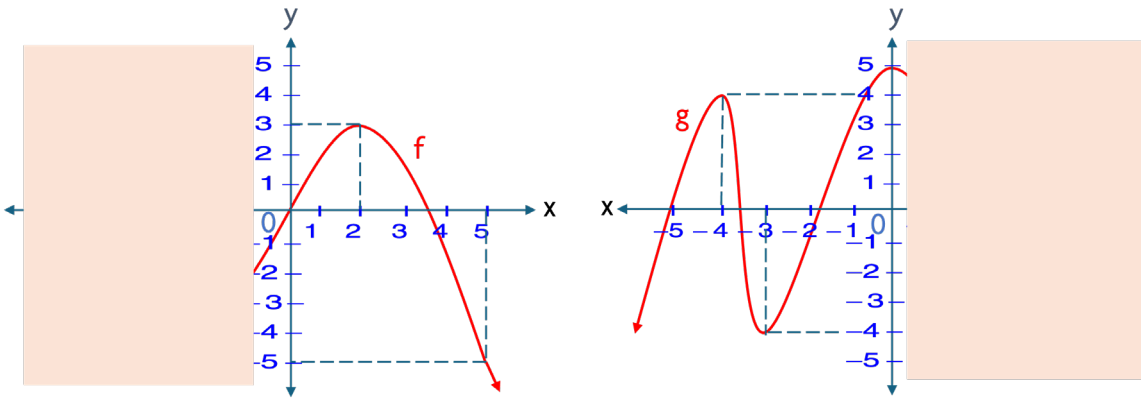
h(5) ≠ h(− 5) olduğuna göre fonksiyon, **y eksenine göre simetrik değil**dir. Dolayısıyla h fonksiyonu **çift fonksiyon değil**dir.

h(5) ≠ −h(− 5) olduğuna göre fonksiyon, **orijine göre de simetrik değil**dir. Dolayısıyla h fonksiyonu **tek fonksiyon değil**dir.

h fonksiyonunun grafiği incelenerek **"Bir fonksiyon tek ya da çift olmak zorunda değildir."** önermesinin doğru olduğu sonucuna ulaşılabilir.

SIRA SİZDE 3:

Aşağıda f ve g fonksiyonlarının grafiklerinin bir kısımları verilmiştir.



f tek, g çift fonksiyon olduğuna göre $\frac{f(-5)+g(4)}{f(-2)-g(3)}$ **ifadesinin değerini bulunuz.**

GERİ BİLDİRİM

Bu geri bildirim sayesinde kendi cevabınızı kontrol edebilir, hatalarınızı düzelterek öğrenmenizi pekiştirebilirsiniz.

ETKİNLİK 2.

Gerçek Yaşam Senaryolarını Sınıflandırma

1. Senaryo: Taksi Yolculuğu

Sınıflandırma: Doğrusal Fonksiyon

Açıklama: Mesafe arttıkça ücret, sabit oranla artar. Her kilometre için aynı miktarda ücret eklenir. Bu, matematiksel olarak y = mx + b şeklinde ifade edilir (m: km başına ücret, b: sabit açılış ücreti).

Girdi ile çıktı arasındaki değişim oranı sabittir.

Sonuç: Bu ilişki doğrusal bir fonksiyondur çünkü mesafe ile ücret arasında sabit bir artış vardır.

2. Senaryo: Bir Yaz Günü Hava Sıcaklığı

Sınıflandırma: Doğrusal Olmayan Fonksiyon

Açıklama: Sıcaklık artışı ve azalışı; sabit değildir, eğrisel bir değişim gösterir.

Örneğin:

09.00 → 24°C

14.00 → 32°C

19.00 → 26°C

Bu değerler arasında sabit bir artış ya da azalış yoktur.

Güneşin konumu, atmosfer koşulları gibi faktörler sıcaklık değişimini etkiler.

Sonuç: Bu ilişki doğrusal değildir çünkü sıcaklık gün boyunca sabit bir şekilde artmaz veya azalmaz.

SIRA SİZDE 1.

ÇÖZÜM

I ve IV. Grafikler: Grafikler, tanım kümesinin tamamında süreklilik arz eden bir yapıdadır. Herhangi bir $c \in \mathbb{R}$ değeri için çizilen $x = c$ dikey doğrusu, grafiği tam olarak bir noktada keser. Grafiğin uçlarındaki oklar, tanım kümesinin tüm reel sayıları kapsayacak şekilde uzandığını ima eder. Dolayısıyla bu grafikler, $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$'de bir fonksiyon **belirtir**.

II. Grafik: Bu grafikte, x eksenindeki belirli bir aralıkta çizilen bazı dikey doğruların grafiği kesmediği görülmektedir. Örneğin, $x = 0$ doğrusu (y-ekseni) grafiği kesmez. Bu durum, $x = 0$ apsis değeri için fonksiyonun görüntüsünün olmadığı anlamına gelir. Dolayısıyla bu grafik, $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon **belirtmez**.

III. Grafik: Bu grafikte, x eksenindeki belirli bir aralıkta çizilen bazı dikey doğruların grafiği birden fazla noktada kestiği görülmektedir. Örneğin $x = 0$ doğrusu, (y-ekseni) grafiği dört farklı noktada kesmektedir. Bu durum, tek bir girdi değerinin birden fazla çıktı değerine eşlendiği anlamına gelir. Dolayısıyla bu grafik, bir fonksiyon **belirtmez**.

ETKİNLİK 3.

Deniz Seviyesi Değişimi (Gelgit)

a) Grafik temsilinde, bir güne ait deniz seviyesinin değişimi gösterilen limanda geçmişte yapılan ölçümlerde en düşük deniz seviyesi –3 m, en yüksek deniz seviyesi ise +2,5 m olarak kaydedilmiştir. Verilen bilgiye göre yapılan tüm ölçümlerin aralığının değer kümesi [–3, +2,5] dır. Grafikteki ölçümlerin aralığı, görüntü kümesi olarak kabul edilirse görüntü kümesi [–1, +1,8] dır. Değer kümesi ile görüntü kümesi birbirine eşit değildir.

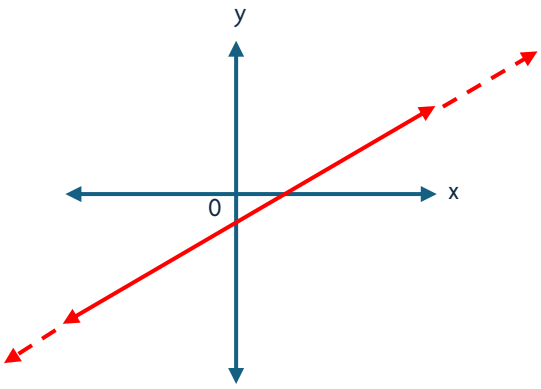
b) "Bir f fonksiyonunda tanım kümesindeki elemanlar, değer kümesindeki elemanlarla değer kümesinin hiçbir elemanı açıkta kalmayacak şekilde eşleşiyorsa f fonksiyonu örtendir." ifadesinde "değer kümesinin hiçbir elemanı açıkta kalmayacak" koşulu soruda belirlenen değer ve görüntü kümesinin birbirine eşit olmasını gerektirir. Bu eşitlik sağlanmadığı için başlangıç noktası saat 00.00'ı göstermek üzere bu limana ait bir günlük zamana (sa.) bağlı deniz seviyesinin değişimini (m) gösteren grafik temsili ile verilen fonksiyon, örten değildir.

SIRA SİZDE 2.

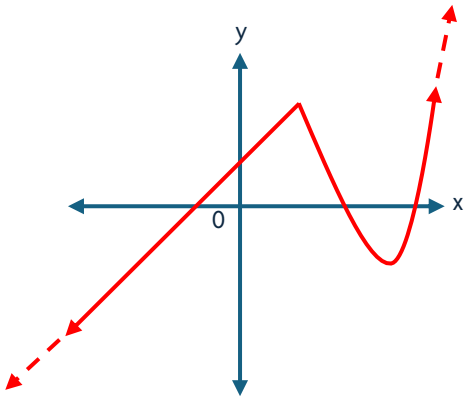
ÇÖZÜM

Bir fonksiyonun **örten** fonksiyon olabilmesi için değer kümesinin fonksiyonun görüntü kümesine eşit olması gerekir. Soruda verilen grafiklerin değer kümesi $\mathbb{R}$ olarak belirtilmiştir.

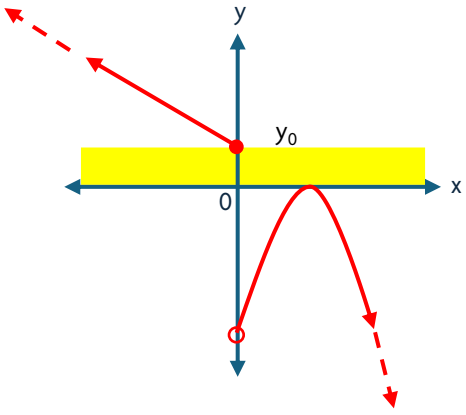
I.



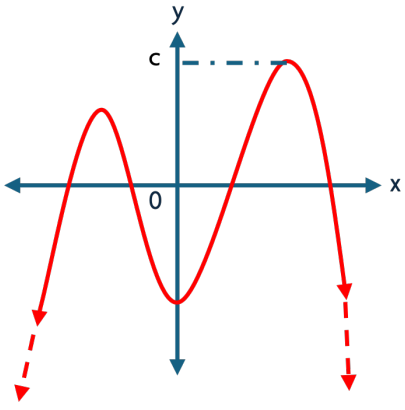
II.



III.



IV.



I. Grafik: Bu grafik, eğimi sıfırdan farklı bir doğrusal fonksiyona aittir. Grafiğin uçlarındaki oklar, fonksiyonun ordinat değerlerinin (−∞, +∞) ndaki tüm reel sayıları kapsayacak şekilde uzandığını göstermektedir. Çizilecek herhangi bir y = c yatay doğrusu, bu grafiği daima tam olarak bir noktada kesecektir. Değer kümesindeki hiçbir eleman açıkta kalmamaktadır.

Sonuç: Bu grafik, örten bir fonksiyon belirtir.

II. Grafik: Fonksiyonun sol ucu −∞'a, sağ ucu ise +∞'a doğru gitmektedir. Çizilecek her yatay doğru, grafiği en az bir (bazı durumlarda iki, üç) noktada kesecektir. Görüntü kümesi gerçek sayılar kümesidir.

Sonuç: Bu grafik, örten bir fonksiyon belirtir.

III. Grafik: Bu parçalı fonksiyonun görüntü kümesi iki ayrı aralığın birleşiminden oluşmaktadır. Grafiğin sağdaki parçası, tepe noktası x ekseni üzerinde olan ve kolları aşağı doğru olan bir eğridir; bu parçanın ürettiği y değerleri (−∞, 0] aralığındadır. Soldaki parça ise belirli bir pozitif y_0 değerinden başlayan bir ışındır. Grafiğin ürettiği değerler arasında, bir boşluk bulunmaktadır. Görseldeki sarı bölgede yatay bir doğru çizildiğinde grafiği hiçbir noktada kesmez.

Sonuç: Görüntü kümesi ile değer kümesi eşit olmadığından, bu grafik örten bir fonksiyon belirtmez.

IV. Grafik: Grafiğin aldığı bir maksimum değer (c) bulunmaktadır. Görüntü kümesi (−∞, c] dır.

Sonuç: Bu grafik, örten bir fonksiyon belirtmez.

Uygulama: Fonksiyonların Cebirsel ve Grafik Temsilleri Üzerinden Teklik ve Çiftlik Analizi

- **Aşağıdaki gerçek sayılarda tanımlı f ve g fonksiyonlarının cebirsel temsillerinden yararlanarak tabloları tamamlayalım.**

$f(x) = x^2 + 3$

x	f(x)	x	f(x)
2	$2^2 + 3 = 4 + 3 = 7$	-2	$(-2)^2 + 3 = 4 + 3 = 7$
3	$3^2 + 3 = 9 + 3 = 12$	-3	$(-3)^2 + 3 = 9 + 3 = 12$
5	$5^2 + 3 = 25 + 3 = 28$	-5	$(-5)^2 + 3 = 25 + 3 = 28$
$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3 = \frac{1}{4} + 3 = \frac{13}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 3 = \frac{1}{4} + 3 = \frac{13}{4}$

$g(x) = x^3$

x	g(x)	x	g(x)
2	$2^3 = 8$	-2	$(-2)^3 = -8$
3	$3^3 = 27$	-3	$(-3)^3 = -27$
5	$5^3 = 125$	-5	$(-5)^3 = -125$
$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$	$-\frac{1}{2}$	$\left(-\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{1}{8}$

- Gerçek sayılarda tanımlı $f(x) = x^2 + 3$ fonksiyonu çift fonksiyon, $g(x) = x^3$ fonksiyonu ise tek fonksiyondur.
- f ve g fonksiyonlarına ait grafikler incelendiğinde $f(x) = x^2 + 3$ fonksiyonunun grafiğinin y eksenine, $g(x) = x^3$ fonksiyonunun grafiğinin orijine göre simetrik olduğu gözlemlenmektedir.

SIRA SİZDE 3.

ÇÖZÜM

f tek fonksiyon olduğu için fonksiyonun grafiği orijine göre simetrik olmalı ve $f(-x) = -f(x)$ koşulu sağlanmalıdır.

f fonksiyonunun grafiği

- (5, – 5) noktasından geçer. $f(5) = -5$ ise $f(-5) = 5$'tir.
- (2, 3) noktasından geçer. $f(2) = 3$ ise $f(-2) = -3$'tür.

g çift fonksiyon olduğu için fonksiyonun grafiği y eksenine göre simetrik olmalı ve $g(-x) = g(x)$ koşulu sağlanmalıdır.

g fonksiyonunun grafiği

- (– 4, 4) noktasından geçer. $g(-4) = 4$ ise $g(4) = 4$'tür.
- (– 3, – 4) noktasından geçer. $g(-3) = -4$ ise $g(3) = -4$'tür.

Bulunan değerler istenilen ifadede yerine yazılıp işlemler yapıldığında cevap $\frac{f(-5)+g(4)}{f(-2)-g(3)} = \frac{5+4}{-3-(-4)} = \frac{9}{-3+4} = \frac{9}{1} = 9$ olarak bulunur.

DEĞERLENDİRİYORUM

Amaç: Bu bölümde öğrendiklerinizi gözden geçirmenizi, kendi öğrenme sürecinizi değerlendirmenizi ve eksiklerinizi fark etmenizi amaçlıyoruz. Soruları dikkatlice yanıtlayınız. Cevaplarınızı geri bildirimlerle karşılaştırarak eksik gördüğünüz noktaları tekrar ediniz.

SORULAR

1. Aşağıda günlük yaşamdan iki farklı durum ve bu durumlardaki değişkenler arasındaki ilişkiler tanımlanmıştır.

Her bir senaryoyu dikkatlice inceleyerek tanımlanan ilişkinin "Doğrusal Fonksiyon", "Doğrusal Olmayan Fonksiyon" kategorilerinden hangisine ait olduğunu gerekçelendirerek belirleyiniz.

1. Senaryo: Cep Telefonu Faturası

Bir GSM operatörü, müşterilerine aylık 250 TL sabit ücret ve bu ücrete ek olarak kullandıkları her 1 GB internet için 20 TL ücretlendirme yapan bir tarife sunmaktadır.

Bir ayda kullanılan internet miktarına (GB) bağlı olarak ödenecek toplam fatura tutarını veren ilişki incelenmektedir.

- **Girdi (Bağımsız Değişken):** Bir ayda kullanılan internet miktarı (GB).
- **Çıktı (Bağımlı Değişken):** Ay sonunda ödenecek toplam fatura tutarı (TL).

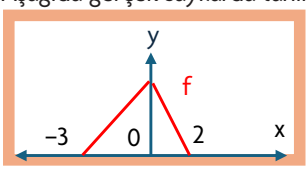
2. Senaryo: Kare Şeklindeki Bahçenin Alanı

Kare şeklinde bir hobi bahçesinin alanı, bir kenarının uzunluğuna bağlı olarak hesaplanmaktadır.

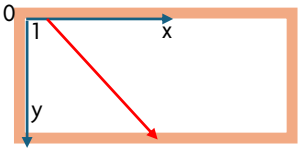
Bahçenin bir kenar uzunluğuna bağlı olarak bahçenin toplam alanını veren ilişki incelenmektedir.

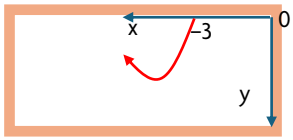
- **Girdi (Bağımsız Değişken):** Bahçenin bir kenarının uzunluğu (metre).
- **Çıktı (Bağımlı Değişken):** Bahçenin toplam alanı (metrekare).

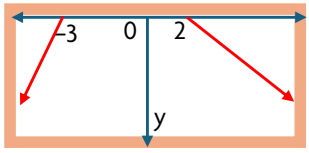
2. Aşağıda gerçek sayılarda tanımlı f fonksiyonunun grafiğinin bir kısmı verilmiştir.

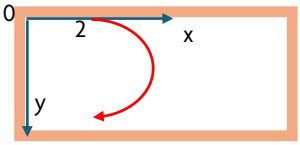


Buna göre aşağıda verilen grafik parçalarından hangileri f fonksiyonuna ait olabilir?

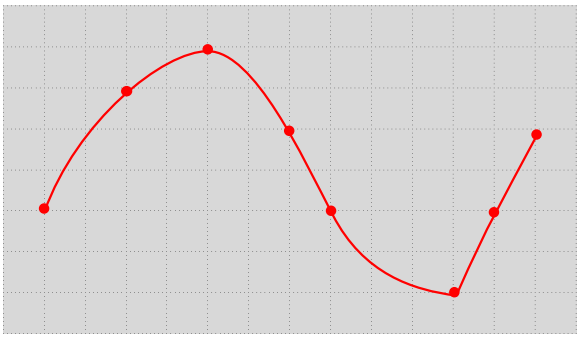
I.


II.


III.


IV.


3. Grafik hesap makinesinde y = f(x) fonksiyonunun grafiği çizildikten sonra koordinat eksenleri kaldırılmış, eş karelerden oluşan ızgara görünümü ve grafiğin geçtiği bazı noktaların görünümleri etkinleştirilmiştir. Ortaya çıkan görüntü aşağıda verilmiştir. *(Izgara görünümündeki eş karelerin birimkare olmadığına dikkat ediniz.)*

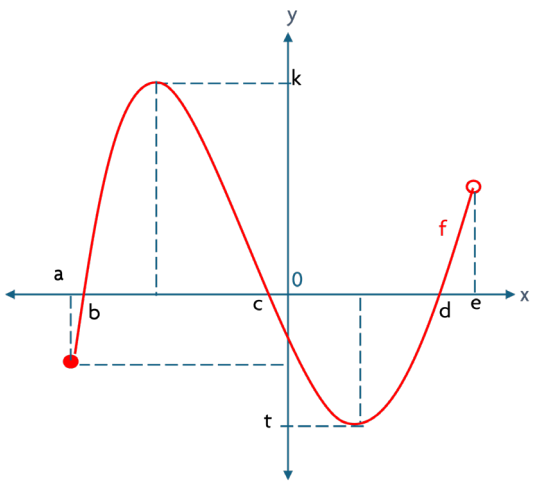


f fonksiyonunun tanım kümesi [–2, 4], maksimum değeri 2'dir.

Buna göre f fonksiyonunun grafik temsilini inceleyerek aşağıda verilen tabloyu doldurunuz.

Görüntü Kümesi	İşareti		Sıfırları	Artanlığı-Azalanlığı	Minimum Değer	Bire Birliği
	Pozitif Değer Aldığı Aralıklar	Negatif Değer Aldığı Aralıklar				

4. Aşağıdaki dik koordinat sisteminde f fonksiyonunun grafiği verilmiştir.

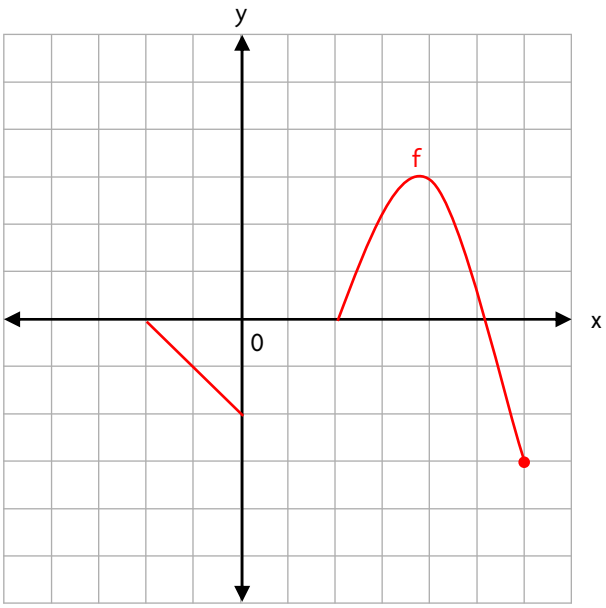


f fonksiyonunun

- tanım kümesi [– 8, 7),
- görüntü kümesi [–4, 9],
- sıfırları –7, –1 ve 5'tir.

Buna göre $\frac{a+b+c+t}{d+e+k}$ **ifadesinin değerini bulunuz.**

5. Aşağıdaki görselde, birimkareli yüzey üzerinde çizilmiş [−6, 6] dan $\mathbb{R}$'de (gerçek sayılar kümesinde) tanımlı f fonksiyonunun grafiğinin bir bölümü yer almaktadır.



f fonksiyonu, tanımlı olduğu aralıkta her x değeri için f(x) − f(−x) = 0 koşulunu sağlamaktadır.

Buna göre

a) f fonksiyonunun grafiğinin eksik kalan kısımlarını tamamlayınız.

b) f(− 6) + f(1) değerini bulunuz.

c) f fonksiyonunun örtenliğini inceleyiniz.

GERİ BİLDİRİM

Bu geri bildirim sayesinde kendi cevabınızı kontrol edebilir, hatalarınızı düzelterek öğrenmenizi pekiştirebilirsiniz.

ÇÖZÜM 1.

1. Senaryo: Cep Telefonu Faturası

Değişkenlerin Tanımlanması: Bu senaryoda bağımsız değişken, bir ayda kullanılan internet miktarı (GB) x olarak; bağımlı değişken ise ay sonunda ödenecek toplam fatura tutarı (TL), f(x) olarak tanımlanmıştır.

Matematiksel Model: Fatura tutarı, 250 TL'lik bir sabit ücrete ek olarak kullanılan her 1 GB internet için 20 TL'lik bir artış göstermektedir. Bu ilişki, $x \geq 0$ koşuluyla aşağıdaki matematiksel model ile ifade edilebilir.

$f(x) = 20x + 250$

Analiz ve Sonuç: Bu model, genel formu $f(x) = mx + c$ olan birinci dereceden bir denklemdir. Her bir internet kullanım miktarı (x değeri) için tek bir fatura tutarı (f(x) değeri) karşılık geldiğinden bu ilişki bir fonksiyondur. Bağımsız değişkendeki birim artışın bağımlı değişkende **sabit** bir artışa neden olması **(sabit değişim oranı)**, bu ilişkinin doğrusal olduğunu göstermektedir.

Kategori: Doğrusal Fonksiyon

2. Senaryo: Kare Şeklindeki Bahçenin Alanı

Değişkenlerin Tanımlanması: Bu senaryoda bağımsız değişken, bahçenin bir kenarının uzunluğu (metre) x olarak; bağımlı değişken ise bahçenin toplam alanı (metrekare) A(x) olarak tanımlanmıştır.

Matematiksel Model: Bir karenin alanı, kenar uzunluğunun karesine eşittir. Bu ilişki, $x > 0$ koşuluyla aşağıdaki matematiksel model ile ifade edilir:

$A(x) = x^2$

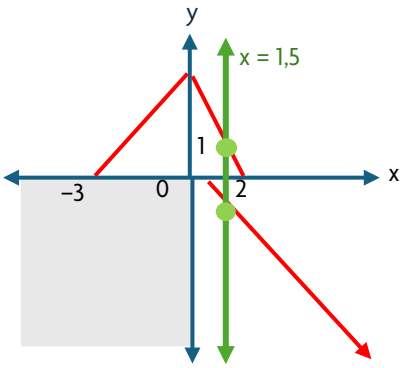
Analiz ve Sonuç: Her bir pozitif kenar uzunluğu (x değeri) için benzersiz bir alan değeri (A(x)) hesaplanabilmektedir. Dolayısıyla bu ilişki bir fonksiyondur. Fonksiyonun değişim oranı sabit değildir. Örneğin; kenar 1 metreden 2 metreye çıktığında, alan 3 m^2 artarken ($2^2 - 1^2 = 3$), 2 metreden 3 metreye çıktığında 5 m^2 artar ($3^2 - 2^2 = 5$). **Değişim oranının sabit olmaması,** ilişkinin doğrusal olmadığını gösterir.

Kategori: Doğrusal Olmayan Fonksiyon

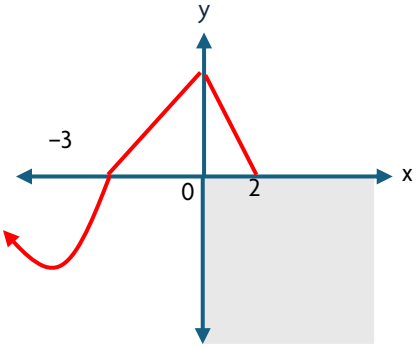
ÇÖZÜM 2.

f fonksiyonunun verilen kısmı ile soruda verilen grafik parçalarının aynı koordinat eksenlerinde çizilmiş hâli aşağıda verilmiştir. (Gri taralı bölgelere ait bilgi bulunmamaktadır.)

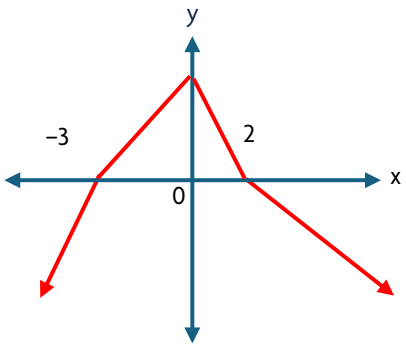
I.



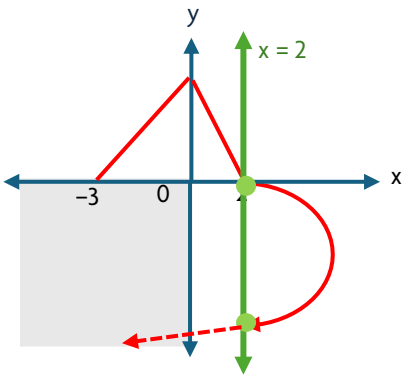
II.



III.



IV.



Analiz ve Sonuç: Bir grafiğin fonksiyon belirtebilmesi için temel koşul, tanım kümesindeki her bir elemanın (her bir x değerinin) değer kümesinde yalnızca bir karşılığının (tek bir y değerinin) olmasıdır. Grafiksel olarak bu, Dikey Doğru Testi ile kontrol edilir. Koordinat düzleminde çizilen herhangi bir dikey doğrunun fonksiyon grafiğini en fazla bir noktada kesmesi gerekir. I ve IV numaralı parçalar f fonksiyonuna ait olamaz. Örneğin; çizilen x = 1,5 ve x = 2 dikey doğruları, grafikleri ikişer noktada kesmektedir. II ve III numaralı parçalar, f fonksiyonuna ait olabilir. parçaların bitiş ve başlangıç noktaları, orijinal grafiğin bitiş ve başlangıç noktasıyla tutarlıdır. Dikey doğru testi, bu parçaların eklenmesiyle oluşacak birleşik grafiklerin tamamında geçerliliğini korur.

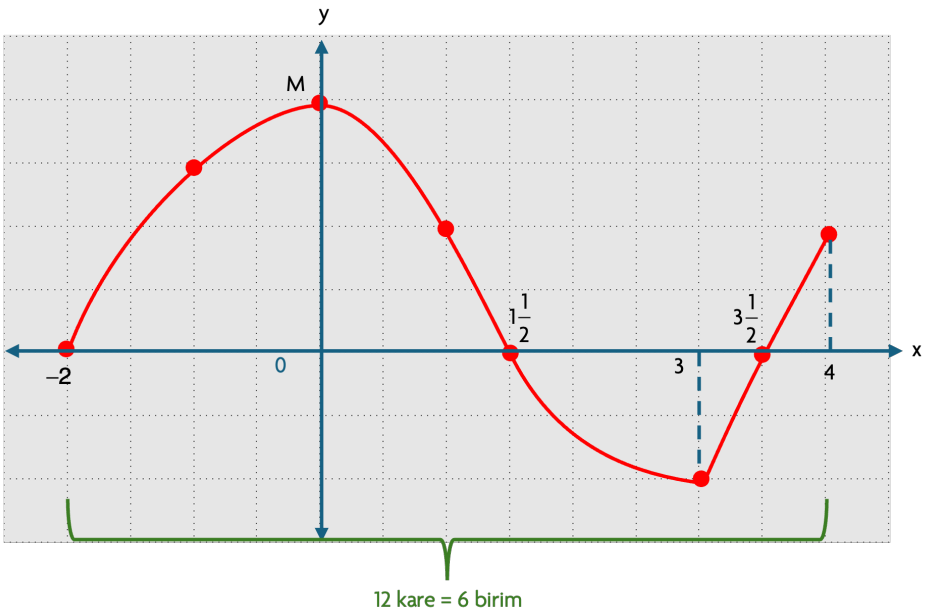
ÇÖZÜM 3.

Çözümün ilk ve en önemli adımı, sorudaki bilgiler ışığında koordinat eksenlerinin ızgara üzerindeki konumunu ve ölçeğini doğru bir şekilde belirlemektir.

Fonksiyonun tanım kümesi [–2, 4] olarak verilmiştir. Bu aralığın matematiksel uzunluğu 4 – (–2) = 6 birimdir. Soruya göre grafiğin yatay eksende kapladığı alan, 12 eş kare genişliğindedir. Bu durum, tanım kümesindeki 6 birimlik uzunluğun ızgara üzerindeki 12 birime karşılık geldiğini gösterir. Dolayısıyla x-ekseni üzerindeki ölçek şu şekildedir:

12 kare = 6 birim ⇒ 2 kare = 1 birim

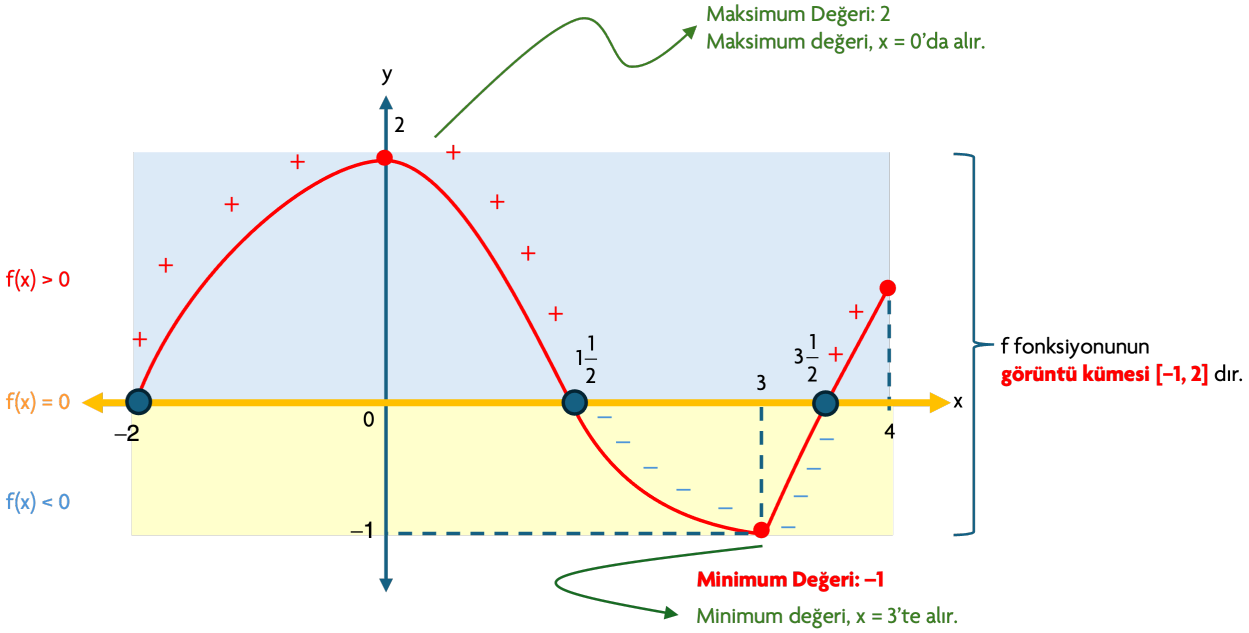
Bu, yatay eksendeki her **2 kare** çizgisinin **1 birim**lik değişime denk geldiği anlamına gelir. Grafiğin en sol noktası x = – 2 olduğuna göre **y ekseni (x = 0 doğrusu)**, en sol noktadan 2 birim sağda olmalıdır. O hâlde ölçeğe göre 2 · 2 = **4 kare sağda** demektir. Sonuç olarak y-ekseni, grafiğin soldan 4. kare çizgisinin üzerine konumlanır. Fonksiyonun maksimum değeri 2 olarak verildiğinden x ekseni, fonksiyonun maksimum değer aldığı M noktasının 2 birim (yani 4 kare) aşağısından geçmelidir. f fonksiyonunun koordinat eksenleri eklenmiş hali aşağıda verilmiştir.



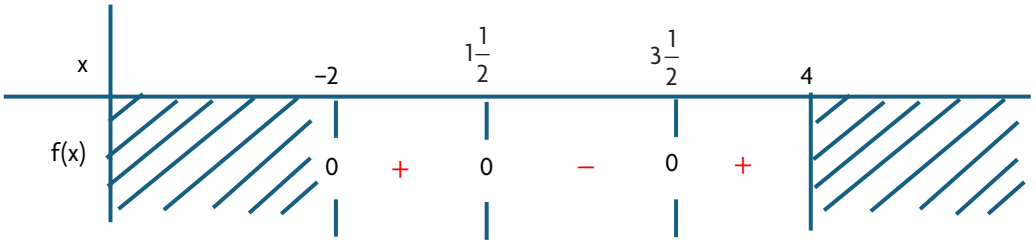
Yerleştirdiğimiz y-eksenine göre grafiğin maksimum değer aldığı noktanın apsis değeri, y ekseni üzerinde x = 0'dır.

Fonksiyonun maksimum değer aldığı noktanın koordinatları toplamı 2 olarak verildiğine göre maksimum değer aldığı M noktasının koordinatları (0, 2) olmalıdır. x ekseni, M noktasının 2 · 2 = 4 kare aşağısında olmalıdır.

f fonksiyonunun grafiği, dik koordinat sistemine yerleştirilmiş hâliyle aşağıda verilmiştir.



- Fonksiyonda f(x) = 0 şartını sağlayan her x noktası fonksiyonun sıfırıdır. Buna göre f fonksiyonun sıfırları -2, $1\frac{1}{2}$ ve $3\frac{1}{2}$ 'dir.



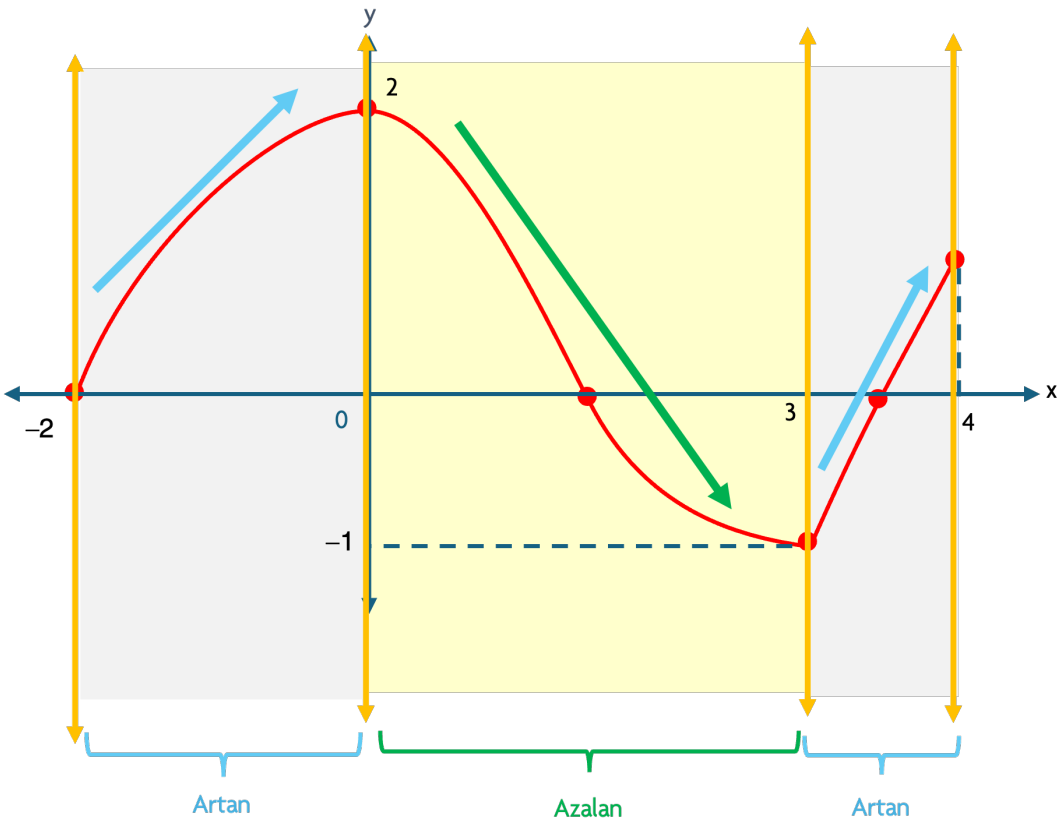
- f fonksiyonunun negatif olduğu aralık $\left(1\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2}\right)$, pozitif olduğu aralıklar ise $\left(-2, 1\frac{1}{2}\right)$ ve $\left(3\frac{1}{2}, 4\right]$ dır.

- f fonksiyonu;

[– 2, 0] nda artan,

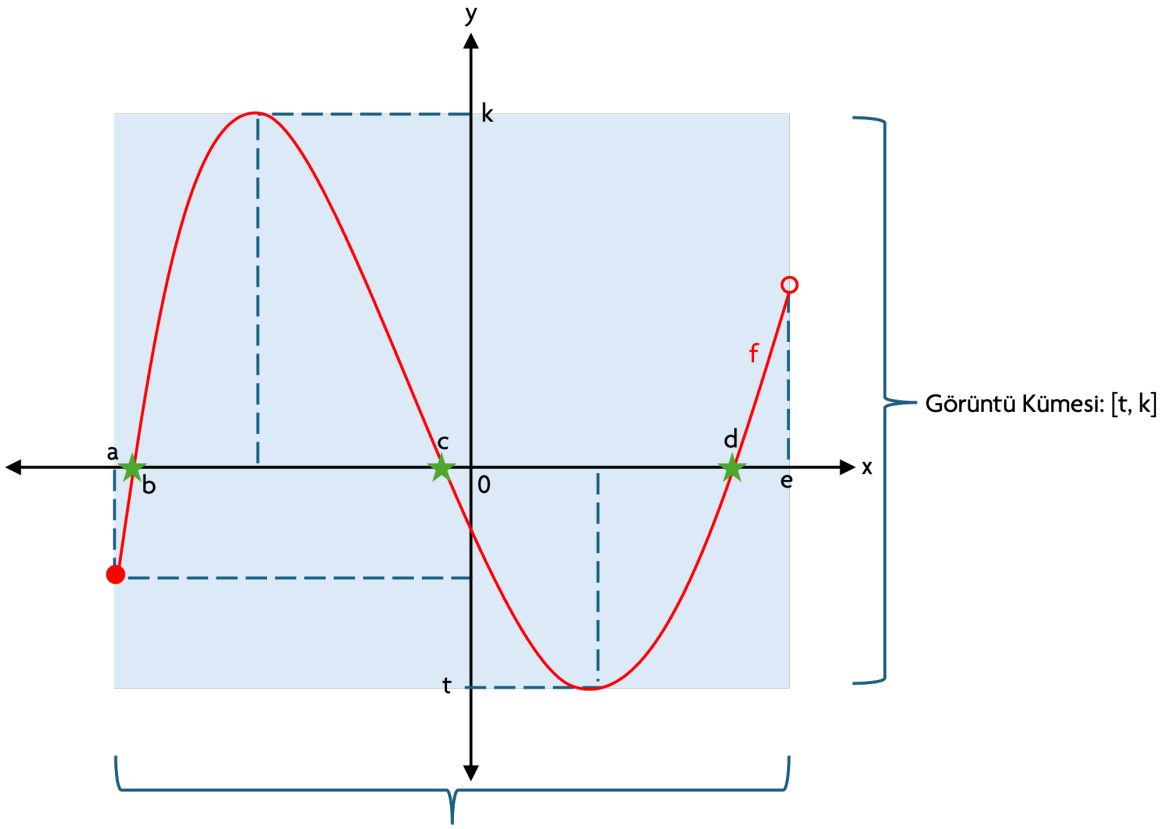
[0, 3] nda azalan ve

[3, 4] nda artandır.



- a, b ∈ [–2, 4] için a ≠ b iken f(a) = f(b) olacak şekilde a ve b sayıları bulunabildiğinden **f fonksiyonu bire bir değil**dir. Örneğin, $-2 \neq 1\frac{1}{2}$ iken $f(-2) = f(1\frac{1}{2}) = 0$'dır.

ÇÖZÜM 4.



★ Fonksiyonun sıfırları, küçükten büyüğe sırasıyla b, c ve d dir.

Soruda verilen bilgiler doğrultusunda f fonksiyonunun

- tanım kümesi [– 8, 7) ise a = – 8 ve e = 7,
- görüntü kümesi [– 4, 9] ise t = – 4 ve k = 9,
- sıfırları – 7, – 1 ve 5 ise b = – 7, c = – 1 ve d = 5'tir.

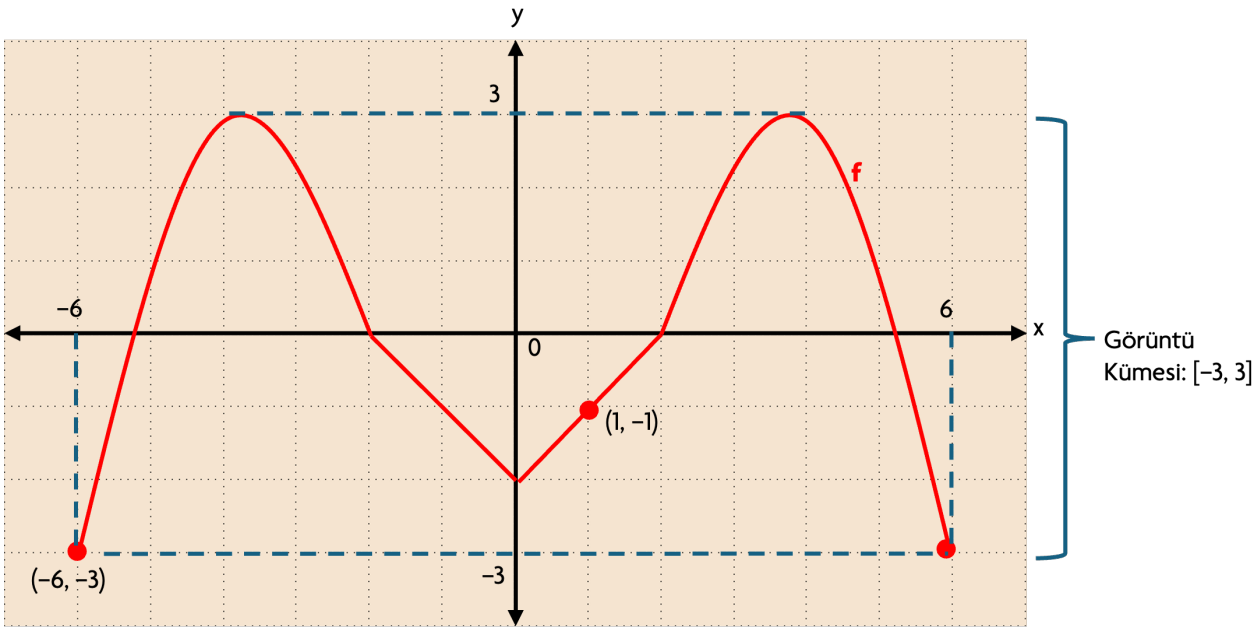
Buna göre $\frac{a+b+c+t}{d+e+k}$ ifadesinin değeri, $\frac{-8+(-7)+(-1)+(-4)}{5+7+9}=-\frac{20}{21}$ olarak hesaplanır.

ÇÖZÜM 5.

Tanımlı olduğu aralıkta f(x) = f(–x) koşulu sağlandığına göre f fonksiyonu çift fonksiyondur.

Çift fonksiyonların grafikleri, y eksenine göre simetriktir.

a) Fonksiyonun verilen kısımlarının y eksenine göre simetrisini alarak f fonksiyonunun grafiğinin eksik kalan kısımlarını tamamlayalım.



b) • f fonksiyonunun grafiği, (–6, –3) noktasından geçmektedir. **f(–6) = –3**'tür.

• f fonksiyonunun grafiği, (1, –1) noktasından geçmektedir. **f(1) = –1**'dir.

f(–6) + f(1) = (–3) + (–1) = –4 olarak hesaplanır.

c) Soruda f fonksiyonunun değer kümesi, gerçek sayılar kümesi olarak verilmiştir. Fonksiyonun minimum değeri –3, maksimum değeri 3'tür. Görüntü kümesi olan [–3, 3], fonksiyonun değer kümesine eşit değildir. Değer kümesinde boşta eleman kaldığından **fonksiyon örten değildir.**

ÖĞRENDİKLERİM

Amaç: Bu bölümde öğrendiklerinizi özetlemenizi, günlük hayatta ve farklı derslerde kullanabileceğiniz bilgileri belirlemenizi amaçlıyoruz.

Anahtar kavramları ve önemli bilgileri kendi cümlelerinizle yazınız. Aşağıda verilen yönlendirme metni ve tablo, konu ile ilgili öğrendiklerinizi özetlemenizde size yardımcı olacaktır. Tabloda ve metinde boş bırakılan yerleri kısa notlar ile tamamlayıp özetinizi hazırlayabilirsiniz.

Özetinizi hazırlarken zorluk yaşadığınızı hissederseniz çalışma kartını tekrar gözden geçirmenizi öneririz.

Fonksiyon Olma Şartları

Fonksiyon:.....
.....

A tanım kümesinden $\mathbb{R}$ değer kümesine tanımlı bir f ilişkisinin ($f: A \rightarrow \mathbb{R}$) fonksiyon olabilmesi için aşağıda verilen koşulları sağlaması gerekir.

1) .....

2) .....

Bu şartların grafiksel yorumu, koordinat düzleminde x eksenine dik olarak çizilen düşey (dikey) doğruların grafiği kesme durumları incelenerek yapılır. (Bu doğruların fonksiyon olma tanımıyla ilişkisini ve sahip olması gereken kesim noktası sayılarını aşağıda bırakılan boş yerlere yazınız.)

.....

.....

.....

Gerçek Sayılarda Tanımlı Fonksiyonların Nitel Özellikleri

Bir fonksiyonun davranışını analiz etmek için üç temel kümenin anlaşılması gereklidir.

- **Tanım Kümesi:** .....
  .....
- **Değer Kümesi:** .....
  .....
- **Görüntü Kümesi:** .....
  .....

Gerçek sayılarda tanımlı fonksiyonların nitel özellikleri; soyut matematiksel kavramlar olmanın ötesinde fizik, mühendislik, ekonomi ve sosyal bilimlerdeki olguları modellemek ve anlamak için güçlü analitik araçlardır. Bu özellikler, bir fonksiyonun davranışsal kimliğini oluşturur.

Aşağıda A, B ⊂ ℝ olmak üzere, f: A → B, y = f(x) **fonksiyonunun nitel özelliklerine** ilişkin bir tablo verilmiştir. (Tabloda yer alan **"Grafiksel Yorum/Test"** sütununa ilgili nitel özelliğin fonksiyonun **grafik temsilinden nasıl elde edilebileceğini, "Cebirsel Koşul"** sütununa ise bu özelliğin **fonksiyonun cebirsel ifadesi** üzerinden incelendiğinde **sağlaması gereken denklem veya eşitsizliği** yazınız. Nitel özelliğin **tanımını kendi cümlelerinizle** ifade ediniz. Tabloyu, bilgilerin akılda kalmasını ve konunun tekrar hatırlanmasını kolaylaştıracak şekilde **kısa ve öz cümlelerle** tamamlayınız. Yazdıklarınızı, **çalışma kartındaki bilgilerle karşılaştırarak** gözden geçiriniz ve **doğruluğunu kontrol ediniz.)**

NİTEL ÖZELLİKLER ÖZET TABLOSU

Nitelik	Tanım	Grafiksel Yorum/Test	Cebirsel Koşul
Sıfırları	Fonksiyonu sıfır yapan x değerleridir. vb.	.....	$f(x) = 0$
İşareti (Pozitif Değerli)	.....	Grafiğin x-ekseninin üstünde kalan kısmına bakılır. vb.	.....
.....	.....	.....	$f(x) < 0$
Artanlığı	$x_1, x_2 \in a, b$ için $x_1 < x_2$ iken $f(x_1) < f(x_2)$ oluyorsa f, [a, b] nda **artandır**. Bu aralık, x değerleri artarken y değerlerinin de arttığı aralıktır. vb.	Grafik soldan sağa yukarı doğru hareket eder. vb.	$x_1 < x_2$ iken $f(x_1) < f(x_2)$
Azalanlığı	.....	.....	.....
.....	Fonksiyonun görüntü kümesindeki en büyük değerdir. vb.	.....	$\forall x \in A$ için $f(x) \leq f(x_{max})$
Minimum Değeri	.....	.....	.....
.....	Farklı x değerlerinin görüntüleri de farklıdır. vb.	.....	$x_1 \neq x_2$ iken $f(x_1) \neq f(x_2)$
.....	.....	Grafiğin y-ekseni üzerindeki izdüşümü, değer kümesini tamamen kaplar. vb.	$f(A) = B$
.....	.....	.....	$f(-x) = f(x)$
Tek Fonksiyon	.....	.....	.....

Daha fazlası için karekodu okutunuz.



GERÇEK SAYILARDA TANIMLI KARESEL FONKSİYONLAR

BAŞLARKEN

Bu bölümde yer alan etkinlikler, bireysel öğrenme yolculuğunuzda size rehberlik etmek ve öğrenme sürecinizi desteklemek amacıyla hazırlanmıştır. Çalışmalarınızı yürütürken "Hazırlanıyorum", "İlişkilendiriyorum", "Uygulayarak Öğreniyorum", "Değerlendiriyorum", "Yansıtıcı Yazı" ve "Öğrendiklerim" etkinliklerini sırası ile takip etmeniz ve etkinliklerin sonunda yer alan geri bildirimleri inceleyerek bölümleri tamamlamanız beklenmektedir.

Bu çalışma kartında karesel referans fonksiyondan türetilen karesel fonksiyonların nitel özelliklerine yönelik muhakeme yapabilmenizi ve bu fonksiyonlarla ifade edilebilen denklem ve eşitsizlikleri içeren gerçek yaşam problemlerini çözebilmeniz amaçlanmaktadır.

HAZIRLANIYORUM

Amaç: Bu bölümde ön bilgilerinizi hatırlamanızı ve temaya hazırlıklı hâle gelmenizi amaçlıyoruz.

Aşağıda yer alan ifadeler, bu temada tamamlanması hedeflenen öğrenme çıktısını ele almadan önce sahip olmanız gereken bazı temel becerileri içermektedir.

- Eğer ifadedeki bilgiye hakim olduğunuzu düşünüyorsanız kutucuğu işaretleyiniz.
- Eğer konuyu henüz tam olarak bilmediğinizi ya da hatırlamadığınızı düşünüyorsanız kutucuğu boş bırakınız.

SORULAR	ÖN ÖĞRENME KONTROL LİSTESİ	
1	Üslü ifadelerle dört işlem yapabilirim.	
2	Köklü ifadelerle toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemleri yapabilirim.	
3	Cebirsel ifadelerde $(a + b)^2$ ve $(a - b)^2$ tam kare özdeşliklerini kullanabilirim.	
4	Cebirsel ifadelerde $a^2 - b^2$ iki kare farkı özdeşliğini kullanabilirim.	
5	Doğrusal fonksiyonun cebirsel (denklem) temsilini anlayabilir ve inceleyebilirim.	
6	Doğrusal fonksiyonun grafik temsilini (doğru grafiği) anlayabilir ve inceleyebilirim.	
7	Verilen bir doğrusal fonksiyonun eğim, eksenleri kesim noktaları gibi nitel özelliklerine dair çıkarımlar yapabilirim.	
8	Temel doğrusal referans fonksiyonuna ($f(x) = x$) öteleme, yansıma dönüşümleri uygulayarak yeni fonksiyonlar türetebilirim.	
9	Doğrusal bir fonksiyonun cebirsel temsilinden grafik temsiline ve grafik temsilinden cebirsel temsiline geçiş yapabilirim.	

"Ön Öğrenme Kontrol Listesi"ni doldurduktan sonra aşağıda verilen "Kontrol Noktası" sorularını çözünüz ve cevaplarınızı kontrol ediniz.

KONTROL NOKTASI

SORU 1.

a) $4 \cdot 2^5 + 2^6 - \dfrac{2^{10}}{2^5}$

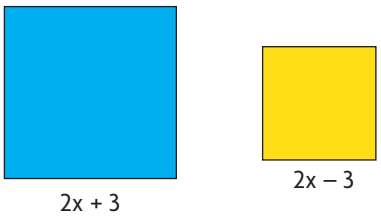
işleminin sonucunu bulunuz.

b) $\sqrt{12} + 5\sqrt{3} - \dfrac{\sqrt{75}}{\sqrt{25}}$

işleminin sonucunu bulunuz.

SORU 2.

Aşağıda birer kenar uzunlukları 2x + 3 birim ve 2x – 3 birim olan kareler verilmiştir.



Buna göre

a) Karelerin alanları toplamını bulunuz.

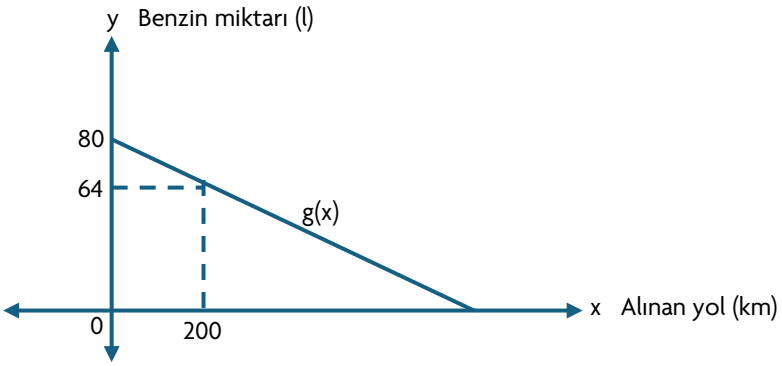
b) Karelerin alanlarının farkını $a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b)$ özdeşliğini kullanarak bulunuz.

SORU 3.

Bir taksinin aldığı mesafeye (km) bağlı olarak taksimetrenin gösterdiği ücreti (TL) ifade eden fonksiyon

$f:[0,1000]\to[100,20100]$, $f(x)=20x+100$ şeklinde tanımlanmaktadır.

Taksinin aldığı yola bağlı olarak başlangıçta dolu olan deposunda kalan benzin miktarındaki (l) değişimi ifade eden g(x) fonksiyonunun grafiği



olmak üzere aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) g(x) fonksiyonunu tanım ve görüntü kümesini bulup, cebirsel olarak yazınız.

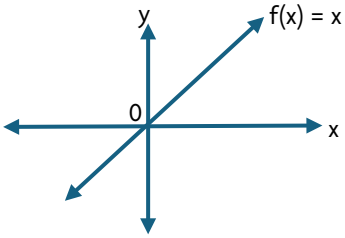
b) Taksiye binen bir müşterinin yolculuğu sırasında 4 litre yakıt kullanıldığına göre taksimetrede yazan ücreti hesaplayınız.

c) f(x) ve g(x) fonksiyonlarının eğimlerini bularak artan veya azalan olma durumlarını belirleyiniz.

d) f(x) fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

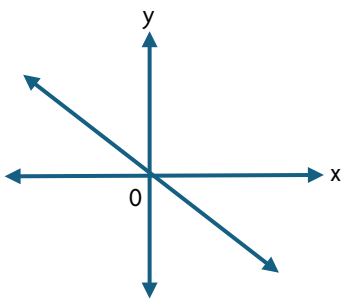
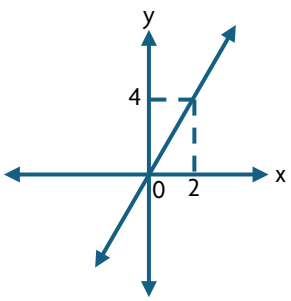
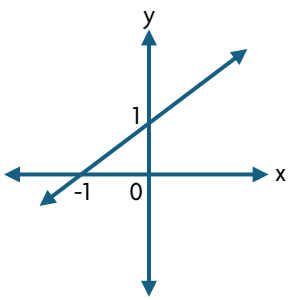
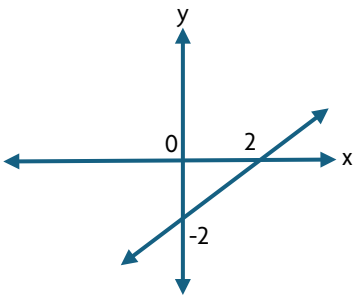
SORU 4.

Aşağıda gerçek sayılarda tanımlı f(x) = x doğrusal referans fonksiyonunun grafiği verilmiştir.



Aşağıda f(x) fonksiyonundan türetilen fonksiyonların cebirsel temsilleri ile grafik temsillerini eşleştiriniz.

CEBİRSEL TEMSİLİ			
I. f(x) + 1	**II.** f(x – 2)	**III.** –f(x)	**IV.** f(2x)

GRAFİK TEMSİLİ	
A) 	**B)** 
C) 	**D)** 

I. – ..... **II.**– ..... **III.** – ..... **IV.** – .....

GERİ BİLDİRİM

Bu geri bildirim sayesinde kendi cevabınızı kontrol edebilir, hatalarınızı düzelterek öğrenmenizi pekiştirebilirsiniz.

ÇÖZÜM 1.

a) $4\cdot 2^5+2^6-\dfrac{2^{10}}{2^5}=2^2\cdot 2^5+2^6-2^{10-5}$

$=2^5\cdot(2^2+2^1-1)$

$=5\cdot 2^5$

HATIRLATMA

a, b, c birer gerçek sayı; x, y sıfırdan farklı gerçek sayı; m, n birer tam sayı olsun. Üslü gösterimlerde aşağıdaki özdeşlikler bulunur.

- $a\cdot x^m+b\cdot x^m-c\cdot x^m=(a+b-c)\cdot x^m$
- $x^m\cdot x^n=x^{m+n}$
- $\dfrac{x^m}{x^n}=x^{m-n}$
- $\dfrac{x^m}{y^m}=\left(\dfrac{x}{y}\right)^m$
- $x^m\cdot y^m=(x\cdot y)^m$
- $\left(x^m\right)^n=x^{m\cdot n}$

b) $\sqrt{12}+5\sqrt{3}-\dfrac{\sqrt{75}}{\sqrt{25}}=2\sqrt{3}+5\sqrt{3}-\dfrac{5\sqrt{3}}{5}$

$=2\sqrt{3}+5\sqrt{3}-\sqrt{3}$

$=(2+5-1)\cdot\sqrt{3}$

$=6\sqrt{3}$

NOT

m, n, k , p pozitif tam sayı; m ≥ 2, n ≥ 2; x, y pozitif gerçek sayı ve a, b, c gerçek sayı olmak üzere

- $a\cdot\sqrt[n]{x}+b\cdot\sqrt[n]{x}-c\cdot\sqrt[n]{x}=(a+b-c)\cdot\sqrt[n]{x}$
- $\sqrt[n]{x}\cdot\sqrt[n]{y}=\sqrt[n]{x\cdot y}$
- $\dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}=\sqrt[n]{\dfrac{x}{y}}$
- $\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}}=\sqrt[m\cdot n]{x}$
- $\sqrt[n]{x^m}=\sqrt[n\cdot k]{x^{m\cdot k}}$
- $\sqrt[n]{x^m}=\sqrt[\frac{n}{p}]{x^{\frac{m}{p}}}$

(m ve n, p nin tam katıdır.)

ÇÖZÜM 2.

UYARI

Cebirsel ifadelerdeki değişkenlerin alacağı tüm gerçek sayı değerleri için sağlanan eşitliklere **özdeşlik** denir.

- İki terimin toplamının karesi özdeşliği: $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
- İki terimin farkının karesi özdeşliği: $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$
- İki terimin karelerinin farkı özdeşliği: $a^2-b^2=(a+b)\cdot(a-b)$

a) Karelerin alanlarının toplamı:

$(2x+3)^2+(2x-3)^2=4x^2+12x+9+4x^2-12x+9$

$=8x^2+18$

b) Karelerin alanlarının farkı:

$(2x+3)^2-(2x-3)^2=\left[(2x+3)+(2x-3)\right]\cdot\left[(2x+3)-(2x-3)\right]$

$=(2x+3+2x-3)\cdot(2x+3-2x+3)$

$=4x\cdot 6$

$=24x$

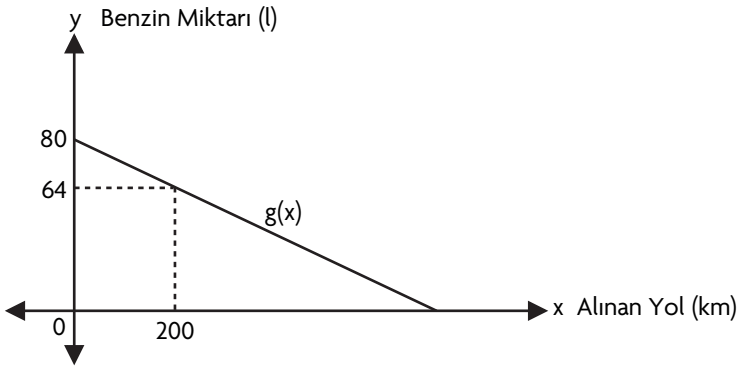
ÇÖZÜM 3.

a)

HATIRLATMA

a, r, k ∈ ℝ olmak üzere gerçek sayılarda f(x) = x şeklinde tanımlı doğrusal referans fonksiyonundan türetilen g(x) = a f(x ± r) ± k şeklinde ifade edilen fonksiyonlara **doğrusal fonksiyon** denir.

- m, n ∈ ℝ olmak üzere g: ℝ→ℝ, g(x) = a f(x ± r) ± k şeklindeki g doğrusal fonksiyonu düzenlenerek g(x) = mx + n biçiminde yazılabilir.



g(x) doğrusal fonksiyon olduğundan g(x) = mx + n dir.

(0, 80) ve (200, 64) noktaları g(x) üzerinde olduğundan

g(0) = 80'dir. Buradan m · 0 + n = 80 ise n = 80 bulunur.

g(200) = 64'tür. Buradan m · 200 + 80 = 64 ise $m = -\frac{2}{25}$ bulunur.

Bir fonksiyonda bağımsız değişkenin alabileceği tüm değerlerin oluşturduğu küme, fonksiyonun **tanım kümesi** olarak adlandırılır.
Bağımsız değişkenin alabileceği tüm değerlere karşılık bağımlı değişkenin alabileceği tüm değerlerin oluşturduğu küme, **görüntü kümesi** olarak adlandırılır.

g(x) fonksiyonunun x eksenini kestiği nokta (sıfırı) $g(x) = 0 \Rightarrow -\frac{2}{25}x + 80 = 0 \Rightarrow x = 1000$

b) Bu araç 80 l benzinle 1000 km yol alabilmektedir. Buna göre

1 l benzinle $\frac{1000}{80} = 12{,}5$ km

4 l benzinle 4 · 12,5 = 50 km yol alır.

Taksimetre de yazan ücret f(50) = 20.50 + 100 = 1100 TL olur.

c)

HATIRLATMA

- Fonksiyonun tanımlı olduğu belirli bir aralık için bağımsız değişkenin aldığı değerler artarken bağımlı değişkenin aldığı değerler de artıyorsa fonksiyon bu aralıkta **artan**dır.
- Fonksiyonun tanımlı olduğu belirli bir aralık için bağımsız değişkenin aldığı değerler artarken bağımlı değişkenin aldığı değerler azalıyorsa fonksiyon bu aralıkta **azalan**dır.
- m, n ∈ $\mathbb{R}$ olmak üzere g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, g(x) = mx + n şeklinde tanımlı g(x) fonksiyonunun eğimi m olmak üzere

  m > 0 için g fonksiyonu artandır.

  m < 0 için g fonksiyonu azalandır.

$f:[0,1000]\to[100,20100]$, $f(x)=20x+100$ fonksiyonunun eğimi m = 20 pozitif olduğundan f fonksiyonu tanımlı olduğu aralıkta artandır.

$g:[0,1000]\to[0,80]$, $g(x)=-\frac{2}{25}x+80$ fonksiyonunun eğimi $m=-\frac{2}{25}$ negatif olduğundan g fonksiyonu tanımlı olduğu aralıkta azalandır.

d) Öncelikle fonksiyonun eksenleri kestiği noktaları bulalım.

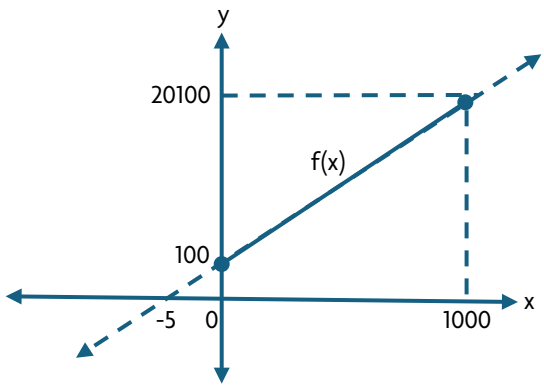
y = 20x + 100

x = 0 için y = 100 ve

y = 0 için x = –5 olduğundan fonksiyon,
(0, 100) ve (–5, 0) noktalarından geçer.

f(x) fonksiyonu [0, 1000] aralığında tanımlı olduğundan f(0) ve f(1000) uç değerleri bulunur.

f(0) = 100 ve f(1000) = 20100 olur. Bu iki nokta arasına çizilecek doğru grafiği oluşturur.



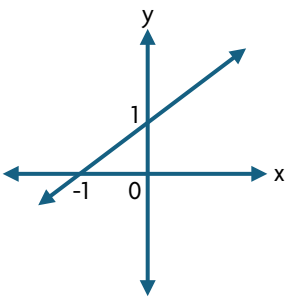
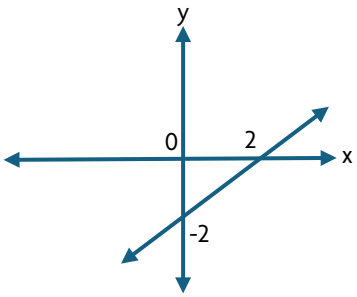
ÇÖZÜM 4.

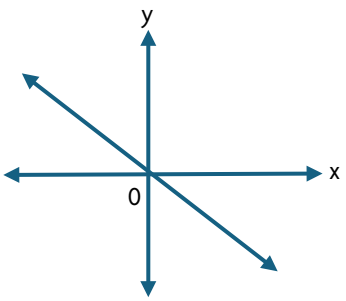
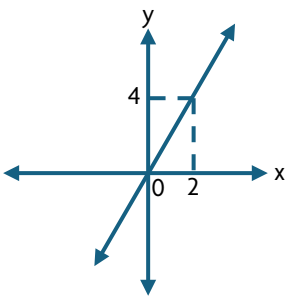
HATIRLATMA

a, b ∈ ℝ ve a ≠ 0 olmak üzere gerçek sayılarda g(x) = ax + b şeklinde tanımlı doğrusal fonksiyonların grafikleri çizilirken aşağıdaki adımlar izlenir.

f: ℝ→ℝ, f(x) = x olsun.

- m(x) = ax şeklinde tanımlı m fonksiyonun grafiği, f fonksiyonunun tanım aralığındaki her elemanı a katı ile eşleyecek şekilde çizilir.
- g: ℝ→ℝ, g(x) = ax + b şeklinde tanımlı fonksiyonun grafiği çizilirken b ∈ $\mathbb{R}^+$ ise m fonksiyonunun grafiği, y ekseni boyunca pozitif yönde b birim ötelenir. b ∈ $\mathbb{R}^-$ ise m fonksiyonunun grafiği, y ekseni boyunca negatif yönde |b| birim ötelenir.

I. f(x) + 1 = x + 1 fonksiyonu, doğrusal referans fonksiyonunun 1 birim yukarı ötelenmiş hâlidir.	**II.** f(x-2) = x-2 fonksiyonu, doğrusal referans fonksiyonunun 2 birim sağa ötelenmiş hâlidir.
C) 	**D)** 

III. –f(x) = –x fonksiyonu, doğrusal referans fonksiyonunun tanım kümesindeki tüm elemanların –1 katına eşlenmiş hâlidir.	**IV.** f(2x) = 2x fonksiyonu, doğrusal referans fonksiyonunun üzerindeki noktaların bağımsız değişkenlerinin 2 katına çıkmış hâlidir.
A) 	**B)** 

I. – C **II.– D.** **III. – A** **IV. – .B**

İLİŞKİLENDİRİYORUM

Amaç: Bu bölümde yeni öğreneceğiniz temayı; zihninizde var olan bilgileriniz, yaşantılarınız ve diğer derslerde öğrendiklerinizle ilişkilendirmenizi bekliyoruz.

Verilen örneği okuyunuz. Ardından soruları yanıtlayınız. Cevaplarınızı kendi yaşamınızdan ya da çevrenizden örneklerle destekleyiniz.

ÖRNEK

Yanda bir kemer köprünün görseli verilmiştir. Bu kemer köprünün genişliği ve yüksekliği, $f(x) = -x^2 + 9$ şeklinde tanımlanan f fonksiyonu ile dik koordinat sistemi üzerinde modellenmiştir.

Buna göre aşağıdaki soruları cevaplandırınız.

Cevaplarınız ile çözümleri karşılaştırarak karesel fonksiyonlar hakkında fikirlerinizi oluşturunuz.



a) Verilen fonksiyondan faydalanarak aşağıdaki x değerlerine karşılık gelen y değerlerini bularak tabloyu uygun biçimde doldurunuz.

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y							

b) Tablodaki x ve y değerlerini yukarıda verilen dik koordinat sisteminde işaretleyiniz.

c) Dik koordinat sisteminde işaretlediğiniz değerler üzerinden kemer köprünün yüksekliğinin hangi noktada en yüksek değeri aldığını ve bu değerin ne olduğunu bulunuz. Bu değerin fonksiyon için anlamı nedir? Açıklayınız.

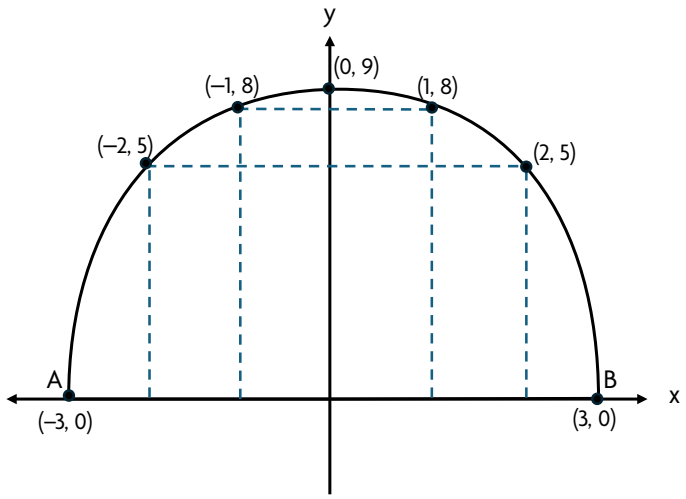
d) Dik koordinat sistemi üzerindeki A ve B noktaları arasındaki mesafe nasıl bulunabilir? A ve B noktalarının fonksiyon için ne anlama geldiğini açıklayınız.

ÇÖZÜM

a)

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	0	5	8	9	8	5	0

b)



Fizikte serbest düşen bir cismin hareketini, ekonomide maksimum kâr ya da minimum maliyet analizlerini ifade eden cebirsel temsiller karesel fonksiyon örnekleridir.

c) Köprünün yüksekliğinin en fazla olduğu nokta (0, 9) noktası olup değeri 9'dur. Bu nokta, fonksiyonun en büyük değerini aldığı nokta olduğu için fonksiyonun **maksimum noktası** olarak adlandırılır.

d) A ve B noktaları arasındaki mesafe, bu noktaların apsislerinin farkına eşit olur. Bu noktalar, x ekseni üzerinde olduğu için **fonksiyonun sıfırları** olarak adlandırılır.

UYGULAYARAK ÖĞRENİYORUM

Amaç: Bu bölümde bilgilerinizi etkinlikler ve uygulamalarla pekiştirmenizi, öğrenmeyi daha kalıcı hâle getirmenizi amaçlıyoruz.

Etkinliklerde verilen adımları dikkatle uygulayınız. Çalışmanızı güvenli ve düzenli bir şekilde yapınız.

KARESEL REFERANS FONKSİYONUNUN NİTEL ÖZELLİKLERİ

ÖRNEK

Aşağıda bir mühendisin tasarladığı gökdelenin görseli verilmiştir. Bu gökdelenin üst bölümü, $f(x) = x^2$ şeklinde karesel referans fonksiyon ile modellenmiştir.

Gerçek sayılarda tanımlı $f(x) = x^2$ fonksiyonu için aşağıdaki soruları cevaplayınız.



a) $f(x) = x^2$ fonksiyonunun cebirsel temsilinden faydalanarak aşağıdaki tabloyu doldurunuz ve bu değerleri kullanarak fonksiyon grafiğini çiziniz.

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y									

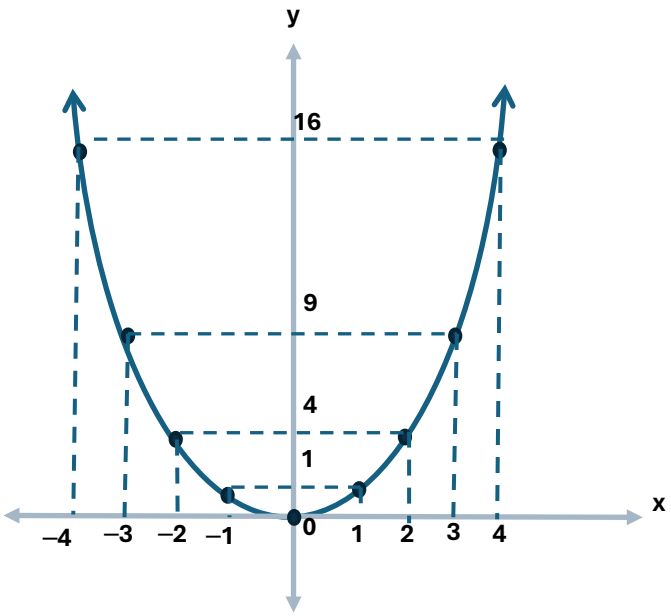
b) Aşağıdaki tabloda $f(x) = x^2$ fonksiyonunun nitel özelliklerini örneklerde olduğu gibi doldurunuz.

	CEVAP
Fonksiyonun tanım kümesini bulunuz.	$\mathbb{R}$
Fonksiyonun görüntü kümesini bulunuz.	
Fonksiyonun işaretini belirleyiniz.	$f(x) > 0$ şartını sağlayan aralık $\mathbb{R} - \{0\}$ dır. $f(x) < 0$ şartını sağlayan aralık yoktur.
Fonksiyonun sıfırını belirleyiniz.	
Fonksiyonun artan ve azalan olduğu aralıkları belirleyiniz.	
Fonksiyonun maksimum-minimum değerlerinin bulunup bulunmadığını, varsa bu değerleri hangi noktalarda aldığını belirleyiniz.	Maksimum değeri yoktur. Minimum değeri 0'dır. Minimum değeri aldığı nokta (0, 0) dır.
Fonksiyonun bire bir fonksiyon olup olmadığını belirleyiniz.	
Fonksiyonun örten olup olmadığını belirleyiniz.	Değer kümesindeki bazı f(x) değeri, tanım aralığındaki en az bir x değerine karşılık gelmediğinden fonksiyonu örten değildir.
Fonksiyonun tek ya da çift fonksiyon olup olmadığını belirleyiniz.	

ÇÖZÜM

a)

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	6	9	4	1	0	1	4	9	16



b)

	CEVAP
Fonksiyonun tanım kümesini bulunuz.	$\mathbb{R}$
Fonksiyonun görüntü kümesini bulunuz.	Görüntü kümesi $[0, \infty)$ dır.
Fonksiyonun işaretini belirleyiniz.	$f(x) > 0$ şartını sağlayan aralık $\mathbb{R} - \{0\}$ dır. $f(x) < 0$ şartını sağlayan aralık yoktur.
Fonksiyonun sıfırını belirleyiniz.	$f(x) = 0$ şartını sağlayan değer 0'dır.
Fonksiyonun artan ve azalan olduğu aralıkları belirleyiniz.	Azalan olduğu aralık $(-\infty, 0]$, artan olduğu aralık $[0, \infty)$ dır.
Fonksiyonun maksimum-minimum değerlerinin bulunup bulunmadığını, varsa bu değerleri hangi noktalarda aldığını belirleyiniz.	Maksimum değeri yoktur. Minimum değeri 0'dır. Minimum değeri aldığı nokta (0, 0) dır.
Fonksiyonun bire bir fonksiyon olup olmadığını belirleyiniz.	$\forall a,b \in \mathbb{R}$ için $a \neq b$ iken $f(a) \neq f(b)$ ise fonksiyon bire birdir. Değer aralığında bazı $f(x)$ değerlerine karşılık gelen farklı x değerleri olduğundan f bire bir değildir. Örneğin $f(-1) = f(1) = 1$ iken $-1 \neq 1$ olduğundan bire bir değildir.
Fonksiyonun örten olup olmadığını belirleyiniz.	Değer kümesindeki her $f(x)$ değeri, tanım aralığındaki en az bir x değerine karşılık gelmediğinden fonksiyonu örten değildir.
Fonksiyonun tek ya da çift fonksiyon olup olmadığını belirleyiniz.	$\forall x \in \mathbb{R}$ için $f(-x) = -f(x)$ ise f tek fonksiyon, $f(-x) = f(x)$ ise f çift fonksiyondur. Verilen tanım aralığına göre f fonksiyonu çift fonksiyondur.

NOT

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ şeklinde tanımlı f fonksiyonuna **karesel referans fonksiyon** denir. Karesel referans fonksiyonun grafiği **parabol** olarak adlandırılır. Gerçek sayılarda tanımlı karesel referans fonksiyonunun grafiği y eksenine göre simetrik olduğundan çift fonksiyondur.

ÖRNEK

$f: [-2, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ şeklinde tanımlı karesel fonksiyonu verilmiştir.

Buna göre f fonksiyonunun grafik temsilini çizerek

a) Fonksiyonun görüntü kümesini bulunuz.

b) Fonksiyonun işaretini bulunuz.

c) Fonksiyonun sıfırını bulunuz.

d) Fonksiyonun artan ve azalan olduğu aralıkları bulunuz.

e) Fonksiyonun maksimum-minimum değerlerini ve bu değerleri aldığı noktaları bulunuz.

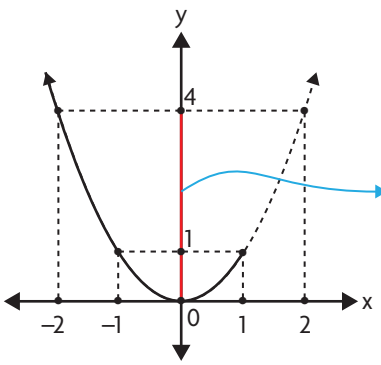
f) Fonksiyonun teklik-çiftlik durumunu inceleyiniz.

g) Fonksiyonun örtenliğini inceleyiniz.

h) Fonksiyonun bire birliğini inceleyiniz.

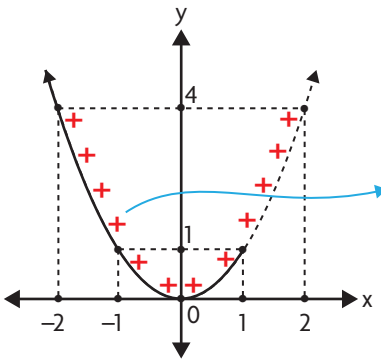
ÇÖZÜM

a)



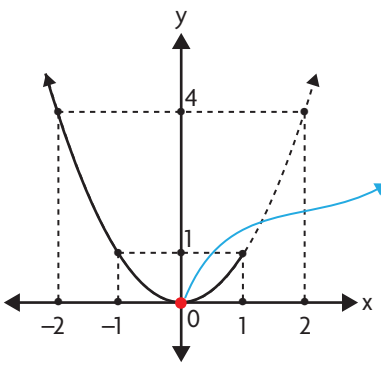
Görüntü kümesi, fonksiyonun tanım kümesinde yer alan elemanların görüntülerinin oluşturduğu kümedir. Burada görüntü kümesi [0, 4] olur.

b)



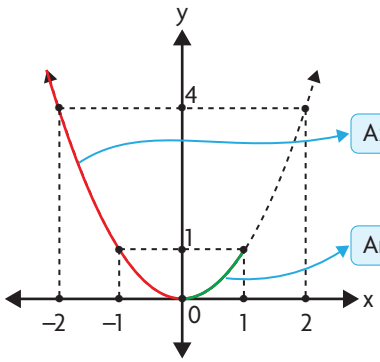
f(x) > 0 şartını sağlayan aralık, [–2, 1] – {0} dır.
f(x) < 0 şartını sağlayan aralık yoktur.

c)



f(x) = 0 şartını sağlayan x değeri 0'dır.

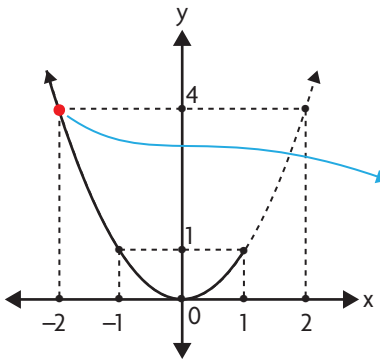
d)



Azalan olduğu aralık [–2, 0] dır.

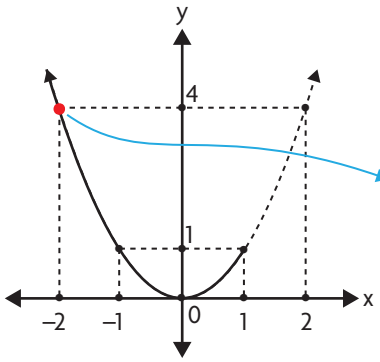
Artan olduğu aralık [0, 1] dır.

e)



Maksimum değer aldığı nokta (–2, 4) olup maksimum değeri 4 olur.

f)



$\forall x \in [-2, 1]$ için $f(-x) = -f(x)$ ise f tek fonksiyon, $f(-x) = f(x)$ ise f çift fonksiyondur.
$f(-2) = 4$ iken f fonksiyonu tanım aralığında $f(2)$ değerine sahip değildir. Dolayısıyla f fonksiyonu çift ya da tek değildir.

g) Değer kümesindeki her $f(x)$ değeri, tanım aralığındaki en az bir x değerine karşılık gelmediğinden f fonksiyonu örten değildir. Örneğin, $5 = f(a)$ olacak şekilde $a \in [-1, 2]$ yoktur.

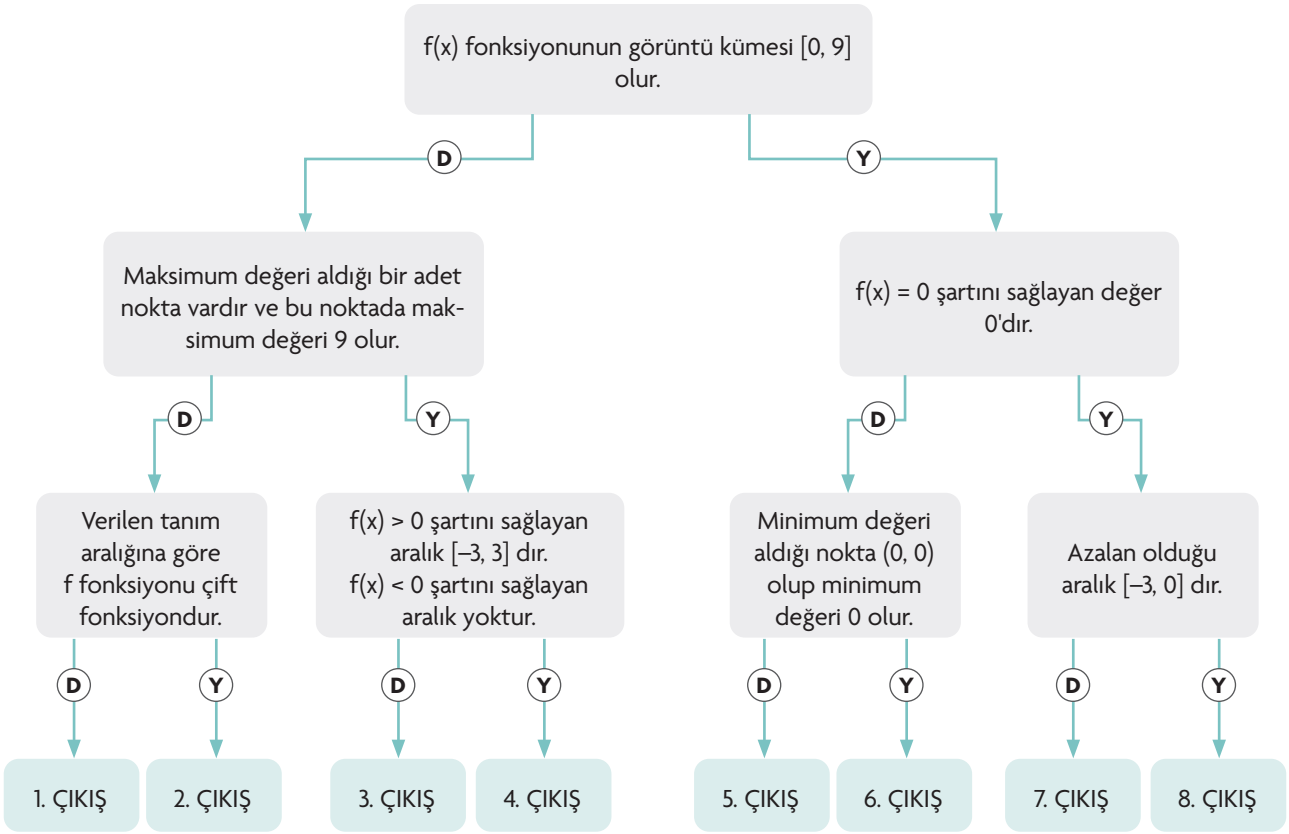
h) $\forall a,b \in \mathbb{R}$ için $a \neq b$ iken $f(a) \neq f(b)$ ise fonksiyon bire birdir. Örneğin, $f(-1) = f(1) = 1$ iken $-1 \neq 1$ olduğundan bire bir değildir.

SIRA SİZDE 1.

Aşağıda f(x) fonksiyonun nitel özellikleri ile ilgili Doğru (D)/Yanlış(Y) denklikleri içeren tanılayıcı dallanmış ağaç verilmiştir.

f: [–3, 3] → R, f(x) = x^2 şeklinde tanımlı karesel fonksiyonu ile ilgili verilen ifadenin doğru yazıldığını düşünüyorsanız (D) seçeneğini, yanlış olduğunu düşünüyorsanız (Y) seçeneğini seçmeniz gerekmektedir.

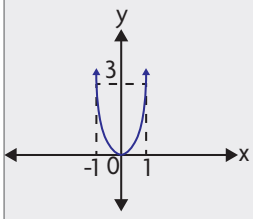
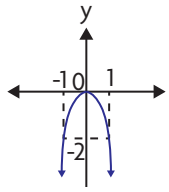
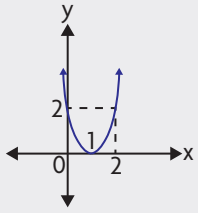
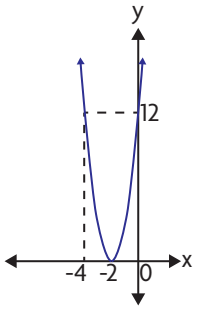
Buna göre hangi çıkışa ulaşmanız gerekir?

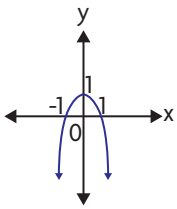
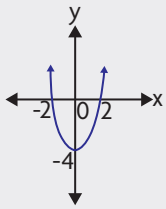
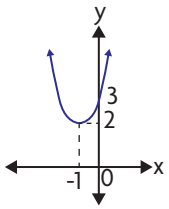


GERÇEK SAYILARDA TANIMLI $f(x) = x^2$ KARESEL REFERANS FONKSİYONUNDAN TÜRETİLEN $g(x) = a \cdot f(x \pm r) \pm k$ $(a, r, k \in R, a \neq 0)$ KARESEL FONKSİYONUNUN NİTEL ÖZELLİKLERİ

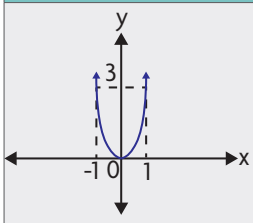
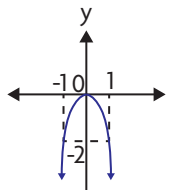
ÖRNEK

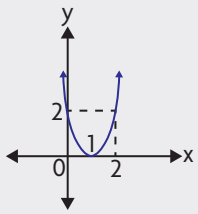
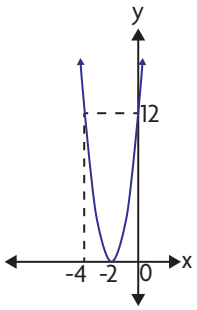
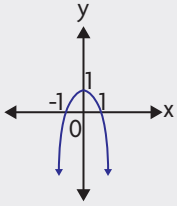
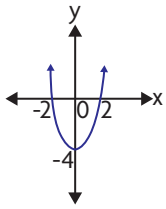
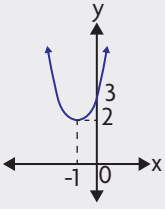
Aşağıdaki tabloda gerçek sayılarda tanımlı bazı karesel fonksiyonların cebirsel ve grafik temsilleri verilmiştir. Tabloda boş bırakılan bölümleri örneklerdeki gibi doldurunuz.

Grafik Temsili	Cebirsel Temsili $f(x) = a(x + r)^2 + k$	a, r ve k Değeri	Karesel Referans Fonksiyonunun ($f(x) = x^2$) Cebirsel Temsiline Uygulanan Cebirsel İşlem	Karesel Referans Fonksiyonunun ($f(x) = x^2$) Grafik Temsiline Uygulanan Dönüşüm	Fonksiyonun Simetri Ekseni	Fonksiyonun Tekliği/ Çiftliği
	$f(x) = 3x^2$	a = 3 r = 0 k = 0	Referans fonksiyonunun 3 katı alınmıştır.	Eğri üzerindeki noktaların değerlerini 3 katına eşler.	x = 0	Çift fonksiyon
	$f(x) = -2x^2$					
	$f(x) = 2(x-1)^2$	a = 2 r = –1 k = 0	Referans fonksiyonunun 2 katı alınıp bağımsız değişkenlerden1 çıkarılmıştır.	x ekseni boyunca pozitif yönde 1 birim öteleme dönüşümü uygulanıp noktaların değerleri 2 katına çıkmıştır.	x = 1	Tek veya çift fonksiyon değildir.
	$f(x) = 3(x + 2)^2$					

	$f(x) = -x^2 + 1$	a = –1 r = 0 k = 1	Referans fonksiyonun aldığı değerlerin – 1 katına 1 eklenmiştir.	x ekseni boyunca yansıma dönüşümü uygulandıktan sonra y ekseni boyunca pozitif yönde 1 birim öteleme dönüşümü uygulanmıştır.	x = 0	Çift fonksiyondur.
	$f(x) = x^2 - 4$					
	$f(x) = (x + 1)^2 + 1$					

ÇÖZÜM

Grafik Temsili	Cebirsel Temsili $f(x) = a(x + r)^2 + k$	a, r ve k Değeri	Karesel Referans Fonksiyonunun ($f(x) = x^2$) Cebirsel Temsiline Uygulanan Cebirsel İşlem	Karesel Referans Fonksiyonunun ($f(x) = x^2$) Grafik Temsiline Uygulanan Dönüşüm	Fonksiyonun Simetri Ekseni	Fonksiyonun Tekliği Çiftliği
	$f(x) = 3x^2$	a = 3 r = 0 k = 0	Referans fonksiyonun 3 katı alınmıştır.	Eğri üzerindeki noktaların değerlerini 3 katına eşler.	x = 0	
	$f(x) = -2x^2$	a = –2 r = 0 k = 0	Referans fonksiyonun –2 katı alınmıştır.	Eğri üzerindeki noktaların değerlerini –2 katına eşler.	x = 0	Çift fonksiyon

	$f(x) = 2(x-1)^2$	a = 2 r = –1 k = 0	Referans fonksiyonun 2 katı alınıp bağımsız değişkenlerden 1 çıkarılmıştır.	x ekseni boyunca pozitif yönde 1 birim öteleme dönüşümü uygulanıp noktaların değerleri 2 katına çıkmıştır.	x = 1	Tek veya çift fonksiyon değildir.
	$f(x) = 3(x + 2)^2$	a = 3 r = 2 k = 0	Referans fonksiyonun 3 katı alınıp bağımsız değişkenlere 2 eklenmiştir.	x ekseni boyunca negatif yönde 2 birim öteleme dönüşümü uygulanıp noktaların değerleri 3 katına çıkmıştır.	x = –2	Tek veya çift fonksiyon değildir.
	$f(x) = -x^2 + 1$	a = –1 r = 0 k = 1	Referans fonksiyonun aldığı değerlerin – 1 katına 1 eklenmiştir.	x ekseni boyunca yansıma dönüşümü uygulandıktan sonra y ekseni boyunca pozitif yönde 1 birim öteleme dönüşümü uygulanmıştır.	x = 0	Çift fonksiyondur.
	$f(x) = x^2 - 4$	a = 1 r = 0 k = –4	Referans fonksiyonun aldığı değerlere –4 eklenmiştir.	y ekseni boyunca negatif yönde 4 birim öteleme dönüşümü uygulanmıştır.	x = 0	Çift fonksiyondur.
	$f(x) = (x + 1)^2 + 1$	a = 1 r = 1 k = 1	Referans fonksiyonun tüm bağımsız değişkenlerine 1 eklenmiş daha sonra elde edilen noktaların değerlerine 1 eklenmiştir.	x ekseni boyunca negatif yönde 1 birim, y ekseni boyunca pozitif yönde 1 birim öteleme dönüşümü uygulanmıştır.	x = –1	Tek veya çift fonksiyon değildir.

NOT

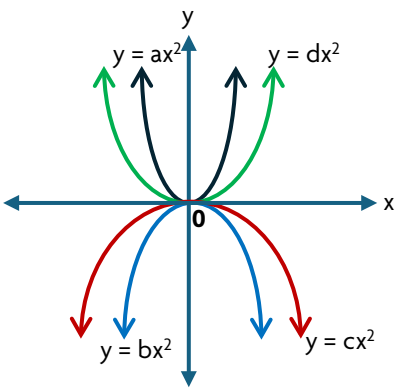
Gerçek sayılarda tanımlı $f(x) = x^2$ karesel referans fonksiyonundan türetilen $g(x) = a \cdot f(x \pm r) \pm k$ $(a, r, k \in R , a \neq 0)$ fonksiyonu için aşağıdaki önermeler geçerlidir.

- $a > 0$ ise parabolün kolları yukarı doğru, $a < 0$ ise parabolün kolları aşağı doğrudur.
- $|a|$ değeri büyüdükçe parabolün kolları birbirine yaklaşır, $|a|$ küçüldükçe parabolün kolları birbirinden uzaklaşır.
- $r > 0$ ise referans fonksiyona göre x ekseninde $|r|$ birim sola, $r < 0$ ise referans fonksiyona göre x ekseninde $|r|$ birim sağa öteleme dönüşümü uygulanır.
- $k > 0$ ise referans fonksiyona göre y ekseninde $|k|$ birim yukarı, $k < 0$ ise referans fonksiyona göre y ekseninde $|k|$ birim aşağı öteleme dönüşümü uygulanır.

SIRA SİZDE 2.

a, b, c ve d gerçek sayılar olmak üzere

$y = ax^2$, $y = bx^2$, $y = cx^2$ ve $y = dx^2$ karesel fonksiyonlarının grafikleri aşağıda verilmiştir.



Buna göre a, b, c, ve d gerçek sayılarını küçükten büyüğe doğru sıralayınız.

ÖRNEK

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2.(x-2)^2 - 8$ karesel fonksiyonu verilmiştir.

Buna göre f fonksiyonunun grafik temsilini çizerek

a) Fonksiyonun görüntü kümesini bulunuz.

b) Fonksiyonun işaretini bulunuz.

c) Fonksiyonun eksenleri kestiği noktaları bulunuz.

d) Fonksiyonun artan ve azalan olduğu aralıkları bulunuz.

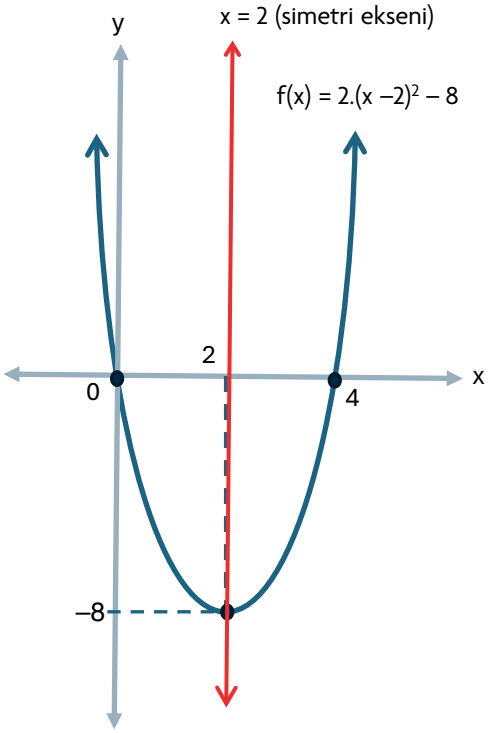
e) Fonksiyonun maksimum-minimum değerlerinin ve bu değerleri aldığı noktaları bulunuz.

f) Fonksiyonun bire birliğini inceleyiniz.

g) Fonksiyonun örtenliğini inceleyiniz.

h) Fonksiyonun teklik-çiftlik durumunu inceleyiniz.

ÇÖZÜM



r = –2 → Referans fonksiyonun tüm bağımsız değişkenlerine –2 eklenmiştir. x ekseni boyunca pozitif yönde 2 birim öteleme dönüşümü yapılmıştır.

a = 2 → Elde edilen fonksiyonun değerleri 2 katına çıkarılmıştır.

k = –4 → Elde edilen noktaların değerlerinden 8 çıkarılmıştır. y ekseninde negatif yönde 8 birim öteleme dönüşümü uygulanmıştır.

a) Görüntü kümesi $[-8, \infty)$ dır.

b) $f(x) > 0$ şartını sağlayan aralık $(-\infty, 0) \cup (4, \infty)$ dır.

$f(x) < 0$ şartını sağlayan aralık $(0, 4)$ dır.

c) $f(x) = 2.(x-2)^2 - 8$

$x = 0$ için $y = 2 \cdot (0-2)^2 - 8$

$y = 2 \cdot (-2)^2 - 8$

$y = 8 - 8$

$y = 0$

$y = 0$ için $0 = 2 \cdot (x-2)^2 - 8$

$8 = 2 \cdot (x-2)^2$

$4 = (x-2)^2$

$2 = x - 2$ veya $-2 = x - 2$

$4 = x$ veya $0 = x$

x eksenini kestiği noktalar (sıfırları) (0, 0) ve (4, 0) noktalarıdır.

y eksenine kestiği nokta (0, 0) dır.

d) Azalan olduğu aralık $(-\infty, 2]$ dır.

Artan olduğu aralık $[2, \infty)$ dır

e) Maksimum değeri yoktur.

Minimum değeri –8'dir. Minimum değer aldığı nokta (2, –8) dır.

f) $\forall a,b \in \mathbb{R}$ için $a \neq b$ iken $f(a) \neq f(b)$ ise fonksiyon bire birdir. $f(0) = f(4) = 0$ iken $0 \neq 4$ olduğundan bire bir değildir.

g) Değer kümesindeki her f(x) değeri, tanım aralığındaki en az bir x değerine karşılık gelmediğinden fonksiyonu örten değildir. Örneğin, $-10 = f(a)$ olacak şekilde $a \in \mathbb{R}$ yoktur.

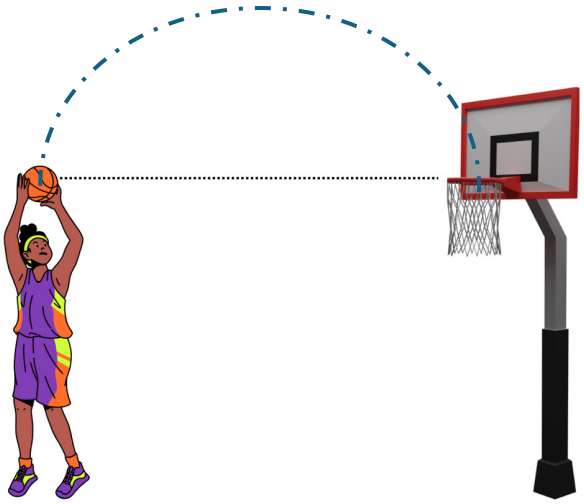
h) $\forall x \in \mathbb{R}$ için $f(-x) = -f(x)$ ise f tek fonksiyon, $f(-x) = f(x)$ ise f çift fonksiyondur. Verilen tanım aralığına göre f fonksiyonu tek veya çift değildir. Fonksiyonun çift fonksiyon olması için simetri ekseninin $x = 0$ doğrusu olması gerekir. Örneğin, $f(1) = -6$ iken $f(-1) = 10$ olur.

a, r, k ∈ ℝ ve a ≠ 0 olmak üzere $f(x) = x^2$ karesel referans fonksiyonundan türetilen $g(x) = a.(x + r)^2 + k$ fonksiyonunun grafiği çizilirken şu adımlar uygulanır:

1. $f(x) = x^2$ referans fonksiyonu x ekseni boyunca r birim ötelenerek $m(x) = (x + r)^2$ fonksiyonu çizilir.
2. $m(x) = (x + r)^2$ fonksiyonunun değerlerini a katına eşleyen $n(x) = a \cdot (x + r)^2$ fonksiyonu çizilir.
3. $n(x) = a \cdot (x + r)^2$ fonksiyonu y ekseni boyunca k birim ötelenerek $g(x) = a \cdot (x + r)^2 + k$ fonksiyonu çizilir.

SIRA SİZDE 3.

Aşağıda bir basketbol oyuncusunun attığı topun havadaki hareketini gösteren görsel verilmiştir. Topun bu hareketi, zamana bağlı (sn.) yerden yüksekliğini (m) ifade eden $f(t) = -\frac{1}{4}(t-2)^2 + 3$ karesel fonksiyonu ile modellenmiştir.



Buna göre

a) Basketbol potasının yüksekliğini hesaplayınız.

b) Topun maksimum yüksekliğini ve bu yüksekliğe kaçıncı saniyede ulaştığını hesaplayınız.

c) Topun potaya ulaşana kadar kaç saniye havada kaldığını hesaplayınız.

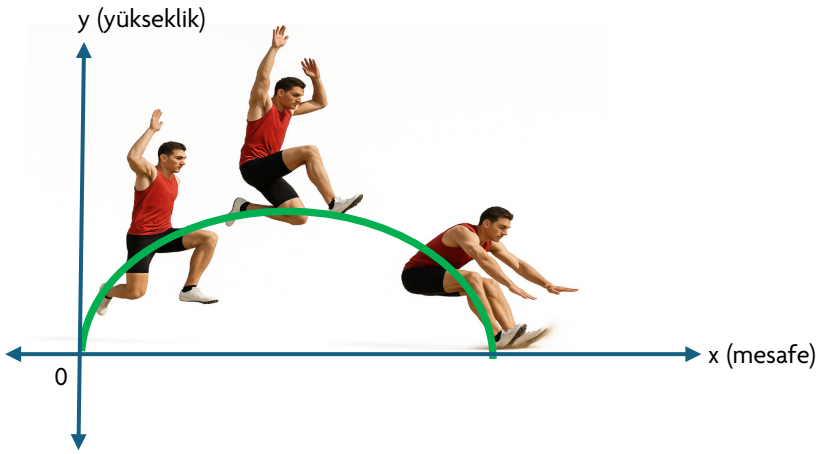
d) Topun kaç saniye boyunca yukarı doğru ve kaç saniye boyunca aşağı doğru hareket ettiğini hesaplayınız.

a, r, k ∈ ℝ ve a ≠ 0 olmak üzere f(x) = a.(x + r)² + k tam kare formunda verilen fonksiyonun nitel özellikleri şunlardır:

a > 0 ise	**a < 0 ise**
Tanım kümesi ℝ dir.	Tanım kümesi ℝ dir.
Görüntü kümesi [k, ∞) dır.	Görüntü kümesi (– ∞, k] dır.
Azalan olduğu aralık (– ∞, –r] dır.	Azalan olduğu aralık [–r, ∞) dır.
Artan olduğu aralık [–r, ∞) dır.	Artan olduğu aralık (– ∞, –r] dır.
Maksimum değeri yoktur.	Maksimum noktası (–r, k), maksimum değeri k dir..
Minimum noktası (–r, k), minimum noktası k dir.	Minimum değeri yoktur.
Bire bir değildir.	Bire bir değildir.
Örten değildir.	Örten değildir.
Simetri ekseni x = –r doğrusudur.	Simetri ekseni x = –r doğrusudur.

SIRA SİZDE 4.

Bir uzun atlama sporcusunun atlayış sırasında çizdiği rota, dik koordinat düzleminde y = f(x) parabolü ile modellenmiştir. Bu modelde sporcunun sıçrayışa başladığı orijin noktası ile sıçrayışı tamamladığı nokta arasında 6 metre mesafe olup sporcu en fazla 1 metre yüksekliğe ulaşmıştır.



Buna göre

a) Parabolün maksimum noktasını ve simetri ekseninin denklemini yazınız.

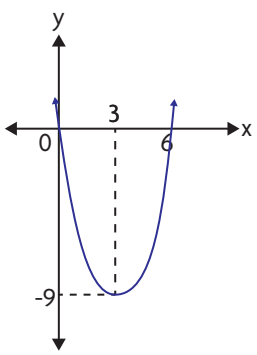
b) y = f(x) karesel fonksiyonunun cebirsel temsilini bulunuz.

c) Sporcunun yerden en az 64 cm yükseklikte olduğu aralığı bulunuz.

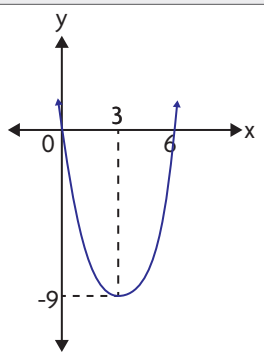
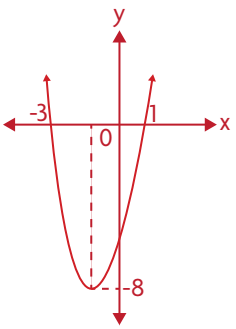
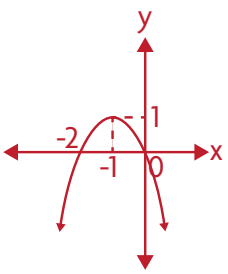
CEBİRSEL TEMSİLİ $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0)$ GENEL FORMUNDA OLAN KARESEL FONKSİYONLARIN $f(x) = a(x \pm r)2 \pm k$ $(r, k \in \mathbb{R})$ TAM KARE FORMUNA DÖNÜŞTÜRÜLMESİ

ÖRNEK

Aşağıdaki tabloda gerçek sayılarda tanımlı bazı karesel fonksiyonların cebirsel temsilleri verilmiştir. Tabloda boş bırakılan bölümleri örnekteki gibi doldurunuz.

Cebirsel Temsili	$f(x) = x^2 - 6x$	$g(x) = 2x^2 + 4x - 6$	$h(x) = -x^2 + 2x$
Tam Kareye Tamamlama	$f(x) = x^2 - 6x + 9 - 9$ $f(x) = (x-3)^2 - 9$		
Sıfırları	$(x-3)^2 - 9 = 0$ $(x-3)^2 = 9$ $x-3 = 3$ veya $x-3 = -3$ $x = 6$ veya $x = 0$		
Artan-Azalan Olduğu Aralıklar	Azalan Olduğu Aralık: $(-\infty, 3]$ Artan Olduğu Aralık: $[3, \infty)$		
Maksimum Minimum Noktası ve Değer	Maksimum noktası ve değeri yoktur. Minimum noktası (3, –9) olup değeri –9 olur.		
Simetri Ekseni	x = 3 doğrusu		
Grafik Temsili			

ÇÖZÜM

Cebirsel Temsili	$f(x) = x^2 - 6x$	$g(x) = 2x^2 + 4x - 6$	$h(x) = -x^2 + 2x$
Tam Kareye Tamamlama	$f(x) = x^2 - 6x + 9 - 9$ $f(x) = (x-3)^2 - 9$	$g(x) = 2(x^2 + 2x - 3)$ $g(x) = 2(x^2 + 2x + 1 - 1 - 3)$ $g(x) = 2[(x + 1)^2 - 4]$ $g(x) = 2(x + 1)^2 - 8$	$h(x) = -(x^2 - 2x)$ $h(x) = -(x^2 - 2x + 1 - 1)$ $h(x) = -[(x - 1)^2 - 1]$ $h(x) = -(x + 1)^2 + 1$
Sıfırları	$(x-3)^2 - 9 = 0$ $(x-3)^2 = 9$ $x-3 = 3$ veya $x-3 = -3$ $x = 6$ veya $x = 0$	$2(x + 1)^2 - 8 = 0$ $2(x + 1)^2 = 8$ $(x + 1)^2 = 4$ $x + 1 = 2$ veya $x + 1 = -2$ $x = 1$ veya $x = -3$	$-(x + 1)^2 + 1 = 0$ $(x + 1)^2 = 1$ $x + 1 = 1$ veya $x + 1 = -1$ $x = 0$ veya $x = -2$
Artan-Azalan Olduğu Aralıklar	Azalan Olduğu Aralık: $(-\infty, 3]$ Artan Olduğu Aralık: $[3, \infty)$	Azalan Olduğu Aralık : $(-\infty, -1]$ Artan Olduğu Aralık : $[-1, \infty)$	Artan Olduğu Aralık: $(-\infty, -1]$ Azalan Olduğu Aralık: $[-1, \infty)$
Maksimum Minimum Noktası ve Değer	Maksimum noktası ve değeri yoktur. Minimum noktası (3, –9) olup değeri –9 olur.	Maksimum noktası ve değeri yoktur. Minimum noktası (–1, –8) olur.	Minimum noktası ve değeri yoktur. Maksimum noktası (–1, 1) olup değeri 1 olur.
Simetri Ekseni	$x = 3$	$x = -1$	$x = -1$
Grafik Temsili			

SIRA SİZDE 5.

Gerçek sayılarda tanımlı ve gerçek sayı değerli, cebirsel temsili $f(x) = x^2 + 4x - 5$ genel formunda olan karesel fonksiyon verilmiştir.

Buna göre

a) Fonksiyonun grafiğini karesel referans fonksiyonuna yapılan dönüşümlerden faydalanarak çiziniz.

b) Fonksiyonun sıfırlarını bulunuz. Yoksa neden olmadığını açıklayınız.

c) Fonksiyonun artan ve azalan olduğu aralıkları bulunuz.

d) Fonksiyonun maksimum veya minimum değerlerini bulunuz.

ÖRNEK

Bir kafe sahibi, fiyat değişiminin müşteri sayısını nasıl etkilediğini görmek ve toplam gelirini en yüksek seviyeye taşıyacak fiyatı belirlemek istemektedir. Yapılan pazar araştırmasına göre çay fiyatının her 5 TL lik artışına karşılık, çay satın alan müşteri sayısında 10 kişilik azalma meydana gelmekte, çay fiyatının her 5 TL lik azalmasına karşılık ise çay satın alan müşteri sayısı 8 kişi artmaktadır. Kafe sahibi bu özel karışım çayı şu anda 150 TL ücretle günde 180 kişiye satmaktadır.

Buna göre

a) x, her bir 5 TL'lik fiyat artışını ifade etmek üzere müşteri sayısını ve çayın yeni fiyatını cebirsel olarak ifade ediniz.

b) Elde ettiğiniz cebirsel ifadelerle kafe sahibinin bu çaydan elde edeceği gelir fonksiyonu g(x) i modelleyiniz.

c) g fonksiyonunu, tam kareye tamamlama yöntemiyle $g(x) = a(x + r)^2 + k$ biçiminde yazınız.

ç) Elde ettiğiniz gelir fonksiyonundan yararlanarak kafe sahibinin çayı kaç TL'den satarsa maksimum gelire ulaşacağını hesaplayınız.

d) Kafe sahibinin bu çaydan bir günde elde edeceği maksimum geliri bulunuz.

ÇÖZÜM

a) Çay fiyatı: $150 + 5x$, Müşteri sayısı : $180 - 10x$

b) $g(x) = (150 + 5x) \cdot (180 - 10x)$

$g(x) = -50x^2 - 600x + 27\,000$

c) $g(x) = -50x^2 - 600x + 27\,000$

$g(x) = -50(x^2 + 12x - 540)$

$g(x) = -50(x^2 + 12x + 36 - 576)$

$g(x) = -50[(x + 6)^2 - 576]$

$g(x) = -50(x + 6)^2 + 28\,800$

ç) $g(x) = -50(x + 6)^2 + 28\,800$ fonksiyonunun en büyük değeri aldığı nokta da $x = -6$ olur. Buna göre

Çay fiyatı: $150 + 5 \cdot (-6) = 120$ TL olur.

d) Maksimum gelir, maksimum noktasının ordinatı olup miktarı 28 800 TL olur.

SIRA SİZDE 6.

Bir internet şirketi en fazla 1000 müşteriye hizmet verebilmekte ve aylık internet ücretini 40 TL olarak belirlediğinde bu sayıya ulaşabilmektedir. Bu şirket, aylık internet ücretinde yaptığı her 5 TL'lik artış sonrasında müşteri sayısında 50 azalma olduğunu gözlemlemiştir.

Bu şirket, aylık internet ücretinden elde edeceği toplam gelirin en fazla olması için aylık internet ücretini kaç TL olarak belirlemelidir? (2018 - AYT)

A) 55 B) 60 C) 65 D) 70 E) 75

HARİZMİ'NİN TAMKAREYE TAMAMLAMA YÖNTEMİ

Harizmi, 9. yüzyılın ilk yarısında Bağdat'ta yaşamış; matematik, coğrafya ve astronomi ile ilgilenmiş bir bilim adamıdır. Bu döneme kadar matematiksel çalışmalar ihtiyaca dayalı, hesap temelli ve görünen dünyayı anlama-açıklama çabası olarak geometri üzerinden ilerlemiştir. Her ne kadar kendisinden önce bir sözlü cebir geleneği bulunuyor olsa da sistemli bir kitap hâlinde tasarlanan ve cebir ismini taşıyan ilk eser, Harizmi'nin Kitabü'l-Cebr ve'l-Mukâbele adlı eseridir. Harizmi'nin bu eseriyle asıl ününü kazandığı cebir ilmi, ilk defa hesap ilminden ayrılmış ve bir ilmin adı olarak kullanılmıştır. Kendisinden sonra gelen bütün İslam cebircileri; bu eseri kendi çalışmalarına temel almışlar, içerdiği problem ve örnekleri aynen korumuşlardır.

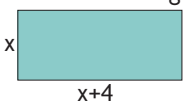
Harizmi'nin eserinde ortaya koyduğu tamkareye tamamlama yöntemi, hem geometrik hem de cebirsel yaklaşımları birleştiren yenilikçi bir çözüm metodudur. Henüz sembolik gösterimin gelişmediği bir çağda bu yöntemi ikinci dereceden denklemlerin çözümü için sistematik bir biçimde kullanmış ve ikinci dereceden denklem çözümlerine dair özel bir bakış açısının öncüsü olmuştur. Bu yöntemde Harizmi, ikinci dereceden denklemleri bir kare veya dikdörtgenin alanı olacak şekilde geometrik modellerle temsil ederek eksik alanları tamamlar ve böylece tamkare ifadeye ulaşır. Bu yaklaşım, sadece cebirsel bir çözüm tekniği değil aynı zamanda denklemleri somut geometrik formlar üzerinden kavramaya imkân veren didaktik bir yenilik olma niteliği taşır.

ÖRNEK

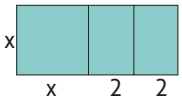
$x^2 + 4x = 21$ denklemi verilmiştir. **Harizmi'nin tamkareye tamamlama yöntemi ile x değerini bulunuz.**

ÇÖZÜM

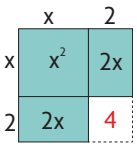
1. Adım: Bir kenar uzunluğu x, diğer kenar uzunluğu x + 4 birim olan dikdörtgen çizilir.



2. Adım: 1. Adımda elde edilen dikdörtgen, bir kenar uzunluğu x birim olan kare ile kenar uzunlukları x ve 2 birim olan iki dikdörtgene ayrılır.



3. Adım: Dikdörtgenler karenin paralel olmayan kenarlarına yapıştırılır.



4. Adım: 3. Adımda elde edilen karenin alanı

$(x + 2)^2 = \underbrace{x^2 + 4x}_{21} + 4$ $\qquad (x + 2)^2 = 25$

$x + 2 = 5 \Rightarrow x = 3$

NOT

Dönemin matematiksel birikiminde negatif değer bilgisi kavramsallaşmadığı ve somut evrende gerçekliği bulunmadığı için henüz kullanılmamaktaydı.

SIRA SİZDE 7.

$x^2 + 6x = 40$ denklemi verilmiştir. **Harizmi'nin tamkareye tamamlama yöntemi ile x değerini bulunuz.**

ÖRNEK

Yukarı doğru atılan bir cisim belirli bir süre yükselir. Maksimum yüksekliğe ulaştıktan sonra cisim, yer çekiminin etkisiyle düşmeye başlar. Cismin zamana (t) bağlı yüksekliği y(t);

y_0 = Atılma anında cismin yerden yüksekliği (metre),

v_0 = cismin atılma hızı (m/sn.),

g = yerçekimi ivmesi (g=10 m/sn.^{2}) olmak üzere

$y(t) = y_0 + v_0 \cdot t - \frac{1}{2}gt^2$ şeklinde ifade edilir.

Yerden 60 metre yükseklikte bulunan bir cisim, 20 m/sn. hızla yukarı doğru atılmaktadır.

Buna göre cismin

a) Maksimum yüksekliğe kaçıncı saniyede ulaştığını hesaplayınız.

b) Ulaştığı maksimum yüksekliği hesaplayınız.

c) Kaç saniye havada kaldığını hesaplayınız.

ÇÖZÜM

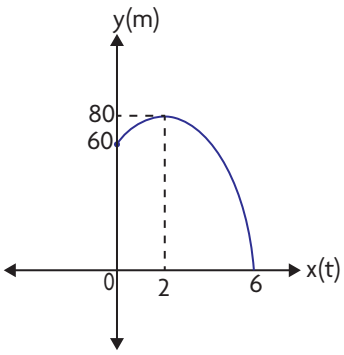
$y_0 = 60$, $v_0 = 20$, $g = 10$ değerleri denklemde yerlerine yazılırsa

$y(t) = 60 + 20t - 5t^2$ elde edilir. Bu fonksiyonu tamkareye tamamlama yöntemiyle düzenleyelim.

$y(t) = -5(t^2 - 4t - 12)$

$y(t) = -5[(t^2 - 4t + 4) - 16]$

$y(t) = -5(t - 2)^2 + 80$



a) Cisim maksimum yüksekliğe 2 saniyede ulaşır.

b) Cismin ulaştığı maksimum yükseklik 80 metredir.

c) $-5(t - 2)^2 + 80 = 0$

$80 = 5(t - 2)^2$

$16 = (t - 2)^2$

$4 = t - 2$ veya $-4 = t - 2$

$6 = t$ veya ~~$-2 = t$~~ (zaman negatif değer alamayacağı için) cisim 6 saniye havada kalmıştır.

SIRA SİZDE 8.

Genler, kalıtsal özellikleri belirleyen DNA bölümleridir. Her genin birden fazla biçimi bulunabilir; işte bu farklı gen versiyonlarına alel denir. Bir birey, her gen için genellikle iki alel taşır: biri anneden, biri babadan gelir. Eğer bu iki alel aynıysa birey homozigot (AA veya aa), farklıysa heterozigot (Aa) olarak adlandırılır. Popülasyon genetiğinde, bir alelin toplumdaki görülme sıklığına alel frekansı denir ve bu frekanslar Hardy–Weinberg ilkesi kullanılarak genotip oranlarını (AA, Aa, aa) hesaplamada kullanılır.

Bir koruma biyolojisi ekibi, küçük bir ada popülasyonunda tek lokus–iki alel (A/a) bir gen için genetik çeşitliliği artırmak istiyor. Popülasyonda A alelinin oranı p, a alelinin oranı q olmak üzere

AA genotipi oranı: p^2

Aa genotipi oranı: 2pq

aa genotipi oranı: q^2 ile hesaplanmaktadır.

Buna göre heterizigot (Aa) genoitipi olan bireylerin oranının en az %18 olması için p oranı hangi aralıkta değer almalıdır?

KARESEL FONKSİYONLARIN NİTEL ÖZELLİKLERİ HAKKINDA ELDE EDİLEN ÖNERMELERE İLİŞKİN İSPAT YAPMA

ÖRNEK

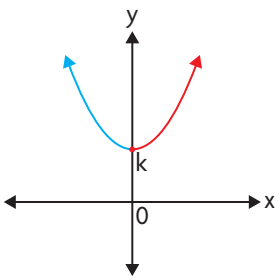
$k \in \mathbb{R}$ olmak üzere gerçek sayılarda tanımlı $g(x) = x^2 + k$ fonksiyonunun artan olduğu aralık $[0, \infty)$ dır.

önermesinin doğruluğunu grafik ve cebirsel yaklaşım ile gösteriniz.

ÇÖZÜM

Grafiksel Doğrulama

$g(x) = x^2 + k$ fonksiyonunun grafiği, $f(x) = x^2$ referans fonksiyonunun y ekseninde k birim ötelenmesiyle elde edilir.



Artan olduğu aralık $[0 , \infty)$ dır.

Cebirsel İspat

Bir g(x) fonksiyonu, bir aralıkta artan ise bu aralıktan seçilen her x_1 ve x_2 değeri için eğer $x_1 < x_2$ ise $g(x_1) < g(x_2)$ olmak zorundadır.

$0 < x_1 < x_2$ olsun.

$x_1^2 < x_2^2$

$x_1^2 + k < x_2^2 + k \quad (k \in \mathbb{R})$

$g(x_1) < g(x_2)$ olduğundan g(x) fonksiyonu seçilen aralıkta artandır.

SIRA SİZDE 9.

$k \in \mathbb{R}$ olmak üzere gerçek sayılarda tanımlı $g(x) = x^2 + k$ fonksiyonu birebir değildir.

önermesinin doğruluğunu grafik ve cebirsel yaklaşım ile gösteriniz.

GERİ BİLDİRİM

Bu geri bildirim sayesinde kendi cevabınızı kontrol edebilir, hatalarınızı düzelterek öğrenmenizi pekiştirebilirsiniz.

SIRA SİZDE 1.

ÇÖZÜM

f: [–3, 3] → R, $f(x) = x^2$ şeklinde tanımlı karesel fonksiyonu verilmiştir.

f(x) fonksiyonunun görüntü kümesi [0, 9] olur. D → Bu ifade doğrudur.

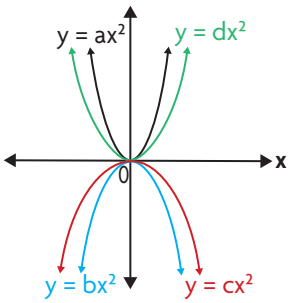
Maksimum değeri aldığı bir adet nokta vardır ve bu noktada maksimum değeri 9 olur. Y → Bu ifade yanlıştır. Çünkü maksimum değeri aldığı (-3, 9) ve (3, 9) iki adet nokta vardır.

f(x) > 0 şartını sağlayan aralık [–3, 3] dır. f(x) < 0 şartını sağlayan aralık yoktur. Y → Bu ifade yanlıştır.
Çünkü [-3, 3] aralığında f(x) = 0 şartını sağlayan (0, 0) noktası vardır.

D, Y, Y adımları sonucunda 4 numaralı çıkışa ulaşılır.

SIRA SİZDE 2.

ÇÖZÜM



$f(x) = ax^2$ karesel fonksiyonunun grafiğinde a pozitif ise kollar yukarı doğru, a negatif ise kollar aşağı doğrudur. |a| değeri büyüdükçe fonksiyonun aldığı değer büyüdüğü için parabolün kolları seçilen x değeri için birbirine daha yakın olur.

Buna göre a >d > 0 ve c < b < 0 olduğu için c < b < d < a olur.

SIRA SİZDE 3.

ÇÖZÜM

a) $f(t) = -\frac{1}{4}(t-2)^2 + 3$ fonksiyonunda topun potaya atıldığı andaki yüksekliği ile potanın yüksekliği birbirine eşittir.

$f(0) = -\frac{1}{4}(0-2)^2 + 3$

$f(0) = -\frac{1}{4} \cdot 4 + 3$

$f(0) = 2$

b) Fonksiyonunun en büyük değeri aldığı nokta (2, 3) olup noktanın maksimum değeri 3 olur. Bu değere 2. saniyede ulaşır.

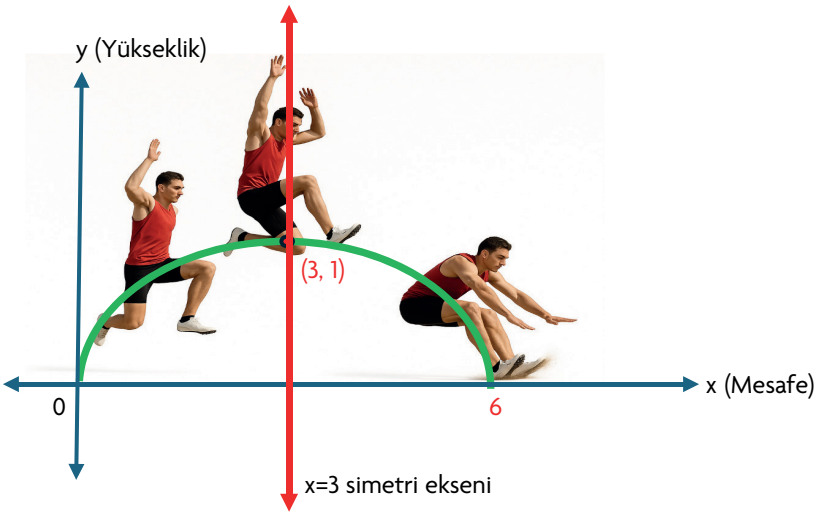
c) Fonksiyonun en büyük değeri aldığı (2, 3) noktası simetri ekseni üzerindedir. Top bu noktaya gelene kadar geçen süre ile bu noktadan potaya gidene kadar geçen süre aynı olduğundan top potaya ulaşana kadar 4 saniye geçer.

d) Parabol kolları aşağı doğru olan bir parabol olduğundan [0, 2] aralığında top yukarı doğru, [2, 4] aralığında top aşağı doğru hareket eder.

SIRA SİZDE 4.

ÇÖZÜM

Karesel fonksiyonun cebirsel temsili $f(x) = a.(x + r)^2 + k$ şeklindedir.



a) Simetri ekseni, fonksiyonun sıfırlarına eşit uzaklıkta olduğundan x = 3 doğrusudur. En yükseğe ulaştığı noktanın apsis değeri 3, ordinat değeri 1 olduğundan maksimum noktası (3, 1) olur.

b) $f(x) = a.(x + r)^2 + k$ maksimum noktası (3, 1) olduğundan

$f(x) = a.(x - 3)^2 + 1$ olarak yazılabilir. (0, 0) noktası fonksiyonun üzerinde olduğundan

$f(0) = a.(0 - 3)^2 + 1$

$0 = a \cdot 9 + 1 \qquad a = -\frac{1}{9} \qquad f(x) = -\frac{1}{9}(x-3)^2 + 1$ olarak yazılabilir.

c) $-\frac{1}{9}(x-3)^2 + 1 \geq 0{,}64$

$-\frac{1}{9}(x-3)^2 \geq -0{,}36$

$(x-3)^2 \leq 3{,}24$

$-1{,}8 \leq x - 3 \leq 1{,}8$

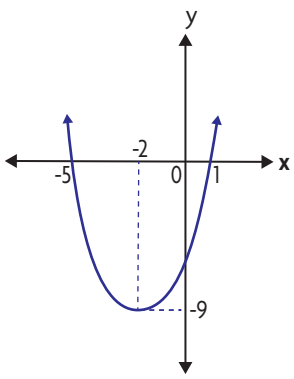
$1{,}2 \leq x \leq 4{,}8$

$[1{,}2\ ,\ 4{,}8]$

SIRA SİZDE 5.

ÇÖZÜM

a)



$f(x) = x^2 + 4x - 5$

$f(x) = x^2 + 4x + 4 - 9$

$f(x) = (x+2)^2 - 9$

a = 1 , r = 2 , k = –9 olduğundan x ekseni boyunca negatif yönde 2 birim, y ekseni boyunca negatif yönde 9 birim öteleme dönüşümü uygulanmıştır.

b) $(x+2)^2 - 9 = 0$

$(x+2)^2 = 9$

$x + 2 = 3$ veya $x + 2 = -3$

$x = 1$ veya $x = -5$

Fonksiyonun sıfırları (1, 0) ve (–5, 0) noktalarıdır

c) Azalan Olduğu Aralık : $(-\infty, -2]$

Artan Olduğu Aralık : $[-2, \infty)$

d) Maksimum noktası ve değeri yoktur. Minimum noktası (–2, –9) olup değeri –9 olur.

SIRA SİZDE 6.

ÇÖZÜM

$g(x) = (40 + 5x) \cdot (1000 - 50x)$ fonksiyonunun sıfırlarını bulalım.

$40 + 5x = 0$ ise $x = -8$

$1000 - 50x = 0$ ise $x = 20$

Maksimum noktası simetri ekseninin üstünde olur. Simetri ekseni, fonksiyonun sıfırlarına eşit uzaklıkta olduğundan

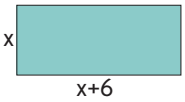
$x = \frac{-8+20}{2} = 6$ olarak bulunur.

Aylık internet ücreti $40 + 5x = 40 + 5 \cdot 6 = 70$ TL olur.

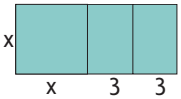
SIRA SİZDE 7.

ÇÖZÜM

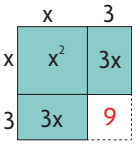
1. Adım: Bir kenar uzunluğu x, diğer kenar uzunluğu x + 6 birim olan dikdörtgen çizilir.



2. Adım: 1. Adımda elde edilen dikdörtgen, bir kenar uzunluğu x birim olan kare ile kenar uzunlukları x ve 3 birim olan iki dikdörtgene ayrılır.



3. Adım: Dikdörtgenler karenin paralel olmayan kenarlarına yapıştırılır.



4. Adım: 3. Adımda elde edilen karenin alanı

$(x+3)^2 = \underbrace{x^2 + 6x}_{40} + 9$

$(x+3)^2 = 49$

$x + 3 = 7$

$x = 4$ bulunur.

SIRA SİZDE 8.

ÇÖZÜM

A alelinin adeti x,

a alelinin adeti y olsun. Bu durumda

$p = \frac{x}{x+y}$ ve $q = \frac{y}{x+y}$ olacağından $p + q = 1$ olur.

Bize 2pq ifadesinin en az %18 olacağı p aralığı sorulduğundan

$2pq \geq \frac{18}{100}$

$2p(1-p) \geq 0{,}18$

$-2p^2 + 2p - 0{,}18 \geq 0$

$-2(p^2 - p + 0{,}09) \geq 0$

$-2(p^2 - p + 0{,}25 - 0{,}16) \geq 0$

$-2\left[(p-0{,}5)^2 - 0{,}16\right] \geq 0$

$-2(p-0{,}5)^2 + 0{,}32 \geq 0$

$-2(p-0{,}5)^2 \geq -0{,}32$

$(p-0{,}5)^2 \leq 0{,}16$

$-0{,}4 \leq p - 0{,}5 \leq 0{,}4$

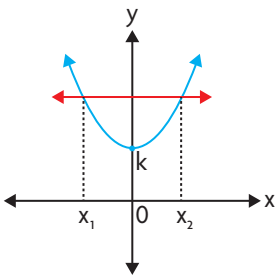
$0{,}1 \leq p \leq 0{,}9$ çıkar.

SIRA SİZDE 9.

ÇÖZÜM

Grafiksel Doğrulama

$g(x) = x^2 + k$ fonksiyonunun grafiği, $f(x) = x^2$ referans fonksiyonunun y ekseninde k birim ötelenmesiyle elde edilir.



$x_1 \neq x_2$ olmasına rağmen $g(x_1) = g(x_2)$ olduğundan g fonksiyonu bire bir değildir.

Cebirsel İspat

Bir g(x) fonksiyonu bire bir ise tanım kümesinden seçilen her x_1 ve x_2 değeri için $g(x_1) = g(x_2)$ ise $x_1 = x_2$ olmak zorundadır.

$g(x_1) = g(x_2)$

$x_1^2 + k = x_2^2 + k$

$x_1^2 = x_2^2 \quad (k \in R)$

$|x_1| = |x_2|$

$x_1 = x_2$ veya $x_1 = -x_2$ olduğundan g fonksiyonu bire bir değildir.

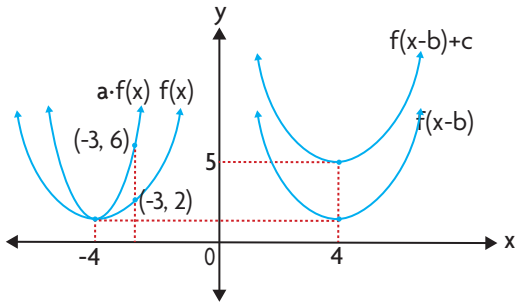
DEĞERLENDİRİYORUM

Amaç: Bu bölümde öğrendiklerinizi gözden geçirmenizi, kendi öğrenme sürecinizi değerlendirmenizi ve eksiklerinizi fark etmenizi amaçlıyoruz.

Soruları dikkatle yanıtlayınız. Cevaplarınızı geri bildirimlerle karşılaştırarak eksik gördüğünüz noktaları tekrar ediniz.

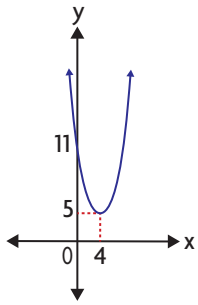
SORULAR

1. a, b ve c pozitif gerçek sayılar olmak üzere f(x), a · f(x), f(x – b) ve f(x – b) + c fonksiyonlarının grafikleri, aşağıda aynı dik koordinat düzleminde gösterilmiştir.



Buna göre a + b + c toplamının değerini bulunuz.

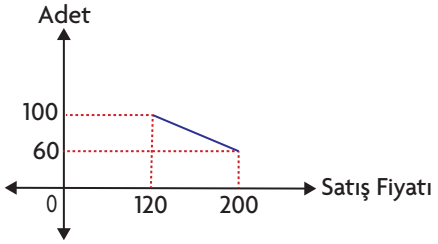
2. Aşağıdaki dik koordinat düzleminde f(x) karesel fonksiyonunun grafiği verilmiştir.



Buna göre f(3) değerini hesaplayınız.

3. **$f(x) = x^2 + 5x + 12$ parabolü üzerinde alınan bir noktanın koordinatlarının toplamı en az kaçtır?**

4. Şekildeki doğrusal grafikte bir ürünün satış adedine bağlı olarak fiyatındaki değişim gösterilmiştir.



Buna göre bu ürünün satışından elde edilecek gelirin maksimum olabilmesi için satılan ürün adedini ve fiyatını belirleyiniz.

5. Aşağıda "Karesel Fonksiyonlar" konusuyla ilgili gerçek sayılarda fonksiyonların yer aldığı kutucuklar ve bunlarla ilgili sorular yapılandırılmış gridde verilmiştir. Kutucuklardaki numaraları kullanarak soruları cevaplamanız beklenmektedir.

Aynı kutucuğu birden fazla sorunun cevabı olarak kullanabilirsiniz.

1 $f(x) = x^2$	**2** $f(x) = 2x^2 + 3$	**3** $f(x) = (x-3)^2$
4 $f(x) = -3(x+1)^2 - 2$	**5** $f(x) = x^2 + 2x - 6$	**6** $f(x) = -x^2 + 4x$
7 $f(x) = -x^2 + 6x - 9$	**8** $f(x) = 2x^2 + 4x + 2$	**9** $f(x) = 3(x-1)^2 + 3$

Kutucuklardaki fonksiyonlardan

I. Hangisinin/hangilerinin simetri ekseni x = –1 doğrusudur?

II. Hangisi/hangileri orijinden geçer?

III. Hangisi/hangileri maksimum noktasına sahiptir?

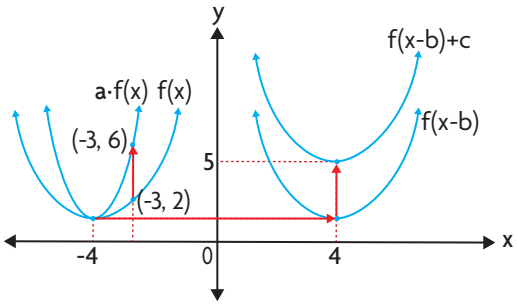
IV. Hangisi/hangileri çift fonksiyondur?

V. Hangisi/hangileri $(-\infty, -1]$ nda artandır?

GERİ BİLDİRİM

Bu geri bildirim sayesinde kendi cevabınızı kontrol edebilir, hatalarınızı düzelterek öğrenmenizi pekiştirebilirsiniz.

ÇÖZÜM 1.



f(x) fonksiyonu 8 birim sağa ötelenerek f(x – b) fonksiyonu elde edildiğinden b = 8 olur.

f(x – b) fonksiyonu 4 birim yukarı ötelenerek f(x – b) + c fonksiyonu elde edildiğinden c = 4 olur.

a · f(x) fonksiyonu, f(x) fonksiyonu üzerindeki noktaların ordinat değerlerini a katına çıkarır. (–3, 2) noktası f(x) fonksiyonu, (–3, 6) noktası ise a · f(x) fonksiyonu üzerindedir. (–3, 2) noktasının ordinat değeri 3 katına çıktığından dolayı a = 3 olur.

a + b + c = 3 + 8 + 4 = 15

ÇÖZÜM 2.

Karesel fonksiyonun denklemi $f(x) = a.(x + r)^2 + k$ olur.

Fonksiyonun minimum noktası (2, 3) noktasıdır. Bu sebeple r = – 2 ve k = 3 olduğundan fonksiyon $f(x) = a \cdot (x – 2)^2 + 3$ şeklinde yazılır. f(0) = 11 olduğundan

$11 = a \cdot (0 – 2)^2 + 3$

$8 = 4a$

$a = 2$

$f(3) = 2 \cdot (3 – 2)^2 + 3$

f(3) = 5 bulunur.

ÇÖZÜM 3.

$f(x) = x^2 + 5x + 13$ fonksiyonu üzerindeki noktaların koordinatları (x, y) olmak üzere x + y toplamının en küçük değerini bulalım.

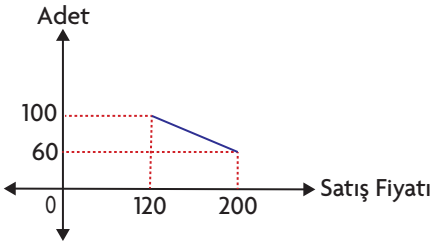
$x + y = x + x^2 + 5x + 13$

$= x^2 + 6x + 13$

$= x^2 + 6x + 9 + 4$

$= (x + 3)^2 + 4$ olduğundan x + y nin en küçük değeri 4 olur.

ÇÖZÜM 4.



Doğrusal fonksiyona göre her x birimlik adet azalışına karşı ürün fiyatında 2x TL artış olmaktadır. Buna göre gelir fonksiyonu,

(100 – x) · (120 + 2x)

şeklinde tanımlanır. Bu karesel fonksiyonun maksimum noktası simetri ekseni üzerindedir. Maksimum noktasının apsisi fonksiyonun sıfırlarının orta noktası olur.

Fonksiyonun sıfırları

100 – x = 0, 120 + 2x = 0

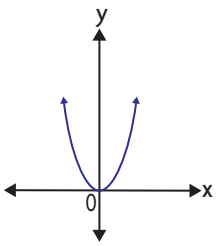
x = 100 ve x = – 60 olur ve buradan maksimum noktasının apsisi $x = \frac{100 - 60}{2} = 20$ olur.

Adet = 100 –x = 100 – 20 = 80

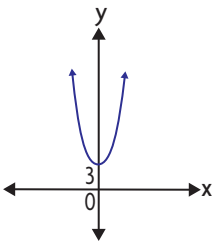
Satış Fiyatı = 120 + 2x = 120 + 2 · 20 = 160 TL bulunur.

ÇÖZÜM 5.

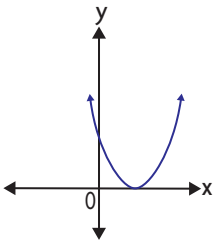
1 $f(x) = x^2$



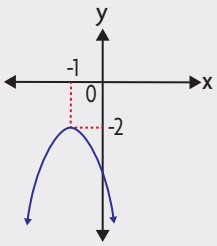
2 $f(x) = 2x^2 + 3$



3 $f(x) = (x-3)^2$

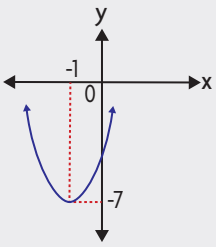


4 $f(x) = -3(x+1)^2 - 2$



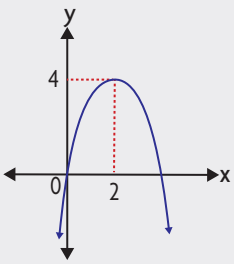
5 $f(x) = x^2 + 2x - 6$

$f(x) = (x+1)^2 - 7$



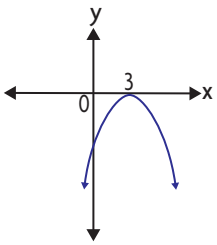
6 $f(x) = -x^2 + 4x$

$f(x) = -(x-2)^2 + 4$



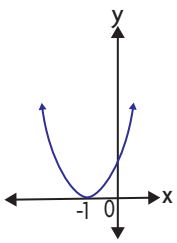
7 $f(x) = -x^2 + 6x - 9$

$f(x) = -(x-3)^2$

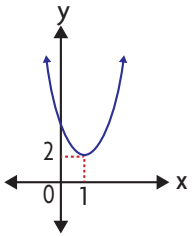


8 $f(x) = 2x^2 + 4x + 2$

$f(x) = 2(x+1)^2$



9 $f(x) = 3(x-1)^2 + 3$



I. Kutucuklardan hangisinin/hangilerinin simetri ekseni x = –1 doğrusudur?

4, 5 ve 8

II. Kutucuklardan hangisi/hangileri orijinden geçer?

1 ve 6

III. Kutucuklardan hangisi/hangileri maksimum noktasına sahiptir?

4, 6 ve 7

IV. Kutucuklardan hangisi/hangileri çift fonksiyondur?

1 ve 2

V. Kutucuklardan hangisi/hangileri $(-\infty, -1]$ nda artandır?

4

ÖĞRENDİKLERİM

Amaç: Bu bölümde öğrendiklerinizi özetlemenizi, günlük hayatta ve farklı derslerde kullanabileceğiniz bilgileri belirlemenizi amaçlıyoruz.

Anahtar kavramları ve önemli bilgileri kendi cümlelerinizle yazınız. Aşağıda verilen yönlendirme metni ve tablo, konu ile ilgili öğrendiklerinizi özetlemenizde size yardımcı olacaktır. Tabloda ve metinde boş bırakılan yerleri kısa notlar ile tamamlayıp özetinizi hazırlayabilirsiniz.

Özetinizi hazırlarken zorluk yaşadığınızı hissederseniz çalışma kartını tekrar gözden geçirmenizi öneririz.

KARESEL REFERANS FONKSİYON

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ şeklinde tanımlı f fonksiyonuna ..... referans fonksiyon denir.

Karesel referans fonksiyonun grafiği ..... olarak adlandırılır.

Gerçek sayılarda tanımlı karesel referans fonksiyonunun grafiği, ... eksenine göre simetrik olduğundan çift fonksiyondur.

KARESEL FONKSİYON

Gerçek sayılarda tanımlı $f(x) = x^2$ karesel referans fonksiyonundan türetilen $g(x) = a \cdot f(x \pm r) \pm k$ $(a, r, k \in \mathbb{R}, a \neq 0)$ fonksiyonu için

- $a > 0$ ise parabolün kolları ..... doğru, $a < 0$ ise parabolün kolları ..... doğrudur.
- $r > 0$ ise referans fonksiyona göre x ekseninde $|r|$ birim ....., $r < 0$ ise referans fonksiyona göre x ekseninde $|r|$ birim ..... öteleme dönüşümü uygulanır.
- $k > 0$ ise referans fonksiyona göre y ekseninde $|k|$ birim ....., $k < 0$ ise referans fonksiyona göre y ekseninde $|k|$ birim ..... öteleme dönüşümü uygulanır.

$a, r, k \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$ olmak üzere $f(x) = a \cdot (x + r)^2 + k$ tamkare formunda verilen fonksiyonunun özellikleri şunlardır:

a > 0 ise	CEVAP
Tanım kümesini yazınız:	Tanım kümesi .....dir.
Görüntü kümesini yazınız:	Görüntü kümesi .....
Azalan olduğu aralık(lar)ı yazınız:	Azalan olduğu aralık .....
Artan olduğu aralık(lar)ı yazınız:	Artan olduğu aralık .....
Maksimum değerini yazınız:.....	Maksimum noktası ..... maksimum değeri .....
Minimum noktasını ve minimum noktasını yazınız:	Minimum değeri .....
Bire bir ve örten olduğu aralıkları yazınız:.....	Bire bir ve örten olduğu aralık ..... dır
Simetri eksenini yazınız:.....	Simetri ekseni .....doğrusudur.

Daha fazlası için karekodu okutunuz.



GERÇEK SAYILARDA TANIMLI KAREKÖK FONKSİYONLAR

BAŞLARKEN

Bu bölümde yer alan etkinlikler, bireysel öğrenme yolculuğunuzda size rehberlik etmek ve öğrenme sürecinizi desteklemek amacıyla hazırlanmıştır. Çalışmalarınızı yürütürken "Hazırlanıyorum", "İlişkilendiriyorum", "Uygulayarak Öğreniyorum", "Değerlendiriyorum", "Yansıtıcı Yazı" ve "Öğrendiklerim" etkinliklerini sırası ile takip etmeniz ve etkinliklerin sonunda yer alan geri bildirimleri inceleyerek bölümleri tamamlamanız beklenmektedir.

Bu çalışma kartında gerçek yaşam durumlarını, doğrusal fonksiyon dışında farklı fonksiyon çeşitlerinden biri olan karekök referans fonksiyonu ile modelleyebilecek; bu fonksiyona ve bu fonksiyondan türetilen fonksiyonlara ait nitel özellikleri sınıflandırıp, bu fonksiyonların cebirsel ve grafik temsillerini yorumlayabileceksiniz.

Alanı x birimkare olan bir karenin bir kenar uzunluğunun kaç birim olduğu nasıl hesaplanır?

Fizikte serbest düşen bir cismin düştüğü mesafe h, geçen süre t ve g yer çekimi ivmesi ($g \cong 9{,}8\ m/s^2$) olmak üzere,

$h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$ formülü ile hesaplanır. Burada cismin düşeyde h birim mesafe alması için geçen süreyi nasıl hesaplarız?

Karenin alanını nasıl hesaplıyorduk? Bir kenar uzunluğunun karesini alarak değil mi? Karenin bir kenar uzunluğuna a birim diyelim, bu durumda $a^2 = x$ olmalıdır. Burada a, karesi x e eşit olan sayıdır. Dolayısıyla a yı hesaplamak için x in karekökünü almamız gerekir.

Yani $a = \sqrt{x}$ birim olur.

Benzer şekilde serbest düşen bir cismin düştüğü mesafeyi veren formülde süreyi hesaplamak için t yalnız bırakılırsa;

$$t^2 = \frac{2 \cdot h}{g}$$

elde edilir. Bu durumda sorumuz "Hangi sayının karesi $\frac{2 \cdot h}{g}$ ye eşittir?" şeklinde olur ve bu sorunun cevabı için bu ifadenin karekökünü almamız gerekir. O hâlde $t = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}}$ olarak bulunur.

HAZIRLANIYORUM

Amaç: Bu bölümde ön bilgilerinizi hatırlamanızı ve temaya hazırlıklı hâle gelmenizi amaçlıyoruz. Aşağıda yer alan ifadeler, bu temada tamamlanması hedeflenen öğrenme çıktısını ele almadan önce sahip olmanız gereken bazı temel becerileri içermektedir.

Lütfen her bir ifadeyi dikkatlice okuyunuz.

• Eğer ifadedeki bilgiye hâkim olduğunuzu düşünüyorsanız kutucuğu işaretleyiniz.

• Eğer konuyu henüz tam olarak bilmediğinizi ya da hatırlamadığınızı düşünüyorsanız kutucuğu boş bırakınız.

Bu çalışmanın amacı notla değerlendirilmeyecek olup amacı temaya ne ölçüde hazır olduğunuzu belirlemektir.

ÖN ÖĞRENME KONTROL LİSTESİ	
Kareköklü ifadelerle işlemler yapabilirim.	☐
Cebirsel ve grafik temsilleri üzerinden doğrusal referans fonksiyonun nitel özelliklerini (tanım ve görüntü kümeleri, tanımlı olduğu aralıklara bağlı olarak fonksiyonun işareti, maksimum-minimum noktaları, artan-azalanlığı, sıfırı ve bire birliği) inceleyebilirim.	☐
Cebirsel ve grafik temsilleri üzerinden doğrusal referans fonksiyondan **türetilen** fonksiyonların nitel özelliklerini (tanım ve görüntü kümeleri, tanımlı olduğu aralıklara bağlı olarak fonksiyonun işareti, maksimum-minimum noktaları, artan-azalanlığı, sıfırı ve bire birliği) inceleyebilirim.	☐
Doğrusal referans fonksiyona dönüşümler uygulayarak farklı doğrusal fonksiyonlar türetebilirim.	☐
Doğrusal referans fonksiyona dönüşümler uygulayarak türetilen doğrusal fonksiyonların cebirsel ve grafik temsillerini inceleyebilirim.	☐

"Ön Öğrenme Kontrol Listesi"ni doldurduktan sonra aşağıda verilen "Kontrol Noktası" sorularını çözünüz ve cevaplarınızı kontrol ediniz.

KONTROL NOKTASI

SORU 1. Aşağıda verilen kareköklü ifadelerden gerçek sayılarda tanımlı olanların altındaki kutucuğu işaretleyiniz.

$\sqrt{5}$	$\sqrt{-2}$	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{0}$	$\sqrt{1{,}3}$	$\sqrt{-9}$
☐	☐	☐	☐	☐	☐

SORU 2. Aşağıda verilen kareköklü ifadelerle yapılan işlemlerden doğru olanların yanındaki kutucuğa D, yanlış olanların yanındaki kutucuğa Y yazınız. Yanlış olduğunu düşündüğünüz işlemlerin neden yanlış olduğunu yandaki boşluklara açıklayınız.

$\sqrt{9}+\sqrt{16}-\sqrt{25}=\sqrt{9+16-25}=\sqrt{0}=0$ ..... ☐

$(\sqrt{3})^2-\sqrt{3^2}=3-3=0$ ..... ☐

$\sqrt{(-5)^2}=-5$ ..... ☐

$\sqrt{3}\cdot\sqrt{12}=\sqrt{3\cdot 12}=\sqrt{36}=6$ ..... ☐

$\dfrac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\dfrac{18}{2}}=\sqrt{9}=\sqrt{3^2}=3$ ..... ☐

SORU 3. x negatif bir gerçek sayı, a ve b pozitif gerçek sayılar olmak üzere verilen ifadelerin en sade şeklini yazınız.

$\sqrt{49x^2}$ .....

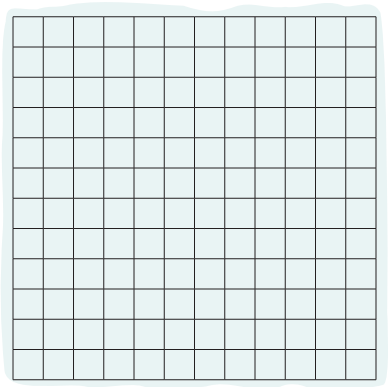
$\sqrt{25a^2b^2}$ .....

SORU 4. Aşağıdaki tabloda verilen gerçek sayılarda tanımlı fonksiyonların nitel özelliklerini tabloda boş bırakılan yerlere örnekteki gibi yazınız.

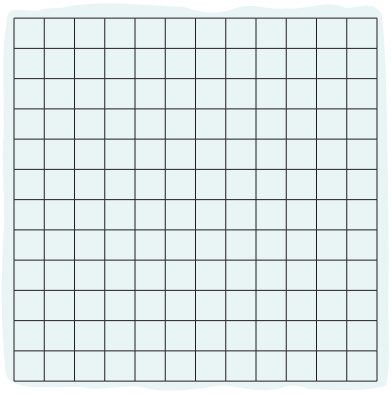
Nitel özellik / Fonksiyon	Tanım Kümesi	Görüntü Kümesi	İşareti: Negatif	İşareti: Pozitif	Sıfırı	Artan-Azalanlık	Maksimumu Noktası	Minimum Noktası	Bire birliği
$f(x) = x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$(-\infty,0)$	$(0,\infty)$	0	Artan	Yok	Yok	Bire bir
$g(x) = 4x$									
$h(x) = 4x - 1$									
$k(x) = \frac{1}{4}(x + 1)$									
$m(x) = 2(3 - x) - 5$									
$n(x) = -\frac{1}{2}(x - 1) + 3$									

SORU 5. Aşağıda cebirsel gösterimi verilen gerçek sayılarda tanımlı fonksiyonların grafiklerini $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ şeklinde tanımlı f doğrusal referans fonksiyonunun grafiğine gerekli dönüşümleri uygulayarak çiziniz.

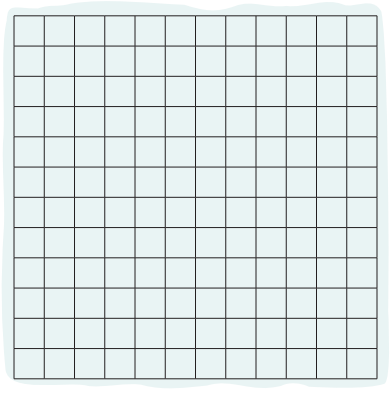
a) $g(x) = 2x + 3$



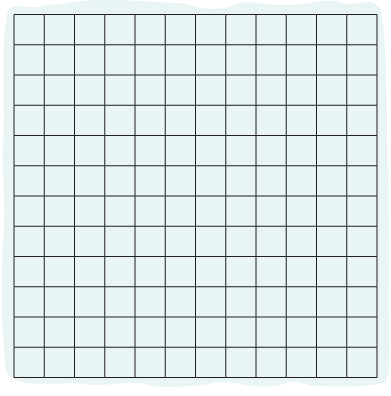
b) $h(x) = -x$



c) $p(x) = -3(x + 2) + \sqrt{2}$



ç) $t(x) = \frac{1}{2}(x - 1)$



GERİ BİLDİRİM

Bu geri bildirim sayesinde kendi cevabınızı kontrol edebilir, hatalarınızı düzelterek öğrenmenizi pekiştirebilirsiniz.

KONTROL NOKTASI

ÇÖZÜM 1.

$\sqrt{5}$	$\sqrt{-2}$	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{0}$	$\sqrt{1,3}$	$\sqrt{-9}$
☑	☐	☑	☑	☑	☐

HATIRLATMA

Çift dereceli köklü ifadelerin içi negatif olduğunda sayı gerçek sayılarda tanımsız olur. Dolayısıyla karekök gibi çift dereceli köklü ifadelerin gerçek sayılarda tanımlı olabilmesi için kök içlerinin 0'a eşit ya da pozitif işaretli olması gerekir.

⇒ k pozitif bir tam sayı, a bir gerçek sayı olmak üzere $\sqrt[2k]{a}$ ifadesi $a \geq 0$ için gerçek sayı belirtir.

ÇÖZÜM 2.

$\sqrt{9}+\sqrt{16}-\sqrt{25}=\sqrt{9+16-25}=\sqrt{0}=0$ ..... Y

Kareköklü sayılarda toplama veya çıkarma yapılabilmesi için kök içlerinin aynı olması gerekir. Doğru işlem; $\sqrt{3^2}+\sqrt{4^2}-\sqrt{5^2}=3+4-5=2$'dir.

$(\sqrt{3})^2-\sqrt{3^2}=3-3=0$ ..... D

İşlemde hata yoktur.

$\sqrt{(-5)^2}=-5$ ..... Y

Kuvvet ve kök derecesi çift olduğundan –5 sayısı kareköklü mutlak değerle çıkmalıdır. Doğru işlem ; $\sqrt{(-5)^2}=|-5|=5$'tir.

$\sqrt{3}\cdot\sqrt{12}=\sqrt{3\cdot 12}=\sqrt{36}=6$ ..... D

İşlemde hata yoktur.

$\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{18}{2}}=\sqrt{9}=\sqrt{3^2}=3$ ..... D

İşlemde hata yoktur.

NOT

a gerçek sayı, n pozitif tam sayı ve $n \geq 2$ olmak üzere;

$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a, & n \text{ tek sayı ise} \\ |a|, & n \text{ çift sayı ise} \end{cases}$ olur.

UYARI

a ve b pozitif gerçek sayılar olmak üzere;

$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$ veya $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ dir.

$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ dir.

ÇÖZÜM 3.

$\sqrt{49x^2}$ .....

$\sqrt{25a^2b^2}$ .....

$\sqrt{(5ab)^2} = |5ab| = 5ab$ olmalıdır.

x negatif bir gerçek sayı olduğundan, mutlak değerden çıkarken işaret değiştirir. a ve b pozitif gerçek sayılar olduğundan, mutlak değerden aynen çıkarlar.

ÇÖZÜM 4.

Fonksiyon / Nitel özellik	Tanım Kümesi	Görüntü Kümesi	İşareti: Negatif	İşareti: Pozitif	Sıfırı	Artan-Azalanlık	Maksimumu Noktası	Minimum Noktası	Bire birliği
$f(x) = x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$	0	Artan	Yok	Yok	Bire bir
$g(x) = 4x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$	0	Artan	Yok	Yok	Bire bir
$h(x) = 4x - 1$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$(-\infty, \frac{1}{4})$	$(\frac{1}{4}, \infty)$	$\frac{1}{4}$	Artan	Yok	Yok	Bire bir
$k(x) = \frac{1}{4}(x + 1)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$(-\infty, -1)$	$(-1, \infty)$	-1	Artan	Yok	Yok	Bire bir
$m(x) = 2(3 - x) - 5$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$(\frac{1}{2}, \infty)$	$(-\infty, \frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}$	Azalan	Yok	Yok	Bire bir
$n(x) = -\frac{1}{2}(x - 1) + 3$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$(7, \infty)$	$(-\infty, 7)$	7	Azalan	Yok	Yok	Bire bir

HATIRLATMA

m, n ∈ ℝ olmak üzere g : ℝ → ℝ, g(x) = a f(x ± r) ± k şeklindeki g doğrusal fonksiyonu düzenlenerek g(x) = mx + n biçiminde yazılabilir. Doğrusal fonksiyonların grafikleri, bir doğru belirtir ve f(x) = x şeklinde tanımlı doğrusal referans fonksiyondan türetilen fonksiyonlardan elde edilebilir. Burada g fonksiyonu için;

a > 0 ise fonksiyon artan, a < 0 ise fonksiyon azalandır.

Fonksiyon bir doğru belirttiğinden iki ucu sınırsız olup, maksimum ve minimum noktası yoktur.

Fonksiyonun x eksenini kestiği nokta fonksiyonun sıfırıdır. (g(x) = 0 yapan x değeri)

Fonksiyonun tanım kümesinden seçilen herhangi iki eleman x_1 ve x_2 olsun. $x_1 \neq x_2$ iken $g(x_1) \neq g(x_2)$ ise g fonksiyonu bire birdir.

ÇÖZÜM 5.

k, r ∈ $\mathbb{R}^+$, a ∈ ℝ olmak üzere ℝ'de tanımlı f(x) = x doğrusal referans fonksiyon yardımıyla g(x) = a · f(x ± r) ± k şeklindeki g doğrusal fonksiyonlarına dönüşüm yaparken f(x) = x in grafiği ;

a = 1, k = 0 iken g(x) = f(x + r) ise r birim sola,

g(x) = f(x – r) ise r birim sağa ötelenir.

r = 0 , k = 0 iken

g(x) = a · x için { a > 1 ise y eksenine yaklaşır. / 0 < a < 1 ise x eksenine yaklaşır.

a = 1 , r = 0 iken

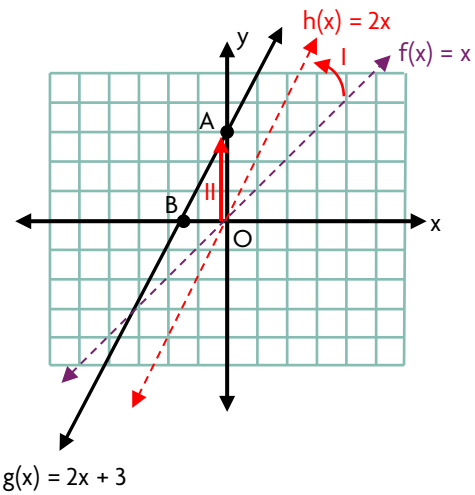
g(x) = x + k için k birim yukarı,

g(x) = x – k için k birim aşağı ötelenir.

Ayrıca; a > 0 ise eğim pozitif, fonksiyon artan (grafik sağa yatık),

a < 0 ise eğim negatif, fonksiyon azalan (grafik sola yatık) demektir.

a) g(x) = 2x + 3



g(x) = 2x + 3

f(x) = x doğrusal referans fonksiyonunun tanım kümesindeki her bir eleman önce 2 katına eşlenip (I), ardından oluşan fonksiyon y ekseni boyunca 3 birim yukarı ötelenir. (II)

g fonksiyonunun eksenleri kestiği noktalar;

x = 0 için $y = 2 \cdot 0 + 3$

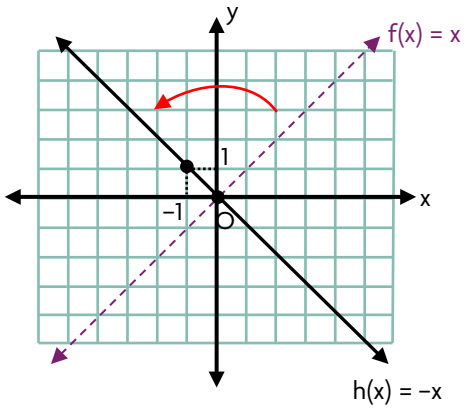
$y = 3$ A (0 , 3)

y = 0 için $0 = 2x + 3$

$x = -\frac{3}{2}$ $B\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$

olarak bulunur.

b) $h(x) = -x$



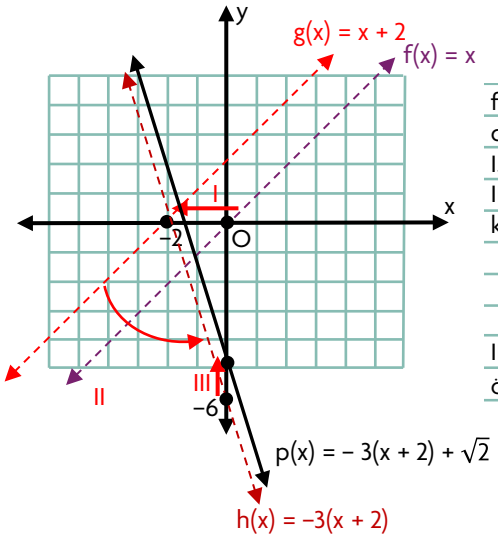
$f(x) = x$ doğrusal referans fonksiyonunun tanım kümesindeki her bir eleman -1 katına eşlenir. Elde edilen fonksiyon $h(x) = -x$ fonksiyonudur.

$x = 0$ için $y = 0$ $(0, 0)$

Farklı bir x değeri için ikinci bir nokta belirleyelim :

$x = -1$ için $y = 1$ $(-1, 1)$

c) $p(x) = -3(x + 2) + \sqrt{2}$



$f(x) = x$ referans fonksiyonunun grafiğine aşağıdaki adımlar uygulanarak dönüşüm yapılır:

I. x ekseninde 2 birim sola ötelenir.

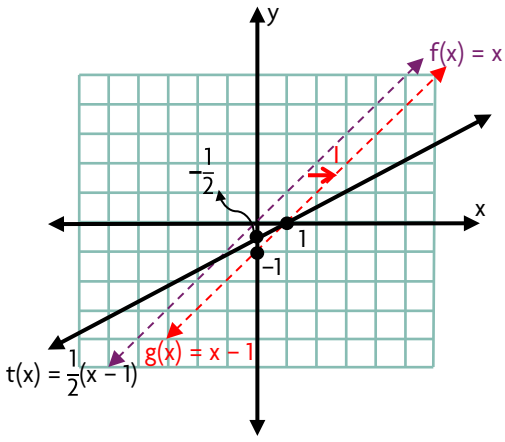
II. Elde edilen fonksiyonun $(g(x) = (x + 2))$ tanım kümesindeki her bir elemanı -3 katına eşlenir$(h(x) = -3(x + 2))$. Örneğin ;

$g(-2) = 0$ iken , $h(-2) = 0$ noktasına,

$g(0) = 2$ iken , $h(0) = -6$ noktasına dönüşür.

III. Elde edilen bu fonksiyonun $(h(x) = -3(x + 2))$ grafiği $\sqrt{2}$ birim yukarı ötelenerek $p(x) = -3(x + 2) + \sqrt{2}$ fonksiyonunun grafiği elde edilir.

ç) $t(x) = \frac{1}{2}(x - 1)$



$f(x) = x$ referans fonksiyonun grafiğine aşağıdaki adımlar uygulanarak dönüşüm yapılır :

I. x ekseninde 1 birim sağa ötelenir.

II. Elde edilen ($g(x) = (x - 1)$) fonksiyonunun tanım kümesindeki her bir eleman $\frac{1}{2}$ katına eşlenir. Örneğin ;

$g(0) = -1$ iken $t(0) = -\frac{1}{2}$ noktasına,

$g(1) = 0$ iken $t(1) = 0$ noktasına eşlenir.

Böylece $t(x) = \frac{1}{2}(x - 1)$ fonksiyonunun grafiği elde edilmiş olur.

İLİŞKİLENDİRİYORUM

Amaç: Bu bölümde yeni öğreneceğiniz konuyu; zihninizde var olan bilgileriniz, yaşantılarınız ve diğer derslerde öğrendiklerinizle ilişkilendirmenizi bekliyoruz.

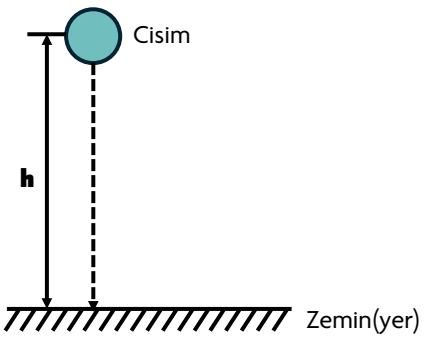
Aşağıdaki örneği inceleyiniz ve sorulan ifadeye ulaşmak için uygulanması gereken işlem basamaklarını belirleyip açıklayınız. Siz de bu şekilde işlem yapmayı gerektiren günlük yaşam durumlarıyla karşılaşıyor musunuz? Örnekler veriniz.

ÖRNEK

Fizikte serbest düşen bir cismin aldığı mesafe h; geçen süre t ve yer çekimi ivmesi g ($g \cong 9{,}8\ m/s^2$) olmak üzere,

$h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$ bağıntısıyla verilmektedir.

Buna göre t yi h ve g cinsinden ifade ediniz.



GERİ BİLDİRİM

Bu geri bildirim sayesinde kendi cevabınızı kontrol edebilir, hatalarınızı düzelterek öğrenmenizi pekiştirebilirsiniz.

ÇÖZÜM

$h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$ eşitliğinde t yi h ve g cinsinden bulmak için sırasıyla şu adımlar izlenir:

$2 \cdot h = g \cdot t^2$

$\frac{2 \cdot h}{g} = t^2$

Burada t yi hesaplamak için, "hangi sayının karesi $\frac{2 \cdot h}{g}$ ye eşittir?" sorusu cevaplanmalıdır. O hâlde cevap bu ifadenin kareköküne yani $\sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}}$ ye eşit olmalıdır. Yani, $t = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}}$ bulunur.

UYGULAYARAK ÖĞRENİYORUM

Amaç: Bu bölümde bilgilerinizi etkinlikler ve uygulamalarla pekiştirmenizi, öğrenmeyi daha kalıcı hâle getirmenizi amaçlıyoruz.

Etkinliklerde verilen adımları dikkatle uygulayınız. Çalışmanızı dikkatli ve düzenli bir şekilde yapınız.

GERÇEK SAYILARDA $f(x) = \sqrt{x}$ $(x \geq 0)$ **ŞEKLİNDE TANIMLI KAREKÖK REFERANS FONKSİYONU**

ETKİNLİK 1.1.
Ekran İkonu ve Piksel Sayıları





Bir grafik tasarımcı, modern işletim sistemleri için kare biçiminde yüksek çözünürlüklü ikonlar tasarlamaktadır.

Tasarımcının amacı, ikonun bir kenarının piksel cinsinden uzunluğunu toplam piksel sayısına bağlı olarak belirlemektir.

Bu doğrultuda, test ettiği farklı ikon tasarımlarında toplam piksel sayısı ile ikonun bir kenar uzunluğu (birim) arasındaki ilişkiyi aşağıdaki tabloda kayıt altına almıştır.

İkonun toplam piksel sayısı (x)	256	1024	2304	4096	9216	16384
İkonun tek bir kenar uzunluğu (f(x))	16	32	48	64	96	128

Adım 1. Tabloyu inceleyerek, ikonun tek bir kenarının uzunluğu (f(x)) ile ikonun toplam piksel sayısı (x) arasında doğrusal bir ilişki olup olmadığını irdeleyiniz.

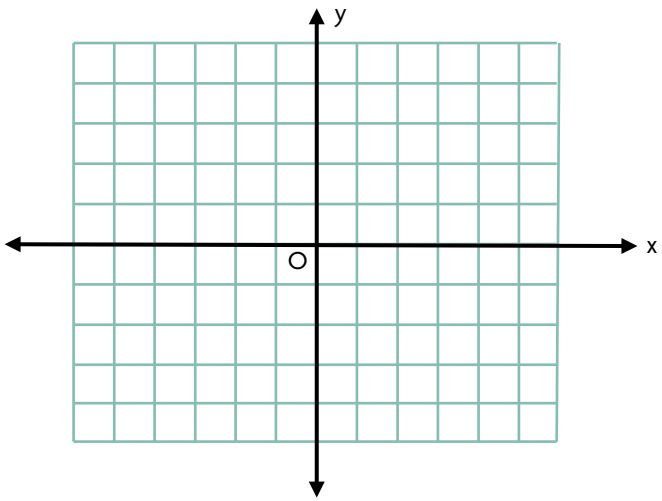
Adım 2. x ile f(x) niceliklerini karşılaştırarak f fonksiyonunu cebirsel olarak nasıl ifade edeceğinizi yazınız.

GERÇEK SAYILARDA $f(x) = \sqrt{x}$ $(x \geq 0)$ ŞEKLİNDE TANIMLI KAREKÖK REFERANS FONKSİYONU VE NİTEL ÖZELLİKLERİ

ETKİNLİK 2.1. $f(x) = \sqrt{x}$ $(x \geq 0)$ fonksiyonu için tabloda verilen değerleri dikkate alarak tabloda boş bırakılan yerleri uygun biçimde doldurunuz.

x	0	1	2	4	5	9	16	25	...
f(x)					$\sqrt{5}$			5	...

ETKİNLİK 2.2. Tablodaki değerlerden faydalanarak aşağıda verilen dik koordinat düzlemi üzerinde $f(x) = \sqrt{x}$ şeklinde tanımlı fonksiyonun grafiğini çiziniz.



ETKİNLİK 2.3. $f(x) = \sqrt{x}$ fonksiyonunun cebirsel ve grafik temsillerinden yola çıkarak bu fonksiyona ait nitel özelliklerle ilgili aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) Fonksiyonun tanım kümesini bulunuz.

b) Fonksiyonun görüntü kümesini bulunuz.

NOT

$f : [0 , \infty) \rightarrow [0 , \infty)$, $f(x) = \sqrt{x}$ şeklinde tanımlı f fonksiyonu **karekök referans fonksiyonu** olarak adlandırılır.

c) Fonksiyonun sıfırını bulunuz.

ç) Fonksiyonun işaretini inceleyiniz.

d) Fonksiyonun artan-azalan olduğu aralıkları belirleyiniz.

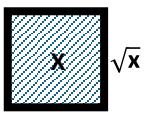
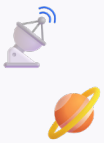
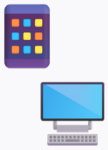
e) Fonksiyonun varsa maksimum-minimum değerlerini ve bu değerleri aldığı noktaları bulunuz.

f) Fonksiyonun bire bir olup olmadığını belirleyiniz.

g) Fonksiyonun örten olup olmadığını belirleyiniz.

ğ) Fonksiyonun tek veya çift olma durumu hakkında ne söylenebilir, inceleyiniz.

BUNLARI BİLİYOR MUYDUNUZ?

	Alanı x birimkare olan bir karenin bir kenar uzunluğunu bulmak için karekök kullanırız!		Alternatif akım devrelerinde kullanılan etkin (RMS) değerler karekök alma işlemine dayanır. Akım veya gerilimin zaman içindeki karelerinin ortalaması alınıp karekökü alınarak etkin değer bulunur.
	Ses dalgalarında şiddet değeri genliğin karesiyle orantılı olduğu için, genlik bulurken karekök işlemi kullanılır.		Bir topun veya lunaparktaki hız treninin aşağıya düşmeye veya inmeye başladığı yüksekliğe göre yerle temas anındaki hızı bulunurken karekök kullanılır. Bir cismin belirli bir yükseklikten serbest bırakıldığında yere çarpma hızı, yüksekliğin karekökü ile ilişkili olan $V = \sqrt{2gh}$ formülü ile bulunur.
	Bir uydunun yörünge hızını hesaplarken de hız, yerçekimi sabiti ve yörünge yarıçapının karekökü ile belirlenir.		Bir ekranın köşegen uzunluğu karekök ile hesaplanır. Örneğin 16 : 9 oranlı bir ekranın 40 inçlik köşegeni $\sqrt{(16^2 + 9^2)}$ ifadesinden yola çıkarak belirlenir.

İstatistikte standart sapma hesabında ve daha bir çok alanda karekök alma işlemi kullanılır.

ÖRNEK
$f : [0, 12] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$ şeklinde tanımlı karekök fonksiyonu veriliyor.
Buna göre bu fonksiyonun,

a) Tanım ve görüntü kümesini bulunuz.

b) Grafiğini çiziniz.

c) Bire birliğini ve örten olup olmadığını inceleyiniz.

ç) Sıfırını bulunuz ve işaretini inceleyiniz.

d) Artan-azalanlığını inceleyiniz.

e) Minimum-maksimum değerlerini bulunuz.

ÇÖZÜM

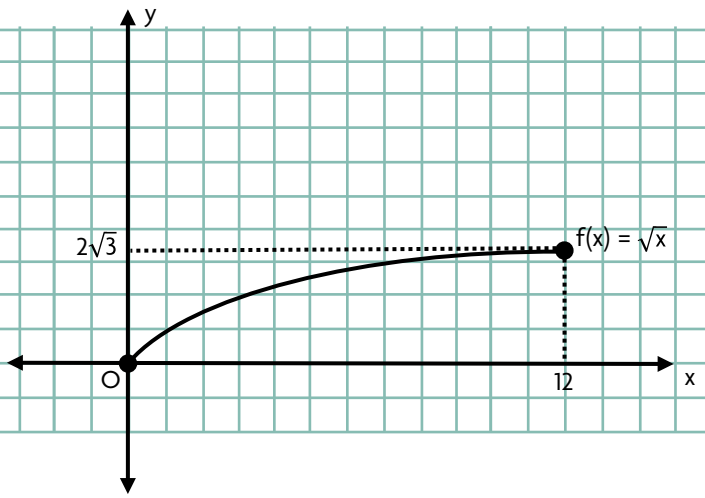
a) Tanım ve görüntü kümesini bulunuz.

Fonksiyon [0, 12] da tanımlı olarak verildiğinden tanım kümesi [0, 12] dır. Görüntü kümesi ise [0, 12] daki değerler için elde edilecek görüntüler ; x = 0 için $f(0) = \sqrt{0} = 0$ ve x = 12 için $f(12) = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ olacağından $[0, 2\sqrt{3}]$ dır.

Tanım kümesi : [0, 12] Görüntü kümesi : $[0, 2\sqrt{3}]$

b) Grafiğini çiziniz.

Tanım kümesi [0, 12] ve Görüntü kümesi $[0, 2\sqrt{3}]$ olduğundan x ekseninde fonksiyon [0, 12] da tanımlı ve bu değerler için görüntüleri y ekseninde $[0, 2\sqrt{3}]$ da olacaktır.



c) Bire birliğini ve örten olup olmadığını inceleyiniz.

Fonksiyonun tanım aralığındaki her bir x değerine karşılık gelen görüntüler birbirinden farklı olacağından yani , $\forall x_1 , x_2 \in [0, 12]$ için $x_1 \neq x_2$ iken $f(x_1) \neq f(x_2)$ olduğundan f fonksiyonu bire birdir.
Bu durum grafik üzerinde de yatay doğru testi ile gözlemlenebilir.
Fonksiyonun değer kümesindeki her gerçek sayı, tanım aralığındaki bir x değerine karşılık gelmez.
Dolayısıyla değer kümesinde açıkta elemanlar kalacağından f örten değildir.

HATIRLATMA

Bir fonksiyonun grafiğine x eksenine paralel olacak şekilde yatay doğrular çizildiğinde bu doğrular f fonksiyonunun grafiğini daima bir noktada kesiyorsa bu fonksiyona bire birdir denir. Bu işlem **yatay doğru testi** olarak adlandırılır.

ç) Sıfırını bulunuz ve işaretini inceleyiniz.

Fonksiyonun sıfırları demek, x eksenini kestiği nokta veya noktalar demektir. Diğer bir deyişle fonksiyonu 0 yapan x değerleridir. Fonksiyon x eksenini grafikte de görüldüğü gibi sadece x = 0 noktasında kesmektedir. Dolayısıyla fonksiyonun sıfırı x = 0 noktasıdır.

x	$-\infty$	0	∞
f(x)	Tanımsız	+	

$f(x) = \sqrt{x}$ fonksiyonu, 0'dan küçük gerçek sayılar için tanımsız olup, 0'dan büyük gerçek sayılar için daima pozitiftir. Dolayısıyla f(x) fonksiyonu tanımlı olduğu aralıkta daima pozitiftir.

d) Artan-azalanlığını inceleyiniz.

Fonksiyon tanımlı olduğu aralık içinde alınan $\forall x_1, x_2$ için;

$$x_1 < x_2 \text{ iken } f(x_1) < f(x_2)$$

olduğundan daima artandır.

e) Minimum - maksimum değerlerini bulunuz.

Fonksiyonun minimum değeri x = 0 için f(0) = 0 değeridir.
Fonksiyon maksimum değerini ise x = 12 için $f(12) = 2\sqrt{3}$ değerinde alır.

SIRA SİZDE 1.

$f : [0, 18] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$ şeklinde tanımlı karekök fonksiyonu veriliyor.

Buna göre 1, 2 ve 3. soruları cevaplayınız.

1. Fonksiyonun tanım ve görüntü kümelerini bulunuz.

2. Fonksiyonun bire birliğini ve örtenliğini inceleyiniz.

3. Fonksiyonun artan-azalanlığını inceleyiniz.

SIRA SİZDE 2.

$f : [4, 24] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$ şeklinde tanımlı karekök fonksiyonu veriliyor.

Buna göre 1, 2 ve 3. soruları cevaplayınız.

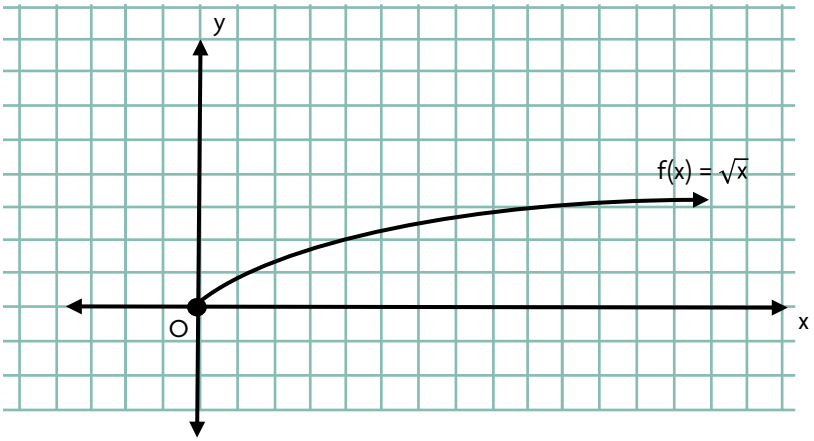
1. Fonksiyonun grafiğini çiziniz.

2. Fonksiyonun varsa sıfırlarını bulup, işaretini inceleyiniz.

3. Fonksiyonun minimum ve maksimum değerlerini bulunuz.

GERÇEK SAYILARDA $f(x) = \sqrt{x}$ $(x \geq 0)$ **ŞEKLİNDE TANIMLI KAREKÖK REFERANS FONKSİYONUNDAN TÜRETİLEN** $(g(x) = a \cdot f(x \pm r) \pm k\ ,\ a, r, k \in \mathbb{R},\ a \neq 0\ )$ **KAREKÖK FONKSİYONLARININ NİTEL ÖZELLİKLERİ**

$a = 1\ ,\ r = k = 0$ değerleri için elde edilen $g(x) = f(x) = \sqrt{x}$ referans fonksiyonunun grafiği aşağıdaki gibidir.



ETKİNLİK 3.1.

$g(x) = a \cdot \sqrt{x+r} + k$ fonksiyonu için aşağıdaki sorular doğrultusunda verilen tablolardaki boşlukları örneklerdeki gibi doldurunuz.

a) $r = 0$, $k = 0$ iken tabloda verilen farklı a değerleri için oluşan karekök fonksiyonunun cebirsel temsilini, karekök referans fonksiyonunun cebirsel temsiline göre yapılan işlemi ve grafik temsiline uygulanan dönüşümü tabloya yazınız.

Fonksiyon	a	Oluşan Karekök Fonksiyonunun Cebirsel Temsili $g(x) = a \cdot \sqrt{x+r} + k$	Karekök Referans Fonksiyonunun Cebirsel Temsiline Göre Yapılan Cebirsel İşlem	Karekök Referans Fonksiyonunun Grafik Temsiline Uygulanan Dönüşüm
m(x)	−2	$k(x) = -2 \cdot \sqrt{x}$	−2 ile çarpma	x eksenine göre yansıma, 2 kat dikey germe
p(x)	3	$p(x) = 3 \cdot \sqrt{x}$	3 ile çarpma	3 kat dikey germe
r(x)	5			
s(x)	−4			

b) k = 0 iken tabloda verilen farklı a ve r değerleri için oluşan karekök fonksiyonunun cebirsel temsilini, karekök referans fonksiyonunun cebirsel temsiline göre yapılan işlemi ve grafik temsiline uygulanan dönüşümü tabloya yazınız.

Fonksiyon	a	r	Oluşan Karekök Fonksiyonunun Cebirsel Temsili $g(x) = a \cdot \sqrt{x+r} + k$	Karekök Referans Fonksiyonunun Cebirsel Temsiline Göre Yapılan Cebirsel İşlem	Karekök Referans Fonksiyonunun Grafik Temsiline Uygulanan Dönüşüm
m(x)	$-\frac{1}{3}$	2	$k(x) = -\frac{1}{3} \cdot \sqrt{x+2}$	Tüm bağımsız değişkenlere 2 ekleme, karekökünü $-\frac{1}{3}$ ile çarpma	x ekseni boyunca negatif yönde 2 birim öteleme, x eksenine göre yansıma, $\frac{1}{3}$ kat dikey sıkıştırma
p(x)	4	−3			
r(x)	$\frac{1}{2}$	5			
s(x)	−3	−1			

c) r = 0 iken tabloda verilen farklı a ve k değerleri için oluşan karekök fonksiyonunun cebirsel temsilini, karekök referans fonksiyonunun cebirsel temsiline göre yapılan işlemi ve grafik temsiline uygulanan dönüşümü tabloya yazınız.

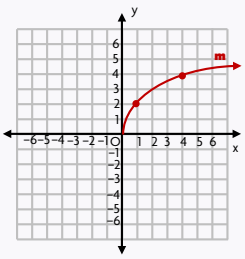
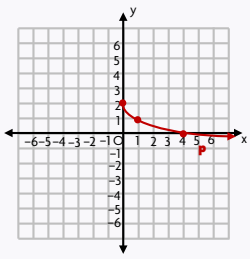
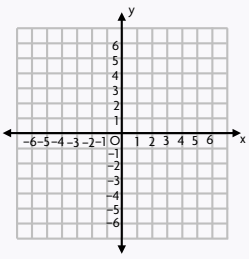
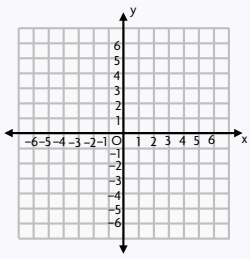
Fonksiyon	a	k	Oluşan Karekök Fonksiyonun Cebirsel Temsili $g(x) = a \cdot \sqrt{x+r} + k$	Karekök Referans Fonksiyonunun Cebirsel Temsiline Göre Yapılan Cebirsel İşlem	Karekök Referans Fonksiyonunun Grafik Temsiline Uygulanan Dönüşüm
m(x)	−2	1	$k(x) = -2 \cdot \sqrt{x} + 1$	Tüm bağımsız değişkenlerin karekökünün −2 ile çarpımına 1 ekleme	x eksenine göre yansıma, 2 kat dikey germe, y ekseni boyunca pozitif yönde 1 birim öteleme
p(x)	4	−2			
r(x)	1	3			
s(x)	−3	−1			

ç) Tabloda verilen farklı a, r ve k değerleri için oluşan karekök fonksiyonunun cebirsel temsilini, karekök referans fonksiyonunun cebirsel temsiline göre yapılan işlemi ve grafik temsiline uygulanan dönüşümü tabloya yazınız.

Fonksiyon	a	r	k	Oluşan Karekök Fonksiyonunun Cebirsel Temsili $g(x) = a \cdot \sqrt{x+r} + k$	Karekök Referans Fonksiyonunun Cebirsel Temsiline Göre Yapılan Cebirsel İşlem	Karekök Referans Fonksiyonunun Grafik Temsiline Uygulanan Dönüşüm
m(x)	1	−2	−3	$k(x) = \sqrt{x-2} - 3$	Tüm bağımsız değişkenlerin 2 eksiğinin karekökünün 3 eksiği	x ekseni boyunca pozitif yönde 2 birim, y ekseni boyunca negatif yönde 3 birim öteleme
p(x)	−1	3	1			
r(x)	2	−1	4			
s(x)	−3	1	−2			

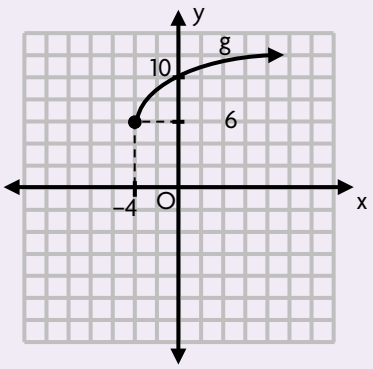
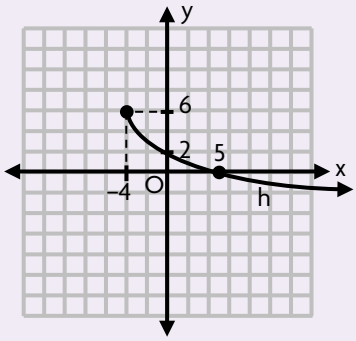
ETKİNLİK 3.2.

Aşağıda verilen tabloyu $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$, $f(x) = \sqrt{x}$ şeklinde tanımlı karekök referans fonksiyonuna uygulanan dönüşümlerle elde edilen fonksiyonların cebirsel ve grafik temsillerini örnekteki gibi ilgili yerlere yazarak doldurunuz.

Karekök Referans Fonksiyonunun Grafiğine Uygulanan Dönüşümler	2 kat dikey germe	x eksenine göre yansıma, y ekseni boyunca pozitif yönde 2 birim öteleme	x ekseni boyunca negatif yönde 2 birim, y ekseni boyunca pozitif yönde 1 birim öteleme,	4 kat dikey germe, x eksenine göre yansıma, x ekseni boyunca pozitif yönde 1 birim, y ekseni boyunca pozitif yönde 2 birim öteleme
Cebirsel Temsili	$m(x) = 2 \cdot \sqrt{x}$	$p(x) = -\sqrt{x} + 2$		
Grafik Temsili				

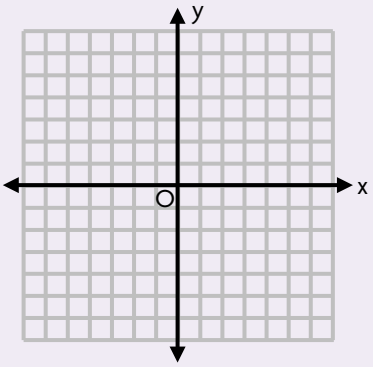
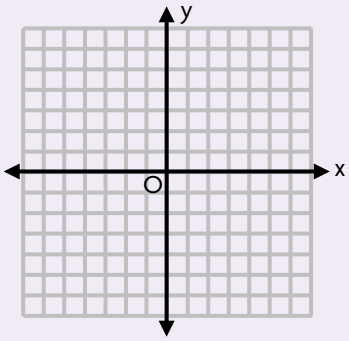
ETKİNLİK 3.3.

$f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $f(x) = \sqrt{x}$ şeklinde tanımlı karekök referans fonksiyonundan türetilen g(x) ve h(x) fonksiyonları için tabloda verilen bilgilerden yararlanarak bu fonksiyonlara ait nitel özellikler ile ilgili boş bırakılan yerleri uygun biçimde doldurunuz.

Cebirsel Temsili	$g(x) = 2 \cdot \sqrt{x+4} + 6$	$h(x) = -2 \cdot \sqrt{x+4} + 6$
Grafik Temsili		
Uygulanan Dönüşüm	x ekseninde negatif yönde 4 birim öteleme, 2 kat dikey germe, y ekseninde pozitif yönde 6 birim öteleme	x ekseninde negatif yönde 4 birim öteleme, x eksenine göre yansıma, 2 kat dikey germe, y ekseninde pozitif yönde 6 birim öteleme
Tanım Kümesi		
Görüntü Kümesi		
İşareti		
Artan-Azalanlığı		
Maksimum-Minimum Noktaları ve Değerleri		

ETKİNLİK 3.4.

$f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $f(x) = \sqrt{x}$ şeklinde tanımlı karekök referans fonksiyonundan türetilen m(x) ve n(x) fonksiyonları için tabloda bu fonksiyonlara ait grafikleri çizerek, fonksiyonların nitel özellikleri ile ilgili boş bırakılan yerleri uygun biçimde doldurunuz.

Cebirsel Temsili	$m(x) = 3 \cdot \sqrt{x-2}$	$n(x) = -4 \cdot \sqrt{x}$
Grafik Temsili		
Tanım Kümesi		
Görüntü Kümesi		
İşareti		
Artan-Azalanlığı		
Maksimum-Minimum Noktaları ve Değerleri		

NOT

a, r, k ∈ $\mathbb{R}$, r > 0, k > 0 ve a ≠ 0 olmak üzere;
f: [0, ∞) → [0, ∞) , f(x) = $\sqrt{x}$ şeklinde tanımlı karekök referans fonksiyonundan türetilen

$$\mathbf{g(x) = a \cdot \sqrt{x + r} + k}$$

şeklinde tanımlı g fonksiyonunun grafiği çizilirken aşağıdaki adımlar uygulanır:

1. adım : f(x) = $\sqrt{x}$ fonksiyonunun grafiği x ekseninde **negatif** yönde **r** birim ötelenerek m(x) = $\sqrt{x + r}$ şeklinde tanımlı m fonksiyonunun grafiği çizilir.
2. adım : m fonksiyonunun değerlerini **a katına** eşleyen n(x) = a •$\sqrt{x + r}$ şeklinde tanımlı n fonksiyonunun grafiği çizilir.
3. adım : n fonksiyonunun grafiği y ekseni boyunca **pozitif** yönde **k** birim ötelenerek g(x) = a · $\sqrt{x + r}$ + k şeklinde tanımlı g fonksiyonunun grafiği çizilmiş olur.

Benzer şekilde a, r, k ∈ $\mathbb{R}$, r > 0, k > 0 ve a ≠ 0 olmak üzere;
f: [0, ∞) → [0, ∞) , f(x) = $\sqrt{x}$ şeklinde tanımlı karekök referans fonksiyonundan türetilen

$$\mathbf{g(x) = a \cdot \sqrt{x + r} - k}$$

şeklinde tanımlı g fonksiyonunun grafiğinin çiziminde yukarıdaki adımlar y ekseninde **negatif** yönde **k** birim öteleme olmak üzere aynı şekilde uygulanır.

$$\mathbf{g(x) = a \cdot \sqrt{x - r} + k}$$

şeklinde tanımlı g fonksiyonunun grafiğinin çiziminde yukarıdaki adımlar x ekseninde **pozitif** yönde **r** birim öteleme olmak üzere aynı şekilde uygulanır.

$$\mathbf{g(x) = a \cdot \sqrt{x - r} - k}$$

şeklinde tanımlı g fonksiyonunun grafiğinin çiziminde yukarıdaki adımlar x ekseninde **pozitif** yönde **r** birim öteleme ve y ekseninde **negatif** yönde **k** birim öteleme olmak üzere aynı şekilde uygulanır.

ETKİNLİK 3.5.

$f : [0, \infty) \to [0, \infty)$, $f(x) = \sqrt{x}$ şeklinde tanımlı karekök referans fonksiyonundan türetilen $g(x) = a \cdot \sqrt{x+r} + k$ $(a, r, k \in \mathbb{R}, a \neq 0, r > 0, k > 0)$ fonksiyonlarının nitel özellikleri ile ilgili $a > 0$ ve $a < 0$ durumları için varsayımlarınızı sözel olarak ve genellemelerinizi cebirsel dil ile örnekteki gibi kendi cümlelerinizi kullanarak ifade ediniz.

$g(x) = a \cdot \sqrt{x+r} + k$ $(a, r, k \in \mathbb{R}, a \neq 0, r > 0, k > 0)$				
Nitel Özellikleri	$a > 0$		$a < 0$	
	Varsayım	Genelleme	Varsayım	Genelleme
Tanım Kümesi	Fonksiyonun tanımlı olması için kareköklü ifadede karekök içi negatif olmamalıdır. Karekök içini sıfır veya pozitif yapan x değerleri için fonksiyonun tanımlı olacağı varsayılabilir.	$x + r \geq 0$ $x \geq -r$ olmalıdır. Tanım Kümesi: $[-r, \infty)$ dır.	Fonksiyonun tanımlı olduğu aralık bulunurken yalnızca karekök içinin negatif olmaması yeterlidir. a nın işareti tanım kümesini etkilemeyecektir. Tanım kümesinin yine karekök içini sıfır veya pozitif yapan x değerlerinden oluşacağı varsayılabilir.	$x + r \geq 0$ $x \geq -r$ olmalıdır. Tanım Kümesi: $[-r, \infty)$ dır.
Görüntü Kümesi				
İşareti				
Artan-Azalanlığı				
Maksimum-Minimum Olduğu Noktalar ve Değerleri				

NOT

a, r, k ∈ ℝ, a ≠ 0 olmak üzere [−r, ∞) → [k, ∞), g(x) = a · $\sqrt{x+r}$ + k şeklinde tanımlı karekök fonksiyonlarının nitel özelliklerini şu şekilde sıralayabiliriz:

- Tanım kümesi [−r, ∞) dır.
- Görüntü kümesi [k, ∞) dır.
- Bire birdir.
- Değer kümesi ([k, ∞)) , görüntü kümesine eşit verildiğinden örtendir. (Dikkat: Fonksiyon tanımlanırken değer kümesi ℝ verilseydi, fonksiyon örten olmazdı.)
- a > 0 ise fonksiyon artandır. Fonksiyonun maksimum noktası yoktur, minimum değeri k olup, fonksiyon minimum değerini x = −r de alır.
- a < 0 ise fonksiyon azalandır. Fonksiyonun minimum değeri yoktur, maksimum değeri k olup, fonksiyon maksimum değerini x = −r de alır.

ÖRNEK



Bir ipte ilerleyen dalganın hızı m/sn cinsinden V, ipin gerginliği Newton cinsinden T, ipin birim uzunluğu başına düşen kütlesi kg/m cinsinden μ olmak üzere;

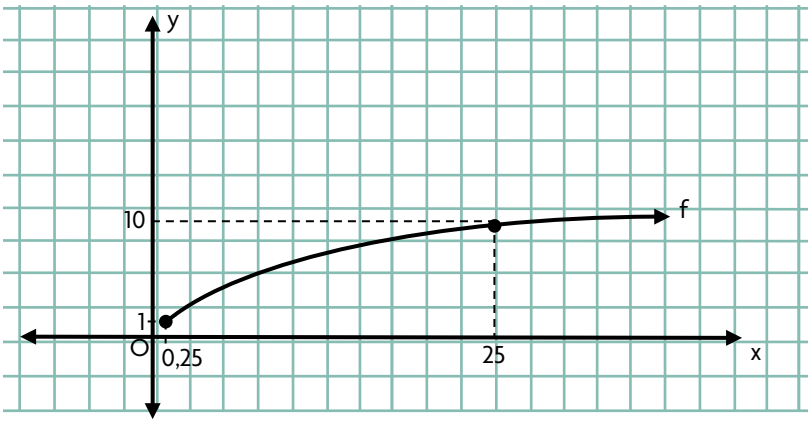
$V = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ formülü ile hesaplanır.

İpin birim uzunluk başına kütlesinin μ = 0,25 kg/m olarak sabitlendiği bir deneyde, ipin gerginliği x Newton ve ipte ilerleyen dalganın hızı f(x) m/sn olmak üzere ;

f(x) = $2\sqrt{x}$ fonksiyonu ile modelleniyor. İpin gerginliği [0,25 , 25] da değişen bir gerçek sayıdır.

Buna göre

a) İpte ilerleyen dalganın hızını veren fonksiyonun grafiğini çizerek, belirtilen aralıkta fonksiyonun alabileceği minimum ve maksimum değerleri bulunuz.



Hızın (f(x) in) alabileceği maksimum değer x = 25 Newton için 10 m/sn olup, minimum değer ise x = 0,25 Newton için 1 m/sn dir.

b) İpin gerginliği arttıkça ipte ilerleyen dalganın hızı hakkında ne söylenebilir? Fonksiyonun nitel özelliklerinden yararlanarak açıklayınız.

İpin gerginliği (x) arttıkça ipte ilerleyen dalganın hızının da arttığını hem grafikten hem de cebirsel olarak görebiliriz. Bunu incelemek için fonksiyonun tanım aralığı olan [0,25 , 25] dan herhangi iki değer seçelim. Bu değerler $x_1 = 1$ ve $x_2 = 16$ olsun.
$1 < 16$ iken ($x_1 < x_2$ iken) $f(1) < f(16)$ ($f(x_1) < f(x_2)$) oluyorsa fonksiyon artandır.
$f(1) = 2\sqrt{1} = 2$

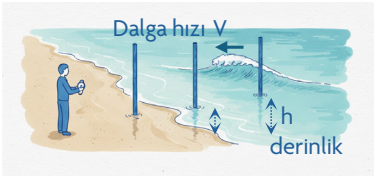
$f(16) = 2\sqrt{16} = 8$ olup $f(1) < f(16)$ dır. Dolayısıyla bunu fonksiyonun nitel özelliklerinden 'artanlık' ile açıklarız.

SIRA SİZDE 3.

Sığ sulardaki dalgaların suyun derinliğine bağlı olarak hızı ölçülürken yer çekimi ivmesi m/sn² cinsinden g,
derinlik metre cinsinden h ve
dalganın hızı m/sn cinsinden V olmak üzere ;

$$V = \sqrt{g \cdot h}$$

formülü ile hesaplanır.



Deniz kıyısında yapılan bir deneyde yer çekimi ivmesi sabit $g = 9$ m/sn²,
suyun derinliği metre cinsinden x
ve dalga hızı m/sn cinsinden f(x) olmak üzere;

$$f(x) = 3\sqrt{x}$$

fonksiyonu elde ediliyor. Suyun derinliği [0,1 , 9] da bir gerçek sayı olmak üzere dalganın hızı ölçülmek isteniyor.

Buna göre

a) Sığ sudaki dalga hızını veren fonksiyonun grafiğini çizerek, belirtilen aralıkta fonksiyonun alabileceği maksimum ve minimum değerleri bulunuz.

b) Modellenen fonksiyonun tanım ve görüntü kümelerini yazınız. Fonksiyonun nitel özelliklerinden faydalanarak derinlik ile dalga hızı arasındaki ilişki hakkında ne söylenebilir, açıklayınız.

ÖRNEK

$f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $f(x) = \sqrt{x}$ şeklinde tanımlı karekök referans fonksiyonuna uygulanan dönüşümler ile $g(x) = 3 \cdot \sqrt{x - 1} - 6$ fonksiyonu türetilmiştir.

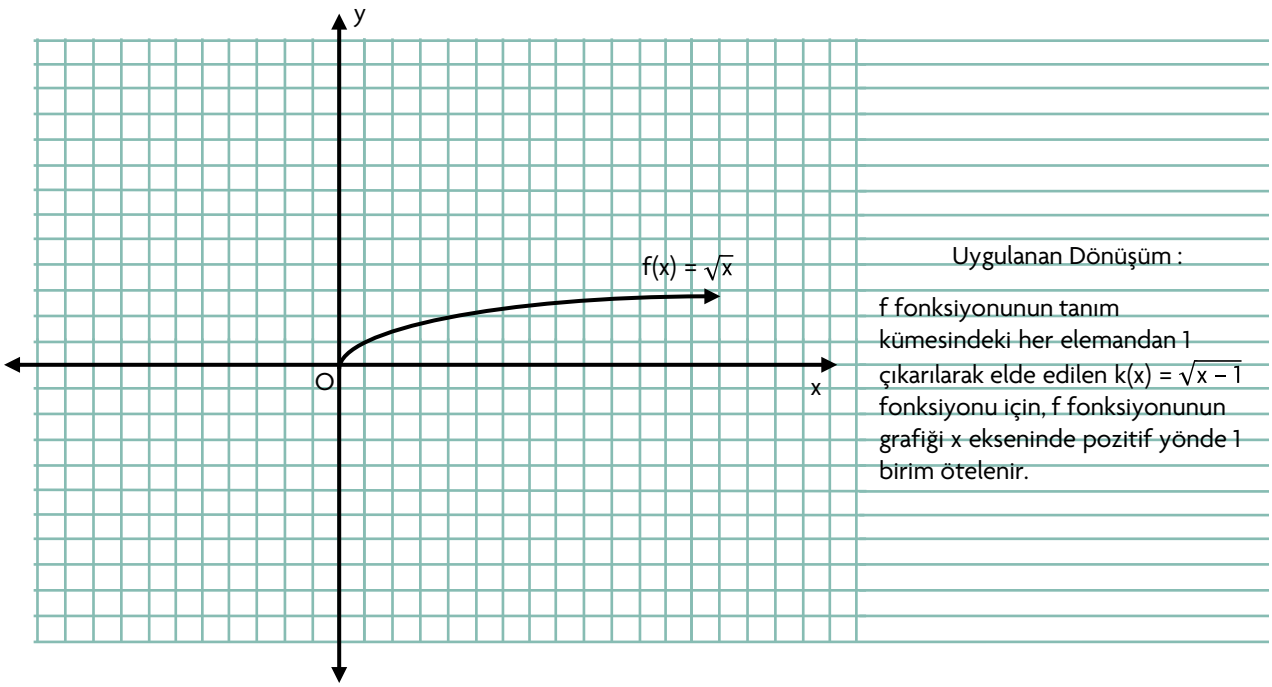
Buna göre

a) g fonksiyonunun grafiğini f fonksiyonundan yararlanarak çiziniz. Uygulanan dönüşümleri verilen boşluklara adım adım yazınız.
b) g fonksiyonunun tanım ve görüntü kümelerini yazınız.
c) g fonksiyonunun sıfırlarını bulunuz.
ç) g fonksiyonunun işaretini inceleyiniz.
d) g fonksiyonunun bire birliğini, örtenliğini ve tek veya çift olma durumunu inceleyerek belirleyiniz.

ÇÖZÜM

a)

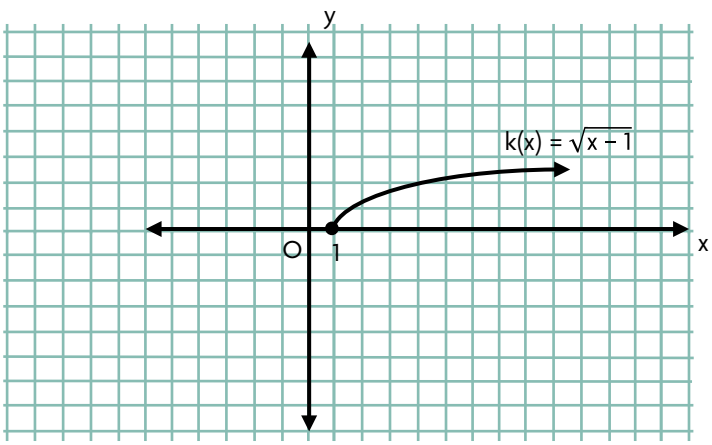
Adım 1.



Uygulanan Dönüşüm :

f fonksiyonunun tanım kümesindeki her elemandan 1 çıkarılarak elde edilen $k(x) = \sqrt{x - 1}$ fonksiyonu için, f fonksiyonunun grafiği x ekseninde pozitif yönde 1 birim ötelenir.

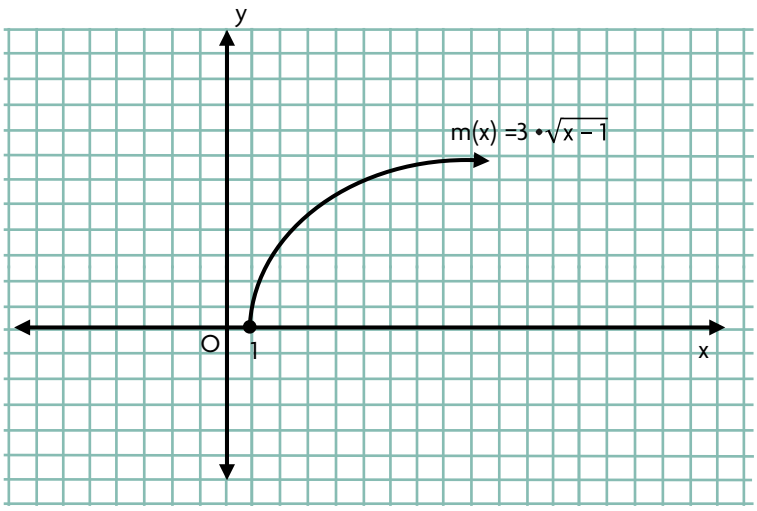
Adım 2.



Uygulanan Dönüşüm :

k fonksiyonunun grafiğinin üzerindeki her bir noktayı 3 katına eşleyen $m(x) = 3 \cdot \sqrt{x - 1}$ fonksiyonu çizilir.

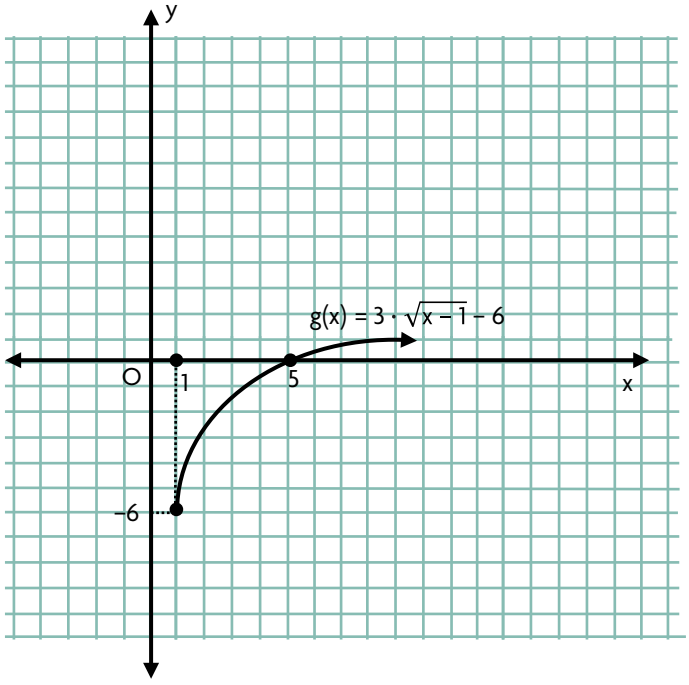
Adım 3.



Uygulanan Dönüşüm :

m fonksiyonunun grafiğine y ekseni boyunca negatif yönde 6 birim öteleme dönüşümü uygulanarak $g(x) = 3 \cdot \sqrt{x-1} - 6$ fonksiyonu çizilir.

Adım 4.



b) $g(x) = 3 \cdot \sqrt{x-1} - 6$ fonksiyonunun tanım ve görüntü kümesi :

g fonksiyonunun tanım kümesi [1, ∞) , görüntü kümesi ise [−6, ∞) dur.

c) $g(x) = 3 \cdot \sqrt{x-1} - 6$ fonksiyonunun sıfırı:

Cebirsel inceleme yaparsak ;

$g(x) = 3 \cdot \sqrt{x-1} - 6 = 0$ ise

$3 \cdot \sqrt{x-1} = 6$

$\sqrt{x-1} = 2$

$x - 1 = 4$

$x = 5$ olur.

ç) $g(x) = 3 \cdot \sqrt{x-1} - 6$ fonksiyonunu işareti :

Fonksiyonun grafiği incelendiğinde [1, 5) aralığında fonksiyonun negatif değerler aldığı, (5, ∞) aralığı için ise pozitif değerler aldığı görülür.

UYARI

Fonksiyonun işareti incelenirken fonksiyonu sıfır yapan x = 5 değerinin aralıklara dahil edilmediğine dikkat ediniz.

x = 5 değeri için fonksiyonun değeri 0 olup, 0 işaretsizdir.

d) $g(x) = 3 \cdot \sqrt{x-1} - 6$ fonksiyonunun bire birliği :

$\forall x_1, x_2 \in [1, \infty)$ için , $g(x_1) = g(x_2)$ ise

$3 \cdot \sqrt{x_1 - 1} - 6 = 3 \cdot \sqrt{x_2 - 1} - 6$

$3 \cdot \sqrt{x_1 - 1} = 3 \cdot \sqrt{x_2 - 1}$

$\sqrt{x_1 - 1} = \sqrt{x_2 - 1}$

$x_1 - 1 = x_2 - 1$

$x_1 = x_2$ olup $\forall x_1, x_2 \in [1, \infty)$ için $g(x_1) = g(x_2)$ iken $x_1 = x_2$ olduğundan g bire bir fonksiyondur.

$g(x) = 3 \cdot \sqrt{x-1} - 6$ fonksiyonunun örtenliği:

g fonksiyonunun tanım kümesi $[1, \infty)$ ve görüntü kümesi $[-6, \infty)$ olmak üzere, görüntü kümesindeki her bir elemana tanım kümesinde en az bir eleman karşılık geleceğinden $[1, \infty) \rightarrow [-6, \infty)$ şeklinde tanımlanan g örten fonksiyondur.

$\forall y_1 \in [-6, \infty)$ için $y_1 = g(x_1)$ olacak şekilde $\exists x_1 \in [1, \infty)$ bulunduğundan g örten fonksiyondur.

$g(x) = 3 \cdot \sqrt{x-1} - 6$ fonksiyonunun tekliği-çiftliği:

$g(x) = 3 \cdot \sqrt{x-1} - 6$

$g(-x) = 3 \cdot \sqrt{-x-1} - 6$

$-g(x) = -3 \cdot \sqrt{x-1} + 6$ olup, $g(-x) \neq -g(x)$ olduğundan g tek fonksiyon değildir.

Aynı zamanda $g(-x) \neq g(x)$ olduğundan g çift fonksiyon da değildir.

Dolayısıyla g ne tek ne de çift fonksiyondur.

SIRA SİZDE 4.

$f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $f(x) = \sqrt{x}$ şeklinde tanımlı karekök referans fonksiyonuna uygulanan dönüşümler ile $g(x) = 2 \cdot \sqrt{x+3} - 8$ fonksiyonu türetilmiştir.

Buna göre

a) g fonksiyonunun grafiğini f fonksiyonundan yararlanarak çiziniz. Uygulanan dönüşümleri verilen boşluklara adım adım yazınız.

b) g fonksiyonunun tanım ve görüntü kümelerini yazınız.

c) g fonksiyonunun sıfırlarını bulunuz.

ç) g fonksiyonunun işaretini inceleyiniz.

d) g fonksiyonunun bire birliğini, örtenliğini ve tek veya çift olma durumunu inceleyerek bulunuz.

a)

Adım 1.

Uygulanan Dönüşüm :

Adım 2.

Uygulanan Dönüşüm :

Adım 3.

Uygulanan Dönüşüm :

Adım 4.

b) $g(x) = 2 \cdot \sqrt{x+3} - 8$ fonksiyonunun tanım ve görüntü kümesi:

c) $g(x) = 2 \cdot \sqrt{x+3} - 8$ fonksiyonunun sıfırı:

ç) $g(x) = 2 \cdot \sqrt{x+3} - 8$ fonksiyonunun işareti:

d) $g(x) = 2 \cdot \sqrt{x+3} - 8$ fonksiyonunun bire birliği:

e) $g(x) = 2 \cdot \sqrt{x+3} - 8$ fonksiyonunun örtenliği:

f) $g(x) = 2 \cdot \sqrt{x+3} - 8$ fonksiyonunun tekliği-çiftliği:

SIRA SİZDE 5.

$f : [-4,\infty) \to [-3,\infty)$ şeklinde tanımlı $f(x) = \sqrt{x+4} - 3$ fonksiyonunun grafik temsilinden yararlanarak aşağıdaki nitel özellikleri ile ilgili cevaplarınızı yazınız.

Grafik temsili :

a) Fonksiyonun tanım ve görüntü kümesini yazınız.

b) Fonksiyonun işaretini inceleyerek bulunuz.

c) Fonksiyonun artan-azalanlığı ile ilgili ne söylenebilir? Yazınız.

ç) Fonksiyonun sıfırlarını bulunuz.

d) Fonksiyonun minimum-maksimum değerlerini bulunuz.

e) Fonksiyonun bire birliğini, örtenliğini ve tek veya çift olma durumunu inceleyiniz.

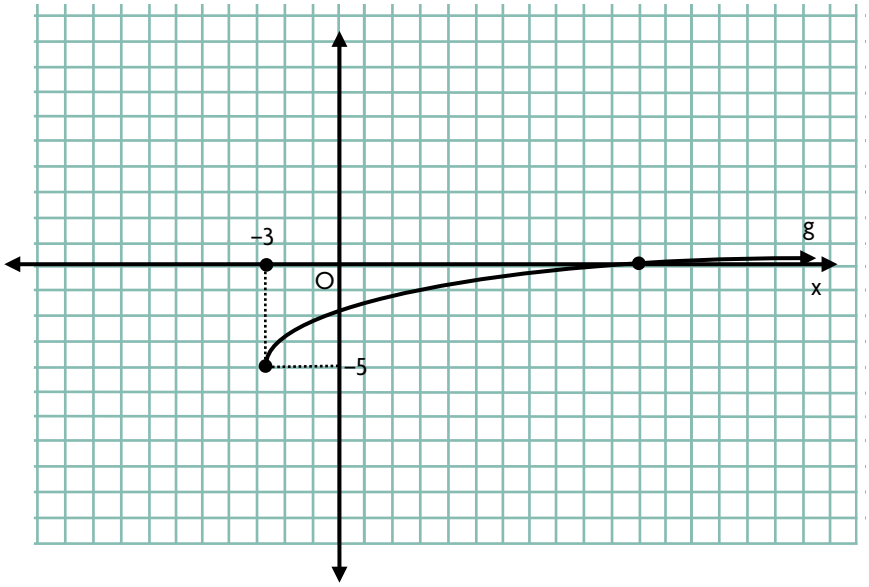
SIRA SİZDE 6.

Aşağıda n, k ∈ ℝ olmak üzere, f : [0, ∞) → [0, ∞), f(x) = $\sqrt{x}$ şeklinde tanımlı karekök referans fonksiyonundan türetilen g(x) = $\sqrt{x + n}$ + k fonksiyonunun grafik temsili verilmiştir.

Buna göre

a) n ve k değerlerini bulunuz.

b) g fonksiyonunun sıfırını bulunuz.



SIRA SİZDE 7.

k ∈ $\mathbb{R}^+$ olmak üzere, f:[0, ∞) → [0, ∞), f(x) = $\sqrt{x}$ şeklinde tanımlı karekök referans fonksiyonunun grafiğine sırasıyla aşağıdaki dönüşümler uygulanarak bu fonksiyondan türetilen g fonksiyonunun grafiği elde ediliyor.

1. adım: x ekseni boyunca negatif yönde 1 birim öteleme

2. adım: Fonksiyonun tüm değerlerini 3 katına eşleme

3. adım: y ekseni boyunca negatif yönde k birim öteleme

g(x) fonksiyonunun grafiği x eksenini (8, 0) noktasında kestiğine göre k kaçtır?

ETKİNLİK 3.6.

Emre Öğretmen matematik dersinde öğrencilerinden $f:[0,\infty)\rightarrow[0,\infty)$, $f(x)=\sqrt{x}$ şeklinde tanımlı karekök referans fonksiyonunun grafiğine aşağıdaki adımları uygulayarak dönüşüm yapmalarını ve elde ettikleri fonksiyonu yazarak grafiğini çizmelerini istemiştir.

Adım 1: x ekseni boyunca pozitif yönde 3 birim öteleme

Adım 2: y ekseni boyunca negatif yönde 2 birim öteleme

Öğrencilerden biri olan Bade 1. adımı doğru uygulamış ancak 2. adımdaki yönü de pozitif alarak h(x) fonksiyonuna ait grafiği çizmiştir. Bade daha sonra hatasını fark edip doğru fonksiyona ait grafiği de çizmiş ve bu fonksiyonu da g(x) olarak adlandırmıştır.

Bade'nin çizdiği h(x) fonksiyonunun minimum değerini aldığı nokta A, g(x) fonksiyonunun minimum değerini aldığı nokta B ve x eksenini kestiği nokta C olmak üzere bu noktaların birleştirilmesiyle elde edilen ABC üçgeninin alanının kaç birimkare olduğunu bulunuz.

ETKİNLİK 3.7.

$g : [0, \infty) \rightarrow [4, \infty)$, $g(x) = \sqrt{x} + 4$ şeklinde tanımlı g fonksiyonunun grafiği çiziliyor. Öncelikle x ekseni üzerindeki $x = 4$ ve $x = 9$ noktaları sırasıyla A ve B olarak işaretleniyor. Daha sonra bu noktalardan geçen ve y eksenine paralel olan doğruların g fonksiyonunun grafiğini kestiği noktalar sırasıyla D ve C olarak işaretleniyor.

Buna göre işaretlenen A, B, C ve D noktalarının birleştirilmesiyle elde edilen ABCD dörtgeninin alanının kaç birimkare olduğunu bulunuz.

ETKİNLİK 3.8.

Tablo 1'de bazı karekök fonksiyonlar ve Tablo 2'de bu fonksiyonlara ait tanım ve görüntü kümeleri harflerle kodlanarak verilmiştir. Verilen tanım ve görüntü kümelerine ait harfleri Tablo 1' deki fonksiyonlarla örnekteki gibi doğru bir şekilde eşleyiniz.

Tablo 1

Fonksiyonlar	Tanım Kümesi	Görüntü Kümesi
$f(x) = \sqrt{x+5} + 1$		
$g(x) = 3 \cdot \sqrt{x-4} - 6$	C	ç
$h(x) = -2 \cdot \sqrt{x+1} - 4$		
$k(x) = \sqrt{x+3} + 5$		
$m(x) = \sqrt{x+2}$		
$n(x) = -\sqrt{x} + 7$		

Tablo 2

Tanım Kümesi		Görüntü Kümesi	
A	[−1, ∞)	a	[4, ∞)
B	[2, ∞)	b	[−4, ∞)
C	[4, ∞)	c	[5, ∞)
Ç	[−5, ∞)	ç	[−6, ∞)
D	[−3, ∞)	d	[1, ∞)
E	[0, ∞)	e	[7, ∞)
F	[−2, ∞)	f	[0, ∞)

GERİ BİLDİRİM

Bu geri bildirim sayesinde kendi cevabınızı kontrol edebilir, hatalarınızı düzelterek öğrenmenizi pekiştirebilirsiniz.

ETKİNLİK 1.1. Ekran İkonu ve Piksel Sayıları

ÇÖZÜM

İkonun toplam piksel sayısı (x)	256	1024	2304	4096	9216	16384
İkonun tek bir kenar uzunluğu (f(x))	16	32	48	64	96	128

Adım 1.

Burada ikonun bir kenar uzunluğu 16 olduğunda piksel sayısının $16^2 = 256$ olduğu ve benzer şekilde $32^2 = 1024$, $48^2 = 2304$, ... , $128^2 = 16384$ olduğu görülür. Dolayısıyla bu nicelikler arasında doğrusal bir ilişki bulunmamaktadır.

Adım 2.

x ile f(x) niceliklerini karşılaştırdığımızda f(x) in karesinin x e eşit olduğu, yani bu durumda f(x) in x in kareköküne eşit olduğu söylenebilir. Bu ilişkinin cebirsel temsili $f(x) = \sqrt{x}$ ($x \geq 0$) şeklinde ifade edilir.

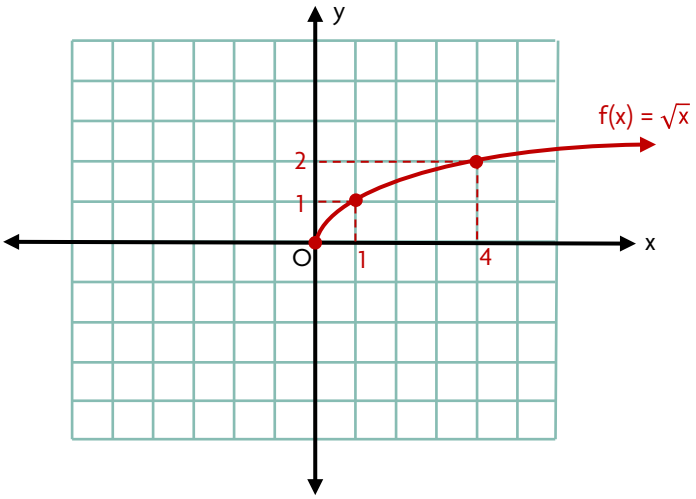
ETKİNLİK 2.1.

ÇÖZÜM

x	0	1	2	4	5	9	16	25	...
f(x)	0	1	$\sqrt{2}$	2	$\sqrt{5}$	3	4	5	...

ETKİNLİK 2.2.

ÇÖZÜM



ETKİNLİK 2.3.

ÇÖZÜM

a) Fonksiyonun tanım kümesi:

Karekök fonksiyonu karekök içini 0 veya pozitif yapan x değerleri için tanımlı olacağından tanım kümesi $[0, \infty)$ dır.

b) Fonksiyonun görüntü kümesi

Tanım kümesindeki değerlere karşılık gelen görüntülere tablodan da bakılırsa görüntü kümesinin $[0, \infty)$ olduğu görülür.

c) Fonksiyonun sıfırı

Fonksiyonun sıfırı demek , $f(x) = 0$ eşitliğini sağlayan x değeri demektir. Bu durumda $\sqrt{x} = 0$ için $x = 0$ olduğundan fonksiyonun sıfırı $x = 0$ noktasıdır.

ç) Fonksiyonun işareti

Fonksiyonun grafiğinden de görülebileceği gibi fonksiyon $(0, \infty)$ aralığında pozitiftir.

d) Fonksiyonun artan-azalan olduğu aralıklar

Grafik incelendiğinde $\forall x_1, x_2 \in [0, \infty)$ için $x_1 < x_2$ iken $f(x_1) < f(x_2)$ olduğundan fonksiyon $[0, \infty)$ aralığında artandır.

e) Fonksiyonun maksimum-minimum değerleri ve bu değerleri aldığı noktalar

Fonksiyon artan olduğundan maksimum noktası yoktur. Minimum değerini $x = 0$ noktasında alır.

f) Fonksiyonun bire birliği

Fonksiyonun tanım aralığındaki her bir elemanın bir ve yalnız bir görüntüsü bulunduğundan fonksiyon bire birdir.

g) Fonksiyonun örtenliği

Fonksiyonun değer kümesindeki ($[0, \infty)$) her bir eleman için tanım kümesinde en az bir eleman bulunacağından fonksiyon örtendir.

ğ) Fonksiyonun tek veya çift olma durumu

Fonksiyonun tek veya çift olup olmadığını incelemek için fonksiyonda x yerine $-x$ değerini yazdığımızda fonksiyon tanımsız olacağından $f(x) = \sqrt{x}$ fonksiyonu ne tek ne de çifttir.

UYARI

Fonksiyonun $x = 0$ için değerinin 0 olduğuna, dolayısıyla $(0, 0)$ noktasında nötr (işaretsiz) olduğuna ve bu noktanın aralığa dâhil edilmediğine dikkat ediniz.

SIRA SİZDE 1.

ÇÖZÜM

1. Fonksiyonun tanım ve görüntü kümeleri

Fonksiyon [0, 18] da tanımlı olarak verildiğinden tanım kümesi [0, 18] dır. Görüntü kümesi ise [0, 18] daki değerler için elde edilecek görüntüler ; x = 0 için $f(0) = \sqrt{0} = 0$ ve x = 18 için $f(18) = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ olacağından $[0, 3\sqrt{2}]$ dır.

2. Fonksiyonun bire bir ve örtenliği

Fonksiyonun tanım aralığındaki her bir x değerine karşılık gelen görüntüler birbirinden farklı olacağından yani $\forall x_1, x_2 \in [0, 18]$ için $x_1 \neq x_2$ iken $f(x_1) \neq f(x_2)$ olduğundan f fonksiyonu bire birdir. Fakat değer kümesi $\mathbb{R}$ olarak verildiğinden, değer kümesindeki her gerçek sayı tanım aralığındaki bir x değerine karşılık gelmez. Dolayısıyla değer kümesinde eşlenmeyen eleman kalacağından f örten fonksiyon değildir.

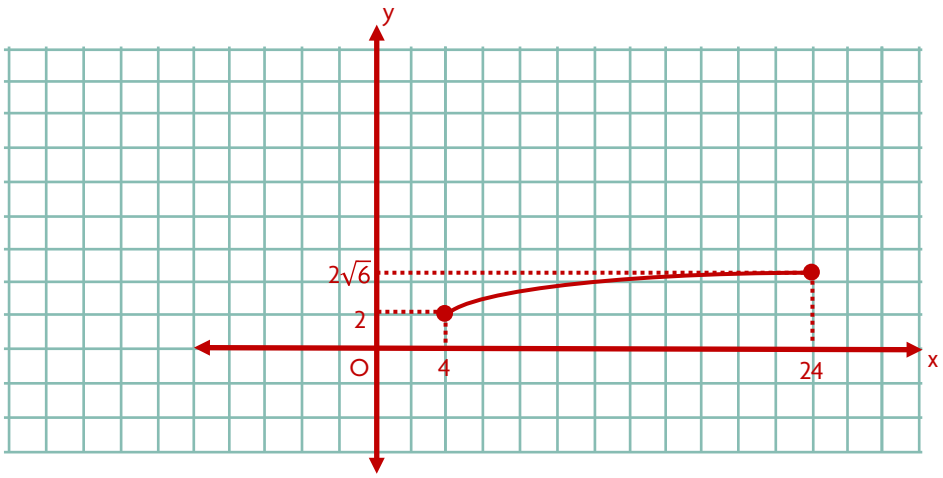
3. Fonksiyonun artan-azalanlığı

Fonksiyonun tanım aralığından alınan x_1, x_2 değerleri için $x_1 < x_2$ iken $f(x_1) < f(x_2)$ olduğundan fonksiyon verilen aralıkta artandır.

SIRA SİZDE 2.

ÇÖZÜM

1. Fonksiyonun grafiği



2. Fonksiyonun sıfırı ve işareti

Grafikten de görüldüğü üzere verilen aralıkta fonksiyonun x eksenini kesmediği, dolayısıyla sıfır değerini almadığı görülür. Fonksiyonun tanımlı olduğu aralıkta sıfırı yoktur.
Tanımlı olduğu aralıkta fonksiyonun pozitif değer aldığı grafikten de görülmektedir.
Dolayısıyla f fonksiyonu [4, 24] aralığında daima pozitiftir.

3. Fonksiyonun minimum ve maksimum değerleri

Fonksiyon minimum değerini x = 4 için alır. Minimum değeri $f(x) = \sqrt{4} = 2$ dir.
Fonksiyon maksimum değerini x = 24 için alır. Maksimum değeri $f(x) = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$ dır.

ETKİNLİK 3.1.

ÇÖZÜM

a)

Fonksiyon	a	Oluşan Karekök Fonksiyonunun Cebirsel Temsili $g(x) = a \cdot \sqrt{x+r} + k$	Karekök Referans Fonksiyonunun Cebirsel Temsiline Göre Yapılan Cebirsel İşlem	Karekök Referans Fonksiyonunun Grafik Temsiline Uygulanan Dönüşüm
m(x)	−2	$k(x) = -2 \cdot \sqrt{x}$	−2 ile çarpma	x eksenine göre yansıma, 2 kat dikey germe
p(x)	3	$p(x) = 3 \cdot \sqrt{x}$	3 ile çarpma	3 kat dikey germe
r(x)	5	$r(x) = 5 \cdot \sqrt{x}$	5 ile çarpma	5 kat dikey germe
s(x)	−4	$s(x) = -4 \cdot \sqrt{x}$	−4 ile çarpma	x eksenine göre yansıma, 4 kat dikey germe

b)

Fonksiyon	a	r	Oluşan Karekök Fonksiyonunun Cebirsel Temsili $g(x) = a \cdot \sqrt{x+r} + k$	Karekök Referans Fonksiyonunun Cebirsel Temsiline Göre Yapılan Cebirsel İşlem	Karekök Referans Fonksiyonunun Grafik Temsiline Uygulanan Dönüşüm
m(x)	$-\frac{1}{3}$	2	$k(x) = -\frac{1}{3} \cdot \sqrt{x+2}$	Tüm bağımsız değişkenlere 2 ekleme, karekökünü $-\frac{1}{3}$ ile çarpma	x ekseni boyunca negatif yönde 2 birim öteleme, x eksenine göre yansıma, $\frac{1}{3}$ kat dikey sıkıştırma
p(x)	4	−3	$p(x) = 4 \cdot \sqrt{x-3}$	Tüm bağımsız değişkenlerden 3 çıkarma, karekökünü 4 ile çarpma	x ekseni boyunca pozitif yönde 3 birim öteleme, 4 kat dikey germe
r(x)	$\frac{1}{2}$	5	$r(x) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{x+5}$	Tüm bağımsız değişkenlere 5 ekleme, karekökünü $\frac{1}{2}$ ile çarpma	x ekseni boyunca negatif yönde 5 birim öteleme, $\frac{1}{2}$ kat dikey sıkıştırma
s(x)	−3	−1	$s(x) = -3 \cdot \sqrt{x-1}$	Tüm bağımsız değişkenlerden 1 çıkarma, karekökünü − 3 ile çarpma	x ekseni boyunca pozitif yönde 1 birim öteleme, x eksenine göre yansıma, 3 kat dikey germe

c)

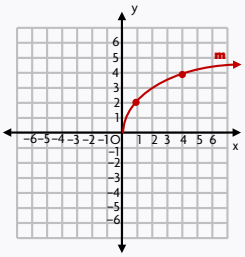
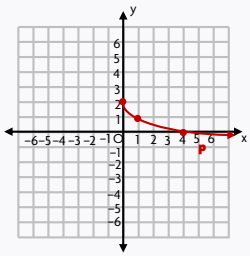
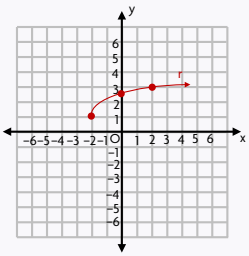
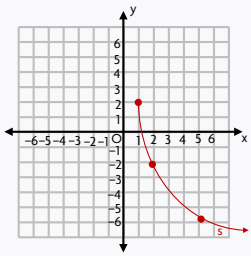
Fonksiyon	a	k	Oluşan Karekök Fonksiyonunun Cebirsel Temsili $g(x) = a \cdot \sqrt{x+r} + k$	Karekök Referans Fonksiyonunun Cebirsel Temsiline Göre Yapılan Cebirsel İşlem	Karekök Referans Fonksiyonunun Grafik Temsiline Uygulanan Dönüşüm
m(x)	−2	1	$k(x) = -2 \cdot \sqrt{x} + 1$	Tüm bağımsız değişkenlerin karekökünün −2 ile çarpımına 1 ekleme	x eksenine göre yansıma, 2 kat dikey germe, y ekseni boyunca pozitif yönde 1 birim öteleme
p(x)	4	−2	$p(x) = 4 \cdot \sqrt{x} - 2$	Tüm bağımsız değişkenlerin karekökünün 4 ile çarpımından 2 çıkarma	4 kat dikey germe, y ekseni boyunca negatif yönde 2 birim öteleme
r(x)	1	3	$r(x) = \sqrt{x} + 3$	Tüm bağımsız değişkenlerin kareköküne 3 ekleme	y ekseni boyunca pozitif yönde 3 birim öteleme
s(x)	−3	−1	$s(x) = -3 \cdot \sqrt{x} - 1$	Tüm bağımsız değişkenlerin karekökünün −3 ile çarpımından 1 çıkarma	x eksenine göre yansıma, 3 kat dikey germe, y ekseni boyunca negatif yönde 1 birim öteleme

ç)

Fonksiyon	a	r	k	Oluşan Karekök Fonksiyonunun Cebirsel Temsili $g(x) = a \cdot \sqrt{x+r} + k$	Karekök Referans Fonksiyonunun Cebirsel Temsiline Göre Yapılan Cebirsel İşlem	Karekök Referans Fonksiyonunun Grafik Temsiline Uygulanan Dönüşüm
m(x)	1	−2	−3	$k(x) = \sqrt{x-2} - 3$	Tüm bağımsız değişkenlerin 2 eksiğinin karekökünün 3 eksiği	x ekseni boyunca pozitif yönde 2 birim, y ekseni boyunca negatif yönde 3 birim öteleme
p(x)	−1	3	1	$p(x) = -\sqrt{x+3} + 1$	Tüm bağımsız değişkenlerin 3 fazlasının karekökünün −1 ile çarpımının 1 fazlası	x ekseni boyunca negatif yönde 3 birim öteleme, x eksenine göre yansıma, y ekseni boyunca pozitif yönde 1 birim öteleme
r(x)	2	−1	4	$r(x) = 2 \cdot \sqrt{x-1} + 4$	Tüm bağımsız değişkenlerin 1 eksiğinin karekökünün 2 katının 4 fazlası	x ekseni boyunca pozitif yönde 1 birim öteleme, 2 kat dikey germe, y ekseni boyunca pozitif yönde 4 birim öteleme
s(x)	−3	1	−2	$s(x) = -3 \cdot \sqrt{x+1} - 2$	Tüm bağımsız değişkenlerin 1 fazlasının karekökünün −3 ile çarpımının 2 eksiği	x ekseni boyunca negatif yönde 1 birim öteleme, x eksenine göre yansıma, 3 kat dikey germe, y ekseni boyunca negatif yönde 2 birim öteleme

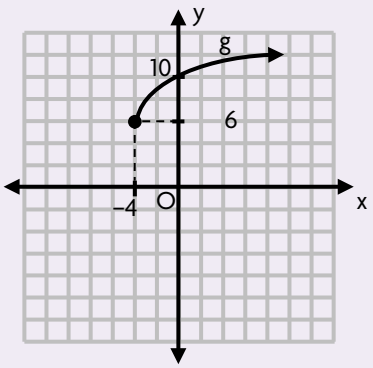
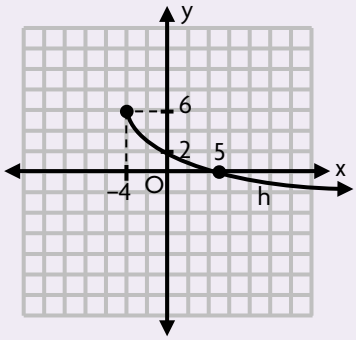
ETKİNLİK 3.2.

ÇÖZÜM

Karekök Referans Fonksiyonunun Grafiğine Uygulanan Dönüşümler	2 kat dikey germe	x eksenine göre yansıma, y ekseni boyunca pozitif yönde 2 birim öteleme	x ekseni boyunca negatif yönde 2 birim, y ekseni boyunca pozitif yönde 1 birim öteleme,	4 kat dikey germe, x eksenine göre yansıma, x ekseni boyunca pozitif yönde 1 birim, y ekseni boyunca pozitif yönde 2 birim öteleme
Cebirsel Temsili	$m(x) = 2 \cdot \sqrt{x}$	$p(x) = -\sqrt{x} + 2$	$r(x) = \sqrt{x+2} + 1$	$s(x) = -4 \cdot \sqrt{x-1} + 2$
Grafik Temsili				

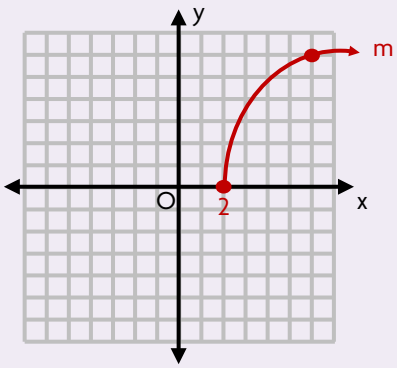
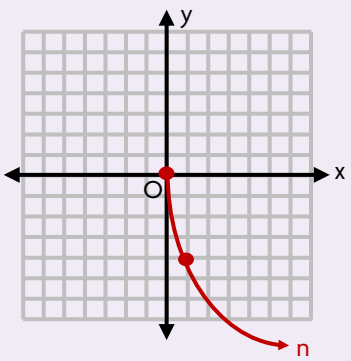
ETKİNLİK 3.3.

ÇÖZÜM

Cebirsel Temsili	$g(x) = 2 \cdot \sqrt{x+4} + 6$	$h(x) = -2 \cdot \sqrt{x+4} + 6$
Grafik Temsili		
Uygulanan Dönüşüm	x ekseninde negatif yönde 4 birim öteleme, 2 kat dikey germe, y ekseninde pozitif yönde 6 birim öteleme	x ekseninde negatif yönde 4 birim öteleme, x eksenine göre yansıma, 2 kat dikey germe, y ekseninde pozitif yönde 6 birim öteleme
Tanım Kümesi	$[-4, \infty)$	$[-4, \infty)$
Görüntü Kümesi	$[6, \infty)$	$(-\infty, 6]$
İşareti	$[-4, \infty)$ da pozitiftir.	$[-4, 5)$ da pozitif, $(5, \infty)$ da negatiftir.
Artan-Azalanlığı	Artan	Azalan
Maksimum-Minimum Noktaları ve Değerleri	Minimum değeri $x = -4$ için 6, maksimum değeri yoktur.	Minimum değeri yoktur, maksimum değeri $x = -4$ için 6 dır.

ETKİNLİK 3.4.

ÇÖZÜM

Cebirsel Temsili	$m(x) = 3 \cdot \sqrt{x-2}$	$n(x) = -4 \cdot \sqrt{x}$
Grafik Temsili		
Tanım Kümesi	$[2, \infty)$	$[0, \infty)$
Görüntü Kümesi	$[0, \infty)$	$(-\infty, 0]$
İşareti	$(2, \infty)$ da pozitiftir.	$(0, \infty)$ da negatiftir.
Artan-Azalanlığı	Artan	Azalandır.
Maksimum-Minimum Noktaları ve Değerleri	Minimum değeri x = 2 için 0 dır. Maksimum değeri yoktur.	Maksimum değeri x = 0 için 0 dır. Minimum değeri yoktur.

ETKİNLİK 3.5.

ÇÖZÜM

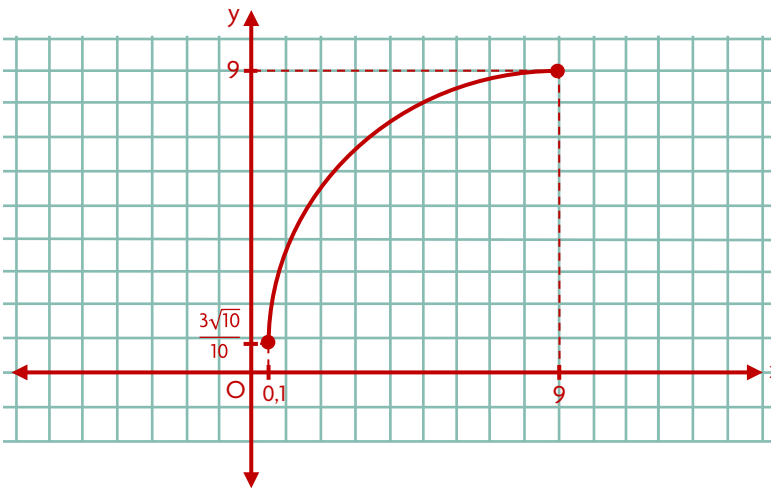
$g(x) = a \cdot \sqrt{x+r} + k$ $(a, r, k \in \mathbb{R}, a \neq 0, r > 0, k > 0)$				
Nitel Özellikleri	$a > 0$		$a < 0$	
	Varsayım	Genelleme	Varsayım	Genelleme
Tanım Kümesi	Fonksiyonun tanımlı olması için kareköklü ifadede karekök içi negatif olmamalıdır. Karekök içini sıfır veya pozitif yapan x değerleri için fonksiyonun tanımlı olacağı varsayılabilir.	$x + r \geq 0$ $x \geq -r$ olmalıdır. Tanım Kümesi: $[-r, \infty)$ dır.	Fonksiyonun tanımlı olduğu aralık bulunurken yalnızca karekök içinin negatif olmaması yeterlidir. a nın işareti tanım kümesini etkilemeyecektir. Tanım kümesinin yine karekök içini sıfır veya pozitif yapan x değerlerinden oluşacağı varsayılabilir.	$x + r \geq 0$ $x \geq -r$ olmalıdır. Tanım Kümesi: $[-r, \infty)$ aralığıdır.
Görüntü Kümesi	Fonksiyonun görüntü kümesi, tanım kümesindeki değerlerin fonksiyonun kuralı altında aldıkları değerler olduğundan, görüntü kümesinin bu değerlerin aralığı olacağı varsayılabilir.	Tanım kümesindeki en küçük değer olan $x = -r$ değeri için $g(-r) = a \cdot \sqrt{-r+r} + k$ $g(-r) = a \cdot 0 + k$ $g(-r) = k$ olup, $a > 0$ olduğundan Görüntü Kümesi: $[k, \infty)$ aralığıdır.	Fonksiyonun görüntü kümesi bulunurken benzer şekilde tanım kümesindeki değerlerin fonksiyonun kuralı altındaki değerlerin oluşturduğu aralık olacağı varsayılabilir.	Tanım kümesindeki en küçük değer olan $x = -r$ değeri için $g(-r) = a \cdot \sqrt{-r+r} + k$ $g(-r) = a \cdot 0 + k$ $g(-r) = k$ olup, $a < 0$ olduğundan Görüntü Kümesi: $(-\infty, k]$ aralığıdır.
İşareti	$a > 0$ iken fonksiyonun sıfırı olmayacağından, fonksiyonun işaretinin tanımlı olduğu aralıkta daima pozitif olacağı varsayılabilir.	$a > 0$ için $g(x) = a \cdot \sqrt{x+r} + k$ fonksiyonunun işareti $[-r, \infty)$ aralığında daima pozitiftir.	$a < 0$ iken fonksiyonun sıfırı vardır. Fonksiyonun işaretinin, tanım kümesinde fonksiyonun sıfırı olan noktadan küçük x değerleri için pozitif, fonksiyonun sıfırından büyük x değerleri için negatif olacağı varsayılabilir.	$a < 0$ için fonksiyonun sıfırı: $g(x) = a \cdot \sqrt{x+r} + k = 0$ $\sqrt{x+r} = -\frac{k}{a}$ $x + r = \left(-\frac{k}{a}\right)^2$ $x = \frac{k^2}{a^2} - r$ olmak üzere fonksiyonun işareti $\left[-r, \frac{k^2}{a^2} - r\right)$ aralığında pozitif, $\left(\frac{k^2}{a^2} - r, \infty\right)$ aralığında ise negatiftir.

Artan-Azalanlığı	Karekök referans fonksiyonu artan olduğundan ve pozitif bir a katsayısı yönü değiştirmeyeceğinden, fonksiyonun daima artan olacağı varsayılabilir.	Tanım kümesindeki $\forall x_1 < x_2$ için $\sqrt{x_1+r} < \sqrt{x_2+r}$ olur. $a > 0$ olduğundan $a \cdot \sqrt{x_1+r} < a \cdot \sqrt{x_2+r}$ olur, $a \cdot \sqrt{x_1+r} + k < a \cdot \sqrt{x_2+r} + k$ yani $g(x_1) < g(x_2)$ dir. O hâlde g **artan** fonksiyondur.	Negatif bir a katsayısı fonksiyonun grafiğinin x eksenine göre yansıması alınarak yönünü tersine çevireceğinden, x değerleri arttıkça görüntü değerlerinin azalacağı ve fonksiyonun azalan olacağı varsayılabilir.	Tanım kümesindeki $\forall x_1 < x_2$ için $\sqrt{x_1+r} < \sqrt{x_2+r}$ olur. $a < 0$ olduğundan eşitsizlik a ile çarpıldığında yön değiştirerek $a \cdot \sqrt{x_1+r} > a \cdot \sqrt{x_2+r}$ olur, $a \cdot \sqrt{x_1+r} + k > a \cdot \sqrt{x_2+r} + k$ dır yani $g(x_1) > g(x_2)$ dir. O hâlde g **azalan** fonksiyondur.
Maksimum-Minimum Olduğu Noktalar ve Değerleri	Fonksiyon $a > 0$ için artan olduğundan minimum değerini tanım kümesinin başlangıç sınırında alacağı, üst sınır olmadığından maksimum değerinin olmayacağı varsayılabilir.	Minimum Nokta: $(-r, k)$ Minimum Değer: $g(-r) = k$ Fonksiyon $[k, \infty)$ aralığında değer aldığı için maksimum değeri yoktur.	Fonksiyon $a < 0$ için azalan olduğundan en büyük değerini tanım kümesinin başlangıç sınırında alacağı, alt sınır olmadığından minimum değerinin olmayacağı varsayılabilir.	Maksimum Nokta: $(-r, k)$ Maksimum Değer: $g(-r) = k$ Fonksiyon $(-\infty, k]$ aralığında değer aldığı için minimum değeri yoktur.

SIRA SİZDE 3.

ÇÖZÜM

a)



[0,1 , 9] da tanımlı
$f(x) = 3\sqrt{x}$ fonksiyonunun grafiği yandaki gibidir.

Minimum değeri
$x = 0{,}1$ için $f(0{,}1) = 3 \cdot \sqrt{0{,}1} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$ olur.

Maksimum değeri
$x = 9$ için $f(9) = 3 \cdot \sqrt{9} = 3 \cdot 3 = 9$ olur.

b)

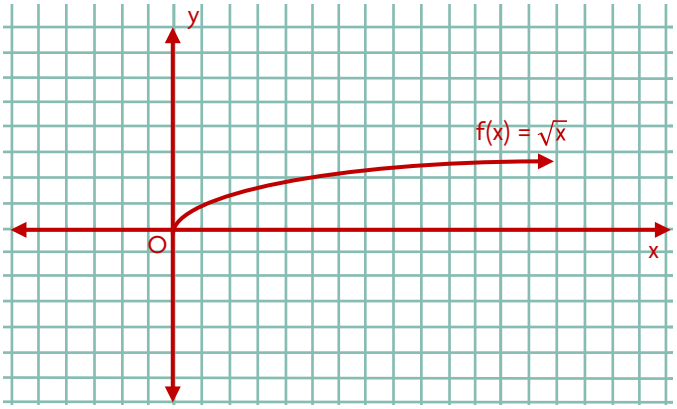
Tanım kümesi : [0,1 , 9] dır. Görüntü Kümesi : $[\frac{3\sqrt{10}}{10}, 9]$ dır. Grafikten de görüldüğü üzere derinlik (x) arttıkça dalganın hızı (f(x)) artmaktadır. Dolayısıyla dalga hızı derinliğin karekökü ile doğru orantılı olduğundan bu ilişki fonksiyonun nitel özelliklerinden artanlıkla açıklanabilir.

SIRA SİZDE 4.

ÇÖZÜM

a)

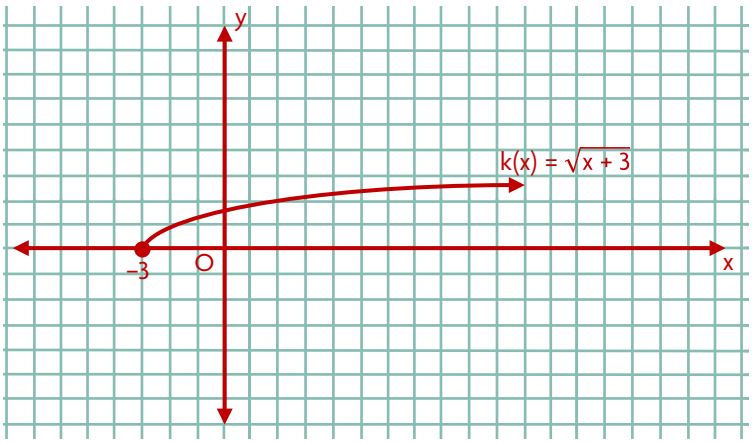
Adım 1.



Uygulanan Dönüşüm :

f fonksiyonunun tüm bağımsız değişkenlerine 3 eklenerek elde edilen $k(x) = \sqrt{x + 3}$ fonksiyonunun grafiğini çizmek için f fonksiyonunun grafiği x ekseninde negatif yönde 3 birim ötelenir.

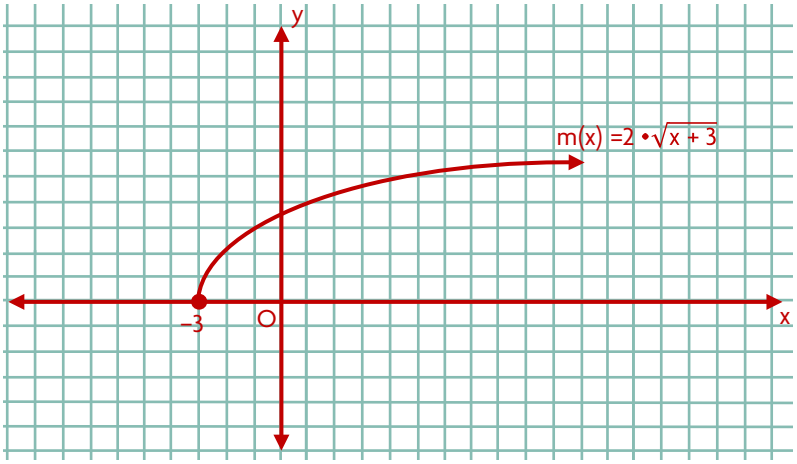
Adım 2.



Uygulanan Dönüşüm :

k fonksiyonunun grafiğinin üzerindeki her bir noktanın ordinatını 2 katına eşleyen $m(x) = 2 \cdot \sqrt{x + 3}$ fonksiyonu çizilir.

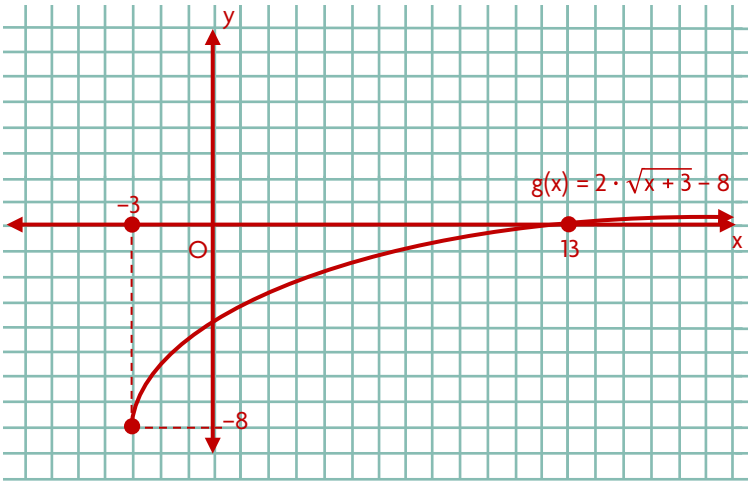
Adım 3.



Uygulanan Dönüşüm :

m fonksiyonunun grafiğine y ekseni boyunca negatif yönde 8 birim öteleme dönüşümü uygulanarak $g(x) = 2 \cdot \sqrt{x + 3} - 8$ fonksiyonu elde edilir.

Adım 4.



b) $g(x) = 2 \cdot \sqrt{x+3} - 8$ fonksiyonunun tanım ve görüntü kümesi :

Tanım kümesi : $[-3, \infty)$
Görüntü Kümesi : $[-8, \infty)$

c) $g(x) = 2 \cdot \sqrt{x+3} - 8$ fonksiyonunun sıfırı :

$2 \cdot \sqrt{x+3} - 8 = 0$
$2 \cdot \sqrt{x+3} = 8$
$\sqrt{x+3} = 4$ (Her iki tarafın karesi alınır)
$x + 3 = 16$
$x = 13$ olarak bulunur.

ç) $g(x) = 2 \cdot \sqrt{x+3} - 8$ fonksiyonunun işareti:

$[-3, 13)$ da fonksiyonun işareti negatiftir.
$(13, \infty)$ da ise fonksiyonun işareti pozitiftir.

d) $g(x) = 2 \cdot \sqrt{x+3} - 8$ fonksiyonunun bire birliği:

$\forall x_1, x_2 \in [-3, \infty)$ için, $g(x_1) = g(x_2)$ ise

$2 \cdot \sqrt{x_1 + 3} - 8 = 2 \cdot \sqrt{x_2 + 3} - 8$
$2 \cdot \sqrt{x_1 + 3} = 2 \cdot \sqrt{x_2 + 3}$
$\sqrt{x_1 + 3} = \sqrt{x_2 + 3}$
$x_1 + 3 = x_2 + 3$
$x_1 = x_2$ olup $\forall x_1, x_2 \in [-3, \infty)$ için $g(x_1) = g(x_2)$ iken $x_1 = x_2$ olduğundan g bire bir fonksiyondur.

$g(x) = 2 \cdot \sqrt{x+3} - 8$ fonksiyonunun örtenliği:

g fonksiyonu $[-3, \infty) \rightarrow [-8, \infty)$ şeklinde tanımlandığında, değer kümesindeki her bir elemana tanım kümesinde en az bir eleman karşılık geleceğinden g örten fonksiyondur.

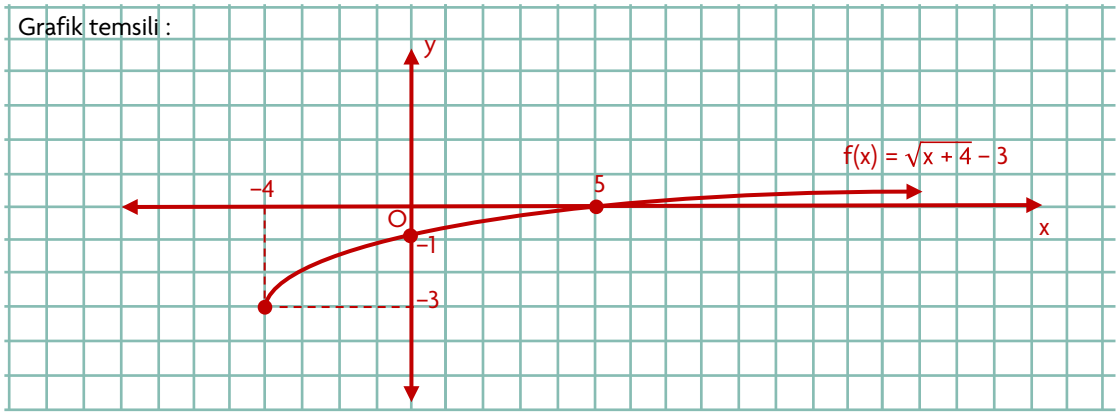
$g(x) = 2 \cdot \sqrt{x+3} - 8$ fonksiyonunun tekliği-çiftliği:

$g(x) = 2 \cdot \sqrt{x+3} - 8$
$g(-x) = 2 \cdot \sqrt{-x+3} - 8$
$-g(x) = -2 \cdot \sqrt{x+3} + 8$ olup, $g(-x) \neq -g(x)$ olduğundan g tek fonksiyon değildir.
Aynı zamanda $g(-x) \neq g(x)$ olduğundan g çift fonksiyon da değildir.
Dolayısıyla g ne tek ne de çift fonksiyondur.

SIRA SİZDE 5.

ÇÖZÜM

Grafik temsili :



a)

Tanım kümesi : $[-4, \infty)$
Görüntü kümesi : $[-3, \infty)$

b)

Fonksiyonun işareti $[-4, 5)$ da negatiftir. $(5, \infty)$ da ise fonksiyonun işareti pozitiftir.

c)

$[-4, \infty)$ dan alınacak x_1, x_2 elemanları için $x_1 < x_2$ iken $f(x_1) < f(x_2)$ olduğundan tanımlı olduğu aralıkta fonksiyon artandır.

ç)

$f(x) = \sqrt{x + 4} - 3 = 0$

$\sqrt{x + 4} = 3$ (her iki tarafın karesi alınır)

$x + 4 = 9$

$x = 5$ fonksiyonun sıfırıdır.

d)

Fonksiyonun minimum değeri $x = -4$ için $f(-4) = \sqrt{-4 + 4} - 3 = 0 - 3 = -3$ olup, maksimum değeri yoktur.

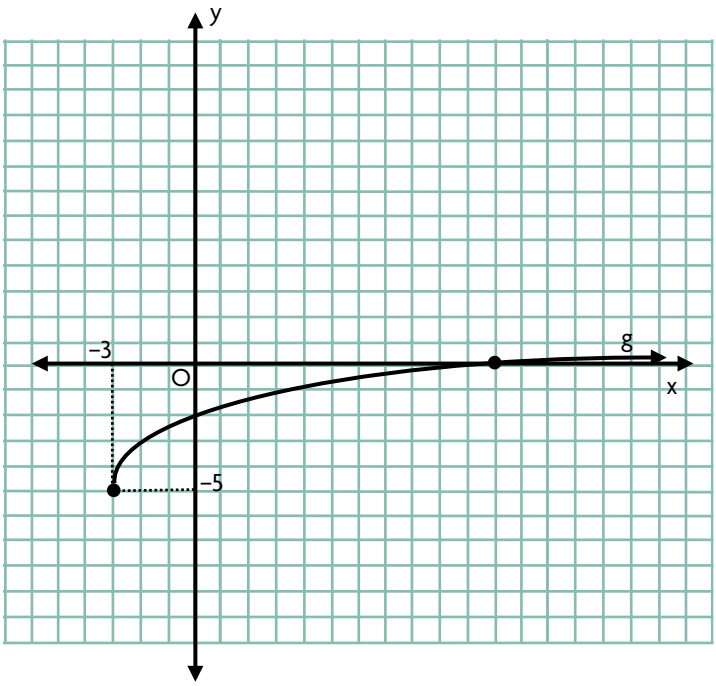
e)

Tanımlı olduğu aralıkta fonksiyon bire birdir. Çünkü tanım kümesinden alınan birbirinden farklı her iki elemanın f fonksiyonu altındaki görüntüleri de birbirinden farklıdır.

Fonksiyon $[-4, \infty) \rightarrow [-3, \infty)$ şeklinde tanımlandığında , değer kümesindeki her bir elemana tanım kümesinde en az bir eleman eşlendiğinden değer kümesinde boşta eleman kalmaz dolayısıyla f fonksiyonu örtendir.
Fonksiyon ne $-f(x)$ e ne de $f(-x)$ e eşittir. Dolayısıyla f fonksiyonu tek veya çift fonksiyon değildir.

SIRA SİZDE 6.

ÇÖZÜM



a) $g(x) = \sqrt{x + n} + k$ fonksiyonun grafik temsili incelendiğinde $f(x) = \sqrt{x}$ karekök referans fonksiyonu grafiğinin x ekseni boyunca negatif yönde 3 birim ve y ekseni boyunca negatif yönde 5 birim ötelendiği görülmektedir. Dolayısıyla x ekseninde negatif yönde 3 birim ötelenme için n = 3 ve y ekseninde negatif yönde 5 birim ötelenme için k = −5 olmalıdır.

b) $g(x) = \sqrt{x + n} + k$ fonksiyonu $g(x) = \sqrt{x + 3} - 5$ şeklindedir. g fonksiyonunun sıfırı :

$$g(x) = \sqrt{x + 3} - 5 = 0$$
$$\sqrt{x + 3} = 5$$
$$x + 3 = 25$$
$$x = 22 \text{ olarak bulunur.}$$

SIRA SİZDE 7.

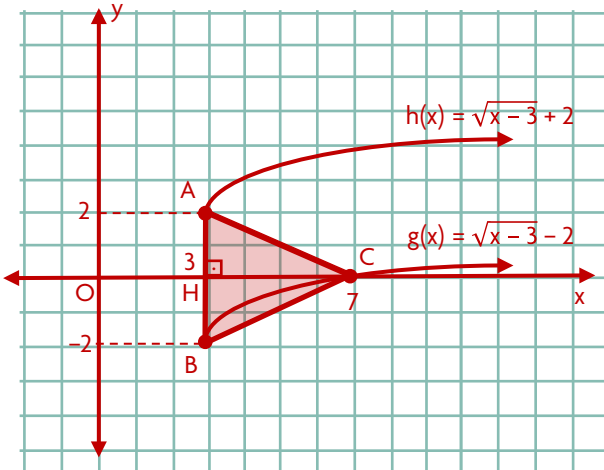
ÇÖZÜM

$f(x) = \sqrt{x}$ karekök referans fonksiyonuna adım adım dönüşümleri uygularsak ;
1.adım : x ekseni boyunca negatif yönde 1 birim öteleme için $k(x) = \sqrt{x + 1}$,
2.adım : Fonksiyonun tüm değerlerini 3 katına eşleme için $m(x) = 3 \cdot \sqrt{x + 1}$,
3.adım : y ekseni boyunca negatif yönde k birim öteleme için $g(x) = 3 \cdot \sqrt{x + 1} - k$ fonksiyonu elde edilir.
Elde edilen g(x) fonksiyonunun x eksenini kestiği nokta demek fonksiyonun sıfırı demektir:

$x = 8$ için $g(8) = 3 \cdot \sqrt{8 + 1} - k = 0$ olmalıdır.
O halde ;
$$3 \cdot 3 - k = 0$$
$$9 - k = 0$$
$$k = 9 \text{ bulunur.}$$

ETKİNLİK 3.6.

ÇÖZÜM



Yanlış çizilen fonksiyon;
x ekseninde pozitif yönde 3 birim öteleme, y ekseninde pozitif yönde 2 birim öteleme ile elde edilen $h(x) = \sqrt{x-3} + 2$ şeklindeki fonksiyondur.

Doğru çizilen fonksiyon ise; x ekseninde pozitif yönde 3 birim öteleme, y ekseninde ise negatif yönde 2 birim öteleme ile elde edilen $g(x) = \sqrt{x-3} - 2$ şeklindeki fonksiyondur.

h(x) fonksiyonunun minimum değeri x = 3 için h(3) = 2 değeri olup (3, 2) noktası A dır.

g(x) fonksiyonunun minimum değeri ise x = 3 için g(3) = −2 olup, (3, −2) noktası B dir. g(x) in x eksenini kestiği nokta fonksiyonun sıfırı olup bu nokta $\sqrt{x-3} - 2 = 0$ yapan x değeridir.

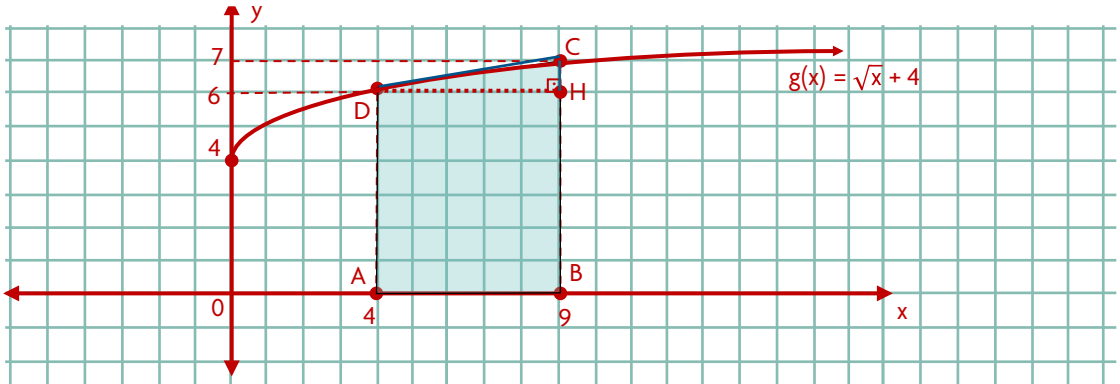
$$\sqrt{x-3} - 2 = 0$$
$$\sqrt{x-3} = 2$$
$$x - 3 = 4$$
$$x = 7$$ olarak bulunur. Bu nokta ise C dir.

A, B ve C noktalarının birleşmesiyle oluşan ABC üçgeninde |AB| = 2 −(−2) = 4 birim olur. [AB] tabanına ait yükseklik |CH| = 7 − 3 = 4 birim olup, ABC üçgeninin alanı :

$\frac{\text{Taban uzunluğu} \times \text{yükseklik}}{2}$ formülü uygulanırsa $\frac{4 \cdot 4}{2} = 8$ birimkare olarak bulunur.

ETKİNLİK 3.7.

ÇÖZÜM



$g(x) = \sqrt{x} + 4$ fonksiyonunun grafiği, $[0, \infty) \to [0, \infty)$ tanımlı $f(x) = \sqrt{x}$ karekök referans fonksiyonunun grafiğinin y ekseni boyunca pozitif yönde 4 birim ötelenmiş hâlidir. Grafik çizilip $x = 4$ ve $x = 9$ noktaları ve bu noktaların g altındaki görüntüleri sırasıyla $g(4) = \sqrt{4} + 4 = 2 + 4 = 6$ ve $g(9) = \sqrt{9} + 4 = 3 + 4 = 7$ değerleri eksenler üzerinde işaretlendiğinde sırasıyla A, B, D ve C noktaları da işaretlenmiş olur.
Bu noktaların birleşimiyle oluşan ABCD dörtgeninin alanını hesaplamak için [DH] doğru parçası yardımıyla dörtgeni; bir dikdörtgen ve bir dik üçgen olmak üzere iki parçaya ayırırsak;

CDH dik üçgeninin alanı : $|CH| = 7 - 6 = 1$ birim ve $|DH| = 9 - 4 = 5$ birim olmak üzere $\frac{1 \cdot 5}{2} = \frac{5}{2}$ birimkare,

ABHD dikdörtgeninin alanı : $|DH| = |AB| = 9 - 4 = 5$ birim ve $|BH| = |AD| = 6 - 0 = 6$ birim olmak üzere $5 \cdot 6 = 30$ birimkare olup,
ABCD dörtgeninin alanı bu alanların toplamından; $\frac{5}{2} + 30 = \frac{65}{2}$ birimkare olarak bulunur.

ETKİNLİK 3.8.

ÇÖZÜM

Fonksiyonlar	Tanım Kümesi	Görüntü Kümesi
$f(x) = \sqrt{x+5} + 1$	Ç	d
$g(x) = 3 \cdot \sqrt{x-4} - 6$	C	ç
$h(x) = -2 \cdot \sqrt{x+1} - 4$	A	b
$k(x) = \sqrt{x+3} + 5$	D	c
$m(x) = \sqrt{x+2}$	F	f
$n(x) = -\sqrt{x} + 7$	E	e

Tablo 1

Tanım Kümesi		Görüntü Kümesi	
A	$[-1, \infty)$	a	$[4, \infty)$
B	$[2, \infty)$	b	$[-4, \infty)$
C	$[4, \infty)$	c	$[5, \infty)$
Ç	$[-5, \infty)$	ç	$[-6, \infty)$
D	$[-3, \infty)$	d	$[1, \infty)$
E	$[0, \infty)$	e	$[7, \infty)$
F	$[-2, \infty)$	f	$[0, \infty)$

Tablo 2

DEĞERLENDİRİYORUM

Amaç: Bu bölümde, öğrendiklerinizi gözden geçirmenizi, kendi öğrenme sürecinizi değerlendirmenizi ve eksiklerinizi fark etmenizi amaçlıyoruz.

Soruları dikkatle yanıtlayınız. Cevaplarınızı geri bildirimlerle karşılaştırarak eksik gördüğünüz noktaları tekrar ediniz.

SORULAR

1. $f : [4, 16] \to R$, $f(x) = \sqrt{x}$ şeklinde tanımlı karekök fonksiyonu veriliyor.

Buna göre aşağıdaki soruları yanıtlayınız.

a) f fonksiyonunun tanım ve görüntü kümelerini yazınız.

b) f fonksiyonunun bire birliğini ve örtenliğini gerekçeleriyle gösteriniz.

c) f fonksiyonunun minimum ve maksimum değerlerini bulunuz.

2. Aşağıda verilen fonksiyonlar ile bu fonksiyonların grafiklerinin çiziminde karekök referans fonksiyonunun temsiline göre uygulanan dönüşümleri doğru biçimde eşleştiriniz.

a) $g(x) = 2 \cdot \sqrt{x + 1}$ (.....)

b) $h(x) = -\frac{1}{3} \cdot \sqrt{x - 2}$ (.....)

c) $k(x) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{x + 1}$ (.....)

ç) $m(x) = 3 \cdot \sqrt{x + 2}$ (.....)

d) $n(x) = -3 \cdot \sqrt{x - 2}$ (.....)

I. x ekseni boyunca negatif yönde 2 birim öteleme, 3 kat dikey germe

II. x ekseni boyunca negatif yönde 1 birim öteleme, $\frac{1}{2}$ kat dikey sıkıştırma

III. x ekseni boyunca pozitif yönde 2 birim öteleme, x eksenine göre yansıma, 3 kat dikey germe

IV. x ekseni boyunca negatif yönde 1 birim öteleme, 2 kat dikey germe

V. x ekseni boyunca pozitif yönde 2 birim öteleme, x eksenine göre yansıma, $\frac{1}{3}$ kat dikey sıkıştırma

3. $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$, $f(x) = \sqrt{x}$ şeklinde tanımlı karekök referans fonksiyonuna uygulanan dönüşümler ile $g(x) = 2 \cdot \sqrt{x-1} - 6$ fonksiyonu türetilmiştir.

Buna göre aşağıdaki soruları yanıtlayınız.

a) g fonksiyonunun tanım ve görüntü kümelerini yazınız.

b) g fonksiyonunun varsa sıfırını, maksimum ve minimum değerlerini bularak, grafiğini çiziniz.

4. Bir araç takip sisteminde, ham konum sapması; GPS cihazının çevresel etkiler (bina yansımaları, sinyal zayıflaması vb.) nedeniyle gerçek konumdan ortalama ne kadar uzaklaştığını gösteren yaklaşık hata değeridir.

Bu sistemde, ham konum sapmasına göre düzeltilmiş konum hatası şu şekilde modellenmiştir:

- **x:** GPS'in ölçtüğü ham konum sapması (metre)
- **10 m:** Şehir içindeki binaların neden olduğu ortalama sinyal gürültüsü
- **4 m:** Yazılımın uyguladığı temel düzeltme miktarı
- **f(x):** Sistemin ayarlama sonrası tahmin ettiği gerçek konum hatası (metre)

Buna göre fonksiyon $f(x) = \sqrt{x+10} - 4$ şeklindedir.

Ham konum sapmasının alacağı 6 m, 15 m, 26 m, 39 m değerleri için GPS cihazının düzeltilmiş konum hatalarını bularak f fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

GERİ BİLDİRİM

Bu geri bildirim sayesinde kendi cevabınızı kontrol edebilir, hatalarınızı düzelterek öğrenmenizi pekiştirebilirsiniz.

ÇÖZÜM 1.

Tanım kümesi: [4, 16] Görüntü Kümesi: [2, 4]

a) Fonksiyon soruda da verildiği üzere [4, 16] kümesinden gerçek sayılar kümesine ($\mathbb{R}$) tanımlanmıştır. Dolayısıyla tanım kümesi [4, 16] dır. Görüntü kümesi için tanım aralığının sınırları olan x = 4 ve x = 16 değerleri fonksiyonda yerine yazılacak olursa $f(4) = \sqrt{4} = 2$ ve $f(16) = \sqrt{16} = 4$ elde edilir. Dolayısıyla görüntü kümesi [2, 4] dır.

b) Fonksiyon bire birdir. Ancak örten değildir.

Fonksiyonun tanımlı olduğu aralıktan alınan herhangi farklı iki değer için bu değerlerin fonksiyon altındaki görüntüleri de birbirinden farklı olduğundan fonksiyon bire birdir.

Fonksiyon [4, 16] → $\mathbb{R}$ şeklinde tanımlı olduğundan $\mathbb{R}$ kümesindeki her elemana karşılık gelecek bir x değeri

[4, 16] da bulunamayacağından, değer kümesinde eşlenmeyen elemanlar kalır, dolayısıyla fonksiyon örten değildir.

c) Fonksiyon [4, 16] da tanımlı olduğundan x = 4 için $f(4) = \sqrt{4} = 2$'de minimum değerini, x = 16 için $f(16) = \sqrt{16} = 4$'te ise maksimum değerini alır.

ÇÖZÜM 2.

Fonksiyonun grafiği çizilirken $f(x) = \sqrt{x}$ karekök referans fonksiyonunun grafiğinde aşağıdaki dönüşümler uygulanır:

- $\sqrt{x+r}$ için x ekseninde negatif yönde r birim öteleme,
- $\sqrt{x-r}$ için x ekseninde pozitif yönde r birim öteleme,
- $a \cdot \sqrt{x \pm r}$ için;

  a > 0 ise a kat dikey germe,

  0 < a < 1 ise a kat dikey sıkıştırma,

  a < 0 için x eksenine göre yansıma.

a) $g(x) = 2 \cdot \sqrt{x+1}$ fonksiyonunda;
IV. x ekseni boyunca negatif yönde 1 birim öteleme, 2 kat dikey germe

b) $h(x) = -\frac{1}{3} \cdot \sqrt{x-2}$ fonksiyonunda;
V. x ekseni boyunca pozitif yönde 2 birim öteleme, x eksenine göre yansıma, $\frac{1}{3}$ kat dikey sıkıştırma

c) $k(x) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{x+1}$ fonksiyonunda;
II. x ekseni boyunca negatif yönde 1 birim öteleme, $\frac{1}{2}$ kat dikey sıkıştırma

ç) $m(x) = 3 \cdot \sqrt{x+2}$ fonksiyonunda;
I. x ekseni boyunca negatif yönde 2 birim öteleme, 3 kat dikey germe

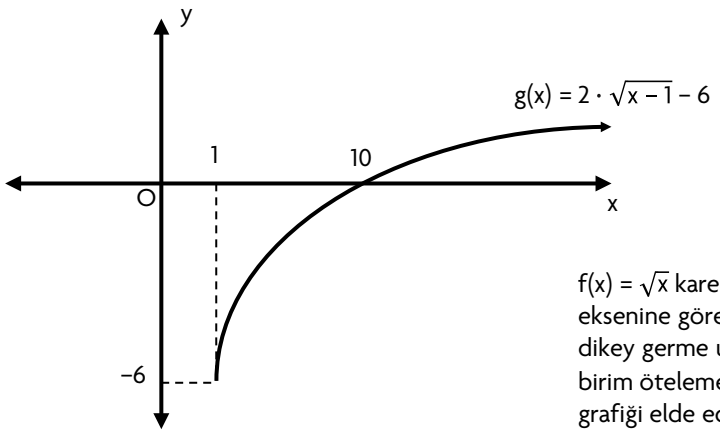
d) $n(x) = -3 \cdot \sqrt{x-2}$ fonksiyonunda;
III. x ekseni boyunca pozitif yönde 2 birim öteleme, x eksenine göre yansıma, 3 kat dikey germe dönüşümleri uygulanır.

ÇÖZÜM 3.

a) Fonksiyonun tanımlı olabilmesi için $\sqrt{x-1}$ ifadesinin içinin negatif olmaması gerekir. Dolayısıyla $x - 1 \geq 0$ olmalıdır. $x \geq 1$ için fonksiyon tanımlı olacağından tanım kümesi $[1, \infty)$ dır.

Görüntü kümesi ise tanım aralığındaki $x = 1$ değeri için $g(1) = 2 \cdot \sqrt{1-1} - 6 = 2 \cdot 0 - 6 = 0 - 6 = -6$ değerinden başlayıp $+\infty$ a doğru devam eden $[-6, \infty)$ dır.

b)



$f(x) = \sqrt{x}$ karekök referans fonksiyonunun grafiği önce x eksenine göre pozitif yönde 1 birim ötelenir, daha sonra 2 kat dikey germe uygulanır, ardından y ekseninde negatif yönde 6 birim öteleme yapılarak $g(x) = 2 \cdot \sqrt{x-1} - 6$ fonksiyonunun grafiği elde edilmiş olur.

g fonksiyonunun sıfırı demek; fonksiyonun x eksenini kestiği nokta yani fonksiyonu sıfır yapan x değeri demektir.

$g(x) = 2 \cdot \sqrt{x-1} - 6 = 0$

$2 \cdot \sqrt{x-1} = 6$

$\sqrt{x-1} = 3$ (Her iki tarafın karesi alınır.)

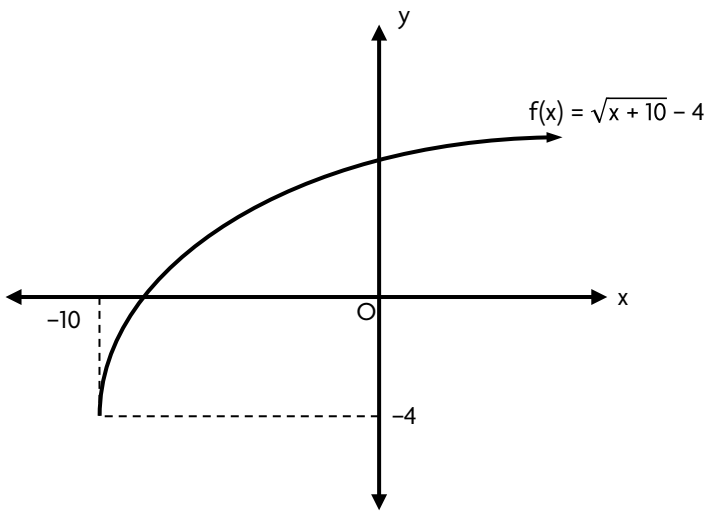
$x - 1 = 9$

$x = 10$ fonksiyonun sıfırıdır.

Tanım kümesinin alt sınırı olan $x = 1$ değeri için $g(1) = 2 \cdot \sqrt{1-1} - 6 = 2 \cdot 0 - 6 = 0 - 6 = -6$ değeri

fonksiyonun minimum değeri olup, tanım kümesi $+\infty$'a gittiğinden fonksiyonun bir maksimum değeri yoktur.

ÇÖZÜM 4.



Ham konum sapması 6 m iken düzeltilmiş konum hatası $f(x) = \sqrt{6 + 10} - 4 = \sqrt{16} - 4 = 4 - 4 = 0$ m

Ham konum sapması 15 m iken düzeltilmiş konum hatası $f(x) = \sqrt{15 + 10} - 4 = \sqrt{25} - 4 = 5 - 4 = 1$ m

Ham konum sapması 26 m iken düzeltilmiş konum hatası $f(x) = \sqrt{26 + 10} - 4 = \sqrt{36} - 4 = 6 - 4 = 2$ m

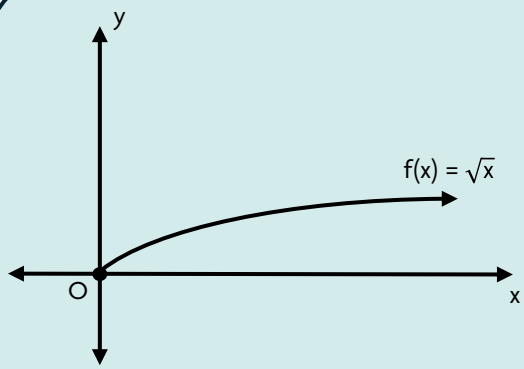
Ham konum sapması 39 m iken düzeltilmiş konum hatası $f(x) = \sqrt{39 + 10} - 4 = \sqrt{49} - 4 = 7 - 4 = 3$ m olarak hesaplanır.

$f(x) = \sqrt{x + 10} - 4$ fonksiyonunun grafiği $\sqrt{x}$ karekök referans fonksiyonunun grafiği önce x ekseni boyunca negatif yönde 10 birim, ardından y ekseni boyunca negatif yönde 4 birim ötelenerek çizilmiş olur.

ÖĞRENDİKLERİM

Amaç: Sevgili öğrencimiz, bu bölümde öğrendiklerinizi özetlemenizi, günlük hayatta ve farklı derslerde kullanabileceğiniz bilgileri belirlemenizi amaçlıyoruz.

Aşağıda verilen bilgi kutularını dikkatle inceleyiniz ve boş bırakılan bölüme konu ile ilgili edindiğiniz bilgileri kendi cümlelerinizle ifade ediniz.



$f : [0 , \infty) \to [0 , \infty)$, $f(x) = \sqrt{x}$ şeklinde tanımlı f fonksiyonu karekök referans fonksiyonunun nitel özellikleri :

- Tanım kümesi : $[0, \infty)$
- Görüntü Kümesi : $[0, \infty)$
- Sıfırı : $x = 0$
- İşareti : $(0, \infty)$ da daima pozitif
- Tanımlı olduğu aralıkta artandır.
- Minimum değeri 0, maksimum değeri yoktur.
- Bire birdir.
- Örtendir.
- Ne tek ne de çift fonksiyondur.

Dikkat ! Fonksiyonun tanım kümesi bir aralık olarak verilip, değer kümesi $\mathbb{R}$ olarak verildiğinde nitel özelliklerden sadece örtenlik bozulur, yani fonksiyon örten olmaz.

$a, r, k \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ olmak üzere $[-r, \infty) \to [k, \infty)$, $g(x) = a \cdot \sqrt{x + r} + k$ şeklinde tanımlı karekök fonksiyonlarının nitel özelliklerini şu şekilde sıralayabiliriz :

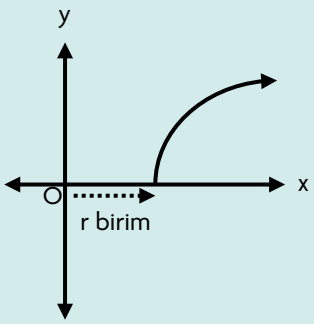
- Tanım kümesi $[-r, \infty)$ dır.
- Görüntü kümesi $[k, \infty)$ dır.
- Bire birdir.
- Değer kümesi ($[k, \infty)$) , görüntü kümesine eşit verildiğinden örtendir. (Dikkat : Fonksiyon tanımlanırken değer kümesi $\mathbb{R}$ verilseydi, fonksiyon örten olmazdı.)
- $a > 0$ ise fonksiyon artandır. Fonksiyonun maksimum noktası yoktur, minimum değeri k olup, fonksiyon minimum değerini $x = -r$ noktasında alır.
- $a < 0$ ise fonksiyon azalandır. Fonksiyonun minimum değeri yoktur, maksimum değeri k olup, fonksiyon maksimum değerini $x = -r$ noktasında alır.

a, r, k ∈ ℝ , r > 0, k > 0 ve a ≠ 0 olmak üzere;
f: [0, ∞) → [0, ∞) , $f(x) = \sqrt{x}$ şeklinde tanımlı karekök referans fonksiyonundan türetilen

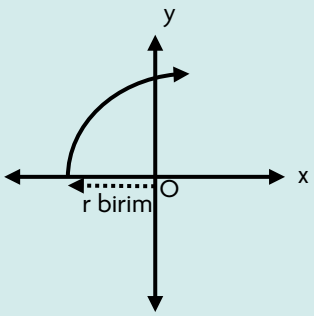
$$\mathbf{g(x) = a \cdot \sqrt{x \pm r} \pm k}$$

şeklinde tanımlı g fonksiyonunun grafiği çizilirken aşağıdaki adımlar uygulanır :

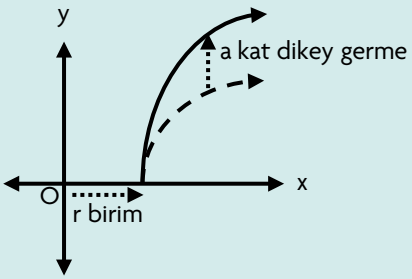
Fonksiyonda $\sqrt{x - r}$ varsa



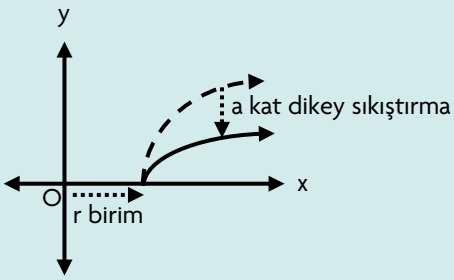
Fonksiyonda $\sqrt{x + r}$ varsa



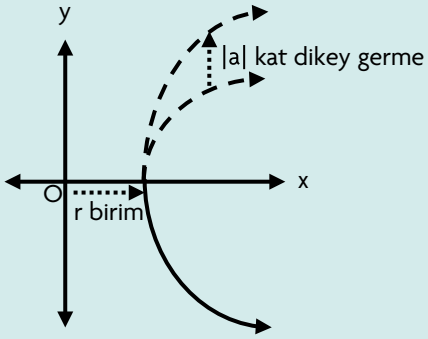
Fonksiyonda $a \cdot \sqrt{x - r}$ varsa ve **a > 0** ise **a kat dikey germe**



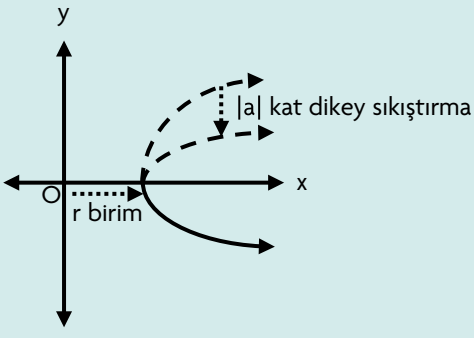
Fonksiyonda $a \cdot \sqrt{x - r}$ varsa ve **0 < a < 1** ise **a kat dikey sıkıştırma**



a < 0 ise ek olarak **x eksenine göre yansıma** yapılır.



–1 < a < 0 ise ek olarak **x eksenine göre yansıma** yapılır.



Bu kısımdaki işlemler $a \cdot \sqrt{x + r}$ olduğunda karekök referans fonksiyonunun grafik temsilinin negatif yönde r birim ötelenmiş hâline aynen uygulanır.

Yukarıdakilere ek olarak;
g(x) = a •$\sqrt{x \pm r}$ + k olduğunda grafik **y ekseni boyunca pozitif yönde k birim** ,

g(x) = a •$\sqrt{x \pm r}$ – k olduğunda ise grafik **y ekseni boyunca negatif yönde k birim** ötelenerek
g(x) = a •$\sqrt{x \pm r}$ ± k fonksiyonunun grafiği elde edilmiş olur.

ÖĞRENDİKLERİM

Daha fazlası için karekodu okutunuz.



GERÇEK SAYILARDA TANIMLI RASYONEL FONKSİYONLAR

BAŞLARKEN

Bu bölümde yer alan etkinlikler, bireysel öğrenme yolculuğunuzda size rehberlik etmek ve öğrenme sürecinizi desteklemek amacıyla hazırlanmıştır. Çalışmalarınızı yürütürken "Hazırlanıyorum", "İlişkilendiriyorum", "Uygulayarak Öğreniyorum", "Değerlendiriyorum", "Yansıtıcı Yazı" ve "Öğrendiklerim" etkinliklerini sırası ile takip etmeniz ve etkinliklerin sonunda yer alan geri bildirimleri inceleyerek bölümleri tamamlamanız beklenmektedir.

Matematikte fonksiyonlar, bir niceliğin başka bir bağlı olarak nasıl değiştiğini açıklayan modellerdir. Bu değişimlerden **bir pay ve payda ilişkisiyle(oranla) tanımlananlar rasyonel fonksiyonlar** ile ifade edilir.

Rasyonel fonksiyonların özelliklerini anlamak için temel bir model olan **rasyonel referans fonksiyon** $f(x)=\frac{1}{x}$ ten yola çıkılır.

Bu çalışma kartında, rasyonel fonksiyonların nitel özelliklerini anlamaya ve yorumlamaya yönelik olarak aşağıdaki sorular üzerinde düşünmelisiniz.

1. Bir fonksiyonun tanım kümesi, görüntü kümesi, artan-azalan olma durumu ve sıfır noktası gibi özellikleri; onun genel davranışını nasıl açıklar?

2. Rasyonel fonksiyonların özellikleri, $f(x)=\frac{1}{x}$ fonksiyonunda yapılan cebirsel ve grafiksel değişikliklerle nasıl ifade edilebilir?

3. Elde ettiğiniz rasyonel fonksiyonların grafik ve cebirsel temsilleri, gerçek yaşam durumlarını açıklamada ne tür yorumlara olanak sağlar?

HAZIRLANIYORUM

Amaç: Bu bölümde ön bilgilerinizi hatırlamanızı temaya hazırlıklı hâle gelmenizi amaçlıyoruz.

Aşağıda yer alan ifadeler, bu temada tamamlanması hedeflenen öğrenme çıktısını ele almadan önce sahip olmanız gereken bazı temel becerileri içermektedir Lütfen her bir ifadeyi dikkatlice okuyunuz.

- Eğer ifadedeki bilgiye hâkim olduğunuzu düşünüyorsanız kutucuğu işaretleyiniz.
- Eğer konuyu henüz tam olarak bilmediğinizi ya da hatırlamadığınızı düşünüyorsanız kutucuğu boş bırakınız.

Bu çalışmanın amacı notla değerlendirilmeyecek olup amacı temaya ne ölçüde hazır olduğunuzu belirlemektir.

	ÖN ÖĞRENME KONTROL LİSTESİ	✓
1	Gerçek yaşam durumlarında verilen iki değişken arasındaki ilişkinin ters orantı mı yoksa rasyonel bir ilişki mi olduğunu belirleyebilirim.	☐
2	Bir ilişki içerisindeki değişkenlerden hangisinin bağımsız, hangisinin bağımlı değişken olduğunu belirleyebilirim.	☐
3	Rasyonel bir ilişkiyi farklı yöntemlerle ifade biçiminde temsil edebilirim.	☐
4	Rasyonel bir ilişkiyi cebirsel olarak "$y = a \cdot \frac{1}{x+r} + k$" biçiminde ifade edebilirim.	☐
5	Rasyonel ilişkilerde elde edilen noktaların koordinat sisteminde yer almasının nedenini açıklayabilirim.	☐
6	a katsayısının işareti değiştiğinde grafiğin bölgelerinin (veya artan/azalan olma) nasıl değiştiğini grafiksel olarak gösterebilirim.	☐

"Ön Öğrenme Kontrol Listesi"ni doldurduktan sonra aşağıda verilen "Kontrol Noktası" sorularını çözünüz ve cevaplarınızı kontrol ediniz.

KONTROL NOKTASI

SORU 1. Bir lise sınıfı, mezuniyet pikniği için özel bir otobüs kiralamak istemektedir. Otobüs firması, kişi sayısından bağımsız olarak **4000 TL sabit kiralama ücreti** talep etmiştir. Ayrıca gidilen piknik alanına giriş için öğrenci başına **50 TL** ücret ödenmesi gerekmektedir.

a) Geziye katılan öğrenci sayısı x olduğuna göre öğrenci başına düşen toplam maliyeti (y) gösteren fonksiyonu yazınız.

b) Bu ilişkinin rasyonel olup olmadığını belirleyiniz ve bu konudaki gerekçenizi açıklayınız.

SORU 2. Bir girişimci, fıstık kabuklarını geri dönüştürerek yakıt briketi üreten küçük bir atölye kurmak istemektedir. Bu iş için gerekli makinelerin kurulum maliyeti 60 000 TL'dir.

Kurulumdan sonra üretilen her 1 ton briket için hammadde ve elektrik gideri 2000 TL'dir.

Üretilen briket miktarı x (ton) ve ton başına düşen ortalama üretim maliyeti g(x) (TL/ton) olsun.

Yukarıda verilen bilgilere göre aşağıdaki soruları yanıtlayınız.

a) Üretim miktarı ile birim maliyet arasındaki ilişkiyi inceleyiniz. Bu senaryoda hangi değişken bağımsız, hangi değişken bağımlıdır? Açıklayınız.

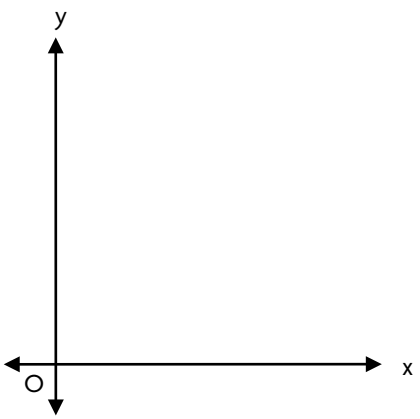
b) Aşağıdaki tabloyu doldurunuz. Briket üretim miktarına (x ton) göre ton başına düşen ortalama maliyeti (y) hesaplayınız.

Tablo 1: *Briket Üretim Miktarına Göre Ton Başına Ortalama Maliyet*

Üretim Miktarı (x ton)	10	20	30	40
Ton Başına Düşen Ortalama Maliyet (y TL)				

c) Tablo 1'de yer alan veriler ışığında, tesisin daha kârlı hâle gelmesi için üretim miktarına ilişkin nasıl bir yorum yapılabilir?

ç) Tablo 1'e göre elde edilen (x, y) değerlerini yandaki dik koordinat sisteminde gösteriniz.



d) Üretilen briket miktarı (x ton) ile ton başına maliyet (y TL) arasındaki rasyonel ilişkiyi $y = a \cdot \frac{1}{x+r} + k$ cebirsel ifadesi şeklinde yazınız.

e) Üretim miktarı (x ton) ile ton başına düşen maliyet (y TL) arasındaki rasyonel ilişkiyi ifade eden cebirsel ifadenin işaretinin değişmesi durumunda, grafiğin artan-azalan olma durumunun nasıl değiştiğini grafik üzerinde gösteriniz.

GERİ BİLDİRİM

Bu geri bildirim sayesinde kendi cevabınızı kontrol edebilir, hatalarınızı düzelterek öğrenmenizi pekiştirebilirsiniz.

KONTROL NOKTASI

ÇÖZÜM 1.

a) Bu problemde iki değişken vardır.

- Bağımsız değişken (x): Öğrenci sayısı
- Bağımlı değişken (y): Öğrenci başına düşen toplam maliyet (TL)

Otobüs firması, kişi sayısından bağımsız olarak 4000 TL sabit kiralama ücreti talep etmektedir ve her öğrenci piknik alanına giriş ücreti olarak 50 TL ödeyecektir.Bu durumda öğrenci başına düşen toplam maliyet şu şekilde ifade edilir:

$$y = \frac{4000}{x} + 50$$

b) Öğrenci başına düşen toplam maliyet, öğrenci sayısına göre her defasında azalmaktadır. Bu azalma rasyonel biçimdedir.

- Elde edilen denklem $y = a \cdot \frac{1}{x+r} + k$ biçimindedir.
- Burada a = 4000, r = 0 ve k = 50'dir (sabit terim).

Bu ilişki rasyonel bir ilişkidir. Çünkü paydada öğrenci sayısı (bağımsız değişken) olduğundan, değişim eğri şeklinde olup, öğrenci başına düşen toplam maliyet öğrenci sayısına bağlı olarak sürekli bir şekilde eğri biçiminde azalmaktadır.

ÇÖZÜM 2.

Verilenler:

- Her 1 ton briket için ham madde ve elektrik gideri = 2000 TL
- İş için gerekli makinelerin kurulum maliyeti = 60 000 TL

Ton başına düşen ortalama maliyet y, briket üretim miktarı x ile ilişkilidir.

a) Bağımsız ve bağımlı değişkenler

- **Bağımsız değişken (x):** Briket üretim miktarı (ton)

Briket üretim miktarını biz belirlediğimizden üretilen briketin miktarı (ton) bağımsız değişkendir.

- **Bağımlı değişken (y):** Ton başına düşen ortalama maliyet (TL)

Ton başına düşen toplam maliyet, briket üretim miktarına (ton) bağlı olarak değişmektedir. Bu değişkeni doğrudan seçemezsiniz, x in değerine göre belirlenmektedir. Bu yüzden ton başına düşen ortalama maliyet bağımlı değişkendir.

HATIRLATMA

Bir değişkenin değeri, diğer bir değişkenin aldığı değerlere bağlı olarak değişiyorsa bu iki değişkenden biri **bağımsız değişken**, diğeri ise **bağımlı değişken** olarak adlandırılır. Bağımsız değişken, değeri önceden belirlenebilen veya kontrol edilebilen değişkendir. Bağımlı değişken ise bağımsız değişkende meydana gelen değişimlere bağlı olarak değeri değişen değişkendir.

b) Tabloyu dolduralım

Üretim Miktarı (x ton)	10	20	30	40
Ton Başına Düşen Ortalama Maliyet (y TL)	8000	5000	4000	3500

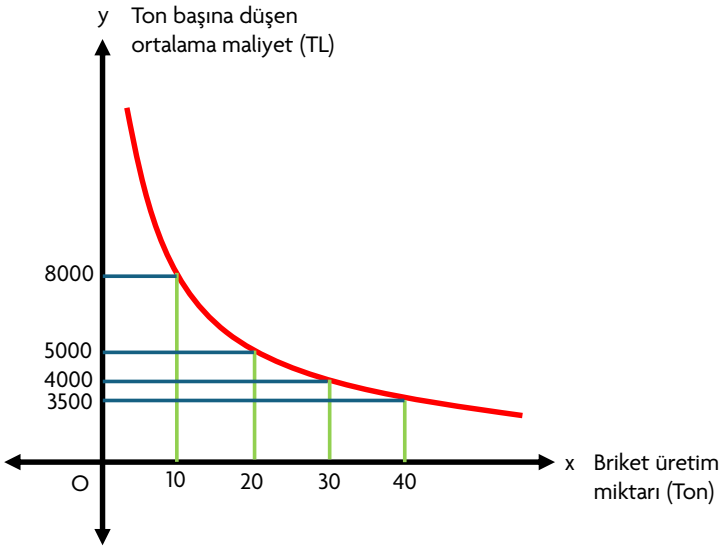
- Üretim miktarı arttıkça ortalama maliyet azalmaktadır.

c) Üretim miktarı (x) arttıkça başlangıçtaki **sabit kurulum maliyeti** (60000 TL) daha fazla ürüne bölüştürülmektedir. Bu nedenle üretim arttıkça **ton başına düşen ortalama maliyet sürekli azalmaktadır.** Tesisin kârlı olması ve maliyetleri düşürmesi için mümkün olduğunca yüksek miktarda üretim yapılmalıdır.

ç) Grafik çizimi ve yorumlama

Dik koordinat sisteminde x ekseni; briket üretim miktarı (ton), y ekseni ise ton başına düşen ortalama maliyeti temsil etmektedir.

Buna göre bulunan noktalar (10, 8000), (20, 5000), (30, 4000), (40, 3500) işaretlenip, noktaları birleştirildiğinde aşağıdaki grafik elde edilir.



Noktaların bir eğri üzerinde olması rastlantısal mıdır?

- Hayır. Çünkü ton başına düşen ortalama maliyet, briket üretim miktarına bağlı olarak **değişen oranda sürekli azalmaktadır.**

d) Cebirsel ifade

Rasyonel ilişki cebirsel olarak aşağıdaki gibi gösterilir.

Öncelikle gerekli makinelerin kurulum maliyeti 60000 TL olup kurulumdan sonra üretilen her 1 ton briket için hammadde ve elektrik gideri 2000 TL olduğundan

Toplam maliyet 6000 + 2000x

Ton başına düşen ortalama maliyet için toplam maliyet x ile bölünürse

$y = \frac{60000 + 2000x}{x} = \frac{60000}{x} + 2000$ elde edilir.

İLİŞKİLENDİRİYORUM

Amaç: Bu bölümde yeni öğreneceğiniz konuyu; zihninizde var olan bilgileriniz, yaşantılarınız ve diğer derslerde öğrendiklerinizle ilişkilendirmenizi bekliyoruz.

Rasyonel fonksiyonlar, değişkenler arasındaki ters orantılı ilişkileri ve sınır değerlerdeki davranışları modellemek için kullanılan güçlü matematiksel araçlardır.



Leonhard Euler
(Leonard Öyler)



Augustin-Louis Cauchy
(Ogüstin Lui Koşi)

Tarih boyunca matematikçiler, doğadaki bazı ilişkilerin düz bir çizgi veya parabol ile açıklanamayacağını fark ettiler. Özellikle **Leonhard Euler**, karmaşık rasyonel ifadeleri daha basit yapıtaşlarına ayırarak bu fonksiyonların cebirsel yapısını çözümlemiştir. **Augustin-Louis Cauchy** ise rasyonel fonksiyonların paydasının sıfır olduğu noktalardaki davranışlarını inceleyerek fonksiyonun sonsuza gittiği veya grafiğin kesintiye uğradığı durumları analiz etmemizi sağlayan modern analiz temellerini atmıştır.

Günümüzde fonksiyonlar; sadece matematikte değil mühendislik, fizik, ekonomi ve bilgisayar bilimi gibi pek çok alanda da uygulanmaktadır. Örneğin; mühendisler sistemlerin davranışını modellemek, ekonomistler piyasa analizleri yapmak, bilgisayar bilimciler algoritmalar geliştirmek için fonksiyonlardan yararlanır. Bu nedenle fonksiyonları öğrenmek, hem matematiksel anlayışımızı güçlendirir hem de çeşitli uygulamalarda bize pratik çözümler sunar.

Günümüzde rasyonel fonksiyonlar; sadece teorik matematikte değil mühendislik, tıp ve ekonomi gibi pek çok alanda hayati öneme sahiptir.

- **Elektrik-Elektronik Mühendisliği:** Devrelerdeki direnç, kapasitans ve endüktans arasındaki ilişkileri gösteren ***Transfer Fonksiyonları*** rasyonel fonksiyonlardır.
- **Ekonomi:** Üretim miktarı arttıkça birim başına düşen maliyetin azalmasını modelleyen ***Ortalama maliyet fonksiyonları*** rasyoneldir.
- **Fizik ve Kimya:** Gazların basınç ve hacim ilişkisi (Boyle yasası) veya yerçekimi kuvvetinin uzaklıkla değişimi ($\frac{1}{x^2}$ ilişkisi) rasyonel fonksiyonlarla ifade edilir.
- **Tıp:** Bir ilacın vücuda verildikten sonra kandaki konsantrasyonunun zamanla değişimini modellemede kullanılır.

Bu nedenle rasyonel fonksiyonları öğrenmek sadece matematiği değil sistemlerin sınırlarını ve denge noktalarını anlamamızı sağlar.

UYGULAYARAK ÖĞRENİYORUM

Amaç: Bu bölümde bilgilerinizi etkinlikler ve uygulamalarla pekiştirmenizi, öğrenmeyi daha kalıcı hâle getirmenizi amaçlıyoruz. Adım adım verilen etkinlik basamaklarını uygulayınız. Deney, problem çözme ya da etkinlik yönergelerine dikkat ediniz. Çalışmanı güvenli ve düzenli bir şekilde yapınız.

$f(x)=\frac{1}{x}$ Şeklinde Tanımlı Rasyonel Referans Fonksiyon

Gerçek sayılar kümesinde tanımlı $f(x)=\frac{1}{x}$ fonksiyonu, rasyonel fonksiyonların temel referans fonksiyonu olarak adlandırılır. Diğer rasyonel fonksiyonların cebirsel temsilleri, grafiksel gösterimleri ve nitel özellikleri (tanım kümesi, görüntü kümesi, işareti, artan-azalan olma durumu, maksimum-minimum noktaları, sıfırı ve bire birliği), bu referans fonksiyon üzerinde gerçekleştirilen dönüşümler ve çıkarımlar yoluyla elde edilebilir. Bu yüzden öncelikle $f(x)=\frac{1}{x}$ rasyonel referans fonksiyonunu grafik temsili ve cebirsel temsilleri ile nitel özelliklerini (Şekil 1) tanımanız amacıyla Etkinlik 1'i detaylı bir şekilde inceleyeniz ve adım adım soruları cevaplandırınız.



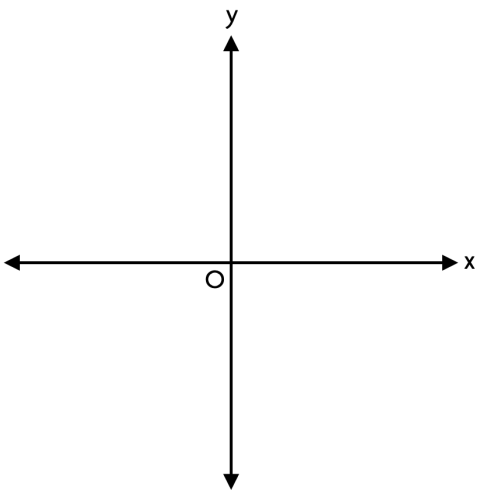
Şekil 1.

ETKİNLİK 1. $f(x)=\frac{1}{x}$ Rasyonel referans Fonksiyonunu Keşfediyorum

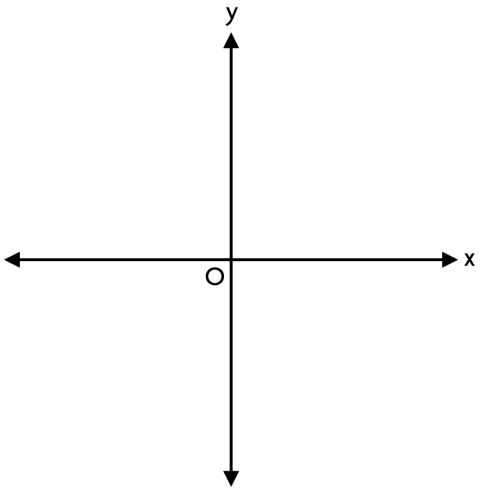
a) Aşağıdaki tabloda boş bırakılan yerlere $f(x)=\frac{1}{x}$ olacak şekilde bağımsız değişkenin (x) in aldığı bazı değerlere karşılık gelen bağımlı değişken (f(x)) değerlerini yazınız.

x	f(x)
-2	
-1	
$-\frac{1}{2}$	
1	
2	

b) Her (x, f(x)) çiftini dik koordinat düzleminde gösteriniz.



c) İşaretlediğiniz noktaları birleştirerek grafiği dik koordinat düzleminde çiziniz. Elde ettiğiniz şeklin eğri olup olmadığını yazınız.



ç) Çizdiğiniz grafiğe göre a nın işareti ile fonksiyonun artan-azalan olma durumunu nasıl tanımlarsınız?

d) Fonksiyonunun grafiğinin x eksenini kestiği bir nokta var mıdır? Başka bir ifadeyle fonksiyonun sonucunu 0 yapan bir x gerçek sayısı bulunabilir mi?

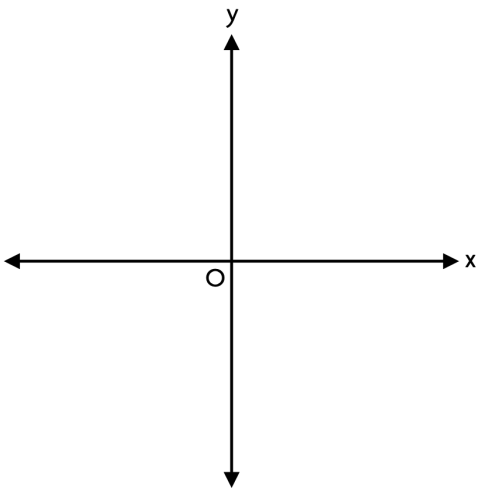
Cevabınızı nedenleriyle açıklayınız.

e) Fonksiyonun pozitif ve negatif değer aldığı x aralıklarını belirleyiniz.

f) Fonksiyonun tanım kümesi olan (–∞, 0), (0, ∞) aralıkları ayrı ayrı düşünüldüğünde bu aralıklarda x değerleri artarken f(x) değerlerinin nasıl değiştiğini (arttığını ya da azaldığını) belirleyiniz.

g) Tanım kümesinden seçeceğiniz herhangi iki farklı x değeri için bu değerlerin görüntüleri birbirinden farklı mıdır? Bu durum fonksiyonun hangi özelliği (bire birlik/örtenlik vb.) ile ilişkilendirilebilir?

h) Sıfırdan farklı tüm gerçek sayılar düşünüldüğünde f fonksiyonunun grafiğini çiziniz. Bu grafiğe bakarak bağımsız değişkenlerin ve bağımlı değişkenlerin ait olduğu kümeleri ifade ediniz.



NOT

Bir fonksiyonda bağımsız değişkenin alabileceği tüm değerlerin kümesi, fonksiyonun **tanım kümesi** olarak ifade edilir. Bağımsız değişkenin alabileceği tüm değerlere karşılık bağımlı değişkenin alabileceği tüm değerlerin kümesi **görüntü kümesi** olarak adlandırılır. Örneğin, bir A kümesinden B kümesine tanımlı bir f fonksiyonu denildiğinde

$f: A \rightarrow B$ ile gösterilir.

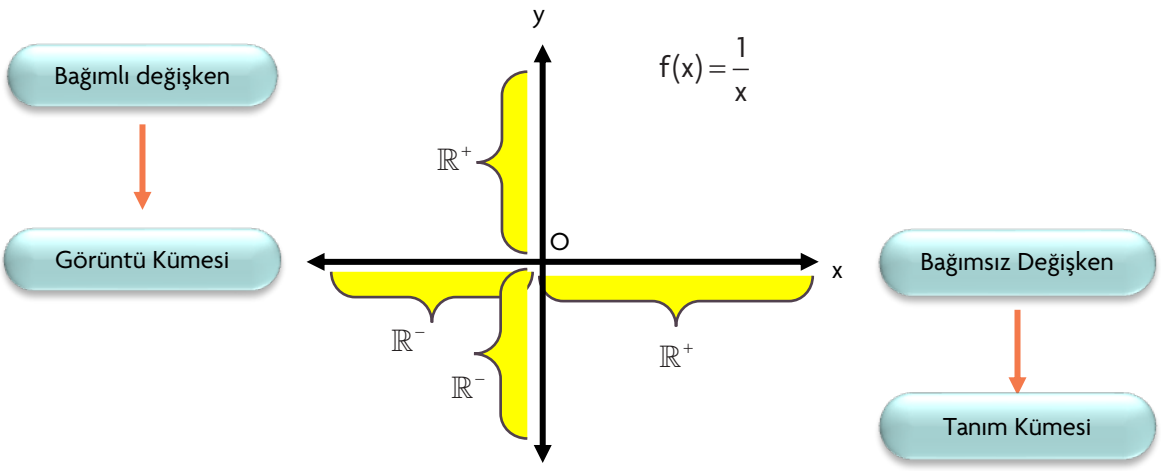
A kümesi tanım kümesi, $f(A)$ $(f(A) \subset B)$ kümesi görüntü kümesi olarak ifade edilir.

$y = f(x)$ veya $f: x \rightarrow y$ veya $(x, y) \in f$ şeklinde gösterilir.

Yukarıda çizdiğiniz grafiğe göre $f(x) = \frac{1}{x}$ **fonksiyonunun tanım kümesini ve görüntü kümesini yazınız.**

Cebirsel temsili $f(x)=\frac{1}{x}$ olan f fonksiyonunda x sıfırdan farklı tüm gerçek sayı değerlerini alabileceğinden f fonksiyonunun **tanım kümesi** $\mathbb{R}-\{0\}$ olarak ifade edilir. Benzer şekilde fonksiyon her x değerini kendisi ile eşleştirdiğinden fonksiyonun **görüntü kümesi** $\mathbb{R}-\{0\}$ dir. f fonksiyonu, $f: \mathbb{R}-\{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ biçiminde tanımlanabilir.

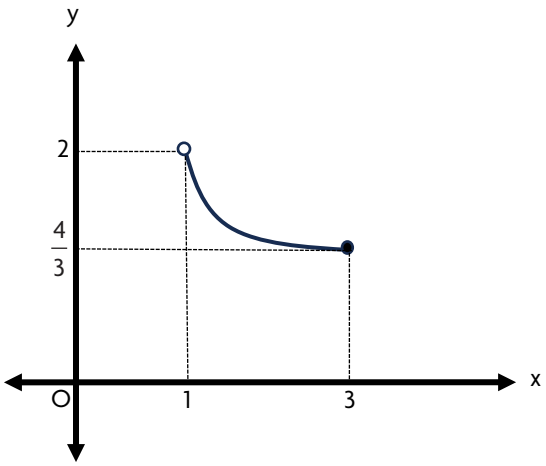
Cebirsel temsili $f(x)=\frac{1}{x}$ olan rasyonel referans fonksiyonunun **grafik temsili** de aşağıdaki gibidir.



Bağımlı değişken değerlerinin fonksiyonun görüntü kümesini, bağımsız değişken değerlerinin ise fonksiyonun tanım kümesini oluşturduğuna dikkat ediniz.

ÖRNEK

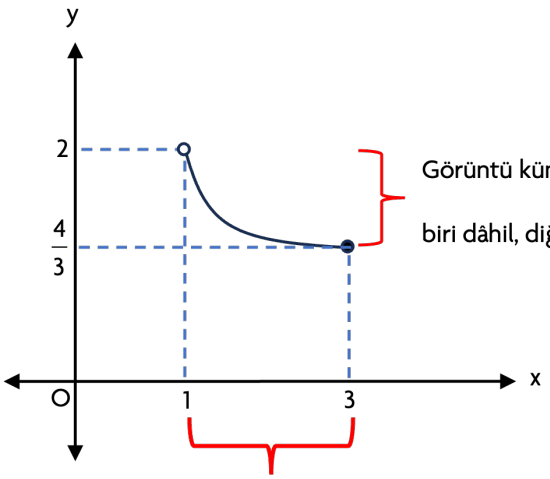
Aşağıda dik koordinat düzleminde gerçek sayıların bir alt kümesinde tanımlı f(x) rasyonel fonksiyonunun grafiği verilmiştir.



Buna göre f rasyonel fonksiyonunun tanım ve görüntü kümelerini bulunuz.

ÇÖZÜM

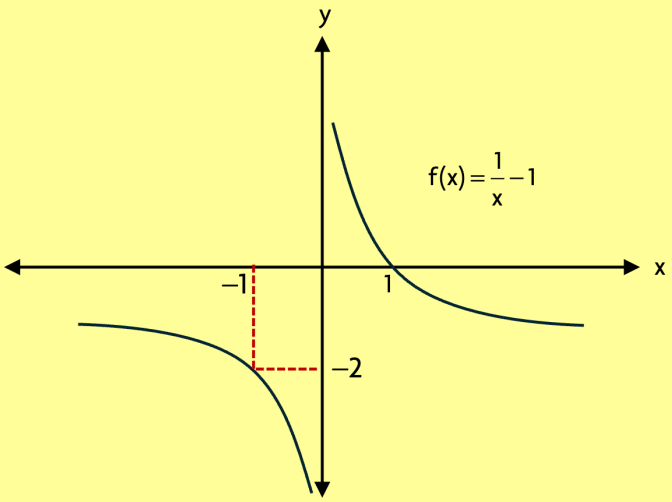
f rasyonel fonksiyonunun tanım kümesi: (1, 3] ve görüntü kümesi: $\left[\frac{4}{3}, 2\right)$ olur.



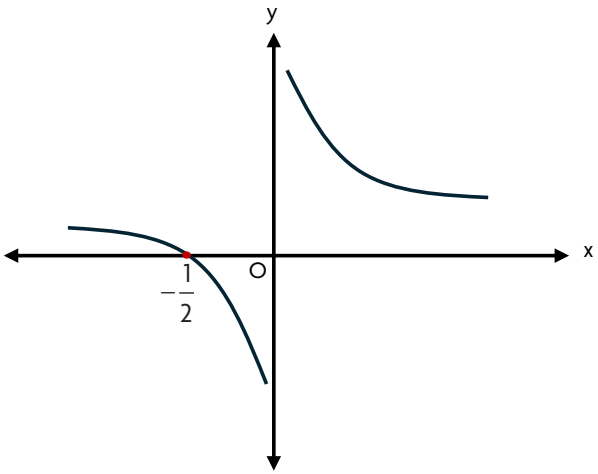
Görüntü kümesinin grafiğin y eksenindeki aralığında uç noktalardan biri dâhil, diğeri dâhil değil, dikkat ediniz. $\left[\frac{4}{3}, 2\right)$.

Tanım kümesinin grafiğin x eksenindeki aralığında uç noktalardan biri dâhil, diğeri dâhil dikkat ediniz. (1, 3]

Bir fonksiyonda f(x) = 0 eşitliğini sağlayan x değerine **fonksiyonun sıfırı** denir. Aşağıda verilen grafikte, x = 1 için f(1) = 0 olduğu görülmektedir. Dolayısıyla $f(x)=\frac{1}{x}-1$ fonksiyonunun sıfırı 1 olarak belirlenir.



Örneğin; $f(x)=\frac{2}{x}+4$ fonksiyonunun sıfırı $x=-\frac{1}{2}$'dir. Fonksiyonun grafik temsili aşağıda gösterilmiştir.

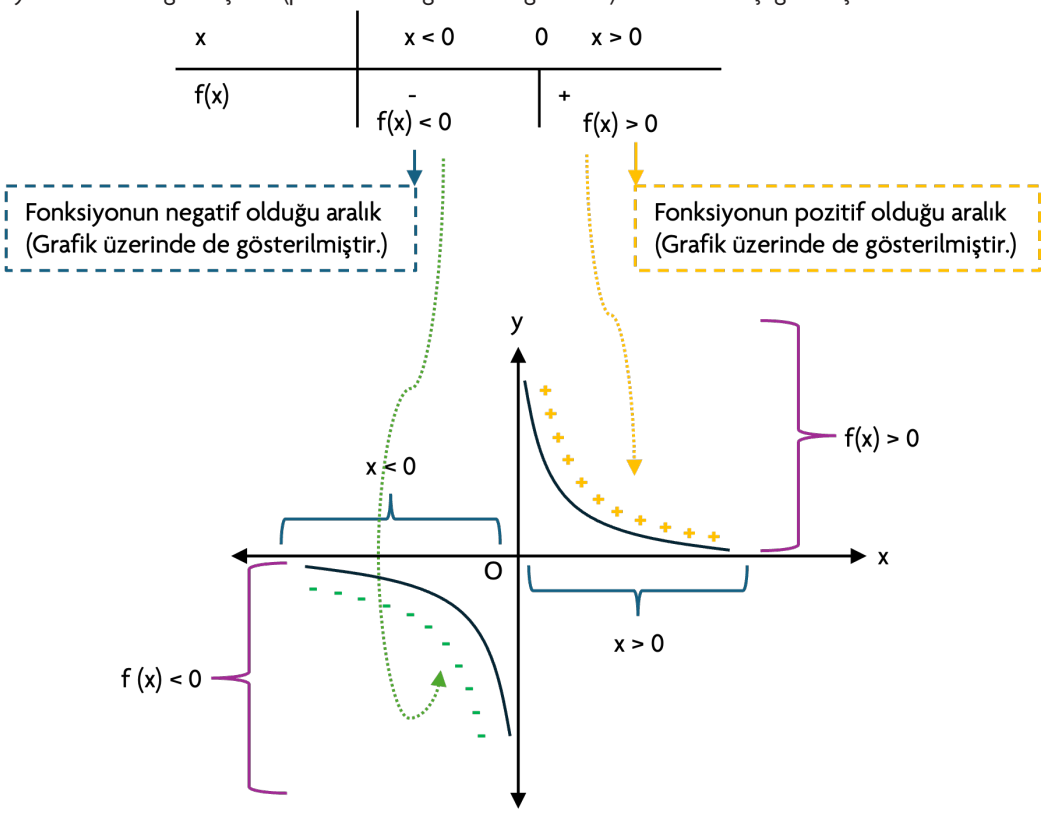


Peki, fonksiyon $f(x)=\frac{1}{x}$ rasyonel referans fonksiyonu olsaydı fonksiyonun sıfırı ne olurdu?

- Bir fonksiyonda bağımsız değişkenin alabileceği değerlere göre bağımlı değişken f(x) in alabileceği değerler bazen negatif, bazen pozitif olabilir.

Yandaki grafiği incelendiğinizde

- x > 0 iken f(x) pozitif değerler almakta,
- x < 0 iken f(x) negatif değerler almaktadır.
- Fonksiyonun sıfırına göre işaret (pozitif ve negatif olduğu aralık) incelemesi aşağıdaki şekilde özetlenebilir.



Buna göre

- x ∈ (–∞, 0) olduğunda fonksiyonun işareti negatiftir,
- x ∈ (0, ∞) olduğunda fonksiyonun işareti pozitiftir.

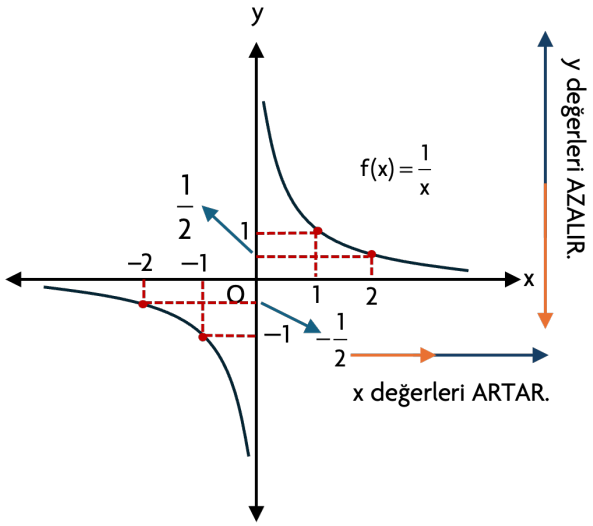
- Bir fonksiyonda belli bir aralıkta bağımsız x değişkeninin aldığı değerler artarken bağımlı y değişkeninin aldığı değerler de artıyorsa fonksiyon bu aralıkta **artandır.**
- Bir fonksiyonda belli bir aralıkta bağımsız x değişkeninin aldığı değerler artarken bağımlı y değişkeninin aldığı değerler azalıyorsa fonksiyon bu aralıkta **azalandır.**

Matematiğin sembolik diliyle bu ifade genel olarak,

- $\forall$ a, b $\in \mathbb{R}$ için a < b iken f(a) < f(b) oluyorsa f, gerçek sayılarda artandır.
- $\forall$ a, b $\in \mathbb{R}$ için a < b iken f(a) > f(b) oluyorsa f, gerçek sayılarda azalandır.

Yandaki $f(x)=\frac{1}{x}$ fonksiyonun grafik temsili incelendiğinde bağımsız değişken 1 den 2'ye doğru artarken bağımlı değişken değerinin 1'den $\frac{1}{2}$'ye doğru azaldığı görülmektedir.

Dolayısıyla f fonksiyonu belli aralıklarda azalandır.



- Sıfırdan farklı gerçek sayılarda tanımlı bir $f(x)=\frac{1}{x}$ fonksiyonu için aşağıda verilen önermelerde boş bırakılan yerlere artan/azalan ifadelerinden uygun olanını yazınız.

  $\forall$ a, b $\in \mathbb{R} - \{0\}$ ve a < b iken f(a) < f(b) $\Leftrightarrow$ f ..... dır.

  f: $\mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x}$ ..... fonksiyondur.

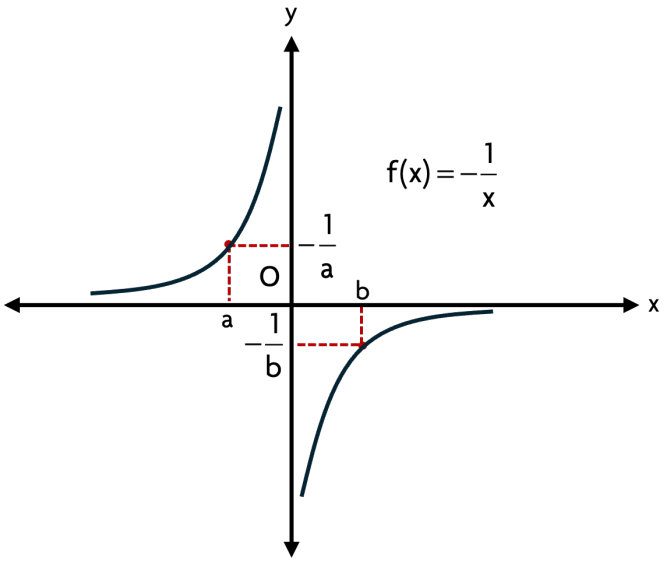
- Aşağıda grafik temsili verilen sıfırdan farklı gerçek sayılarda tanımlı bir $f(x)=-\frac{1}{x}$ fonksiyonu için aşağıda verilen önermelerde boş bırakılan yerlere artan/azalan ifadelerinden uygun olanını yazınız.

  $\forall$ a, b $\in \mathbb{R}-\{0\}$ ve a < b iken f(a) > f(b) $\Leftrightarrow$ f ..... dır.

  f: $\mathbb{R}-\{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x)=-\frac{1}{x}$ ..... fonksiyondur.

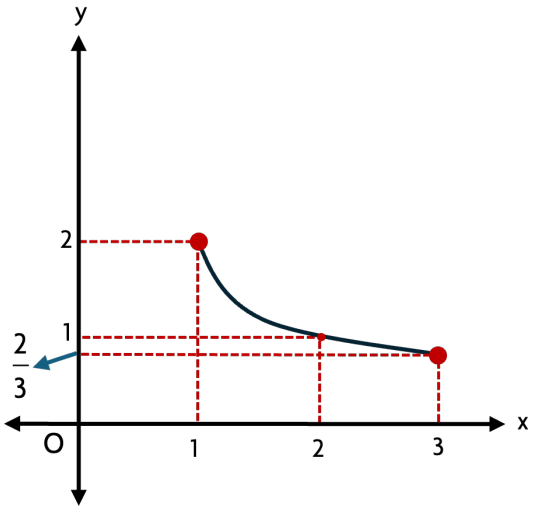
$a<0$ ise $f(a)=-\frac{1}{a}>0$

$b>0$ ise $f(b)=-\frac{1}{b}<0$



ÖRNEK

Aşağıdaki dik koordinat sisteminde gerçek sayıların bir alt kümesinde tanımlı f(x) rasyonel fonksiyonun grafiği verilmiştir.



Buna göre aşağıdaki soruları yanıtlayınız.

a) f(x) fonksiyonunun tanım ve görüntü kümelerini yazınız.

b) Bağımlı değişkenin alabileceği en küçük (minimum) değeri bulunuz.

c) Bağımlı değişkenin alabileceği en büyük (maksimum) değeri bulunuz.

ÇÖZÜM

a) f rasyonel fonksiyonunun tanım kümesi [1, 3] ve görüntü kümesi $\left[\frac{2}{3}, 2\right]$ dır.

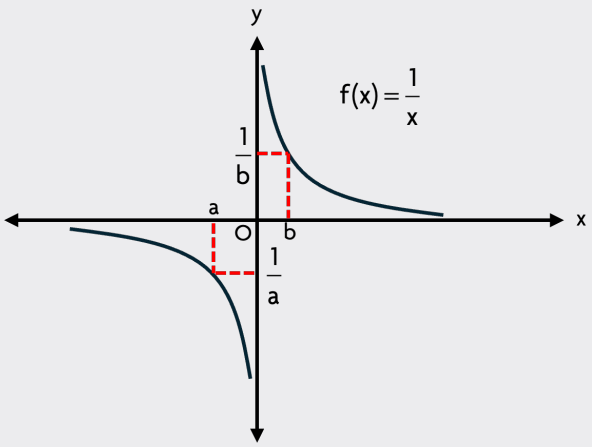
b) Bağımlı değişkenin alabileceği en küçük (minimum) değeri $\frac{2}{3}$'tür.

c) Bağımlı değişkenin alabileceği en büyük (maksimum) değer 2'dir.

- $f: \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ **rasyonel referans fonksiyonunda maksimum ve minimum noktaları var mıdır?**

UYARI

$f: \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x)$ rasyonel referans fonksiyonunda **maksimum noktası** ve **minimum noktası yoktur.** Çünkü tanımlı olduğu aralıklara bakıldığında, bağımsız değişken negatif olarak büyüdükçe bağımlı değişken eksi sonsuza; bağımsız değişken pozitif olarak küçüldükçe bağımlı değişken artı sonsuza yaklaşmaktadır.



- $f: \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ **rasyonel referans fonksiyonunda tanım kümesindeki her bir elemanın görüntü kümesinde eşleştiği elamanların farklı ya da aynı oluşu bu fonksiyonun bir özelliği olabilir mi?**

NOT

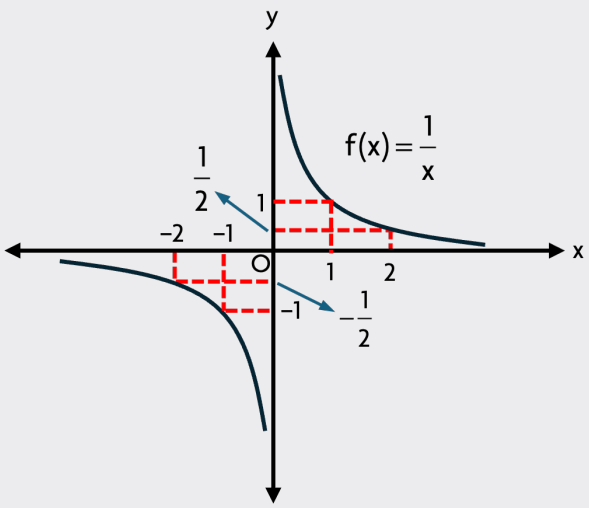
Bir fonksiyonun **tanım kümesindeki** her bir x değerine **farklı** f(x) değerleri karşılık geliyorsa bu fonksiyon **bire bir** fonksiyon olarak adlandırılır. Benzer biçimde, **görüntü kümesindeki** her bir f(x) değerine tanım kümesinde **yalnızca bir** x değeri karşılık geliyorsa fonksiyon yine bire birdir.

Bu önerme sembol diliyle şöyle ifade edilebilir.

$f: \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}, \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} - \{0\}, x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$ ya da $f: \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}, \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} - \{0\}, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

UYARI

$f(x) = \frac{1}{x}$ rasyonel referans fonksiyonunun grafik temsili incelendiğinde farklı x değerlerinin görüntülerinin de farklı olduğu görülmektedir. Örneğin; x = 1 için f(1) = 1, x = 2 için $f(2) = \frac{1}{2}$ olduğu benzer şekilde x = –1 için f(–1) = –1 olduğu görülmektedir. Bu durum tanım kümesindeki farklı x değerlerine farklı f(x) değerlerinin karşılık geldiğini dolayısıyla $f(x) = \frac{1}{x}$ rasyonel referans fonksiyonun bire bir fonksiyon olduğunu göstermektedir.



ÖRNEK

Sıfırdan farklı gerçek sayılarda tanımlı f rasyonel referans fonksiyon olmak üzere

$f(a) = f\left(-\frac{1}{2}\right)$ ve f(b) = f(4) eşitlikleri verilmektedir.

Buna göre f(a + b) **değeri kaçtır?**

ÇÖZÜM

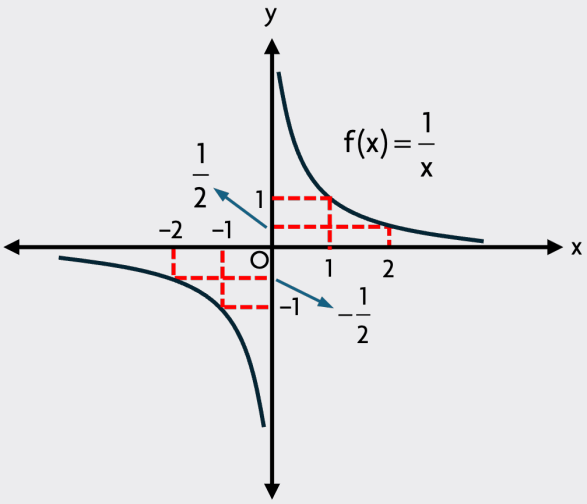
f rasyonel referans fonksiyonu olduğu için bire bir fonksiyondur. Çünkü tanım kümesindeki her bir elemanın görüntüsü farklıdır. Burada görüntüler aynı olduğundan bu fonksiyonun bağımsız değişkenleri de aynı olmalıdır. $f(a) = f\left(-\frac{1}{2}\right)$ ise $a = -\frac{1}{2}$ olmak zorundadır. f(b) = f(4) ise b = 4 olur. Buna göre $f\left(-\frac{1}{2}+4\right) = f\left(\frac{7}{2}\right)$ sorulmaktadır.

Bu durumda $f\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{1}{\frac{7}{2}} = \frac{2}{7}$ bulunur.

UYARI

f: $\mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ rasyonel referans fonksiyonunun grafik temsili ile birlikte tanım, değer ve görüntü kümeleri incelendiğinde görüntü kümesinin değer kümesine eşit olmadığı; görüntü kümesinin değer kümesinin bir alt kümesi olduğu görülmektedir.

Bu durum rasyonel referans fonksiyonunun sıfırı olmamasından ($f(x) \neq 0$) kaynaklanmaktadır. Dolayısıyla görüntü kümesi $\mathbb{R} - \{0\}$, değer kümesi $\mathbb{R}$ olduğundan $\mathbb{R} - \{0\} \neq \mathbb{R}$ dolayısıyla $\mathbb{R} - \{0\} \subset \mathbb{R}$ olur. Bundan dolayı f rasyonel referans fonksiyonu örtenlik özelliği sağlamamaktadır. Ancak değer kümesini sıfırdan farklı gerçek sayılar olarak alırsak tanım kümesinin tüm elemanları değer kümesindeki tüm elemanlarla eşleşebildiğinden f rasyonel fonksiyonu örtenlik özelliğini sağlayabilecektir.

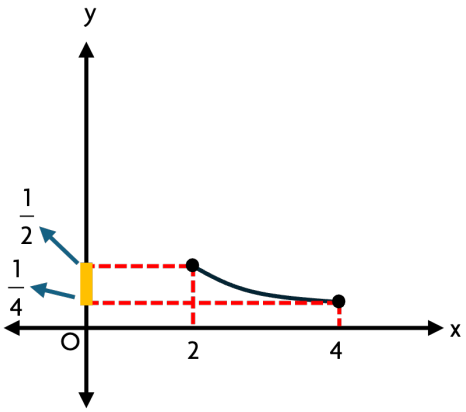


ÖRNEK

$f:[2,4]\to\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right]$, $f(x)=\frac{1}{x}$ şeklinde tanımlı f fonksiyonu verilmektedir.

Buna göre f fonksiyonunun grafik temsilini çizerek örten olup olmadığını açıklayınız.

ÇÖZÜM



Görüntü Kümesi: $\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right]$

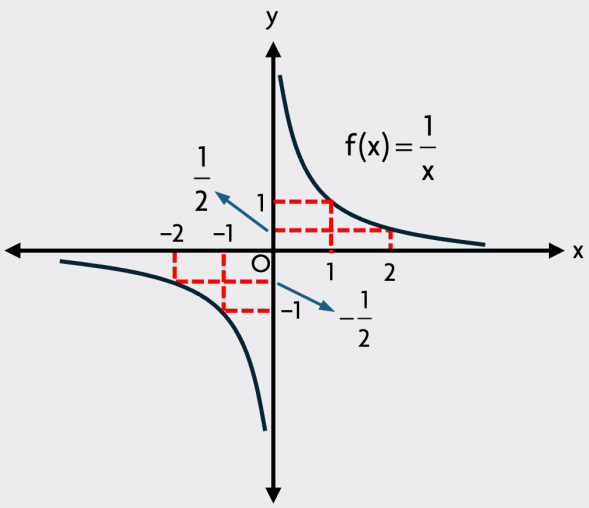
Değer Kümesi: $\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right]$

Her iki küme de birbirine eşit olduğundan f fonksiyonu örtenlik özelliğini sağlamaktadır.

UYARI

$f(x)=\frac{1}{x}$ rasyonel referans fonksiyonunun grafik temsili incelendiğinde fonksiyonun grafiği orijine göre simetrik olduğundan f rasyonel referans fonksiyonu tek fonksiyondur. $\forall x \in \mathbb{R}-\{0\}$ için $f(-x) = -f(x)$ oluyorsa $f(x)$ fonksiyonu tek fonksiyon olur ve fonksiyonun grafiği orijine göre simetriktir.

Örneğin; $x = 1$ için $f(1) = 1$, $x = -1$ için $f(-1) = -f(1) = -1$ olur. Dolayısıyla f rasyonel referans fonksiyonu tek fonksiyon özelliği sağlar.



ÖRNEK

f rasyonel referans fonksiyon olmak üzere $f(a)=\frac{1}{5}$ **olduğuna göre** $3\cdot f(a)-2\cdot f(-a)$ **işleminin sonucu kaçtır?**

ÇÖZÜM

$f(x)=\frac{1}{x}\Rightarrow f(a)=\frac{1}{a}=\frac{1}{5}\Rightarrow a=5$ olur. f rasyonel referans fonksiyonu tek olduğundan f(–x) = –f(x) olur. Dolayısıyla

$3\cdot f(a)-2\cdot f(-a)=3\cdot f(a)-2\cdot\left(-f\left(a\right)\right)=3\cdot f(a)+2\cdot f(a)=5\cdot f(a)=5f(5)=5\cdot\frac{1}{5}=1$ bulunur.

SIRA SİZDE 1.

Sıfırdan farklı gerçek sayılar kümesinden gerçek sayılar kümesine tanımlı f(x) rasyonel referans fonksiyonun cebirsel temsilini ve nitel özelliklerini içeren tabloda boş bırakılan yerleri uygun şekilde doldurunuz.

Fonksiyonun Cebirsel Temsili	Tanım Kümesi	Görüntü Kümesi	İşaretinin Pozitif olduğu aralık	İşaretinin Negatif olduğu aralık	Sıfırı Sıfırı	Artanlık - Azalanlık durumu	Maksimum Değeri	Minimum Değeri	Birebirlik durumu	Teklik-Çiftlik durumu	Örtenlik durumu

$\mathbb{R}-\{\pm r\}$ de g(x) = a.f(x ± r) ± k Şeklinde Tanımlı Rasyonel Fonksiyonlar

a, r, k $\in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$ olmak üzere sıfırdan farklı gerçek sayılar kümesinde $f(x)=\frac{1}{x}$ rasyonel referans fonksiyonundan türetilen ve

$$g(x)=a\cdot f(x\pm r)\pm k$$

biçiminde tanımlanan fonksiyonlara **rasyonel fonksiyon** denir. Rasyonel fonksiyonların grafikleri, düzlemde bir eğri olarak temsil edilir. Her rasyonel fonksiyon; $f(x)=\frac{1}{x}$ rasyonel referans fonksiyonuna uygulanacak uygun yatay kaydırma, dikey kaydırma ve a katsayısının değişikliği işlemleri ile elde edilebilir. g(x) fonksiyonun f(x) referans fonksiyonunun kullanılarak nasıl elde edileceği adım adım aşağıda gösterilmiştir.

$f(x)=\frac{1}{x}$

↳ $g(x)=a\cdot f(x)=a\cdot\frac{1}{x}$

↳ $g(x)=a\cdot f(x\pm r)=a\cdot\frac{1}{x\pm r}$

↳ $g(x)=a\cdot f(x\pm r)\pm k=a\cdot\frac{1}{x\pm r}\pm k$

Sıfırdan Farklı Gerçek Sayılarda $g(x)=\frac{a}{x}$ Şeklinde Tanımlı Rasyonel Fonksiyonlar

$f(x)=\frac{1}{x}$ ve $g(x)=\frac{a}{x}$ ($a \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$) olmak üzere her $x \in \mathbb{R}-\{0\}$ için

g fonksiyonunun aldığı değerler, f fonksiyonunun aldığı değerlerin a katıdır.

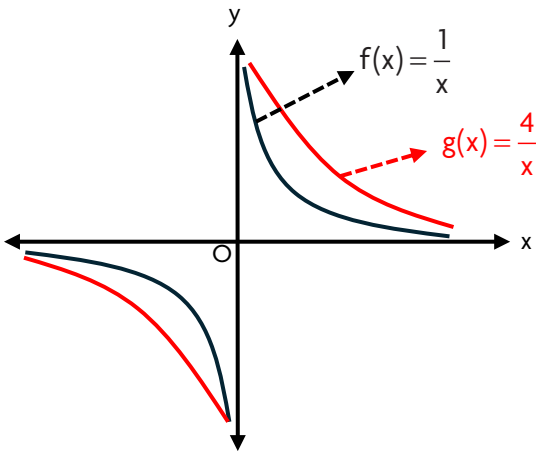
$$g:\mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R},\ g(x)=a\cdot\frac{1}{x},\ a\in\mathbb{R}\text{ ve }a\neq 0$$

$g:\mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R},\ g(x)=a\cdot\frac{1}{x}$ **fonksiyonunun grafiğini**

$f:\mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{1}{x}$ **rasyonel referans fonksiyon grafiğinden nasıl elde edileceğini açıklayınız.**

UYARI

g(x)= a · f(x) fonksiyon grafiğini oluşturan eğriler a nın mutlak değeri artıkça birbirinden uzaklaşır (gerilir), a nın mutlak değeri azaldıkça birbirine yaklaşır (sıkışır).



ÖRNEK

Sıfırdan farklı gerçek sayılarda tanımlı $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \frac{3}{x}$, $h(x) = -\frac{1}{x}$, $t(x) = -\frac{1}{3x}$ fonksiyonları verilmiştir.

a) Yukarıda verilen fonksiyonların farklı x bağımsız değişkenleri için görüntülerini tablodaki boşluklara yazınız.

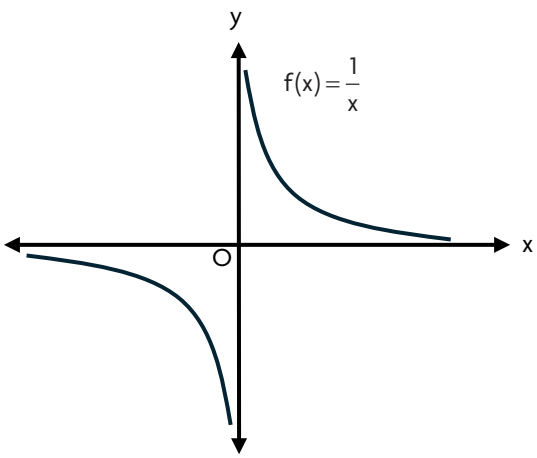
Fonksiyon	$x = -3$	$x = -1$	$x = -\frac{1}{3}$	$x = 1$	$x = 3$
$f(x) = \frac{1}{x}$					
$g(x) = \frac{3}{x}$					
$h(x) = -\frac{1}{x}$					
$t(x) = -\frac{1}{3x}$					

Yukarıdaki tabloda, sıfırdan farklı gerçek sayılarda tanımlı $g(x) = \frac{a}{x}$ rasyonel fonksiyonuna ait bazı örnekler verilmiştir. Tablodaki aynı x değerleri için f(x), g(x), h(x), t(x) değerlerini inceleyiniz. Bu örneklerden yola çıkarak f(x) fonksiyonuna göre diğer fonksiyonlarda eğriler arasındaki uzaklığın (azaldığını veya arttığını) nasıl olduğunu uygun olan cevabı işaretleyerek belirtiniz.

Fonksiyon	Azalır	Artar	Değişmez
g(x)			
h(x)			
t(x)			

b) Aşağıdaki tabloyu doldurarak f, g, h ve t fonksiyonlarının grafiklerini aynı dik koordinat sisteminde çiziniz.

Fonksiyon	Belirli Aralıklarda (Artan/Azalan)	Tek Fonksiyon/ Çift Fonksiyon	Simetrik Olma Durumu
$f(x)=\frac{1}{x}$	Azalan	Tek	Orijine göre simetrik
$g(x)=\frac{3}{x}$			
$h(x)=-\frac{1}{x}$			
$t(x)=-\frac{1}{3x}$			



Yukarıdaki tabloda, sıfırdan farklı gerçek sayılarda tanımlı $g(x)=\frac{a}{x}$ rasyonel fonksiyonuna ait bazı örnekler verilmiştir. Tablodaki değerleri ve fonksiyonlara ait çizdiğiniz grafik temsillerini inceleyiniz. Aşağıdaki cümlelerdeki boşlukları uygun kelimelerle tamamlayınız.

Boşluklara gelebilecek kelimeler: keser, kesmez, yalnızca bir ekseni keser, artanlık-azalanlık durumunu, yaklaşır, uzaklaşır, $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$

1. $g(x)=\frac{a}{x}$ fonksiyonu, **x eksenini ve y eksenini** .....
2. Fonksiyondaki a katsayısının işareti, fonksiyonun ..... belirler.
3. a < 0 olmak üzere $g(x)=\frac{a}{x}$ fonksiyonu ..... aralığında pozitif, ...aralığında negatif tanımlıdır.
4. a > 0 olmak üzere $g(x)=\frac{a}{x}$ fonksiyonu ..... aralığında pozitif, ... aralığında negatif tanımlıdır.

c) Aşağıda verilen tabloyu doldurunuz.

Fonksiyon / Nitel Özellik	$f:[1,4]\to\left[\frac{1}{4},1\right]$, $f(x)=\frac{1}{x}$	$g:(-\infty,-3]\to[-1,0)$, $g(x)=\frac{3}{x}$	$h:\mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R}$, $h(x)=-\frac{1}{x}$	$t:[1,\infty)\to\mathbb{R}$, $t(x)=-\frac{1}{3x}$
Tanım Kümesi				
Görüntü Kümesi				
Sıfırı				
İşareti Pozitif				
İşareti Negatif				
Artan-Azalan				
Maksimum değeri x = ... de alır.				
Minimum değeri x = ... de alır.				
Birebirlik				
Örtenlik				
Teklik-Çiftlik				

ÇÖZÜM

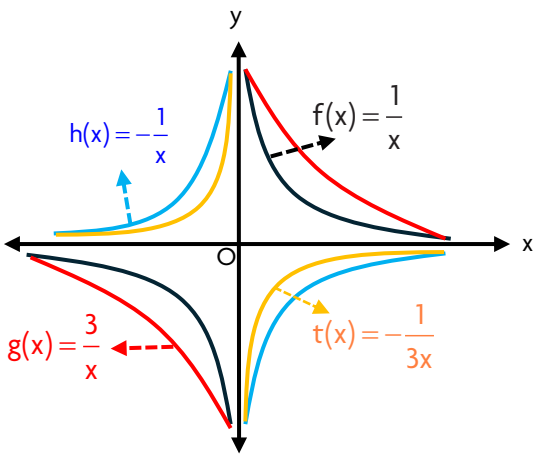
a)

Fonksiyon	x = – 3	x = – 1	$x=-\frac{1}{3}$	x = 1	x = 3
$f(x)=\frac{1}{x}$	$\frac{1}{-3}=-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{-1}=-1$	$\frac{1}{-\frac{1}{3}}=1\cdot(-3)=-3$	$\frac{1}{1}=1$	$\frac{1}{3}$
$g(x)=\frac{3}{x}$	$\frac{3}{-3}=-1$	$\frac{3}{-1}=-3$	$\frac{3}{-\frac{1}{3}}=3\cdot(-3)=-9$	$\frac{3}{1}=3$	$\frac{3}{3}=1$
$h(x)=-\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{-3}=\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{-1}=1$	$-\frac{1}{-\frac{1}{3}}=-1\cdot(-3)=3$	$-\frac{1}{1}=-1$	$-\frac{1}{3}$
$t(x)=-\frac{1}{3x}$	$-\frac{1}{3\cdot(-3)}=\frac{1}{9}$	$-\frac{1}{3\cdot(-1)}=\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)}=\frac{1}{1}=1$	$-\frac{1}{3\cdot1}=-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3\cdot3}=-\frac{1}{9}$

Fonksiyon	Azalır	Artar	Değişmez
g(x)	✓		
h(x)			✓
t(x)		✓	

b) Aşağıdaki tabloyu doldurarak f, g, h ve t fonksiyonlarının grafiklerini aynı dik koordinat sisteminde çiziniz.

Fonksiyon	Belirli Aralıklarda (Artan/Azalan)	Tek Fonksiyon/ Çift Fonksiyon	Simetrik Olma Durumu
$f(x)=\frac{1}{x}$	Azalan	Tek	Orijine göre simetrik
$g(x)=\frac{3}{x}$	Azalan	Tek	Orijine göre simetrik
$h(x)=-\frac{1}{x}$	Artan	Tek	Orijine göre simetrik
$t(x)=-\frac{1}{3x}$	Artan	Tek	Orijine göre simetrik



Boşluklara gelebilecek ifadeler: keser, kesmez, yalnızca orijinde keser, artan-azalan olma, yaklaşır, uzaklaşır, (–∞, 0), (0, ∞).

1. $g(x)=\frac{a}{x}$ fonksiyonu **x eksenini ve y eksenini kesmez.**
2. Fonksiyondaki a katsayısının işareti, fonksiyonun **artanlık - azalanlık durumunu** belirler.
3. a < 0 olmak üzere $g(x)=\frac{a}{x}$ fonksiyonu (–∞, 0) aralığında pozitif, (0, ∞) aralığında negatif tanımlıdır.
4. a > 0 olmak üzere $g(x)=\frac{a}{x}$ fonksiyonu (0, ∞) aralığında pozitif, (–∞, 0) aralığında negatif tanımlıdır.

c)

Fonksiyon / Nitel Özellik		$f:[1,4]\to\left[\frac{1}{4},1\right]$, $f(x)=\frac{1}{x}$	$g:(-\infty,-3]\to[-1,0)$, $g(x)=\frac{3}{x}$	$h:\mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R}$, $h(x)=-\frac{1}{x}$	$t:[1,\infty)\to\mathbb{R}$, $t(x)=-\frac{1}{3x}$
Tanım Kümesi		$[1, 4]$	$(-\infty, -3]$	$\mathbb{R}-\{0\}$	$[1, \infty)$
Görüntü Kümesi		$\left[\frac{1}{4},1\right]$	$[-1, 0)$	$\mathbb{R}-\{0\}$	$\left[-\frac{1}{3},0\right)$
Sıfırı		Yok.	Yok.	Yok.	Yok.
İşareti	Pozitif	$[1, 4]$	Yok.	$(-\infty, 0]$	Yok.
	Negatif	Yok.	$(-\infty, -3]$	$(0, \infty)$	$[1, \infty)$
Artan-Azalan		Azalan	Azalan	Artan	Artan
Maksimum değeri x = ... de alır.		$x=\frac{1}{4}$	Yok.	Yok.	Yok.
Minimum değeri x = ... de alır.		$x = 1$	$x = -3$	Yok.	$x = 1$
Bire birlik		Bire bir	Bire bir	Bire bir	Bire bir
Örtenlik		Örten	Örten	Örten değil.	Örten değil.
Teklik-Çiftlik		Tek	Tek	Tek	Tek

ETKİNLİK 2. Şarj İstasyonu Gücü ve Dolum Süresi Arasındaki Ters Orantı

Bir elektrikli aracın bataryasının tamamen dolması için gereken enerji miktarı sabittir. Bu nedenle kullanılan şarj istasyonunun gücü (kW) arttıkça tam şarj olma süresi (saat) azalmaktadır. Batarya kapasitesi 60 kWh olan bu araç bataryası boş iken 10 kW gücündeki bir ev prizi ile 6 saatte tam şarj olmaktadır. Araç bataryası en fazla 60 kW'lık şarj gücünü desteklemekte olup en düşük şarj istasyonu gücü 2 kW'tır.

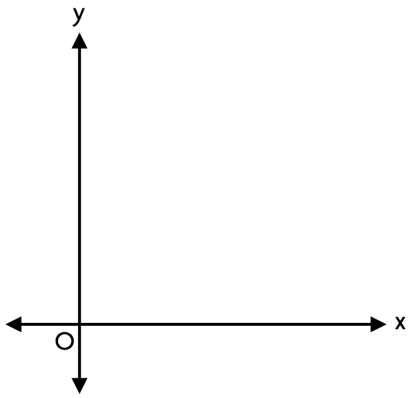
Buna göre aşağıdaki soruları yanıtlayınız.

a) Şarj istasyonunun gücünün x (kW) olması durumunda, tam şarj süresini (saat) gösteren f(x) fonksiyonunun cebirsel temsilini yazınız.

b) Bataryası boş olan araç 15 kW gücündeki hızlı şarj istasyonunda şarj edilirse tam dolum kaç saat sürer?

c) Şarj gücünün x (kW) olması durumunda elde edilen fonksiyonun fiziksel koşullar göz önüne alındığında <u>en geniş</u> tanım kümesini ve görüntü kümesini belirtiniz.

ç) Bu duruma karşılık gelen fonksiyonun grafiğini, $f(x)=\frac{1}{x}$ rasyonel referans fonksiyonundan yararlanarak aşağıdaki dik koordinat sisteminde çiziniz.



d) Fonksiyonun minimum ve maksimum değerlerini belirleyiniz ve bu değerlerin etkinlik senaryosunda ne anlama geldiğini açıklayınız.

ETKİNLİK 2. Şarj İstasyonu Gücü ve Dolum Süresi Arasındaki Rasyonel İlişki

ÇÖZÜM

a) (10, 6), (20, 3) ve (60, 1) şarj istasyon gücü ile bataryanın dolum süresi arasında rasyonel (ters orantı) bir ilişki var. Tabloya bakıldığında bu ilişkiye göre şarj istasyonunun gücü arttıkça batarya dolum süresi azalmaktadır. Bu durumda rasyonel fonksiyonumuz $g(x)=\frac{a}{x}$ fonksiyonu olur.

x (kW)	10	20	60
y (saat) = g(x)	6	3	1

$$g(x)=\frac{a}{x} \Rightarrow g(10)=\frac{a}{10}=6 \Rightarrow a=60$$

Araç bataryasının boş olması durumunda x kW'lık şarj istasyonu gücü ile bataryanın dolum süresini ifade eden fonksiyonunun cebirsel temsili $g(x)=\frac{60}{x}$ olur.

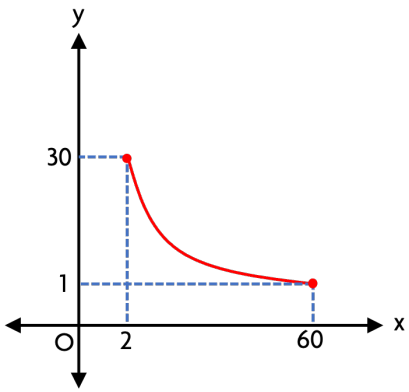
b) $x=15,\ g(15)=\frac{60}{15}$

$g(15)=4$

Bu cebirsel ifadenin anlamı, 15 kW'lık şarj istasyonu gücü ile bataryası boş olan bir araç 4 saatte tam olarak şarj olur.

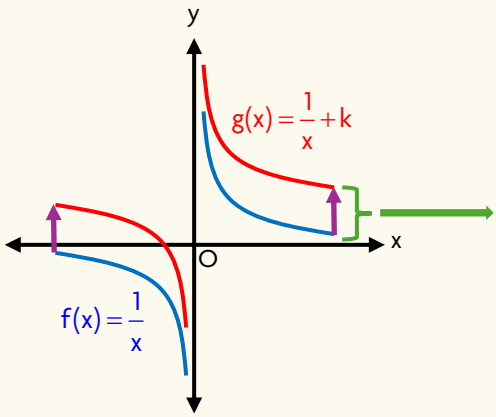
c) Aracın x kW'lık şarj gücü ile şarj edilmesi durumunda bataryanın dolum süresini ifade eden fonksiyonun tanım kümesi TK = [2, 60], görüntü kümesi ise GK = [1, 30] dır.

ç)



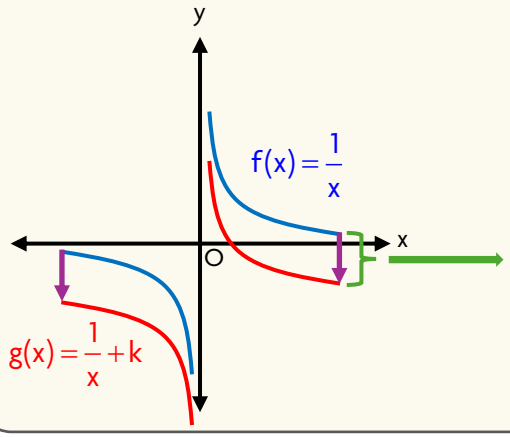
d) Minimum değer: g(60) = 1 Bu durumda araç 60 kW'lık şarj gücüyle en hızlı 1 saatte şarj olur. **Maksimum değer:** g(2) = 30 Araç 2 kW'lık şarj gücüyle en yavaş 30 saatte şarj olur.

- k > 0 için sıfırdan farklı gerçek sayılarda tanımlı $g(x)=\frac{1}{x}+k$ fonksiyonunun grafiği, $f(x)=\frac{1}{x}$ fonksiyonunun grafiğinin y ekseni boyunca pozitif yönde k birim ötelenmesi ile elde edilir.



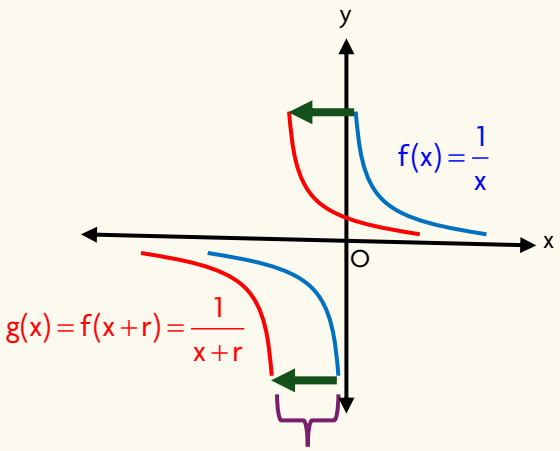
Fonksiyonun grafiği, y ekseni boyunca pozitif yönde k birim ötelenmiştir. Bu öteleme sırasında fonksiyonun eğrileri arasındaki uzaklık değişmemiştir. Ancak grafik x eksenini kestiğinde bu kesim noktasının apsisi fonksiyonun sıfırını verir.

- $k < 0$ için sıfırdan farklı gerçek sayılarda tanımlı $g(x)=\frac{1}{x}+k$ fonksiyonunun grafiği, $f(x)=\frac{1}{x}$ fonksiyonunun grafiğinin y ekseni boyunca negatif yönde k birim ötelenmesi ile elde edilir.



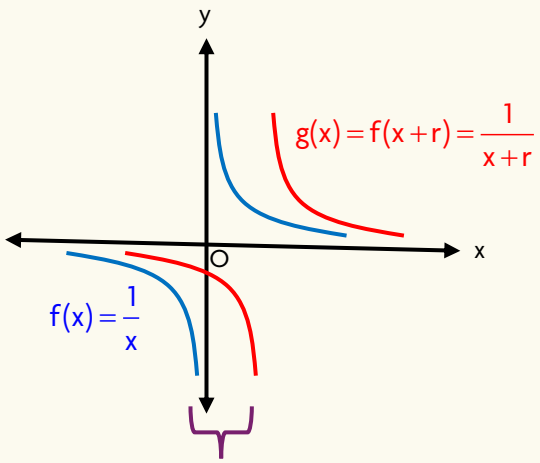
Fonksiyonun grafiği, y ekseni boyunca negatif yönde k birim ötelenmiştir. Bu öteleme sırasında fonksiyonun eğrileri arasındaki uzaklık değişmemiştir. Ancak grafik x eksenini kestiğinde bu kesim noktasının apsisi fonksiyonun sıfırını verir.

- $r > 0$ için $\mathbb{R} - \{-r\}$ de tanımlı $g(x) = f(x + r)$ fonksiyonunun grafiği, $f(x)=\frac{1}{x}$ fonksiyonunun grafiğinin x ekseni boyunca negatif yönde (sola) r birim ötelenmesi ile elde edilir.



r birim, x ekseni boyunca negatif yönde ötelenmiştir. Fonksiyonun eğrileri arasındaki uzaklık değişmemiştir ve fonksiyonun grafik temsili y eksenini keser.

- $r < 0$ için $f(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonunun grafiğinin y ekseni boyunca pozitif yönde (sağa) $|k|$ birim ötelenmesi ile $g(x) = f(x + r)$ fonksiyonunun grafiği elde edilir.



$|r|$ birim, x ekseni boyunca pozitif yönde ötelenmiştir. Fonksiyonun eğrileri aralarındaki uzaklık değişmemiştir ve fonksiyonun grafik temsili y eksenini keser.

ÖRNEK

En geniş tanımlı olduğu aralıklarda $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \frac{1}{x} + 2$, $h(x) = \frac{1}{x} - 2$, $k(x) = \frac{1}{x+2}$, $t(x) = \frac{1}{x-2}$ fonksiyonları verilmiştir.

a) Aşağıda verilen tabloyu doldurunuz.

Fonksiyon	x = – 3	x = – 1	x = 0	x = 1	x = 3
$f(x) = \frac{1}{x}$					
$g(x) = \frac{1}{x} + 2$					
$h(x) = \frac{1}{x} - 2$					
$k(x) = \frac{1}{x+2}$					
$t(x) = \frac{1}{x-2}$					

b) Aşağıda tabloyu doldurarak f, g, h, t ve k fonksiyonlarının grafiklerini aynı dik koordinat sisteminde çiziniz.

Fonksiyon	Fonksiyonun Sıfırı	y Eksenini Kestiği Nokta	Referans Fonksiyonuna Göre Yapılan İşlemler ve Ötelemeler	Artan-Azalan Olma Durumu
$f(x)=\frac{1}{x}$				
$g(x)=\frac{1}{x}+2$				
$h(x)=\frac{1}{x}-2$				
$k(x)=\frac{1}{x+2}$				
$t(x)=\frac{1}{x-2}$				

c) Aşağıdaki tabloda verilen fonksiyonların yeni tanım ve değer kümelerine göre boşlukları doldurunuz.

Fonksiyon / Nitel Özellik		$f:\mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x}$	$g:\left[\frac{1}{2},2\right]\to\left[\frac{5}{2},4\right]$, $g(x)=\frac{1}{x}+2$	$h:(-\infty,-1]\to[-3,-2)$, $h(x)=\frac{1}{x}-2$	$k:\mathbb{R}-\{-2\}\to\mathbb{R}-\{0\}$, $k(x)=\frac{1}{x+2}$	$t:\mathbb{R}-\{2\}\to\mathbb{R}$, $t(x)=\frac{1}{x-2}$
Tanım Kümesi						
Görüntü Kümesi						
Sıfırı						
İşareti	Pozitif					
	Negatif					
Artan-Azalan						
Maksimum değeri x = ... de alır.						
Minimum değeri x = ... de alır.						
Birebirlik						
Örtenlik						
Teklik-Çiftlik						

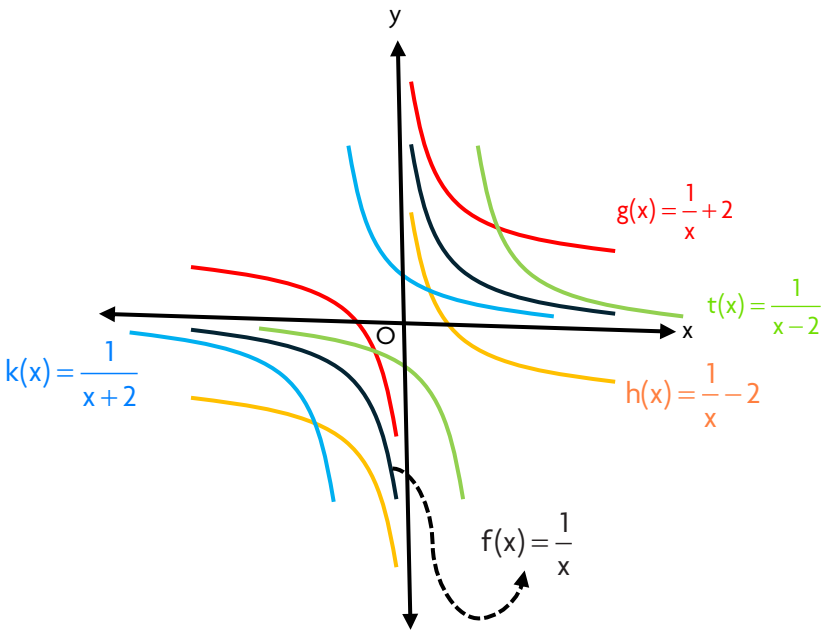
ÇÖZÜM

a)

Fonksiyon	x = −3	x = −1	x = 0	x = 1	x = 3
$f(x)=\frac{1}{x}$	$\frac{1}{-3}=-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{-1}=-\frac{1}{1}=-1$	Yok	$\frac{1}{1}=1$	$\frac{1}{3}$
$g(x)=\frac{1}{x}+2$	$-\frac{1}{3}+2=\frac{-1+2\cdot3}{3}=\frac{5}{3}$	$-\frac{1}{1}+2=-1+2=1$	Yok	$\frac{1}{1}+2=1+2=3$	$\frac{1}{3}+2=\frac{1+2\cdot3}{3}=\frac{7}{3}$
$h(x)=\frac{1}{x}-2$	$-\frac{1}{3}-2=\frac{-1-2\cdot3}{3}=-\frac{7}{3}$	$-\frac{1}{1}-2=-1-2=-3$	Yok	$\frac{1}{1}-2=1-2=-1$	$\frac{1}{3}-2=\frac{1-2\cdot3}{3}=-\frac{5}{3}$
$k(x)=\frac{1}{x+2}$	$\frac{1}{-3+2}=\frac{1}{-1}=-1$	$\frac{1}{-1+2}=\frac{1}{1}=1$	$\frac{1}{0+2}=\frac{1}{2}$	$\frac{1}{1+2}=\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3+2}=\frac{1}{5}$
$t(x)=\frac{1}{x-2}$	$\frac{1}{-3-2}=\frac{1}{-5}=-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{-1-2}=\frac{1}{-3}=-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{0-2}=-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{1-2}=\frac{1}{-1}=-1$	$\frac{1}{3-2}=\frac{1}{1}=1$

b)

Fonksiyon	Fonksiyonun Sıfırı	y Eksenini Kestiği Nokta	Referans Fonksiyonuna Göre Yapılan İşlemler ve Ötelemeler	Artan-Azalan Olma Durumu
$f(x)=\frac{1}{x}$	Yok	Yok	-	Azalan
$g(x)=\frac{1}{x}+2$	$\frac{1}{x}+2=0\rightarrow x=-\frac{1}{2}$	Yok	y ekseni boyunca pozitif yönde 2 br ötelenme	Azalan
$h(x)=\frac{1}{x}-2$	$\frac{1}{x}-2=0\rightarrow x=\frac{1}{2}$	Yok	y ekseni boyunca negatif yönde 2 br ötelenme	Azalan
$k(x)=\frac{1}{x+2}$	Yok	$x=0$ için $y=\frac{1}{2}$	x ekseni boyunca negatif yönde 2 br ötelenme	Azalan
$t(x)=\frac{1}{x-2}$	Yok	$x=0$ için $y=-\frac{1}{2}$	x ekseni boyunca pozitif yönde 2 br ötelenme	Azalan



Fonksiyon / Nitel Özellik		$f:\mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x}$	$g:\left[\frac{1}{2},2\right]\to\left[\frac{5}{2},4\right]$, $g(x)=\frac{1}{x}+2$	$h:(-\infty,-1]\to[-3,-2)$, $h(x)=\frac{1}{x}-2$	$k:\mathbb{R}-\{-2\}\to\mathbb{R}-\{0\}$, $k(x)=\frac{1}{x+2}$	$t:\mathbb{R}-\{2\}\to\mathbb{R}$, $t(x)=\frac{1}{x-2}$
Tanım Kümesi		$\mathbb{R}-\{0\}$	$\left[\frac{1}{2},2\right]$	$(-\infty,-1]$	$\mathbb{R}-\{-2\}$	$\mathbb{R}-\{2\}$
Görüntü Kümesi		$\mathbb{R}-\{0\}$	$\left[\frac{5}{2},4\right]$	$[-3,-2)$	$\mathbb{R}-\{0\}$	$\mathbb{R}-\{0\}$
Sıfırı		Yok	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	Yok	Yok
İşareti	Pozitif	$(0,\infty)$	$\left[\frac{1}{2},2\right]$	Yok	$(-2,\infty)$	$(2,\infty)$
	Negatif	$(-\infty,0)$	Yok	$(-\infty,-1]$	$(-\infty,-2)$	$(-\infty,2)$
Artan-Azalan		Azalan	Azalan	Azalan	Azalan	Azalan
Maksimum değeri x = ... de alır.		Yok	$\frac{1}{2}$	Yok	Yok	Yok
Minimum değeri x = ... de alır.		Yok	2	–1	Yok	Yok
Bire birlik		Bire bir	Bire bir	Bire bir	Bire bir	Bire bir
Örtenlik		Örten değil	Örten	Örten	Örten	Örten değil
Teklik-Çiftlik		Tek	Ne Tek Ne Çift	Ne Tek Ne Çift	Ne Tek Ne Çift	Ne Tek Ne Çift

ÖRNEK

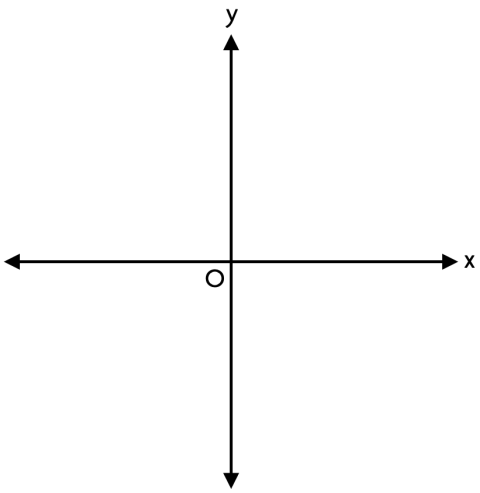
$g: [-6, 2] \to \mathbb{R},\ g(x) = \dfrac{1}{x-3}$

$h: (1, 4] \to \mathbb{R},\ h(x) = \dfrac{1}{x} - 3$ şeklinde tanımlı fonksiyonlar verilmiştir.

Buna göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) $\dfrac{g(0)+h(3)}{h(4)}$ **işleminin sonucunu bulunuz.**

b) g ve h fonksiyonlarının grafiklerini aynı dik koordinat sisteminde çiziniz.



c) g ve h fonksiyonlarının maksimum ve minimum değerlerini bulunuz.

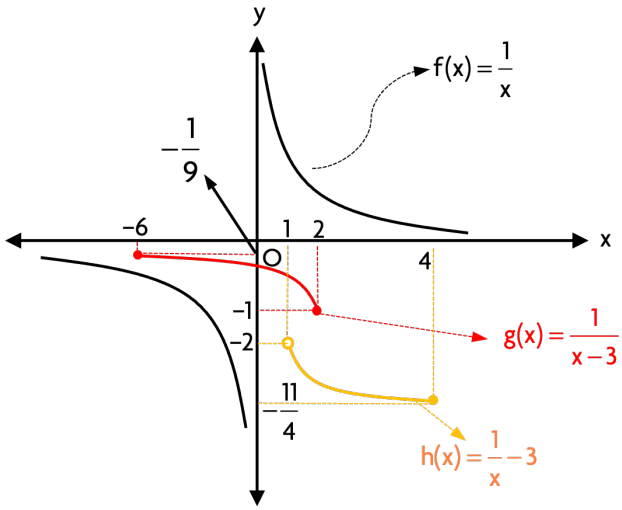
ÇÖZÜM

$g: [-6, 2] \to \mathbb{R},\ g(x) = \dfrac{1}{x-3}$ $h: (1, 4] \to \mathbb{R},\ h(x) = \dfrac{1}{x} - 3$

a) $g(0) = \dfrac{1}{0-3} = -\dfrac{1}{3}$, $h(3) = \dfrac{1}{3} - 3 = -\dfrac{8}{3}$, $h(4) = \dfrac{1}{4} - 3 = -\dfrac{11}{4}$ bulunan değerler istenen ifadede yerine yazılırsa

$\dfrac{g(0)+h(3)}{h(4)} = \dfrac{-\frac{1}{3} - \frac{8}{3}}{-\frac{11}{4}} = \dfrac{-3}{-\frac{11}{4}} = 3 \cdot \dfrac{4}{11} = \dfrac{12}{11}$ bulunur.

b) g ve h fonksiyonlarının grafiklerini aynı dik koordinat sisteminde çizerken öncelikle $f(x)=\frac{1}{x}$ rasyonel referans fonksiyonunu çizilir. Bu rasyonel referans fonksiyonunu çizdikten sonra g(x) fonksiyonu için $f(x)=\frac{1}{x}$ referans fonksiyonunu x ekseninde pozitif yönde (sağa) 3 birim ötelenir. Benzer şekilde $f(x)=\frac{1}{x}$ referans fonksiyonunu 3 birim y ekseni boyunca negatif yönde (aşağı) ötelenir.



c)

g fonksiyonu tanımlı olduğu aralıkta
- Maksimum değer: $-\frac{1}{9}$ — Maksimum değerini: x = –6'da alır.
- Minimum değer: –1 — Minimum değerini: x = 2'de alır.

h fonksiyonu tanımlı olduğu aralıkta
- Maksimum değer: yok
- Minimum değer: $-\frac{11}{4}$ — Minimum değerini: x = 4'te alır.

$\mathbb{R} - \{-r\}$ de $g(x) = a \cdot \frac{1}{x+r} + k$ Şeklinde Tanımlı Rasyonel Fonksiyonlar

Bir fonksiyonun grafiğini çizerken daha önce $g(x) = a \cdot \frac{1}{x}$ fonksiyonunda artan-azalan olma durumunun ve eğriler arasındaki uzaklığın nasıl değiştiğini, g(x) = f(x) + k ve g(x) = f(x + r) fonksiyonlarda ise sırayla y eksenine ve x eksenine göre ötelemenin fonksiyonu nasıl değiştirdiğini gördünüz. Bu üç durumu birleştiren ve daha genel bir rasyonel fonksiyon olan $g(x) = a \cdot \frac{1}{x+r} + k$ biçimindeki fonksiyonlar incelenirse bu fonksiyonlarda a katsayısı; grafiğin artan-azalan olma durumu ile eğriler arasındaki uzaklığını, r değeri grafiğin x ekseni boyunca hareketini, k değeri de grafiğin y ekseni boyunca hareketini belirler.

NOT

a, r, k birer gerçek sayı ve $a \neq 0$ olmak üzere $\mathbb{R} - \{-r\}$ de tanımlı $g(x) = a \cdot \frac{1}{x+r} + k$ biçimindeki rasyonel fonksiyon, aşağıdaki adımlar izlenerek oluşturulur.

1. Başlangıç olarak $f(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonunun grafiği çizilir.

2. f(x) in tanım aralığındaki her x değeri için $\frac{1}{x}$, a sayısı ile çarpılarak $h(x) = a \cdot \frac{1}{x}$ fonksiyonunun grafiği elde edilir.

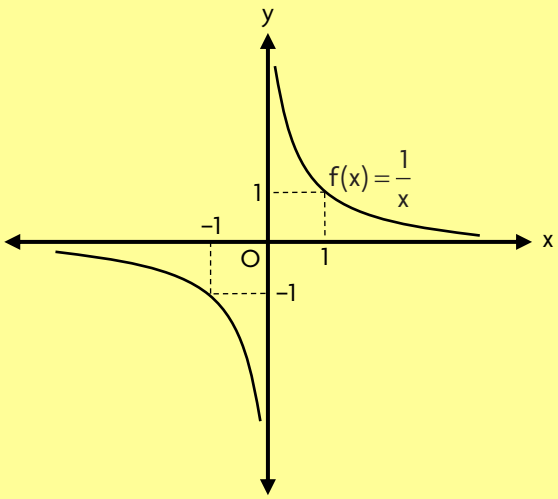
3. Eğer r > 0 ise h(x) fonksiyonunun grafiği, x ekseni boyunca **negatif yönde r birim** ötelenir.
Eğer r < 0 ise h(x) fonksiyonunun grafiği, x ekseni boyunca **pozitif yönde** |r| **birim** ötelenir.

Bu durumda yeni fonksiyon olarak $k(x) = a \cdot \frac{1}{x+r}$ rasyonel fonksiyonu elde edilir.

4. Eğer k > 0 ise k(x) fonksiyonunun grafiği, y ekseni boyunca **pozitif yönde k birim** ötelenir.
Eğer k < 0 ise k(x) fonksiyonunun grafiği, y ekseni boyunca **negatif yönde** |k| **birim** ötelenir.

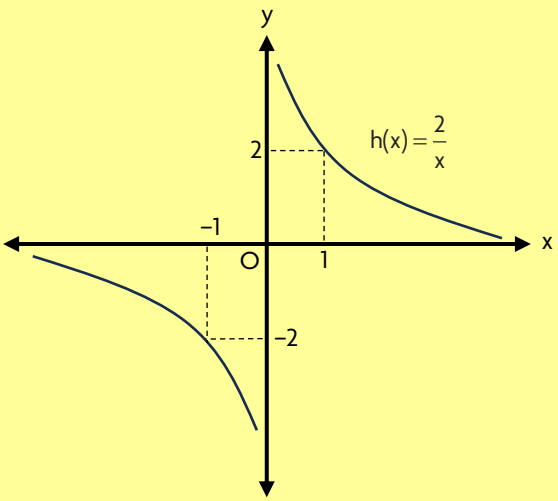
Bu işlemlerin sonunda elde edilen grafik, $g(x) = a \cdot \frac{1}{x+r} + k$ rasyonel fonksiyonunun grafiğidir.

Örneğin g: $\mathbb{R} - \{2\}$ de tanımlı $g(x) = \frac{2}{x-2} + 2$ rasyonel fonksiyonunu $f(x) = \frac{1}{2}$ rasyonel referans fonksiyonun grafik temsiline göre yukarıdaki adımları takip ederek çizerseniz.

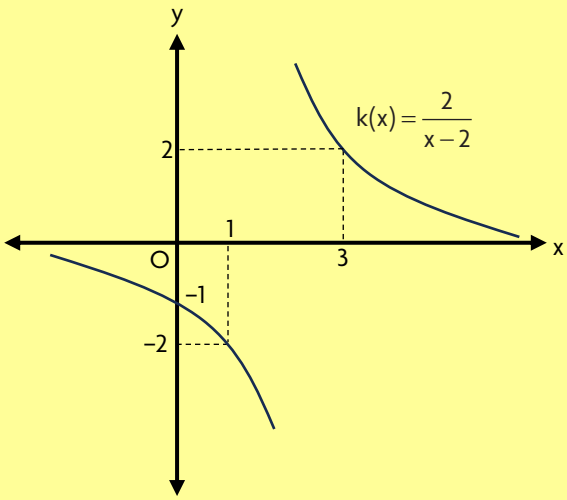


$f(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonunu 2 kat gererek

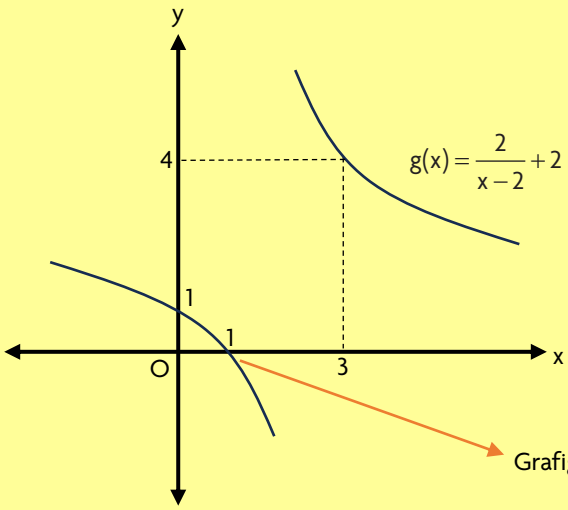
$h(x) = 2 \cdot f(x)$ elde edersiniz.



$h(x) = 2\,f(x)$ rasyonel fonksiyonu x ekseninde pozitif yönde 2 birim ötelenirse $k(x) = 2\,f(x-2)$ başka bir ifade ile $k(x) = \frac{2}{x-2}$ rasyonel fonksiyonunun grafik temsilini elde edersiniz.



$k(x) = 2\,f(x-2)$ rasyonel fonksiyonu, y ekseninde pozitif yönde 2 birim ötelenirse $g(x) = 2\,f(x-2) + 2$ başka bir ifade ile $g(x) = \frac{2}{x-2} + 2$ rasyonel fonksiyonunun grafik temsilini elde edersiniz.



Grafiği x eksenini (1, 0) noktasında kesen $g(x) = \frac{2}{x-2} + 2$ fonksiyonunun sıfırı 1 olur.

ÖRNEK

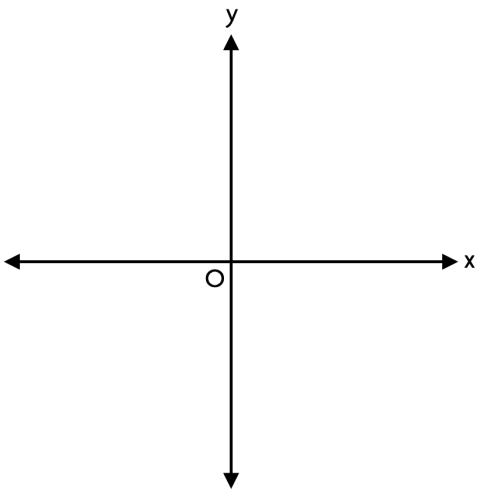
En geniş tanımlı olduğu aralıklardaf(x) = $\frac{1}{x}$, g(x) = $-\frac{3}{x+2}-2$, h(x) = $\frac{2}{x-3}+4$, t(x) = $-\frac{1}{2x-1}+1$ fonksiyonları veriliyor.

a) Aşağıda f, g, h ve t fonksiyonları için verilen tabloyu doldurunuz.

	x = – 2	x = 0	x = 3	x = 5
$f(x)=\frac{1}{x}$				
$g(x)=-\frac{3}{x+2}-2$				
$h(x)=\frac{2}{x-3}+4$				
$t(x)=-\frac{1}{2x-1}+1$				

b) Aşağıdaki tabloyu doldurarak f, g, h ve t fonksiyonlarının grafiklerini aynı dik koordinat sisteminde çiziniz.

Foksiyon	Fonksiyonun Sıfırı	y Eksenini Kestiği Nokta	Rasyonel Referans Fonksiyonuna Göre Yapılan İşlemler ve Ötelemeler	Artan-Azalan Olma Durumu
$f(x)=\frac{1}{x}$				Azalan
$g(x)=-\frac{3}{x+2}-2$				Artan
$h(x)=\frac{2}{x-3}+4$				Azalan
$t(x)=-\frac{1}{2x-1}+1$				Artan



c) Aşağıda verilen tabloyu doldurunuz. (Tüm fonksiyonlar en geniş tanım aralıklardan gerçek sayılara tanımlı olarak varsayılacaktır.)

Fonksiyon / Nitel Özellik		$f(x)=\frac{1}{x}$	$g(x)=-\frac{3}{x+2}-2$	$h(x)=\frac{2}{x-3}+4$	$t(x)=-\frac{1}{2x-1}+1$
Tanım Kümesi					
Görüntü Kümesi					
Sıfırı					
İşareti	Pozitif olduğu aralık				
	Negatif olduğu aralık				
Artan-Azalan					
Maksimum değeri x = ... de alır.					
Minimum değeri x = ... de alır.					
Birebirlik					
Örtenlik					
Teklik-Çiftlik					

ÇÖZÜM

a)

	$x=-2$	$x=0$	$x=3$	$x=5$
$f(x)=\frac{1}{x}$	$\frac{1}{-2}=-\frac{1}{2}$	Yok	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$
$g(x)=-\frac{3}{x+2}-2$	Yok	$-\frac{3}{0+2}-2=-\frac{3}{2}-2=\frac{-3-2\cdot 2}{2}=-\frac{7}{2}$	$-\frac{3}{3+2}-2=-\frac{3}{5}-2=-\frac{3+10}{5}=-\frac{13}{5}$	$-\frac{3}{5+2}-2=-\frac{3}{7}-2=-\frac{3+14}{7}=-\frac{17}{7}$
$h(x)=\frac{2}{x-3}+4$	$\frac{2}{-2-3}+4=-\frac{2}{5}+4=\frac{-2+20}{5}=\frac{18}{5}$	$\frac{2}{0-3}+4=-\frac{2}{3}+4=\frac{-2+12}{3}=\frac{10}{3}$	Yok	$\frac{2}{5-3}+4=\frac{2}{2}+4=1+4=5$
$t(x)=-\frac{1}{2x-1}+1$	$-\frac{1}{2\cdot(-2)-1}+1=\frac{1}{5}+1=\frac{6}{5}$	$-\frac{1}{2\cdot 0-1}+1=1+1=2$	$-\frac{1}{2\cdot 3-1}+1=-\frac{1}{5}+1=\frac{4}{5}$	$-\frac{1}{2\cdot 5-1}+1=-\frac{1}{9}+1=\frac{8}{9}$

b)

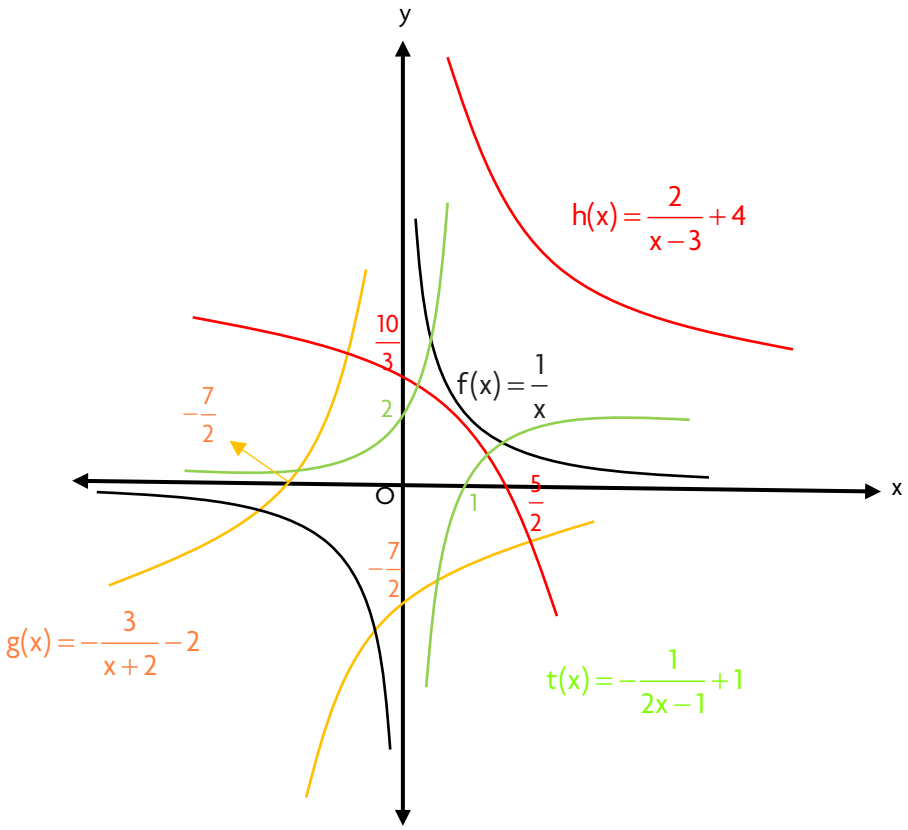
Foksiyon	Fonksiyonun Sıfırı	y Eksenini Kestiği Nokta	Rasyonel Referans Fonksiyonuna Göre Yapılan İşlemler ve Ötelemeler	Artan-Azalan Olma Durumu
$f(x)=\frac{1}{x}$	Yok	Yok	-	Azalan
$g(x)=-\frac{3}{x+2}-2$	$x=-\frac{7}{2}$	$y=-\frac{3}{0+2}-2=-\frac{7}{2}$	Rasyonel referans fonksiyonunu 3 kat germe, x eksenine göre simetri alınıp x ekseni boyunca negatif yönde 2 birim ve y ekseni boyunca negatif yönde 2 birim ötelenme	Artan
$h(x)=\frac{2}{x-3}+4$	$x=\frac{5}{2}$	$y=\frac{2}{0-3}+4=\frac{10}{3}$	Rasyonel referans fonksiyonunu 2 kat germe, x ekseni boyunca pozitif yönde 3 birim ve y ekseni boyunca pozitif yönde 4 birim ötelenme	Azalan
$t(x)=-\frac{1}{2x-1}+1$	x = 1	$y=-\frac{1}{2\cdot 0-1}+1=2$	Rasyonel referans fonksiyonunu 2 kat sıkıştırma ve x eksenine göre simetri alınıp x ekseni boyunca pozitif yönde $\frac{1}{2}$ birim ve y ekseni boyunca pozitif yönde 1 birim ötelenme	Artan

Açıklama: $y=-\frac{1}{2x-1}+1=\frac{-\frac{1}{2}}{x-\frac{1}{2}}+1$

$$y=a\cdot\frac{1}{x+r}+k\rightarrow a=-\frac{1}{2},r=-\frac{1}{2},k=1$$

olduğundan rasyonel referans fonksiyonunu $\frac{1}{2}$ kat sıkıştırma ve x eksenine göre simetri alınıp x ekseni boyunca pozitif yönde $\frac{1}{2}$ birim ve y ekseni boyunca pozitif yönde 1 birim ötelenme işlemi yapılmıştır.

f, g, h ve t fonksiyonlarının grafiklerinin aynı dik koordinat sisteminde gösterimi aşağıdaki gibidir.



c)

Fonksiyon / Nitel Özellik		$f(x)=\frac{1}{x}$	$g(x)=-\frac{3}{x+2}-2$	$h(x)=\frac{2}{x-3}+4$	$t(x)=-\frac{1}{2x-1}+1$
Tanım Kümesi		$\mathbb{R}-\{0\}$	$\mathbb{R}-\{-2\}$	$\mathbb{R}-\{3\}$	$\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\}$
Görüntü Kümesi		$\mathbb{R}-\{0\}$	$\mathbb{R}-\{-2\}$	$\mathbb{R}-\{4\}$	$\mathbb{R}-\{1\}$
Sıfırı		Yok	$x=-\frac{7}{2}$	$x=\frac{5}{2}$	$x=1$
İşareti	Pozitif olduğu aralık	$(0,\infty)$	$\left(-\frac{7}{2},-2\right)$	$\mathbb{R}-\left[\frac{5}{2},3\right]$	$\mathbb{R}-\left[\frac{1}{2},1\right]$
	Negatif olduğu aralık	$(-\infty,0)$	$\mathbb{R}-\left[-\frac{7}{2},-2\right]$	$\left(\frac{5}{2},3\right)$	$\left(\frac{1}{2},1\right)$
Artan-Azalan		Azalan	Artan	Azalan	Artan
Maksimum değeri x = ... de alır.		Yok	Yok	Yok	Yok
Minimum değeri x = ... de alır.		Yok	Yok	Yok	Yok
Bire birlik		Bire bir	Bire bir	Bire bir	Bire bir
Örtenlik		Örten Değil	Örten Değil	Örten Değil	Örten Değil
Teklik-Çiftlik		Tek	Ne Tek Ne Çift	Ne Tek Ne Çift	Ne Tek Ne Çift

SIRA SİZDE 2.

$f : \mathbb{R} - \{-1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2}{x+1} + 4$ rasyonel fonksiyonu verilmiştir.

Buna göre aşağıdaki ifadelerin başına, doğru ise (D), yanlış ise (Y) yazınız.

a) (....) f fonksiyonun sıfırı $x = -\frac{3}{2}$'dir.

b) (....) f fonksiyonu artandır.

c) (....) f, y eksenini (0, 6) noktasında keser.

d) (....) f, x eksenini $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$ noktasında keser.

e) (....) f, $x \in \left(-\frac{3}{2}, \infty\right)$ için artan fonksiyondur.

f) (....) f, $x < -\frac{3}{2}$ için f(x) > 0'dır.

g) (....) f, fonksiyonu örtendir.

h) (....) f, bire bir fonksiyondur.

i) (....) f fonksiyonu, referans fonksiyonun 2 katı alınıp x ekseni boyunca pozitif yönde 1 birim, y ekseni boyunca pozitif yönde 4 birim ötelenmiş hâlidir.

ÖRNEK

$\mathbb{R} - \{-r\}$ de tanımlı bir f rasyonel fonksiyonu için $a > 0$ olduğu her durumda $x \in (-\infty, 0)$ veya $x \in (0, \infty)$ aralığında f fonksiyonu azalandır.

Bu ifadeyi matematiğin sembolik diliyle ifade ediniz ve doğruluğunu ispatlayınız.

ÇÖZÜM

Önerme: $\mathbb{R} - \{-r\} \to \mathbb{R}$; $a, r, k \in \mathbb{R}$; $a \neq 0$ olmak üzere $f(x) = a \cdot \frac{1}{x+r} + k$ rasyonel fonksiyonu için

$\forall a > 0$ **ve** $x \in (-\infty, 0)$ veya $(0, \infty)$ **için f fonksiyonu azalandır.**

$\forall x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$ veya $(0, \infty)$ $x_1 > x_2$ iken $f(x_1) < f(x_2)$

İspat:

$x_1, x_2 \in (0, \infty)$, $a > 0$ ve $x_1 > x_2$ olsun. $\longrightarrow$ $x_1 + r > x_2 + r$

Eşitsizliğin her iki tarafına bir gerçek sayı eklendiğinde eşitsizlik yön değiştirmez.

$\longrightarrow$ $\frac{1}{x_1 + r} < \frac{1}{x_2 + r}$

İki farklı pozitif sayının çarpmaya göre tersi alındığında eşitsizlik yön değiştirir.

$\longrightarrow$ $\frac{a}{x_1 + r} < \frac{a}{x_2 + r}$

Eşitsizliğin her iki tarafı pozitif bir gerçek sayı ile çarpıldığında eşitsizlik yön değiştirmez.

$\longrightarrow$ $\underbrace{\frac{a}{x_1 + r} + k}_{f(x_1)} < \underbrace{\frac{a}{x_2 + r} + k}_{f(x_2)} \longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Eşitsizliğin her iki tarafına pozitif bir gerçek sayı eklendiğinde eşitsizlik yön değiştirmez.

Not: Bu ispat $x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$ için de geçerli olur.

SIRA SİZDE 3.

$\mathbb{R} - \{-r\}$ de tanımlı bir f rasyonel fonksiyonu için $a < 0$ olduğu her durumda $x \in (-\infty, 0)$ veya $x \in (0, \infty)$ aralığında f fonksiyonu artandır.

Bu ifadeyi matematiğin sembolik diliyle ifade ediniz ve ifadenin doğruluğunu ispatlayınız.

ÖRNEK

f: $\mathbb{R} - \{-r\} \to \mathbb{R}$; a, r, k $\in \mathbb{R}$, a $\neq 0$ **olmak üzere** $f(x) = a \cdot \frac{1}{x+r} + k$ **rasyonel fonksiyonunun bire bir olduğunu ispatlayınız.**

ÇÖZÜM

Bu önerme, –r den farklı gerçek sayılardan iki farklı sayı seçildiğinde bu sayıların rasyonel fonksiyon altındaki görüntülerinin de birbirinden farklı olduğunu ifade eder.

Önerme: f: $\mathbb{R}: -\{-r\} \to \mathbb{R}$; a, r, k $\in \mathbb{R}$; a $\neq 0$ olmak üzere $f(x) = a \cdot \frac{1}{x+r} + k$ rasyonel fonksiyonu için f bire bir fonksiyondur.

$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}: -\{-r\}; x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

İspat

$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}: -\{-r\}$; $a \neq 0$ ve $x_1 \neq x_2$ olsun $\longrightarrow \frac{1}{x_1} \neq \frac{1}{x_2} \longrightarrow \frac{1}{x_1+r} \neq \frac{1}{x_2+r} \longrightarrow \frac{a}{x_1+r} \neq \frac{a}{x_2+r} \longrightarrow \underbrace{\frac{a}{x_1+r}}_{f(x_1)} + k \neq \underbrace{\frac{a}{x_2+r}}_{f(x_2)} + k$

$\underbrace{\frac{a}{x_1+r} + k}_{f(x_1) \neq f(x_2)} \neq \underbrace{\frac{a}{x_2+r} + k}_{f(x_2)} \longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

ÖRNEK

f $\mathbb{R}: -\{-r\} \to \mathbb{R}$; a, r, k $\in \mathbb{R}$; a $\neq 0$ **olmak üzere** $f(x) = a \cdot \frac{1}{x+r} + k$ **rasyonel fonksiyonunun tek ve örten olmadığını ispatlayınız.**

ÇÖZÜM

f: $\mathbb{R} - \{-r\} \to \mathbb{R}$; a, r, k $\in \mathbb{R}$; a $\neq 0$ $f(x) = a \cdot \frac{1}{x+r} + k$ şeklinde tanımlı f rasyonel fonksiyonunda x + r $\neq 0$ olduğundan $a \cdot \frac{1}{x+r} + k \neq k$ olur. Dolayısıyla görüntü kümesi GK: $\mathbb{R} - \{k\}$ olur.

Değer kümesi görüntü kümesine eşit olmadığından ($\mathbb{R} - \{k\} \neq \mathbb{R} \to \mathbb{R} - \{k\} \subset \mathbb{R}$) f fonksiyonu örten değildir.

Ayrıca $a \cdot \frac{1}{-x+r} + k \neq -\left(a \cdot \frac{1}{x+r} + k\right)$ dir. Dolayısıyla f(–x) ≠ –f(x) olduğundan f fonksiyonu tek değildir.

f: $\mathbb{R} - \{-r\} \to \mathbb{R}$; a, r, k $\in \mathbb{R}$; a $\neq 0$ olmak üzere $f(x) = a \cdot \frac{1}{x+r} + k$ rasyonel fonksiyonunun nitel özellikleri için aşağıdaki bilgi kutusunu okuyunuz.

$f: \mathbb{R} - \{-r\} \to \mathbb{R}$; a, r, k $\in \mathbb{R}$; a $\neq 0$ olmak üzere $f(x) = a \cdot \frac{1}{x+r} + k$ rasyonel fonksiyonu için

$\forall$ a > 0 için f fonksiyonu **azalandır.**

$\forall$ a < 0 için f fonksiyonu **artandır.**

f rasyonel fonksiyonunun artan-azalan olma durumunu etkileyen katsayısı **a katsayısıdır.**

f **bire bir** fonksiyondur.

–r den farklı gerçek sayılarda tanımlı f fonksiyonunun **maksimum** ve **minimum** noktası **yoktur**.

f rasyonel fonksiyonunun sıfırı $f(x) = 0 \Rightarrow a \cdot \frac{1}{x+r} + k = 0 \Rightarrow x = -\frac{a}{k} - r$ dir.

f rasyonel fonksiyonu örten değildir.

r veya k sayılarından en az biri sıfırdan farklıysa f rasyonel fonksiyonu tek fonksiyon değildir.

SIRA SİZDE 4.

Aşağıda verilen en geniş tanım aralığından gerçek sayılara tanımlanmış f, g, h ve k fonksiyonlarıyla ilgili nitel özellikleri tabloda boş bırakılan yerlere yazınız.

Fonksiyonun											
Cebirsel Temsili	Tanım Kümesi	Görüntü Kümesi	İşareti		Sıfırı	Artan-Azalan Olma durumu	Maksimum Değeri	Minimum Değeri	Bire birlik Durumu	Örtenlik Durumu	Teklik-Çiftlik Durumu
			Pozitif Değer Aldığı Aralık	Negatif Değer Aldığı Aralık							
$f(x)=\frac{1}{x}$											
$g(x)=\frac{2}{x+1}-2$											
$h(x)=-\frac{1}{4x+2}+1$											
$k(x)=\frac{3}{2x-1}+2$											

GERİ BİLDİRİM

Bu geri bildirim sayesinde kendi cevabınızı kontrol edebilir, hatalarınızı düzelterek öğrenmenizi pekiştirebilirsiniz.

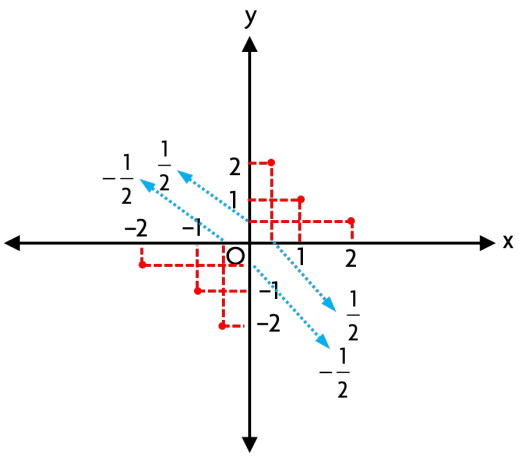
ETKİNLİK 1.

ÇÖZÜM

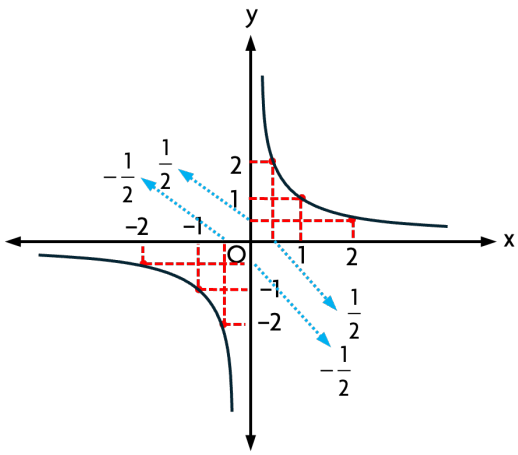
a)

x	f(x)
-2	$-\frac{1}{2}$
-1	-1
$-\frac{1}{2}$	-2
1	1
2	$\frac{1}{2}$

b)



c)

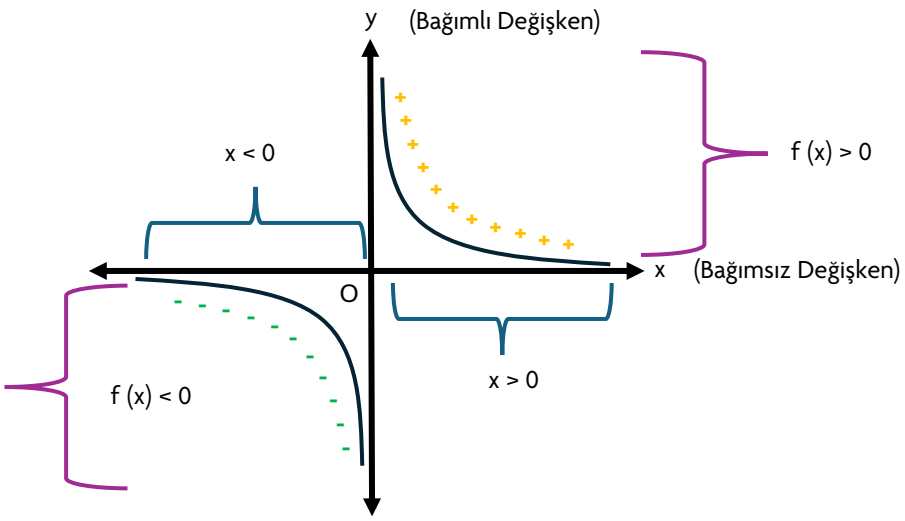


Elde edilen şekil bir eğridir.

ç) Rasyonel referans fonksiyonu azalandır.

d) Bağımsız değişken $x \neq 0$ ve bağımlı değişken $x \neq 0$'dır. Çünkü rasyonel referans fonksiyonunda $x = 0$ olursa fonksiyon tanımsız olur. Dolayısıyla fonksiyonun grafiği x eksenini ve y eksenini kesmez.

e)



Bağımsız değişken $x > 0$ değerleri için bağımlı değişken $y > 0$ olur.

Bağımsız değişken $0 < x$ değerleri için bağımlı değişken $y < 0$ olur.

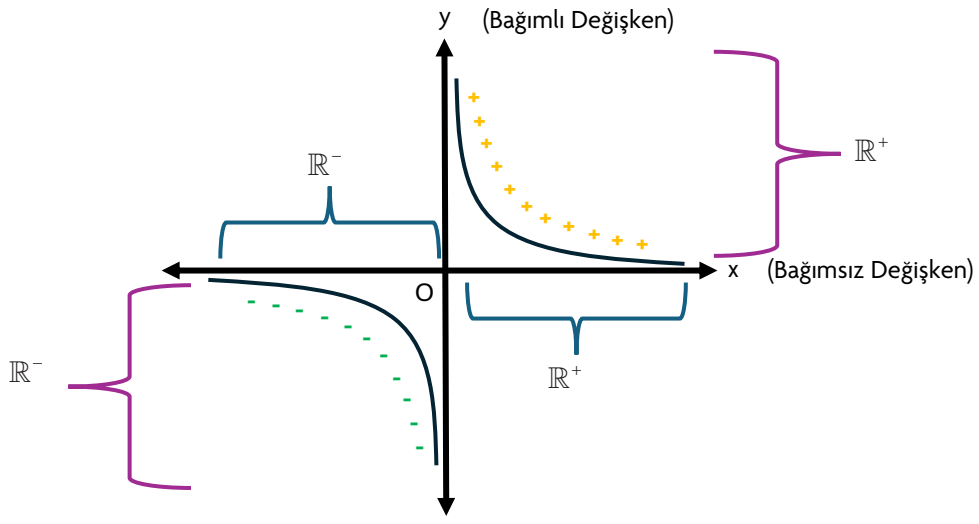
f) Bağımsız değişkenin $(-\infty, 0)$ ve $(0, \infty)$ aralıklarında ayrı ayrı aldığı değerler arttıkça, fonksiyonun (bağımlı değişkenin) aldığı değerlerin de azaldığı görülmektedir. Örneğin, $x = -2$ için $f(-2) = -\frac{1}{2}$; $x = -1$ için $f(-1) = -1$; $x = 1$ için $f(1) = 1$; $x = 2$ için $f(2) = \frac{1}{2}$ olur. Bu durum, bağımsız değişken (x) arttığında bağımlı değişkenin (f(x)) değerlerinin de azaldığını göstermektedir. Bağımsız değişken ile bağımlı değişken arasındaki ilişki ters orantılı olduğundan, bu durum fonksiyonun a katsayısıyla ilişkilidir. a katsayısının pozitif olması, $f(x) = \frac{1}{x}$ cebirsel ifadesinin azalan bir fonksiyon olduğunu göstermektedir.

g) Bağımsız değişkenin aldığı herhangi iki farklı değer için f fonksiyonunun (bağımlı değişkenin) aldığı değerler birbirinden farklıdır. Aşağıdaki tabloyu detaylı bir şekilde inceleyiniz.

x	f(x)
-2	$-\frac{1}{2}$
$-\sqrt{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$
-1	-1
1	1
$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{3}$
2	$\frac{1}{2}$
100	$\frac{1}{100}$

Tabloda da görüldüğü üzere farklı her bağımsız değişkene karşılık f(x) fonksiyonun (bağımlı değişken) farklı bir değeri vardır. Bu özellik fonksiyonun birebirliği ile ilgilidir.

h)



Bağımsız Değişken Kümesi: $\mathbb{R} - \{0\}$

Bağımlı Değişken Kümesi: $\mathbb{R} - \{0\}$

SIRA SİZDE 1.

ÇÖZÜM

Fonksiyonun Cebirsel Temsili	Tanım Kümesi	Görüntü Kümesi	İşaretinin Pozitif Olduğu Aralık	İşaretinin Negatif Olduğu Aralık	Sıfırı Sıfırı	Artan-Azalan Olma Durumu	Maksimum Değeri	Minimum Değeri	Bire birlik Durumu	Teklik-Çiftlik Durumu	Örtenlik Durumu
$f(x)=\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}-\{0\}$	$\mathbb{R}-\{0\}$	$(0,\infty)$	$(-\infty,0)$	Yok	Azalan	Yok	Yok	Bire bir	Tek	Örten Değil

SIRA SİZDE 2.

ÇÖZÜM

$f:\mathbb{R}-\{-1\}\rightarrow\mathbb{R},\ f(x)=\frac{2}{x+1}+4$

a) (D) f fonksiyonun sıfırı $x=-\frac{3}{2}$'dir.

b) (Y) f fonksiyonu artandır.

c) (D) f, y eksenini (0, 6) noktasında keser.

d) (D) f, x eksenini $\left(-\frac{3}{2},0\right)$ noktasında keser.

e) (Y) f, $x\in\left(-\frac{3}{2},\infty\right)$ için artan fonksiyondur.

f) (D) f, $x<-\frac{3}{2}$ için f(x) > 0'dır.

g) (Y) f, fonksiyonu örtendir.

h) (D) f, bire bir fonksiyondur.

i) (Y) f fonksiyonu; referans fonksiyonun 2 katı alınıp x ekseni boyunca pozitif yönde 1 birim, y ekseni boyunca pozitif yönde 4 birim ötelenmiş hâlidir.

SIRA SİZDE 3.

ÇÖZÜM

Önerme: f $\mathbb{R}: -\{-r\} \to \mathbb{R}$; a, r, k $\in \mathbb{R}$; a $\neq 0$ olmak üzere $f(x)=a\cdot\frac{1}{x+r}+k$ rasyonel fonksiyonu için $\forall a < 0$ için f fonksiyonu artandır.

$\forall a < 0$ ve $x \in (-\infty, 0)$ veya $(0, \infty)$ için f fonksiyonu **artandır.**

$\forall x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$ veya $(0, \infty)$ $x_1 > x_2$ iken $f(x_1) > f(x_2)$

İspat:

$x_1, x_2 \in (0, \infty)$; $a < 0$ ve $x_1 > x_2$ olsun. $\longrightarrow$ $x_1 + r > x_2 + r$

Eşitsizliğin her iki tarafına bir gerçek sayı eklendiğinde eşitsizlik yön değiştirmez.

$\longrightarrow$ $\frac{1}{x_1+r} < \frac{1}{x_2+r}$

İki farklı pozitif sayının çarpmaya göre tersi alındığında eşitsizlik yön değiştirir.

$\longrightarrow$ $\frac{a}{x_1+r} > \frac{a}{x_2+r}$

Eşitsizliğin her iki tarafı negatif bir gerçek sayı ile çarpıldığında eşitsizlik yön değiştirir.

$\longrightarrow$ $\overbrace{\frac{a}{x_1+r}+k}^{f(x_1)} > \overbrace{\frac{a}{x_2+r}+k}^{f(x_2)}$ $\longrightarrow$ $f(x_1) > f(x_2)$

Eşitsizliğin her iki tarafına pozitif bir gerçek sayı eklendiğinde eşitsizlik yön değiştirmez.

Not: Bu ispat $x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$ için de geçerli olur.

SIRA SİZDE 4.

ÇÖZÜM

Fonksiyonun											
Cebirsel Temsili	Tanım Kümesi	Görüntü Kümesi	İşareti		Sıfırı	Artan-Azalan Olma Durumu	Maksimum Değeri	Minimum Değeri	Bire birlik Durumu	Örtenlik Durumu	Teklik-Çiftlik Durumu
			Pozitif Değer Aldığı Aralık	Negatif Değer Aldığı Aralık							
$f(x)=\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}-\{0\}$	$\mathbb{R}-\{0\}$	$(0,\infty)$	$(-\infty,0)$	Yok	Azalan	Yok	Yok	Bire bir	Örten Değil	Tek
$g(x)=\frac{2}{x+1}-2$	$\mathbb{R}-\{-1\}$	$\mathbb{R}-\{-2\}$	$(-1,0)$	$\mathbb{R}-[-1,0]$	$x=0$	Azalan	Yok	Yok	Bire bir	Örten Değil	Ne Tek Ne Çift
$h(x)=-\frac{1}{4x+2}+1$	$\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{2}\right\}$	$\mathbb{R}-\{1\}$	$\mathbb{R}-\left[-\frac{1}{4},-\frac{1}{2}\right]$	$\left(-\frac{1}{4},-\frac{1}{2}\right)$	$x=-\frac{1}{4}$	Artan	Yok	Yok	Bire bir	Örten Değil	Ne Tek Ne Çift
$k(x)=\frac{3}{2x-1}+2$	$\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\}$	$\mathbb{R}-\{2\}$	$\mathbb{R}-\left[-\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right]$	$\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$	$x=-\frac{1}{4}$	Azalan	Yok	Yok	Bire bir	Örten Değil	Ne Tek Ne Çift

DEĞERLENDİRİYORUM

Amaç: Bu bölümde öğrendiklerinizi gözden geçirmenizi, kendi öğrenme sürecinizi değerlendirmenizi ve eksikleriniz fark etmenizi amaçlıyoruz.

Soruları dikkatle yanıtlayınız. Cevaplarınızı geri bildirimlerle karşılaştırarak eksik gördüğünüz noktaları tekrar ediniz.

SORULAR

1. Bir mühendislik firması, yeni bir elektrikli aracın batarya performansını test etmektedir. Aracın tam dolu batarya ile gidebileceği toplam yol (menzil), aracın ortalama hızı ile ilişkilidir. Aracın hızı arttıkça hava direnci nedeniyle enerji tüketimi artmakta, bu da gidilebilen toplam mesafeyi (menzili) düşürmektedir.

Tam dolu batarya kapasitesi sabitken aracın gidebileceği toplam yol f(v) (km) ile aracın hızı v (km/sa.) arasındaki ilişki şu rasyonel fonksiyon ile modellenmiştir:

$$f(v) = \frac{48000}{v + 40},\ 10 \le v \le 120$$

Buna göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) Aracın güvenli sürüş hız sınırları $v \in [10, 120]$ **belirlenmiştir. Bu hız sınırları dâhilinde fonksiyonun tanım kümesini ve bu hızlara karşılık gelen menzil değerlerini içeren görüntü kümesini bulunuz.**

b) Araç otoyolda sabit olarak 80 km/sa. hızla giderse tam dolu batarya ile toplam kaç kilometre yol alabileceğini bulunuz.

c) Bir sürücü, tam dolu batarya ile durmadan 600 km yol gitmeyi hedeflemektedir. Sürücünün bu menzile ulaşabilmesi için ortalama hızını saatte kaç kilometreye sabitlemesi gerektiğini bulunuz.

ç) Fonksiyondaki 48 000 sabit terimi ve paydadaki 40 ifadesi fiziksel olarak neyi temsil ediyor olabilir? Yorumlayınız.

d) Elde ettiğiniz f(v) fonksiyonunun grafiğini dik koordinat sisteminde $v \in [10, 120]$ **aralığı için çiziniz.**

2. En geniş tanım aralığından gerçek sayılara tanımlanan azalan bir y = f(x) fonksiyonunda,

- f(4) = 12
- f(3n – 6) = 8

olduğuna göre n'nin alabileceği en küçük tam sayı değerini bulunuz.

3. $f:\mathbb{R}-\{-2\}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{8}{x+2}+4$ şeklinde tanımlı f fonksiyonu verilmiştir.

Buna göre,

I. g(x) = f(x) + 4 fonksiyonunun sıfırı –4'tür.

II. h(x) = f(x – 4) + 2 fonksiyonu f(x) fonksiyonun x ekseni boyunca negatif yönde 4 br, y ekseni boyunca pozitif yönde 4 br ötelenmiş hâlidir.

III. k(x) = – f(x – 3) + 4 fonksiyonu artandır.

ifadelerinden hangileri doğrudur? Açıklayınız.

4. Laboratuvar ortamında ısıtılan saf bir sıvının sıcaklığı, ısı kaynağı çekildikten sonra oda sıcaklığına doğru düşmeye başlar. Bu sıvının t. dakikadaki sıcaklığının S(t) (°C) rasyonel fonksiyonu aşağıdaki gibi modellenmiştir.

$$S(t)=\frac{600}{t+10}+20$$



Buna göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a. Sıvının ısı kaynağı çekildiği andaki (t = 0) başlangıç sıcaklığı kaç °C olduğunu bulunuz.

b. Fonksiyonun $[0,\infty)$ **aralığında artan mı yoksa azalan mı olduğunu belirleyiniz. Bu durumun fiziksel anlamını (sıvının soğuma süreciyle ilişkisini) açıklayınız.**

c. Fonksiyonun tanım kümesini ve görüntü kümesini belirleyiniz.

ç. Isı kaynağı çekildikten 20 dakika sonra sıvının sıcaklığı kaç °C olduğunu bulunuz.

d. Sıvının sıcaklığının 30°C ye düşmesi için kaç dakika geçmesi gerektiğini bulunuz.

GERİ BİLDİRİM

Bu geri bildirim sayesinde kendi cevabınızı kontrol edebilir, hatalarınızı düzelterek öğrenmenizi pekiştirebilirsiniz.

ÇÖZÜM 1.

a) Tanım Kümesi: [10, 120] olur.

$v = 10$ için $f(10) = \frac{48\,000}{10 + 40} = 960$

$v = 120$ için $f(120) = \frac{48\,000}{120 + 40} = 300$

→ Görüntü Kümesi: [300, 960] olur.

b) $v = 80$ için $f(80) = \frac{48\,000}{80 + 40} = 400$

Araç bu hızla giderse tam dolu batarya ile **400 km** yol alabilir.

c) $f(v) = 600 \Rightarrow \frac{48000}{v + 40} = 600$

$48\,000 = 600 \cdot (v + 40)$

$48\,000 = 600 \cdot v + 24000)$

$48\,000 - 2400 = 600 \cdot v$

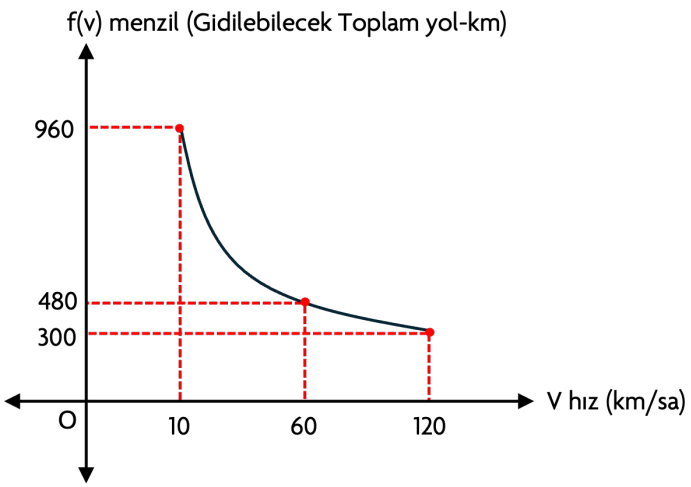
$2400 = 600 \cdot v$

$v = 40$ km/sa. olarak bulunur.

ç) Paydaki 48000 değeri, bataryanın toplam enerji kapasitesini temsil eden bir katsayıdır. Paydadaki +40 ise araç dururken bile çalışan sistemlerin (klima, ekranlar vb.) veya temel sürtünme direncinin menzil üzerindeki etkisini modelleyen bir kayma (offset) değeridir.

Hız (v) teorik olarak sonsuza yaklaşsaydı payda çok büyüyeceği için f(v) değeri sıfıra yaklaşırdı. Bu da aşırı yüksek hızlarda enerjinin anında tükeneceğini ve menzilin yok olacağını gösterir.

d)



ÇÖZÜM 2.

f fonksiyonu azalandır, azalan fonksiyondur bu yüzden $4 < 3n - 6$ olur.

$$4 < 3n - 6$$
$$4 + 6 < 3n$$
$$10 < 3n$$
$$\frac{10}{3} < n$$

Bu durumda n nin alabileceği en küçük tam sayı değeri 4 olur.

ÇÖZÜM 3.

$\mathbb{R} - \{-2\}$ de tanımlı f fonksiyonu

$$f(x) = \frac{8}{x+2} + 4$$

biçiminde verilmiştir.

Buna göre verilen her ifade sırası ile incelenmelidir.

I. g(x) = f(x) + 4 fonksiyonunun sıfırı –4'tür. Fonksiyonun sıfırı g(x) = 0 olmalıdır. $\frac{8}{x+2} + 4 + 4 = 0$ ise $\frac{8}{x+2} + 8 = 0$ olur. Buradan $\frac{8}{x+2} = -8$ olur. Bu durumda x + 2 = –1 ve x = –3 olur. Dolayısıyla I. ifade yanlıştır.

II. h(x) = f(x – 4) + 2 fonksiyonu; f(x) fonksiyonunun x ekseni boyunca negatif yönde 4 br, y ekseni boyunca pozitif yönde 4 br ötelenmiş hâlidir. h(x) = f(x – 4) + 2 fonksiyonu; f(x) fonksiyonun x ekseni boyunca pozitif yönde 4 birim, y ekseni boyunca pozitif yönde 4 birim ötelenmiş hâlidir. Yani II. ifade yanlıştır.

III. k(x) = –f(x – 3) + 4 fonksiyonu artandır. $k(x) = -\frac{8}{x-3+2} + 4 = -\frac{8}{x-1} + 4$'tür. $f(x) = a \cdot \frac{1}{x+r} + k$ fonksiyonunda a < 0 ise f artandır, a > 0 ise f azalandır. Dolayıyla k(x) fonksiyonunda a = –8 < 0 olduğundan k(x) fonksiyonu artandır. Dolayısıyla III. ifade doğrudur.

Verilen ifadelerden yalnız III doğrudur.

ÇÖZÜM 4.

a) $S(0)=\frac{600}{0+10}+20=\frac{600}{10}+20=60+20=80\ ^\circ C$ olur.

b) $S(t)=\frac{600}{t+10}+20$ $\rightarrow$ $t_1, t_2 \in [0,\infty)$ ve $t_1 > t_2$ olsun.

$\rightarrow t_1 + 10 > t_2 + 10$ Eşitsizliğin her iki tarafına bir gerçek sayı eklendiğinde eşitsizlik yön değiştirmez.

$\rightarrow \frac{1}{t_1+10} < \frac{1}{t_2+10}$ Aynı işaretli sayının çarpmaya göre tersi alındığında eşitsizlik yön değiştirir.

$\rightarrow \frac{600}{t_1+10} < \frac{600}{t_2+10}$ Eşitsizliğin her iki tarafı pozitif bir gerçek sayı ile çarpıldığında eşitsizlik yön değiştirmez.

$\rightarrow \underbrace{\frac{600}{t_1+10}+20}_{S(t_1)} < \underbrace{\frac{600}{t_2+10}+20}_{S(t_2)}$ Eşitsizliğin her iki tarafına bir gerçek sayı eklendiğinde eşitsizlik yön değiştirmez.

$S(t_1) < S(t_2)$ olduğundan fonksiyon azalan olur.

Matematiksel Neden: Pay kısmındaki 600 sabittir. Zaman (t) arttıkça payda (t + 10) büyür. Payı sabit, paydası büyüyen bir kesrin değeri küçülür. Dolayısıyla fonksiyon azalan olur.

Fiziksel Neden: Isı kaynağı çekilen bir sıvı, çevresine ısı vererek zamanla soğur. Bu yüzden sıcaklık grafiği aşağı doğru bir eğri çizer.

c) Tanım Kümesi TK: $[0, \infty)$

Görüntü Kümesi GK: [20, 80]

t = 0 için $S(0)=\frac{600}{0+10}+20=80$ olur.

t, sonsuza yaklaştıkça $\frac{600}{t+10}+20$ değeri 20'ye yaklaşır.

Belirli bir süreden sonra sıvının sıcaklığı sabit değere (oda sıcaklığına) eşit olur yani 20 °C ye eşit olur.

ç) t = 20 değeri fonksiyonda yerine yazıldığında

$S(20)=\frac{600}{20+10}+20=\frac{600}{30}+20=20+20=40\ ^\circ C$ olur.

d) Sıcaklığın 30 °C olması için

S(t) = 30 denklemi çözülürse

$\frac{600}{t+10}+20=30$

$\Rightarrow \frac{600}{t+10}=10$

$\Rightarrow 600=10\cdot t+100$

$\Rightarrow 500=10\cdot t$

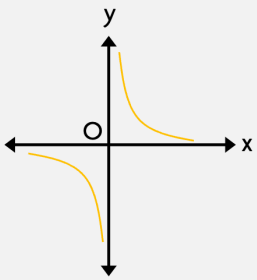
$\Rightarrow t=50$ dk bulunur.

ÖĞRENDİKLERİM

Amaç: Bu bölümde öğrendiklerinizi özetlemenizi, günlük hayatta ve farklı derslerde kullanabileceğiniz bilgileri belirlemenizi amaçlıyoruz.

Anahtar kavramları ve önemli bilgileri kendi cümlelerinizle yazın. Gerekirse şema, tablo ya da kısa notlar kullanarak özetini hazırlayınız.

$f(x)=\frac{1}{x}$ Şeklinde Rasyonel Referans Fonksiyon

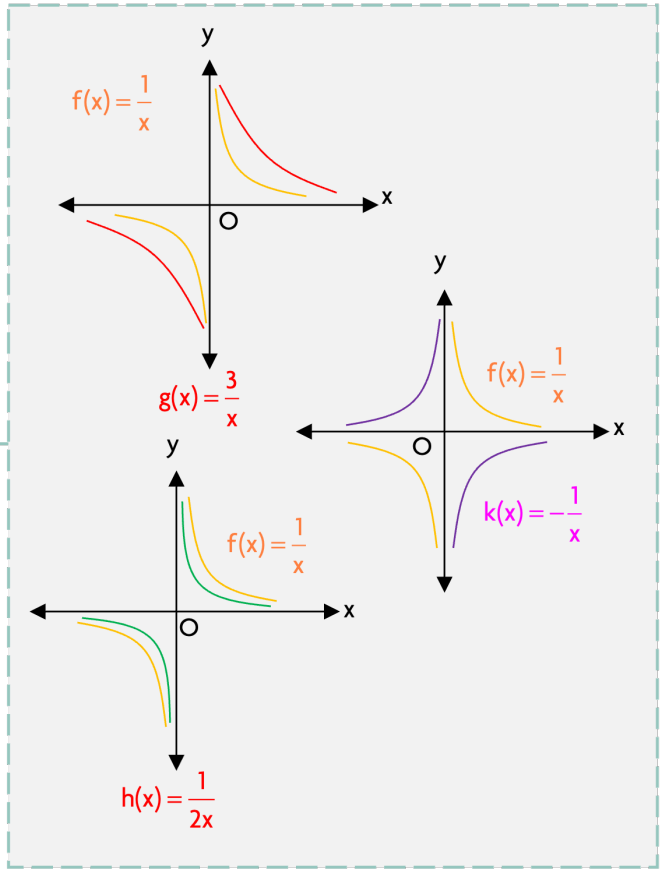


$(0, \infty)$ nda fonksiyon işareti pozitif $f(x) > 0$,

$(-\infty, 0)$ nda fonksiyon işareti negatif $f(x) < 0$'dır.

$\mathbb{R}-\{0\}$'da $g(x)=\frac{a}{x}$ Şeklinde Tanımlı Rasyonel Fonksiyonlar

$g(x)= a \cdot f(x)$ fonksiyonun grafiği, $y = f(x)$ fonksiyonun değerlerinin a katı alınması ile fonksiyona ait eğri parçalarının birbirinden uzaklaşmış veya yaklaşmış hâlidir.



$a > 0$ ise ayrı aralıklarda fonksiyon azalan,
$a < 0$ ise ayrı aralıklarda fonksiyon artandır.

$\mathbb{R} - \{-r\}$ de $h(x) = \frac{a}{x+r} + k$ **Şeklinde Tanımlı Rasyonel Fonksiyonları**

1. Başlangıç olarak fonksiyonunun grafiği çizilir.

2. f(x) in tanım aralığındaki her x değeri, a sayısı ile çarpılarak $g(x) = \frac{a}{x}$ fonksiyonuna ait grafik elde edilir.

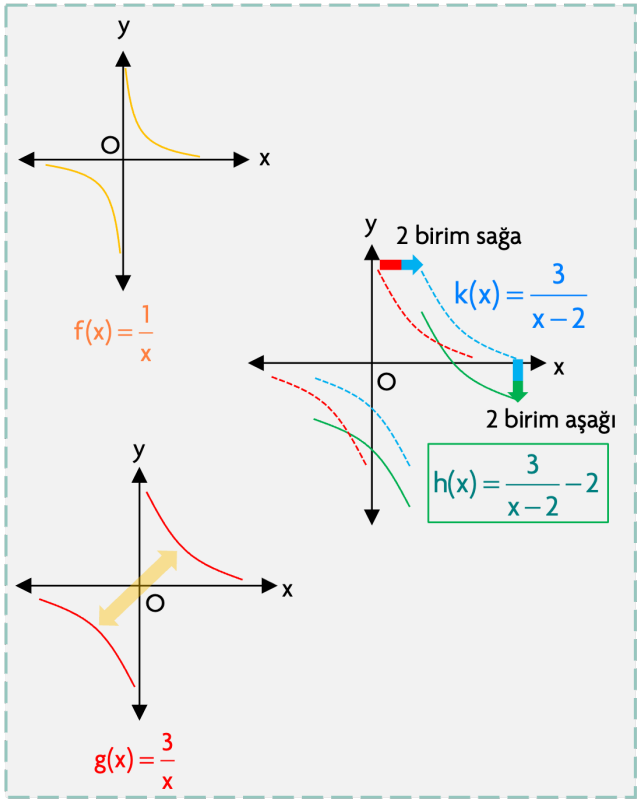
3. r > 0 ise g(x) fonksiyonu, x ekseni boyunca negatif yönde ötelenir.

r < 0 ise g(x) fonksiyonu, x ekseni boyunca pozitif yönde ötelenir. Bu işlemden sonra k(x) fonksiyonu elde edilir. k(x) = g(x + r)

4. k > 0 ise k(x) fonksiyonu, y ekseni boyunca pozitif yönde ötelenir.

k < 0 ise k(x) fonksiyonu, y ekseni boyunca negatif yönde ötelenir.

Bu işlemler sonunda h(x) = k(x) + k = a · f(x + r) + k fonksiyonu elde edilir.



Tanım kümesi, bağımsız değişkenlerin kümesidir.

Görüntü kümesi, bağımlı değişkenler kümesidir.

- $f(x) = \frac{1}{x}$ ve $g(x) = \frac{a}{x}$

Sıfırdan farklı gerçek sayılarda tanımlı fonksiyonların

Tanım Kümesi: $\mathbb{R} - \{0\}$

Görüntü Kümesi: $\mathbb{R} - \{0\}$

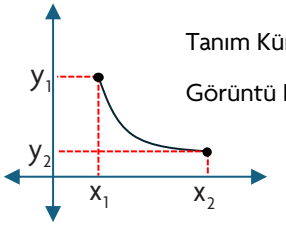
- $h(x) = a \cdot \frac{1}{x+r} + k$

$\mathbb{R} - \{-r\}$ de tanımlı fonksiyonların

Tanım Kümesi: $\mathbb{R} - \{-r\}$

Görüntü Kümesi: $\mathbb{R} - \{k\}$ olur.

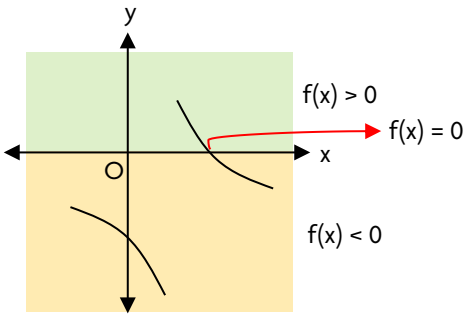
En geniş tanım aralığında tanımlı fonksiyonların **maksimum** ve **minimum** noktası **yoktur. Bu durum fonksiyonun tanım kümesine göre "değişir".**



Tanım Kümesi: $[x_1, x_2]$

Görüntü Kümesi: $[y_2, y_1]$

Fonksiyon sıfıra eşitlenerek başka bir ifade ile f(x) = 0 yapılarak fonksiyonların sıfır noktası bulunur. Bu nokta fonksiyonun işaretini bulmada önemli rol oynar.



- Rasyonel fonksiyonlar bire bir fonksiyonlardır.
- Rasyonel referans fonksiyonu tek olup diğer ötelenmiş tüm rasyonel fonksiyonlar ne tek ne çift fonksiyonlardır.
- Rasyonel fonksiyonlar, değer kümesi gerçek sayılar olduğunda örten özelliğini sağlamamaktadır.

Aşağıdaki boş alana kendi özetinizi ve anahtar bilgilerinizi yazabilirsiniz.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Daha fazlası için karekodu okutunuz.



TERS FONKSİYONLAR

BAŞLARKEN

Bu bölümde yer alan etkinlikler, bireysel öğrenme yolculuğunuzda size rehberlik etmek ve öğrenme sürecinizi desteklemek amacıyla hazırlanmıştır. Çalışmalarınızı yürütürken "Hazırlanıyorum", "İlişkilendiriyorum", "Uygulayarak Öğreniyorum", "Değerlendiriyorum", "Yansıtıcı Yazı" ve "Öğrendiklerim" etkinliklerini sırası ile takip etmeniz ve etkinliklerin sonunda yer alan geri bildirimleri inceleyerek bölümleri tamamlamanız beklenmektedir.

Bu çalışma kartında doğrusal, karesel, karekök ve rasyonel referans fonksiyonlar ile bu fonksiyonlardan türetilebilen fonksiyonların ters fonksiyonlarına dair çıkarım yapabileceksiniz.

- Her fonksiyonun tersi var mıdır? Hangi durumlarda bir fonksiyonun tersinin de bir fonksiyon olduğunu açıklayabilir misiniz?
- Doğrusal, karesel, karekök ve rasyonel referans fonksiyonlar ile bu fonksiyonlardan türetilebilen fonksiyonların ters fonksiyonlarını bulabilir misiniz?

HAZIRLANIYORUM

Amaç: Bu bölümde ön bilgilerinizi hatırlamanızı ve konuya hazırlıklı hâle gelmenizi amaçlıyoruz.,

Aşağıda yer alan ifadeler, bu temada tamamlanması hedeflenen öğrenme çıktısını ele almadan önce sahip olmanız gereken bazı temel becerileri içermektedir. Lütfen her bir ifadeyi dikkatlice okuyunuz.

- Eğer ifadedeki beceriye hakim olduğunuzu düşünüyorsanız kutucuğu işaretleyiniz.
- Eğer konuyu henüz tam olarak bilmediğinizi ya da hatırlamadığınızı düşünüyorsanız kutucuğu boş bırakınız.

Bu çalışmanın amacı notla değerlendirilmeyecek olup amacı temaya ne ölçüde hazır olduğunuzu belirlemektir.

SORULAR	ÖN ÖĞRENME KONTROL LİSTESİ	
1	Bir fonksiyonun tanım ve görüntü kümelerini belirleyebilirim.	
2	Bire bir ve örten fonksiyon kavramlarını açıklayabilirim.	
3	Bir fonksiyonun grafiğini çizebilir ve grafik üzerinden değer okuyabilirim.	
4	y = x doğrusunun grafiğini koordinat sisteminde çizebilirim.	
5	Bir denklemde istenen değişkeni yalnız bırakacak şekilde cebirsel düzenlemeler yapabilirim.	

"Ön Öğrenme Kontrol Listesi"ni doldurduktan sonra aşağıda verilen "Kontrol Noktası" sorularını çözünüz ve cevaplarınızı kontrol ediniz.

KONTROL NOKTASI

Aşağıdaki soruları dikkatle inceleyiniz. Yanıtlarınız üzerinde düşünerek yeni öğrenmeleriniz için zemin oluşturunuz.

SORU 1.

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x-4$ fonksiyonu verilmiştir.

Buna göre aşağıdaki soruları cevaplandırınız.

a) f fonksiyonunun bire bir ve örten olup olmadığını grafik temsilini kullanarak nasıl anlarsınız?

b) f(a) = 6 olduğuna göre a değeri kaçtır?

c) y = 2x–4 denkleminde x i yalnız bırakarak x in y cinsinden değerini bulunuz.

SORU 2.

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ fonksiyonu verilmiştir.

Buna göre aşağıdaki soruları cevaplandırınız.

a) Fonksiyonun örtenliğini grafiğini çizerek açıklayınız.

b) f(x) = 4 denklemini sağlayan x değerleri nelerdir? Fonksiyonun bire birliğini inceleyiniz.

c) Sizce bu fonksiyonun tersi de bir fonksiyon mudur? Nedenini yazınız.

GERİ BİLDİRİM

Bu geri bildirim sayesinde kendi cevabınızı kontrol edebilir, hatalarınızı düzelterek öğrenmenizi pekiştirebilirsiniz.

KONTROL NOKTASI

ÇÖZÜM 1.

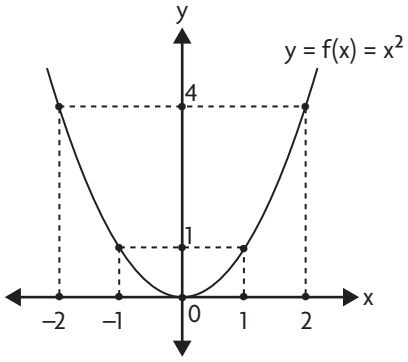
a) $f(x) = 2x - 4$ doğrusal bir fonksiyondur. Grafiği bir doğru belirtir. Yatay doğru testini uyguladığımızda çizeceğimiz doğrular ile grafik sadece bir noktada kesişir. Bu durum fonksiyonun **bire bir** olduğunu gösterir. Görüntü kümesi gerçek sayılar ($\mathbb{R}$) olduğu için fonksiyon aynı zamanda **örtendir.**

b) $f(a) = 2a - 4 = 6 \Longrightarrow 2a = 10 \Longrightarrow a = 5$

c) $y = 2x - 4 \Longrightarrow y + 4 = 2x \Longrightarrow x = \dfrac{y+4}{2}$

ÇÖZÜM 2.

a) Öncelikle $f(x) = x^2$ karesel referans fonksiyonunun grafiği çizilmelidir.



Fonksiyonun görüntü kümesinde negatif gerçek sayılar bulunmadığından örten değildir.

b) $f(x) = x^2 = 4$ ise $x = 2$ veya $x = -2$ olur. Tanım kümesindeki farklı iki elemanın görüntüleri ortak ($f(2) = f(-2) = 4$) olduğundan fonksiyon bire bir değildir.

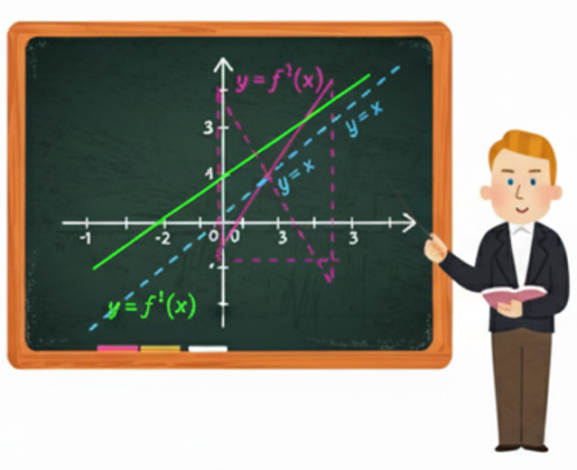
c) Bir fonksiyonun tersinin de fonksiyon olabilmesi için o fonksiyonun bire bir ve örten olması gerekir.

$f(x) = x^2$ fonksiyonu bire bir olmadığından tersi bir fonksiyon değildir. Ancak tanım kümesi uygun şekilde sınırlandırılırsa ($f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ seçilirse) fonksiyon bire bir hâle gelir ve tersi de bir fonksiyon olur.

İLİŞKİLENDİRİYORUM

Amaç: Bu bölümde yeni öğreneceğiniz temayı zihninizde var olan bilgileriniz, yaşantılarınız ve diğer derslerde öğrendiklerinizle ilişkilendirmenizi bekliyoruz.

Bu bölümde ters fonksiyon kavramını günlük hayat örnekleri ve cebirsel ifadeler üzerinden keşfedeceksiniz.



Bir sınıfta öğretmen ile öğrencileri arasında geçen aşağıdaki diyaloğu inceleyiniz.

"Arkadaşlar, fonksiyonları birer "görev makinesi" gibi düşünebiliriz. Makineye bir girdi (x) girerseniz, o da size bir çıktı (y) verir.

Peki, bu işlemi tam tersine çevirebilir miyiz? Başka bir deyişle makineye çıktıyı (y) verip bize en başta gönderdiğimiz girdiyi (x) geri vermesini sağlayabilir miyiz?

İşte, bir fonksiyonun tersi tam olarak bu işi yapar! f fonksiyonu x i y ye götürüyorsa ters fonksiyon (f^{-1} ile gösterilir.) y yi alıp tekrar x e götürür. "

Sınıfta bulunan öğrencilerden ikisi aşağıdaki iki soruyu öğretmenine yöneltir.



"Tersine çevirme işleminin her zaman mümkün olabilmesi şu koşula bağlıdır: Her çıktının tek bir girdiden gelmiş olması gerekir. Aksi hâlde makine; çıktıyı verildiğinde hangi girdiyi geri vereceğini bilemez, kararsız kalır. Örneğin, bir kişinin T.C. kimlik numarası biliniyorsa bu numaranın kime ait olduğu net olarak bulunur. Çünkü aynı T.C. kimlik numarasına sahip iki kişi yoktur. Sonuçtan geriye doğru gidildiğinde tek bir kişiye ulaşılır. Aynı zamanda her T.C. kimlik numarası tek bir kişiye aittir. Bu yüzden bu ilişki tersine çevrilebilir. Başka bir örnek verilirse bir öğrencinin ayakkabı numarasını söylendiğinde sınıfta birden fazla öğrenci bu numaraya sahip olabilir. "Kim 37 numara ayakkabıya sahip?" diye sorulduğunda birden çok kişi sahip olduğunu belirtebilir. Bu durumda ayakkabı numarasından yola çıkılarak hangi öğrenciye ait olduğu kesin olarak bulunamaz. Tersine çevirmede karışıklık olur. Bu yüzden bu ilişki tersine çevrilemez. Dolayısıyla matematiksel olarak bir fonksiyonun tersinin olması için fonksiyonun bire bir ve örten olması gerekmektedir. "

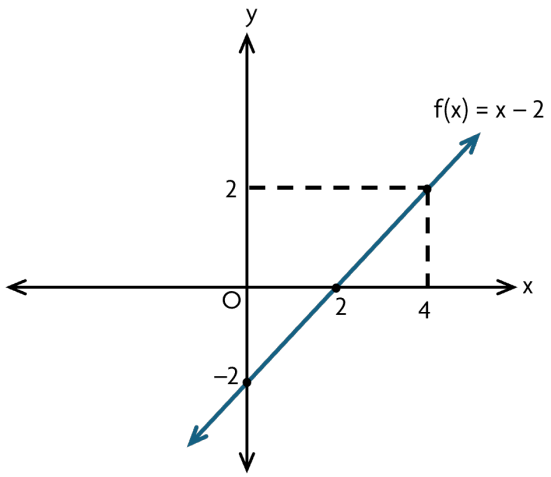
UYGULAYARAK ÖĞRENİYORUM

Amaç: Bu bölümde bilgilerinizi etkinlikler ve uygulamalarla pekiştirmenizi, öğrenmeyi daha kalıcı hâle getirmenizi amaçlıyoruz.

Etkinliklerde verilen adımları dikkatle uygulayınız. Çalışmanızı güvenli ve düzenli bir şekilde yapınız.

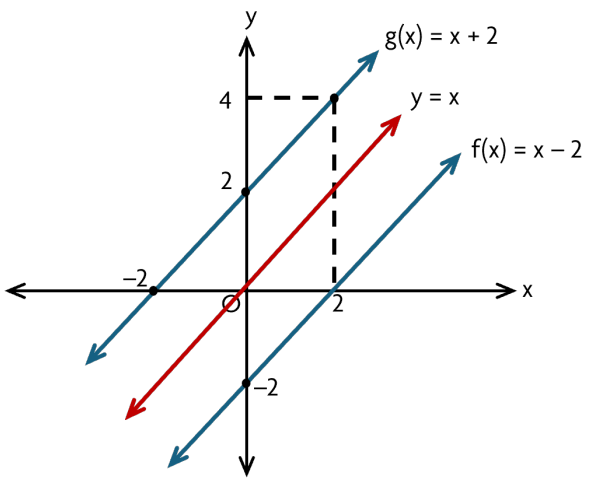
ETKİNLİK 1. f(x) = x – 2 fonksiyonunun grafiği dik koordinat düzleminde şu şekilde gösterilir:

x	y	Koordinat
0	–2	(0, –2)
2	0	(2, 0)
4	2	(4, 2)



Bağımlı ve bağımsız değişkenlerinin yerleri değiştirilir. Oluşan yeni noktalar koordinat düzlemine aktarılarak bu noktalardan geçen grafik şu şekilde çizilir:

x	y	Koordinat
–2	0	(–2, 0)
0	2	(0, 2)
2	4	(2, 4)



- Oluşan yeni fonksiyon bir doğrusal fonksiyon olduğu için g(x) = mx + n ile ifade edilir.
- Doğrunun eğimi bir olduğundan m = 1 olacaktır. Buradan g(x) = x + n olur.
- Doğrunun üzerinde bulunan noktalardan (2 , 4) noktası kullanılır. Nokta denklemi sağlayacağından g(2) = 4 olacaktır. Buradan n = 2 bulunur. O hâlde g(x) = x + 2 olarak bulunur.
- Orijinal fonksiyon ile oluşan yeni fonksiyonun grafiklerinin y = x doğrusuna göre simetrik olduğunu fark ettiniz mi?

NOT

f: A → B, f(x) = ax + b şeklinde tanımlanan doğrusal fonksiyonlar olmak üzere (a, b ∈ ℝ) bu fonksiyon, a ≠ 0 olduğu sürece her x için tek bir y değeri üretir. Bu nedenle bire bir ve örten olur ve fonksiyonun tersi vardır.

f^{-1}: B → A olur.

UYARI

Bir fonksiyonun tersinin de fonksiyon olabilmesi için fonksiyonun bire bir ve örten olması gerekir.

f fonksiyonu ile f^{-1} fonksiyonlarının grafikleri y = x doğrusuna göre simetriktir.

ETKİNLİK 2. f: A → B, $f(x)=\frac{1}{x-3}-1$ şeklinde tanımlı f fonksiyonunun tersinin cebirsel temsili ve tersinin fonksiyon olmasını sağlayan A ve B kümeleri adım adım şu şekilde bulunur:

- y = f(x) fonksiyonunun kuralı yazılır.

$$y=f(x)=\frac{1}{x-3}-1$$

- y = f(x) fonksiyonunda x değişkeni yalnız bırakılır.

$$y=\frac{1}{x-3}-1 \Rightarrow y+1=\frac{1}{x-3} \Rightarrow x-3=\frac{1}{y+1} \Rightarrow x=\frac{1}{y+1}+3$$

- Elde edilen son denklemde x değişkeni yerine y, y değişkeni yerine x yazılır.

$$y=\frac{1}{x+1}+3$$

- Elde edilen fonksiyon $y = f^{-1}(x)$ olarak isimlendirilir.

$$y=f^{-1}(x)=\frac{1}{x+1}+3$$

- Fonksiyonun tanım ve görüntü kümeleri bulunurken tanımsızlık noktaları gerçek sayılar kümesinden çıkarılarak kümeler belirlenir.

$y=f(x)=\frac{1}{x-3}-1$ → A = ℝ – {3} olur.

$y=f^{-1}(x)=\frac{1}{x+1}+3$ → B = ℝ – {–1} olur.

Bu yöntemle doğrusal, karesel, karekök ve rasyonel referans fonksiyonlar ile bu fonksiyonlardan türetilebilen fonksiyonların ters fonksiyonlarının cebirsel temsilini bulabilirsiniz.

UYARI

a, b, c ve d ∈ ℝ olmak üzere

$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ fonksiyonunun tersi f^{-1}: B → A, $f^{-1}(x)=\frac{-dx+b}{cx-a}$ olarak bulunur.

ÖRNEK

Bir evin akıllı enerji yönetim sistemi, çatıda bulunan güneş panellerinden elde edilen enerjiyi kilovat-saat (kWh) cinsinden ölçmektedir. Sistem, bu enerjinin bir kısmını evin anlık kullanımı için ayırdıktan sonra kalan fazla enerjiyi bataryalarda depolamaktadır. Bataryanın depoladığı enerji miktarı (f), güneş panelinin ürettiği toplam enerjiye (x) bağlıdır.

Sistem, aşağıdaki formüle göre çalışmaktadır.

Üretilen her 1 kWh enerjinin 0,4 kWh'i doğrudan evin tüketimine gitmektedir.

Ayrıca bataryaya enerji aktarımı sırasında oluşan kayıp nedeniyle sabit olarak 0,2 kWh enerji verimsizleşmektedir.

Bu durumu modelleyen fonksiyon: $f(x) = (0,6)\cdot x - (0,2)$ şeklindedir.

Buna göre aşağıdaki soruları cevaplandırınız.

a) Bataryada ne kadar enerji depolandığı bilinen belirli bir günde güneş panellerinin toplamda ne kadar enerji ürettiğini hesaplanmasını sağlayan f(x) fonksiyonunun tersini bulunuz.

b) Akşam saatlerinde bataryada 5,8 kWh enerji biriktiği ölçülmüştür. Buna göre gün boyunca güneş panelleri toplam kaç kWh enerji üretmiştir? Bulunuz.

c) Bir gün panellerin 15 kWh enerji ürettiğini düşününüz. Bu enerjinin ne kadarının bataryada depolandığını ve depolanan bu enerjiden yola çıkarak, üretilen toplam enerjiyi geri hesaplayarak başlangıç değerine ulaşıp ulaşmadığınızı bulunuz.

ÇÖZÜM

a) Ters fonksiyon, depolanan enerjiyi (f) girdi olarak alıp üretilen toplam enerjiyi (x) çıktı olarak vermelidir.

Fonksiyonda f(x) yerine y yazılırsa $y = (0,6)\cdot x - (0,2)$

x (toplam üretilen enerji) yalnız bırakılır.

$$y + 0,2 = (0,6)\cdot x \Rightarrow x = \frac{y+0,2}{0,6}$$

x yerine $f^{-1}(x)$ ve y yerine x yazılarak ters fonksiyon oluşturulur.

$$f^{-1}(x) = \frac{x + 0,2}{0,6}$$

Bu fonksiyon, belirli bir günde bataryada ne kadar enerji depolandığı bilindiğinde o gün güneş panellerinin toplamda ne kadar enerji ürettiğinin hesaplanmasını sağlar.

b) Bataryada 5.8 kWh enerji biriktiğine göre ne kadar enerji üretildiğinin bulunması için ters fonksiyon kullanılır.

$$f^{-1}(5,8) = \frac{5,8 + 0,2}{0,6} = 10$$

Gün boyunca güneş panelleri toplam **10 kWh** enerji üretmiştir.

c) Bir işlem ile o işlemin tersini art arda yapmak, işlemi başlangıç noktasına döndürür. Panellerin 15 kWh enerji ürettiğini düşününüz.

Önce enerjinin ne kadarının depolandığı bulunur. $f(15) = (0,6)\cdot(15) - (0,2) = 9 - (0,2) = 8,8$ kWh depolar.

8,8 kWh depolama için ne kadar üretilmesi gerektiği bulunur.

$f^{-1}(8,8) = \frac{8,8+0,2}{0,6} = 15$ kWh depolar. Başlangıçtaki üretim miktarına geri dönülmesi ters fonksiyonun doğru bulunduğunu kanıtlar.

ÖRNEK

Bir araştırma ekibi, bir gölün derinliğini ölçmek için özel bir sensör kullanmaktadır. Sensör, suya bırakıldığı andan itibaren dibe doğru batarken katettiği mesafe (metre) ile geçen süre (saniye) arasında bir ilişki vardır. Hava sürtünmesi ve suyun kaldırma kuvveti ihmal edildiğinde sensörün t saniyede katettiği dikey mesafe (h), $h(t) = 5t^2$ fonksiyonu ile modellenmektedir. Sensörün batabileceği maksimum derinlik 125 metredir.

Buna göre aşağıdaki soruları cevaplandırınız.

a) Bu model için h(t) fonksiyonunun tanım ve görüntü kümelerini bulunuz.

b) Sensörün belirli bir h mesafesini ne kadar sürede katettiğini hesaplayan h(t) fonksiyonunun tersini bulunuz.

c) Sensörün 80 metre derinliğe ulaşması kaç saniye sürer? Bulunuz.

d) Bulduğunuz ters fonksiyonun tanım ve görüntü kümelerini yazınız. Orijinal fonksiyonla nasıl bir ilişkisi vardır? Açıklayınız.

ÇÖZÜM

a) $t \geq 0$'dır. Sensörün katettiği maksimum mesafe 125 metre olduğundan maksimum süre $125 = 5t^2$ ise $t^2 = 25$ olur. Buradan $t = 5$ sn bulunur.

O hâlde tanım kümesi [0, 5] saniyedir.

t= 0 (Zamanın en küçük değeri) için h = 0, t = 5 için h = 125 olur (Derinliğin en büyük değeri). O hâlde görüntü kümesi [0, 125] metredir.

b) $h(t) = 5t^2$ fonksiyonunda t yalnız bırakılırsa fonksiyonun tersi bulunmuş olur.

$h = 5t^2$ ise $t^2 = \frac{h}{5}$ ise $t = \pm\sqrt{\frac{h}{5}}$ zaman negatif değer alamayacağından $h^{-1}(t) = \sqrt{\frac{h}{5}}$

c) Sensör 80 metre derinlikte ise ters fonksiyonda yerine konur. $h^{-1}(80) = \sqrt{\frac{80}{5}} = \sqrt{16} = 4$ olarak bulunur. O hâlde sensörün 80. metreye ulaşması 4 saniye sürer.

d) Bir fonksiyonun tersinin tanım ve görüntü kümeleri orijinal fonksiyondaki kümelerin yer değiştirmiş hâlidir.

- $h^{-1}(t)$ fonksiyonunun tanım kümesi, orijinal fonksiyonun görüntü kümesi olan [0, 125] metredir.
- $h^{-1}(t)$ fonksiyonunun görüntü kümesi orijinal fonksiyonun tanım kümesi olan [0, 5] saniyedir.

ÖRNEK

$f: \mathbb{R} - \{a\} \to \mathbb{R} - \{b\}$, $f(x) = \frac{3x+2}{x-4}$ fonksiyonu tanımlanmaktadır.

Fonksiyonun bire bir ve örten olduğu bilindiğine göre a·b değeri kaçtır?

ÇÖZÜM

$x - 4 \neq 0 \Rightarrow x \neq 4$ olur. Buradan tanım kümesi $\mathbb{R} - \{4\}$ ve a = 4 olarak bulunur.

Fonksiyon bire bir ve örten olduğundan tersi vardır.

$$y = \frac{3x+2}{x-4} \Rightarrow yx - 4y = 3x + 2 \Rightarrow yx - 3x = 4y + 2$$

$$x(y-3) = 4y + 2 \Rightarrow x = \frac{4y+2}{y-3} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{4x+2}{x-3}$$

Buradan $x - 3 \neq 0 \Rightarrow x \neq 3$ olur. Dolayısıyla görüntü kümesi $\mathbb{R} - \{3\}$ ve b = 3 olarak bulunur. $a \cdot b = 4 \cdot 3 = 12$ olur.

SIRA SİZDE 1.

Bir şehirdeki "Tekno Taksi" uygulaması, gidilecek mesafeye göre ücreti otomatik olarak hesaplamaktadır. Uygulamanın ücretlendirme algoritması şu şekildedir:

Uygulama açıldığında yolculuk için sabit bir "servis bedeli" olarak 70 TL alınır.

Gidilen her kilometre (km) için 25 TL ücret eklenir.

Bu durumu x kilometre mesafe için ödenecek ücreti gösteren $f(x) = 25x + 70$ fonksiyonu modellemektedir.

Buna göre aşağıdaki soruları cevaplandırınız.

a) Belirli bir miktar parası olan bir yolcunun bu parayla en fazla kaç kilometre gidebileceğini hesaplayan f(x) fonksiyonunun tersini bulunuz.

b) Bir yolcunun cebinde 220 TL'si vardır. Bu yolcu Tekno Taksi uygulaması sayesinde en fazla kaç kilometre yol gidebilir? Bulunuz.

SIRA SİZDE 2.

Modern bir tarım arazisinde, merkezden dışa doğru dairesel olarak sulama yapan bir fıskiye sistemi kullanılmaktadır. Fıskiyenin suladığı dairesel alanın yarıçapı, geçen süreye bağlı olarak artmaktadır.

Fıskiye çalıştırıldıktan t dakika sonra sulanan dairesel bölgenin alanı (A metrekare), $A(t) = 20t^2$ fonksiyonu ile modellenmektedir. Bu fıskiye sistemi, su tasarrufu amacıyla en fazla 8 dakika boyunca çalıştırılabilmektedir.

Buna göre aşağıdaki soruları cevaplandırınız.

a) Fıskiyenin 8 dakikalık maksimum çalışma süresine göre bu A(t) fonksiyonunun tanım ve görüntü kümelerini bulunuz.

b) Belirli bir alanı sulamak için fıskiyenin kaç dakika çalışması gerektiğini hesaplayan A(t) fonksiyonunun tersini bulunuz.

c) Çiftçi, 320 metrekarelik dairesel bir alanı sulamak istemektedir. Fıskiyenin bu alanı sulaması için kaç dakika çalışması gerekir? Fıskiyenin bu alanı sulaması mümkün müdür? Hesaplayınız.

GERİ BİLDİRİM

Bu geri bildirim sayesinde kendi cevabınızı kontrol edebilir, hatalarınızı düzelterek öğrenmenizi pekiştirebilirsiniz.

SIRA SİZDE 1.

ÇÖZÜM

a) $f(x) = 25x + 70$ fonksiyonu, mesafeyi ücrete eşleştirir. Tersi ise ücreti mesafeye eşleştirmelidir.

Fonksiyonda f(x) yerine y yazılırsa

$y = 25x + 70$

$y - 70 = 25x \Rightarrow x = \frac{y-70}{25}$ olur.

x yerine $f^{-1}(x)$ ve y yerine x yazılarak ters fonksiyon oluşturulur.

$f^{-1}(x) = \frac{x-70}{25}$

Bu fonksiyon, belirli bir ücretle kaç kilometre gidilebileceğini modellemektedir.

b) Yolcunun parası bilindiğine göre gidebileceği mesafenin bulunması için ters fonksiyon kuralı kullanılır.

$f^{-1}(220) = \frac{220-70}{25} = 6$

Yolcu, 220 TL ile en fazla **6 kilometre** yol gidebilir.

SIRA SİZDE 2.

ÇÖZÜM

a)

- Zaman negatif değer alamayacağından ve fıskiye en fazla 8 dakika çalışabileceğinden tanım kümesi [0, 8] olur.
- Sulanan alanın alabileceği değerleri bulmak için tanım kümesinin sınırları fonksiyonda yerine konulur.

  t = 0 için $A(0) = 20 \cdot (0)^2 = 0$ metrekare.

  t = 8 için $A(8) = 20 \cdot (8)^2 = 20 \cdot 64 = 1280$ metrekare.

  Dolayısıyla görüntü kümesi [0, 1280] olur.

b) $A(t) = 20t^2$ fonksiyonu zamanı sulanan alan büyüklüğüne, tersi de sulanan alan büyüklüğünü zamana eşler.

$A = 20 \cdot t^2$ ise $t^2 = \frac{A}{20}$ ise $t = \sqrt{\frac{A}{20}}$ olarak bulunur. $A(t) = 20t^2$ fonksiyonunun tersi $A^{-1}(t) = \sqrt{\frac{t}{20}}$ olarak ifade edilir.

c) Gerekli sürenin bulması için alan ters fonksiyonda yerine koyulur.

$A^{-1}(320) = \sqrt{\frac{320}{20}} = \sqrt{16} = 4$

Fıskiyenin **4 dakika** çalışması gerekir. Bu süre, sistemin izin verdiği 8 dakikalık maksimum sürenin içinde olduğu için bu işlem mümkündür.

DEĞERLENDİRİYORUM

Amaç: Bu bölümde öğrendiklerinizi gözden geçirmenizi, kendi öğrenme sürecinizi değerlendirmenizi ve eksiklerinizi fark etmenizi amaçlıyoruz.

Soruları dikkatle yanıtlayınız. Cevaplarınızı geri bildirimlerle karşılaştırarak eksik gördüğünüz noktaları tekrar ediniz.

SORULAR

1. $f(x) = 3x - 4$ **ise** $f^{-1}(x)$ **i bulunuz ve** $f^{-1}(2)$ **değerini hesaplayınız.**

2. $f: A \to B,\ f(x) = \frac{1}{x-3} - 2$ **fonksiyonunun tersinin cebirsel temsilini ve tersinin fonksiyon olmasını sağlayan A ve B kümelerini bulunuz.**

3. $f: A \to B,\ f(x) = (x-1)^2 + 2$ **fonksiyonunun tersinin cebirsel temsilini ve tersinin fonksiyon olmasını sağlayan A ve B kümelerini bulunuz.**

4. $f: A \to B,\ f(x) = \sqrt{x-2} + 1$ **fonksiyonunun tersinin cebirsel temsilini ve tersinin fonksiyon olmasını sağlayan A ve B kümelerini bulunuz.**

5. Bir dağda mahsur kalan arama-kurtarma ekibi, dış dünyayla iletişim kurmak için bir iletişim drone (uçangöz) adlı iletişim aracını kullanmaktadır. Drone (uçangöz), ekibin bulunduğu noktadan dikey olarak havalanarak sinyali yakındaki bir uyduya iletmektedir. Ancak, drone (uçangöz) yükseldikçe sinyal kalitesi zayıflamaktadır.

Sinyal kalitesi (K), 0 (en kötü) ile 100 (en iyi) arasında bir değerle ölçülür. Drone (uçangöz) adlı iletişim aracının yerden yüksekliği h (metre) olmak üzere sinyal kalitesi ile yükseklik arasındaki ilişkiyi modelleyen fonksiyon şu şekildedir:

$K(h)=100 - (0{,}04)\cdot h^2$

Ekibin acil durum mesajını net bir şekilde gönderebilmesi için sinyal kalitesinin "**kullanılabilir**" seviyede başka bir deyişle **en az 64** olması gerekmektedir.

Arama kurtarma ekibinin "kullanılabilir" bir sinyal alabilmesi için drone (uçangöz) adlı iletişim aracının çıkabileceği maksimum irtifa kaç metredir? Bu değeri fonksiyonun tersinden yararlanarak bulunuz.

GERİ BİLDİRİM

Bu geri bildirim sayesinde kendi cevabınızı kontrol edebilir, hatalarınızı düzelterek öğrenmenizi pekiştirebilirsiniz

ÇÖZÜMLER

1. $f(x) = 3x - 4$

$y = 3x - 4 \rightarrow y + 4 = 3x \rightarrow \; x = \dfrac{y+4}{3}$ ise $f^{-1}(x) = \dfrac{x+4}{3}$ olarak bulunur.

$f^{-1}(2) = \dfrac{2+4}{3} = 2$ olur.

2. Verilen fonksiyonda x değişkeni yalnız bırakılır.

$$y = f(x) = \frac{1}{x-3} - 2 \Rightarrow y + 2 = \frac{1}{x-3} \Rightarrow x - 3 = \frac{1}{y+2} \Rightarrow x = \frac{1}{y+2} + 3$$

O hâlde $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{x+2} + 3$ olarak bulunmuş olur.

Fonksiyonun tersinin fonksiyon olabilmesi için $y = f(x)$ fonksiyon kuralında payda $x - 3 \neq 0$ olmalı ise $x \neq 3$ olur. Buradan tanım kümesi $\mathbb{R} - \{3\}$ olur.

Fonksiyonun tersinin fonksiyon olabilmesi için $f^{-1}(x)$ fonksiyon kuralında payda $x + 2 \neq 0$ olmalı ise $x \neq -2$ olur. Buradan görüntü kümesi $\mathbb{R} - \{-2\}$ olur.

3. Verilen fonksiyonda x değişkeni yalnız bırakılır.

$$y = f(x) = (x-1)^2 + 2 \Rightarrow y - 2 = (x-1)^2 \Rightarrow x - 1 = \pm\sqrt{y-2} \Rightarrow x = \pm\sqrt{y-2} + 1$$

$f^{-1}(x) = \pm\sqrt{x-2} + 1$ olur.

Fonksiyonun tersinin de fonksiyon olabilmesi için $y = f(x)$ fonksiyonunda $(x-1)^2 = y - 2$ olduğundan

$x \geq 1$ için $x - 1 = \sqrt{y-2}$ ise $x = \sqrt{y-2} + 1$ olur. Buradan **tanım kümesi** $[1 , \infty)$ olarak bulunur.

$x \leq 1$ için $x - 1 = -\sqrt{y-2}$ ise $x = -\sqrt{y-2} + 1$ olur. Buradan **tanım kümesi** $(-\infty , 1)$ olarak bulunur.

Fonksiyon tersinin tanımlı olabilmesi için karekök içerisinde bulunan $x - 2 \geq 0$ olmalıdır. Buradan $x \geq 2$ olur.
Görüntü kümesi $[2 , \infty)$ olarak bulunur.

4. Verilen fonksiyonda x değişkeni yalnız bırakılır.

$y = f(x) = \sqrt{x-2} + 1 \Rightarrow y - 1 = \sqrt{x-2} \Rightarrow x - 2 = (y-1)^2 \Rightarrow x = (y-1)^2 + 2$

$f^{-1}(x) = (x-1)^2 + 2$ olur.

Fonksiyonun tersinin de fonksiyon olabilmesi için y = f(x) fonksiyonunda karekök içerisinde bulunan $x - 2 \geq 0$ olmalıdır. Buradan $x \geq 2$ olur. Tanım kümesi $[2 , \infty)$ olarak bulunur.

Fonksiyonun tersinin tanımlı olması için bire bir ve örten olması gerektiğinden tanım aralığını fonksiyonda yerine yazıldığında görüntü kümesi $[1 , \infty)$ olarak bulunur.

5. $K(h) = 100 - (0{,}04)\cdot h^2$

Tersi (yüksekliği, hedef kaliteye eşleyen fonksiyon). $h \geq 0$ için

$$K = 100 - 0{,}04h^2 \Rightarrow 100 - K = 0{,}04h^2 \Rightarrow h^2 = \frac{100-K}{0{,}04} \Rightarrow h = \sqrt{\frac{100-K}{0{,}04}}$$

Buradan K(h) fonksiyonunun tersi, $K^{-1}(h) = \sqrt{\frac{100-h}{0{,}04}}$ olarak bulunur.

Kullanılabilir sınır K = 64 olduğuna göre

$K^{-1}(64) = \sqrt{\frac{100-64}{0{,}04}} = \sqrt{900} = 30$ olarak bulunur.

30 metrenin üzerindeki yüksekliklerde kalite 64'ün altına düşer, **bu yüzden maksimum irtifa 30 metredir.**

ÖĞRENDİKLERİM

Amaç: Bu bölümde öğrendiklerinizi özetlemenizi, günlük hayatta ve farklı derslerde kullanabileceğiniz bilgileri belirlemenizi amaçlıyoruz.

Verilen bilgileri dikkatle okuyunuz. Konunun temel kavramlarını, önemli noktalarını ve bağlantılarını gözden geçirerek öğrenmenizi pekiştiriniz.

Aşağıda boş bırakılan yerleri uygun ifadeler ile doldurunuz. Anahtar kavramları ve önemli bilgileri kendi cümlelerinizle yazınız.

1. Bir fonksiyonun tersinin olabilmesi için o fonksiyonun _____ ve _____ olması gerekir.

(İpucu: Her x in yalnızca bir y'ye karşılık geldiği ve her y'nin yalnızca bir x e karşılık geldiği durumlar)

2. Doğrusal fonksiyonlardan yalnızca eğim değeri sıfır olmayan fonksiyonların tersi vardır.

☐ Doğru ☐ Yanlış

3. Karesel fonksiyonların tümü bire bir olduğu için tersleri her zaman vardır.

(İpucu: Karesel fonksiyonun tanım kümesi tüm reel sayılar olduğunda ne olur?)

☐ Doğru ☐ Yanlış

4. Bir fonksiyonun grafiği ile tersinin grafiği, _____ doğrusuna göre simetriktir.

5. Bir fonksiyonun grafiği üzerinde aynı yatay doğru grafiği birden fazla noktada kesiyorsa bu fonksiyonun tersinin varlığı hakkında ne söylenebilir?

☐ Vardır ☐ Yoktur

6. Aşağıdaki fonksiyon için tablodaki her satırı ayrı ayrı değerlendiriniz.

$f(x) = x^2 - 4x + 5$

Tanım Kümesi	Tersi Var mı?	Temel Gerekçe
$\mathbb{R}$	☐ Var ☐ Yok	.....
$[2 , \infty)$	☐ Var ☐ Yok	.....
$(-\infty , 2)$	☐ Var ☐ Yok	.....

Daha fazlası için karekodu okutunuz.



DENKLEM VE EŞİTSİZLİKLER

BAŞLARKEN

Bu bölümde yer alan etkinlikler, bireysel öğrenme yolculuğunuzda size rehberlik etmek ve öğrenme sürecinizi desteklemek amacıyla hazırlanmıştır. Çalışmalarınızı yürütürken "Hazırlanıyorum", "İlişkilendiriyorum", "Uygulayarak Öğreniyorum", "Değerlendiriyorum", "Yansıtıcı Yazı" ve "Öğrendiklerim" etkinliklerini sırası ile takip etmeniz ve etkinliklerin sonunda yer alan geri bildirimleri inceleyerek bölümleri tamamlamanız beklenmektedir.

Bu çalışma kartında:

- Doğrusal, karesel, karekök ve rasyonel fonksiyonlarla kurulan denklemler ve eşitsizlikleri kullanarak problem çözmeyi öğreneceksiniz.
- Fonksiyonların işaret tablosu ile maksimum-minimum noktalarını bulabileceksiniz.
- Farklı fonksiyon türleri arasındaki ilişkileri inceleyerek gerçek yaşam durumlarını bu fonksiyonlarla modellemeyi keşfedeceksiniz.
- Süreç boyunca fonksiyonların temel özelliklerini karşılaştırarak aralarındaki ilişkileri daha net bir şekilde göreceksiniz.

HAZIRLANIYORUM

Amaç: Bu bölümde ön bilgilerinizi hatırlamanızı ve temaya hazırlıklı hâle gelmenizi amaçlıyoruz.

Aşağıda yer alan ifadeler, bu temada tamamlanması hedeflenen öğrenme çıktısını ele almadan önce sahip olmanız gereken bazı temel becerileri içermektedir. Lütfen her bir ifadeyi dikkatlice okuyunuz.

Bu çalışma notla değerlendirilmeyecek olup amacı yalnızca temaya ne ölçüde hazır olduğunuzu belirlemektir.

- Lütfen her bir ifadeyi dikkatlice okuyunuz.
- Eğer ifadedeki bilgiye hâkim olduğunuzu düşünüyorsanız kutucuğu işaretleyiniz.
- Eğer konuyu henüz tam olarak bilmediğinizi ya da hatırlamadığınızı düşünüyorsanız kutucuğu boş bırakınız.

SORULAR	ÖN ÖĞRENME KONTROL LİSTESİ	
1	Üslü ve köklü ifadelerle dört işlem yapabilirim.	☐
2	İki kare farkı ve tam kare özdeşliklerini kullanarak cebirsel ifadeleri düzenleyebilirim.	☐
3	Doğrusal fonksiyonun cebirsel gösterimini (y = ax + b) ve grafiğini ilişkilendirebilirim.	☐
4	Doğrusal fonksiyonun eğimi ve sabit terimi değiştiğinde grafiğin nasıl etkilendiğini açıklar ve örnek üzerinde gösteririm.	☐
5	Bir doğrusal referans fonksiyona farklı dönüşümler uygulayarak yeni doğrusal fonksiyonlar oluşturabilirim.	☐
6	Doğrusal fonksiyonlardan türetilen fonksiyonların grafiklerini karşılaştırarak nitel farklarını belirleyebilirim.	☐

"Ön Öğrenme Kontrol Listesi"ni doldurduktan sonra aşağıda verilen "Kontrol Noktası" sorularını çözünüz ve cevaplarınızı kontrol ediniz.

KONTROL NOKTASI

SORU 1.

Aşağıda verilen işlemler ile bu işlemlerin sonuçlarını eşleştiriniz.

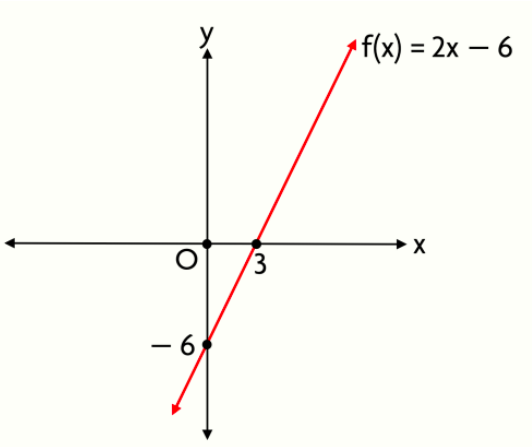
$5^{-1} + 2^{-2}$	3
$\frac{8^2 \cdot 4^{-1}}{2^3}$	2025
$\frac{3^5 + 3^5 + 3^5}{9^2 + 9^2 + 9^2}$	$\frac{9}{20}$
$\sqrt{75} - 3\sqrt{12} + 2\sqrt{3}$	$\sqrt[6]{2^7}$
$\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{4}$	$\sqrt{3}$
$(2027)^1 - (-2026)^0 - 2025^0$	2

SORU 2.

Aşağıda tam kare ve iki kare farkı özdeşlikleri içeren bazı eşitlikler verilmiştir. Verilen eşitliklerden doğru ve yanlış olanları belirleyiniz, yanlış olanların doğru hâlini yazınız.

No	İşlem	Doğru	Yanlış	Doğru Hâli
1	$(x + 5)^2 = x^2 + 10x + 25$	☐	☐	
2	$(3x - 4)^2 = 9x^2 - 24x + 16$	☐	☐	
3	$(a + b)(a - b) = a^2 + b^2$	☐	☑	$a^2 - b^2$
4	$(2x + 3)^2 = 4x^2 + 9$	☐	☑	$4x^2 + 12x + 9$
5	$(m - 7)(m + 7) = m^2 + 49$	☐	☐	
6	$(x + y)^2 - (x - y)^2 = 4xy$	☐	☐	

SORU 3.



Yukarıda bir doğrusal fonksiyonun grafiği ve cebirsel ifadesi verilmiştir.

Grafik ile cebirsel gösterim arasındaki ilişkiyi inceleyerek aşağıdaki boşlukları doldurunuz.

- Doğrusal fonksiyonun grafiği, x eksenini (...., 0) noktasında keser.
- Doğrusal fonksiyonun grafiği, y eksenini (0, ...) noktasında keser.
- Doğrunun eğimi m = ---- dir ve doğrusal fonksiyonunun eğimi ---- yönlüdür.
- Doğrusal fonksiyonların genel kuralı y = mx + n biçimindedir. Burada m eğimi, n ise grafiğin ---- kestiği noktayı gösterir.

SORU 4.

Aşağıda bazı doğrusal fonksiyonlar verilmiştir.

Fonksiyonların eğimleri (a) ve sabit terimleri (b) değiştiğinde grafikte oluşan değişimlere göre boşlukları doldurunuz.

1. y = 3x + 2 doğrusu, ---- yönlü eğime sahiptir ve y-eksenini (0, ...) noktasında keser.

2. y = – 2x + 2 doğrusu, ---- yönlü eğime sahiptir ve y-eksenini (0, ...) noktasında keser.

3. y = 3x – 1 doğrusu, y = 3x + 2 doğrusuna göre ---- konumdadır (daha yukarı/daha aşağı).

4. y = 0,5x + 2 doğrusu, y = 3x + 2 doğrusuna göre ---- eğime sahiptir (daha dik/daha yatık).

5. y = 3x + 2 ve y = 3x – 4 doğruları ---- doğrulardır. Çünkü eğimleri birbirine ----.

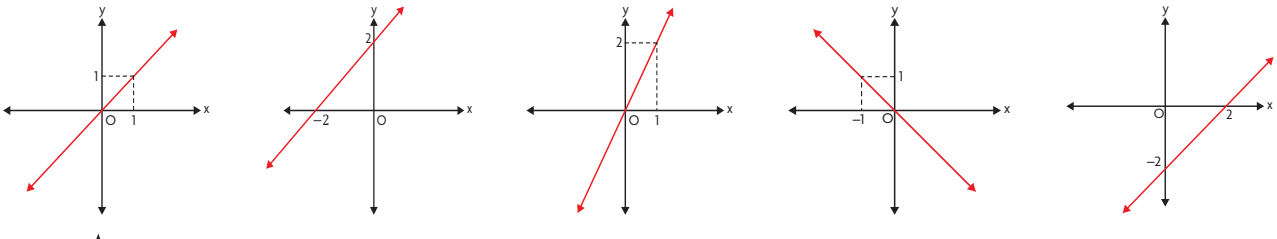
6. y = – x + 2 doğrusu, eğimin işareti nedeniyle ---- bir grafiğe sahiptir. (sağa yatık/sola yatık)

7. y = 5x + 2 doğrusu, eğimin işareti nedeniyle ---- bir grafiğe sahiptir. (sağa yatık/sola yatık)

SORU 5.1.

Aşağıda bir doğrusal referans fonksiyonu ile ondan türetilen dört farklı fonksiyonun grafikleri verilmiştir.

Grafiklerle aşağıda verilen fonksiyonları eşleştiriniz.



y = x | y = – x | y = x – 2 | y = x + 2 | y = 2x

SORU 5.2.

Aşağıda doğrusal referans fonksiyonuna yapılan bazı dönüşümler verilmiştir.

Verilen durumda fonksiyonun grafiğinin nasıl değişeceğini boşluklara yazınız.

1. y = x fonksiyonunun sabit terimi ---- eşittir.

2. y = x fonksiyonunun eğimi iki katına çıkarılırsa (y = 2x) grafik ---- hâle gelir.

3. y = x fonksiyonunda sabit terimden 4 çıkarılırsa doğru ---- yönde ötelenir.

4. y = x fonksiyonunda sabit terime 5 eklenirse doğru ---- yönde ötelenir.

5. y = – x fonksiyonunun eğimi, y = x e göre ---- yönlüdür.

6. y = x + 2 ve y = x – 2 doğruları, ---- eksenine göre simetriktir.

SORU 6.

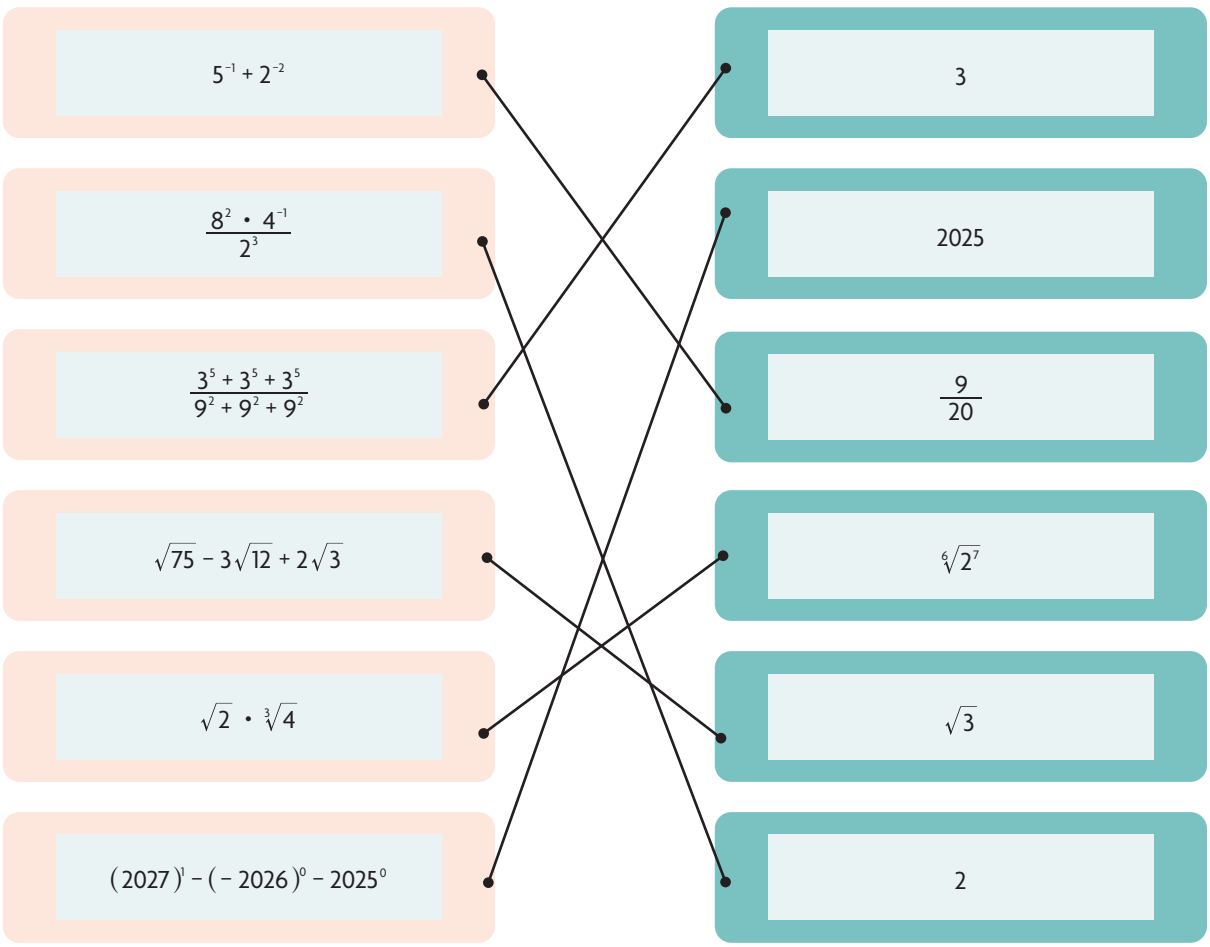
Gerçek sayılarda tanımlı fonksiyonların nitel özelliklerini bularak tabloyu örnekteki gibi doldurunuz.

Fonksiyon / Nitel Özellik		f(x) = x	h(x) = 3x − 4	g(x) = 0,5x + 3	k(x) = − x + 7	n(x) = − 4x − 5
Tanım Kümesi		$\mathbb{R}$				
Görüntü Kümesi		$\mathbb{R}$				
İşareti	+	$(0, \infty)$				
	−	$(-\infty, 0)$				
Sıfırı		0				
Artan - Azalan Olma Durumu		Artan				
Maksimum Değeri		Yok				
Minimum Değeri		Yok				
Bire Birliği		Bire bir				

GERİ BİLDİRİM

Bu geri bildirim sayesinde kendi cevabınızı kontrol edebilir, hatalarınızı düzelterek öğrenmenizi pekiştirebilirsiniz.

ÇÖZÜM 1.



ÇÖZÜM 2.

No	İşlem	Doğru	Yanlış	Doğru Hâli
1	$(x + 5)^2 = x^2 + 10x + 25$	☑	☐	
2	$(3x - 4)^2 = 9x^2 - 24x + 16$	☑	☐	
3	$(a + b)(a - b) = a^2 + b^2$	☐	☑	$a^2 - b^2$
4	$(2x + 3)^2 = 4x^2 + 9$	☐	☑	$4x^2 + 12x + 9$
5	$(m - 7)(m + 7) = m^2 + 49$	☐	☑	$m^2 - 49$
6	$(x + y)^2 - (x - y)^2 = 4xy$	☑	☐	

HATIRLATMA

Tam Kare Özdeşliği:

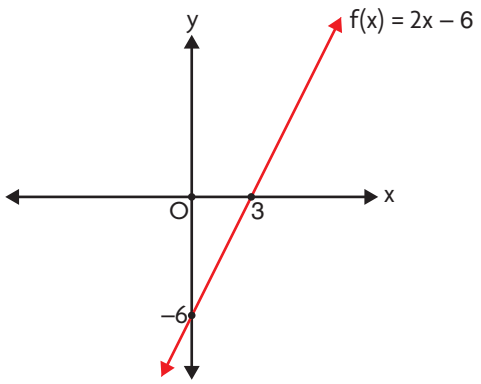
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

İki Kare Farkı Özdeşliği:

$a^2 - b^2 = (a - b)\cdot(a + b)$

ÇÖZÜM 3.



- Doğrusal fonksiyonun grafiği, x eksenini (**3**, 0) noktasında keser.
- Doğrusal fonksiyonun grafiği, y eksenini (0, **– 6**) noktasında keser.
- Doğrunun eğimi m = **2**'dir ve doğrusal fonksiyonunun eğimi **pozitif** yönlüdür.
- Doğrusal fonksiyonların genel kuralı y = mx + n biçimindedir. Burada m eğimi, n ise grafiğin **y eksenini** kestiği noktayı gösterir.

ÇÖZÜM 4.

1. y = 3x + 2 doğrusu, **pozitif** yönlü eğime sahiptir ve y-eksenini (0, **2**) noktasında keser.

2. y = – 2x + 2 doğrusu, **negatif** yönlü eğime sahiptir ve y-eksenini (0, **2**) noktasında keser.

3. y = 3x - 1 doğrusu, y = 3x + 2 doğrusuna göre **daha aşağı** konumdadır.

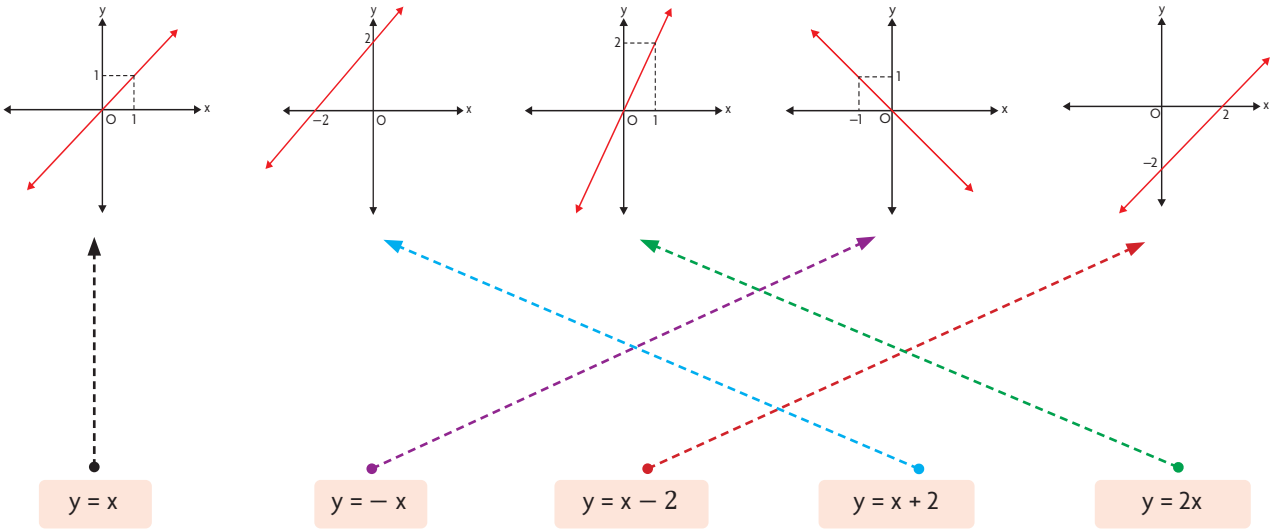
4. y = 0,5x + 2 doğrusu, y = 3x + 2 doğrusuna göre **daha yatık** eğime sahiptir.

5. y = 3x + 2 ve y = 3x – 4 doğruları **paralel** doğrulardır. Çünkü eğimleri birbirine **eşittir.**

6. y = – x + 2 doğrusu, eğimin işareti nedeniyle **sola yatık** bir grafiğe sahiptir.

7. y = 5x + 2 doğrusu, eğimin işareti nedeniyle **sağa yatık** bir grafiğe sahiptir.

ÇÖZÜM 5.1.



ÇÖZÜM 5.2.

1. y = x fonksiyonunun sabit terimi **sıfıra** eşittir.

2. y = x fonksiyonunun eğimi iki katına çıkarılırsa (y = 2x) grafik **daha dik** hâle gelir.

3. y = x fonksiyonunda sabit terimden 4 çıkarılırsa doğru **aşağı** yönde ötelenir.

4. y = x fonksiyonunda sabit terime 5 eklenirse doğru **yukarı** yönde ötelenir.

5. y = – x fonksiyonunun eğimi, y = x e göre **ters** yönlüdür.

6. y = x + 2 ve y = x – 2 doğruları, **x** eksenine göre simetriktir.

ÇÖZÜM 6.

Fonksiyon / Nitel Özellik		$f(x) = x$	$h(x) = 3x - 4$	$g(x) = 0{,}5x + 3$	$k(x) = -x + 7$	$n(x) = -4x - 5$
Tanım Kümesi		$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Görüntü Kümesi		$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
İşareti	+	$(0, \infty)$	$(\frac{4}{3}, \infty)$	$(-6, \infty)$	$(-\infty, 7)$	$(-\infty, -\frac{5}{4})$
	–	$(-\infty, 0)$	$(-\infty, \frac{4}{3})$	$(-\infty, -6)$	$(7, -\infty)$	$(-\frac{5}{4}, \infty)$
Sıfırı		0	$\frac{4}{3}$	-6	7	$-\frac{5}{4}$
Artan - Azalan Olma Durumu		Artan	Artan	Artan	Azalan	Azalan
Maksimum Değeri		Yok	Yok	Yok	Yok	Yok
Minimum Değeri		Yok	Yok	Yok	Yok	Yok
Bire Birliği		Bire bir	Bire bir	Bire bir	Bire bir	Bire bir

İLİŞKİLENDİRİYORUM

Amaç: Bu bölümde yeni öğreneceğiniz temayı; zihninizde var olan bilgileriniz, yaşantılarınız ve diğer derslerde öğrendiklerinizle ilişkilendirmenizi bekliyoruz.

Verilen örneği okuyunuz. Ardından soruları yanıtlayınız. Cevaplarınızı kendi yaşamınızdan ya da çevrenizden örneklerle destekleyiniz.

ETKİNLİK: GELİR FONKSİYONUNU KEŞFEDİYORUM

Günlük yaşamda birçok işletme, ürün veya hizmet fiyatlarını değiştirerek gelirlerini artırmaya çalışır. Fiyat ile müşteri sayısı arasındaki bu ilişkiyi analiz etmek, doğrusal fonksiyonların gerçek hayattaki bir uygulamasıdır.

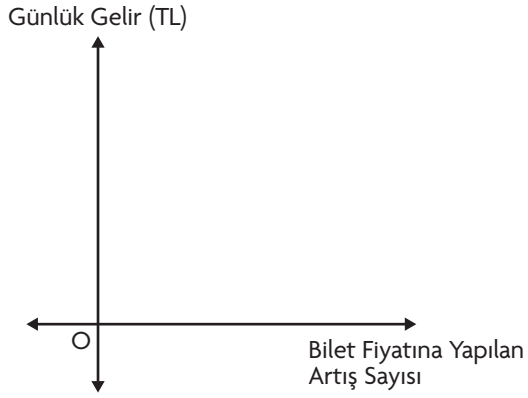
Bir sinema salonu hafta içi seanslarına ilgiyi artırmak için bilet fiyatlarını yeniden düzenlemeyi planlamaktadır. Başlangıçta bilet fiyatı 80 TL'dir. Fiyat her 5 TL artırıldığında seyirci sayısının 10 kişi azaldığı gözlemlenmiştir. Salonda en fazla 200 kişi film izleyebilmektedir.

1. Günlük gelir bilet fiyatına ve müşteri sayısına bağlı olduğuna göre günlük geliri temsil eden bir doğrusal fonksiyon oluşturunuz.

2. Aşağıdaki tabloyu tamamlayınız. (Bu etkinliğin geri bildirimi 11. sayfadadır.)

Artış Sayısı	Bilet Fiyatı (TL)	Seyirci Sayısı	Günlük Gelir (TL)
0	80	200	16 000
1	85	190	16 150
2	90		
3			
4			
5			
6			

3. Günlük gelirin bilet fiyatına yapılan 5 TL'lik artış sayısına göre değişimini grafik üzerinde gösteriniz.



4. Grafiği inceleyerek gelirdeki değişimin doğrusal bir ilişkiyi temsil edip etmediğini açıklayınız.

5. Doğrusal fonksiyonun artan ya da azalan olma durumunu bu örnek üzerinden yorumlayınız.

GERİ BİLDİRİM

Bu geri bildirimler sayesinde kendi cevabınızı kontrol edebilir, hatalarınızı düzelterek öğrenmenizi pekiştirebilirsiniz.

ETKİNLİK
ÇÖZÜM
1.

Bilet fiyatına yapılan 5 TL'lik artış sayısı x ile gösterilsin.

Başlangıç bilet fiyatı 80 TL olduğuna ve her seferinde bilet fiyatı 5 TL arttığına göre

$P(x) = (80 + 5x)$ TL olur.

Başlangıçta 200 kişi olan seyirci sayısı, her 5 TL artışta 10 kişi azaldığından

$S(x) = (200 - 10x)$ kişi olur.

Günlük geliri temsil eden fonksiyon:

Günlük gelir = (bilet fiyatı) × (seyirci sayısı)

$G(x) = P(x) \cdot S(x)$

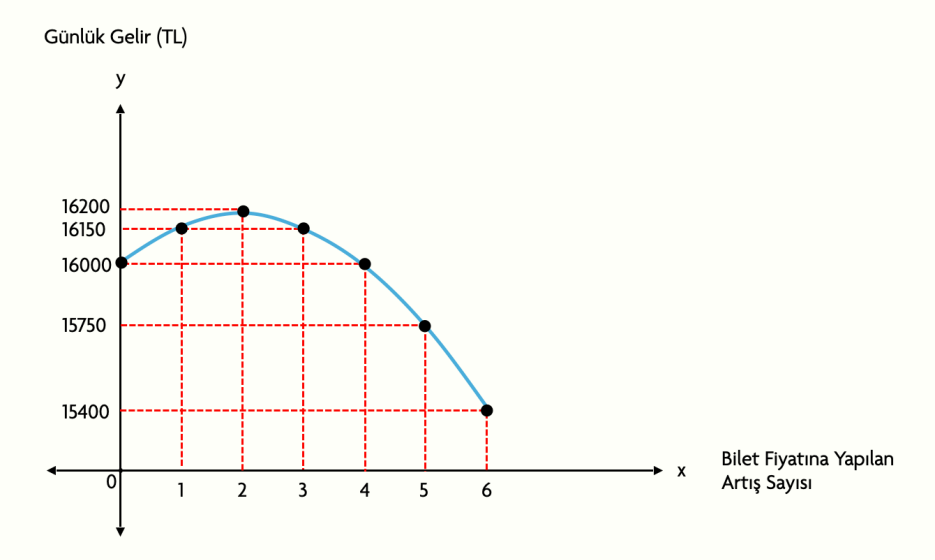
$G(x) = (80 + 5x)(200 - 10x)$

$G(x) = 16000 + 200x - 50x^2$ bulunur.

2.

Artış Sayısı	Bilet Fiyatı (TL)	Seyirci Sayısı	Günlük Gelir (TL)
0	80	200	16 000
1	85	190	16 150
2	90	180	16 200
3	95	170	16 150
4	100	160	16 000
5	105	150	15 750
6	110	140	15 400

3.



4.

Bu noktalar aynı doğru üzerinde değildir; gelir önce artmakta, sonra azalmaktadır.

Ardışık gelir farklarına bakılırsa

16000 → 16150 (+ 150)

16150 → 16200 (+ 50)

16200 → 16150 (– 50)

16150 → 16000 (– 150)

farklar sabit olmadığı için ilişki doğrusal değildir.

5.

P(x) = 80 + 5x → Bilet fiyatını gösteren, artan bir doğrusal fonksiyondur.

S(x) = 200 – 10x → Seyirci sayısını gösteren, azalan bir doğrusal fonksiyondur.

Bu örnek, iki doğrusal büyüklüğün çarpımının (gelirin) doğrusal olmayabileceğini; fiyat arttıkça, seyirci azalırken, gelirin bir süre artıp sonra azaldığını göstermektedir.

UYGULAYARAK ÖĞRENİYORUM

Amaç: Bu bölümde bilgilerinizi etkinlikler ve uygulamalarla pekiştirmenizi, öğrenmeyi daha kalıcı hâle getirmenizi amaçlıyoruz.

Deney, problem ya da etkinliklerde verilen adımları uygulayınız. Çalışmanızı dikkatli ve düzenli bir şekilde yapınız.

ÖRNEK

Bir barajda su seviyesi baraj duvarı yüksekliğine ulaştığında veya bu yüksekliği aştığında su çıkış vanası otomatik olarak açılmaktadır. Barajdaki su seviyesinin baraj duvarı yüksekliğine göre farkı, metrekareye düşen yağış miktarı x (mm) olmak üzere aşağıdaki fonksiyonla modellenmektedir.

$f(x) = -x^2 + 14x - 24$

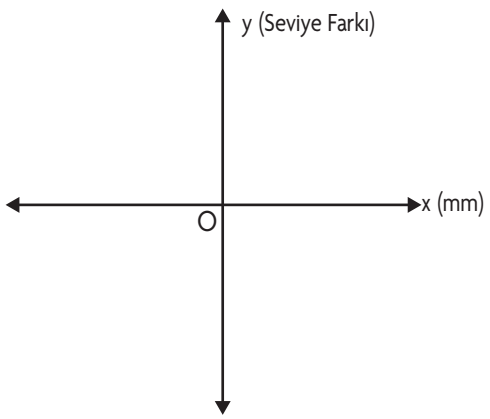
Burada $f(x) < 0$ iken su seviyesi duvar yüksekliğinden düşük, $f(x) = 0$ iken su seviyesi duvar yüksekliğine eşit, $f(x) > 0$ iken su seviyesi duvar yüksekliğinden yüksektir. Barajın taşmaması için yağış miktarına bağlı olarak bu farkın nasıl değiştiğinin incelenmesi gerekmektedir.

Buna göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) $f(x) = -x^2 + 14x - 24$ karesel fonksiyonunun sıfırlarını tam kareye tamamlama yöntemini kullaranarak bulunuz.

b) Tabloda verilmiş olan x değerleri için y = f(x) değerlerini hesaplayınız. Elde ettiğiniz değerleri kullanarak f fonksiyonunun grafik temsilini dik koordinat düzleminde gösteriniz.

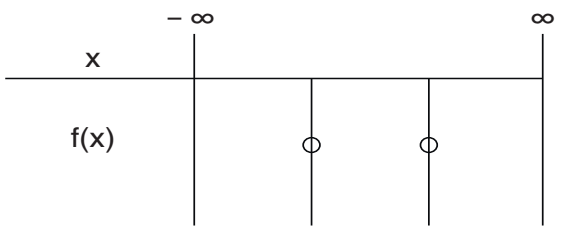
x	0	2	4	7	10	12	14
y = f(x)	–24						



c) f fonksiyonunun grafik temsilini ve tam kare formunu kullanarak aşağıdaki tabloyu doldurunuz.

Denklem ve Eşitsizlik	Çözüm Aralığı
$f(x) = 0$	
$f(x) < 0$	
$f(x) > 0$	
$f(x) \leq 0$	
$f(x) \geq 0$	

ç) $f(x) = -x^2 + 14x - 24$ fonksiyonunun cebirsel ifadesini tam kare formundan yararlanarak birinci dereceden çarpanlar şeklinde yazınız. Bu ifadeden yararlanarak f fonksiyonu için işaret tablosu oluşturunuz.



d) Elde ettiğiniz kökleri yorumlayarak barajda su seviyesinin duvar yüksekliğiyle eşit olduğu zamana ait yağış miktarlarını belirtiniz.

e) Barajdaki su seviyesinin duvar yüksekliğinden fazla olduğu zamana ait yağış miktarlarını bulunuz.

f) Barajdaki su seviyesinin duvar yüksekliğinden az olduğu zamana ait yağış miktarlarını bulunuz.

g) f fonksiyonu ile eşitsizlik bileşeni arasında kurulmuş $f(x) \leq 0$ ilişkisinin problem bağlamındaki anlamını sözel olarak ifade ediniz.

ğ) f fonksiyonu ile eşitsizlik bileşeni arasında kurulmuş $f(x) \geq 0$ ilişkisinin problem bağlamındaki anlamını sözel olarak ifade ediniz.

ÇÖZÜM

a) $f(x) = -x^2 + 14x - 24$ fonksiyonunun sıfırlarını tam kare yöntemiyle bulmak için fonksiyon –1 parantezine alınır ve düzenlenirse

$f(x) = -(x^2 - 14x + 24)$

$f(x) = -(x^2 - 14x + 49 - 49 + 24)$

$f(x) = -(x^2 - 14x + 49) + 49 - 24$

$f(x) = -(x - 7)^2 + 25$ olur.

Sıfırları bulmak için $f(x) = 0$ yazılır.

$-(x - 7)^2 + 25 = 0$

$(x - 7)^2 = 25$

$x - 7 = \pm 5$

Buradan

$x = 7 + 5 = 12$

$x = 7 - 5 = 2$ olduğundan

fonksiyonun sıfırları $x = 2$ ve $x = 12$ bulunur.

b) Verilen x değerleri için $y = f(x)$ değerleri ise

$f(x) = -x^2 + 14x - 24$

$x = 0$ için $f(0) = -0 + 0 - 24 = -24$

$x = 2$ için $f(2) = -4 + 28 - 24 = 0$

$x = 4$ için $f(4) = -16 + 56 - 24 = 16$

$x = 7$ için $f(7) = -49 + 98 - 24 = 25$

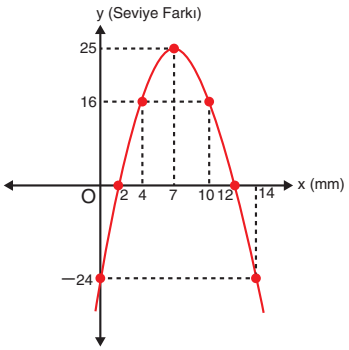
$x = 10$ için $f(10) = -100 + 140 - 24 = 16$

$x = 12$ için $f(12) = -144 + 168 - 24 = 0$

$x = 14$ için $f(14) = -196 + 196 - 24 = -24$ bulunur.

Bu noktalar dik koordinat düzlemine işaretlendiğinde tepe noktası (7, 25) olan, kolları aşağı yönlü açılan bir parabol elde edilir. Grafik x eksenini (2, 0) ve (12, 0) noktalarında keser.

x	0	2	4	7	10	12	14
y = f(x)	–24	0	16	25	16	0	– 24



c)

Denklem ve Eşitsizlik	Çözüm Aralığı
$f(x) = 0$	$x = 2,\ x = 12$
$f(x) < 0$	$(-\infty, 2) \cup (12, \infty)$
$f(x) > 0$	$(2, 12)$
$f(x) \leq 0$	$(-\infty, 2] \cup [12, \infty)$
$f(x) \geq 0$	$[2, 12]$

ç)

$f(x) = -(x-7)^2 + 25$

$f(x) = -(x-7+5) \cdot (x-7-5)$

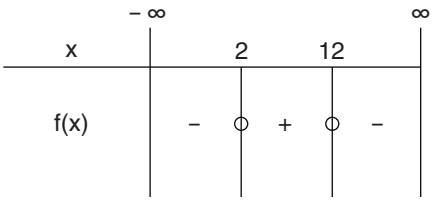
$f(x) = (x-2) \cdot (12-x)$

$(x-2) \cdot (12-x) = 0$

$(x-2) = 0 \Rightarrow x = 2$

$(12-x) = 0 \Rightarrow x = 12$

Fonksiyonun sıfırları 2 ve 12'dir.



d)

Barajda su seviyesinin duvar yüksekliğiyle eşit olduğu zamana ait yağış miktarları

$f(x) = 0$ olduğu değerlerdir.

$f(x) = 0 \rightarrow x = 2$ ve $x = 12$

Yağış miktarı 2 cm ve 12 cm olduğunda su seviyesi duvar yüksekliğine eşittir.

e)

Barajdaki su seviyesinin duvar yüksekliğinden fazla olduğu zamana ait yağış miktarları $f(x) > 0$ olduğu aralıktadır.

$f(x) > 0 \rightarrow 2 < x < 12$

Su seviyesi, yağış miktarı 2 cm ile 12 cm arasındayken duvar yüksekliğinden daha fazladır.

f)

Barajdaki su seviyesinin duvar yüksekliğinden az olduğu zamana ait yağış miktarları $f(x) < 0$ olduğu aralıktadır.

$f(x) < 0 \rightarrow x < 2$ ve $x > 12$

Yağış miktarı 2 cm'den az veya 12 cm'den fazla olduğunda su seviyesi duvar yüksekliğinden azdır.

g)

$f(x) \leq 0$, su seviyesinin duvar yüksekliğine eşit ya da duvar yüksekliğinden az olduğunu ifade eder. Yağış miktarı öyle değerler alır ki barajdaki su seviyesi duvarı aşmaz; su, ya tam duvar hizasında kalır ya da duvar yüksekliğinin altında olur.

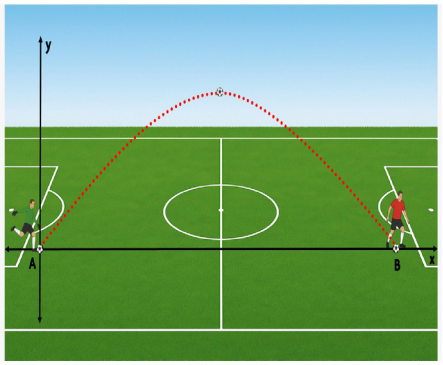
Bu durumda baraj, taşma tehlikesi altında değildir.

ğ)

$f(x) \geq 0$, su seviyesinin duvar yüksekliğine eşit ya da duvar yüksekliğinden fazla olduğunu ifade eder. Yağış miktarı öyle değerler alır ki barajdaki su seviyesi; en az duvar hizasındadır, duvarla aynı seviyede olabilir veya duvar yüksekliğini aşabilir.

ÖRNEK

Düz bir futbol sahasının zemininde bulunan top, kaleci tarafından takım arkadaşı olan oyuncuya havadan atılmıştır. Topun yatayda aldığı mesafe x (metre) ve yerden yüksekliği f(x) (metre) olmak üzere topun izlediği yol $f(x) = -x^2 + 6x$ fonksiyonu ile modellenmiştir. Bu durum dik koordinat sistemi kullanılarak gösterilmiştir.



Topun çıkabileceği maksimum yüksekliği, en yüksek noktaya ulaştığında yatayda kaç metre yol aldığını, topun yere düştüğü nokta ile ilk atış yapıldığı nokta arasındaki mesafeyi bulunuz. (Dik koordinat sisteminde 1 birim 1 metreye karşılık gelmektedir.)

Aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) f fonksiyonunun cebirsel temsilinden yararlanarak fonksiyonun sıfırlarını tam kareye tamamlama yöntemi ile bulunuz.

b) f fonksiyonunun grafik temsilini dik koordinat düzlemi üzerine çiziniz.

c) f fonksiyonunun x eksenini kestiği noktalar arasındaki uzaklığın kaç metre olduğunu bulunuz.

d) f fonksiyonuna ait grafiğin maksimum noktasını bulunuz.

ÇÖZÜM

a)

f fonksiyonunun sıfırlarını tam kare yöntemiyle bulmak için

$f(x) = -x^2 + 6x$

$f(x) = -(x^2 - 6x + 9 - 9)$

$f(x) = -[(x^2 - 6x + 9) - 9]$

$f(x) = -[(x - 3)^2 - 9]$

$f(x) = -(x - 3)^2 + 9$

şeklinde düzenlendikten sonra ifade sıfıra eşitlenir.

$-(x - 3)^2 + 9 = 0$

$(x - 3)^2 = 9$

$x - 3 = \pm 3$

$x = 0$ ve $x = 6$ bulunur.

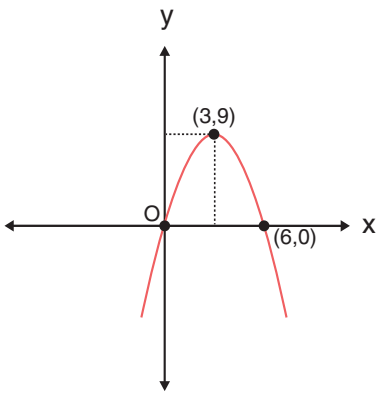
Fonksiyonun x eksenini kestiği noktalar (0, 0) ve (6, 0) dır.

b)

$f(x) = -x^2 + 6x$

(0, 0) ve (6, 0) noktalarında x eksenini kesen,

kolları aşağı doğru açılan bir karesel fonksiyondur.



c)

f fonksiyonunun x eksenini kestiği (0, 0) ve (6, 0) noktaları arasındaki yatay uzaklık 6 – 0 = 6 birimdir.

Dik koordinat sisteminde 1 birim 1 metreye karşılık geldiğinden topun yerden ilk atıldığı nokta ile yere düştüğü nokta arasındaki yatay uzaklık 6 metredir.

d)

f fonksiyonunun tam kare formu olan

$f(x) = -(x - 3)^2 + 9$

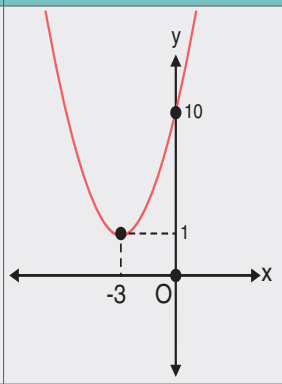
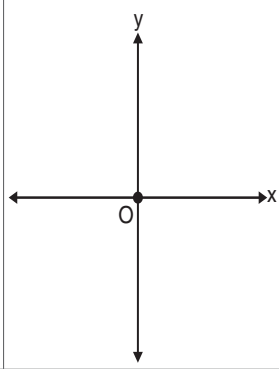
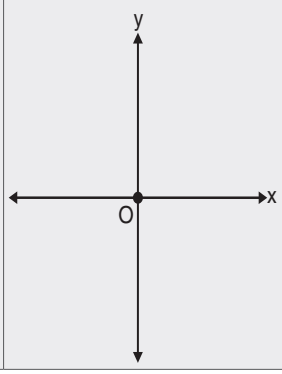
ifadesi en büyük değerini $x = 3$ iken alır.

$x = 3$ için $f(3) = 9$ olduğuna göre grafiğin maksimum noktası (3, 9) dur.

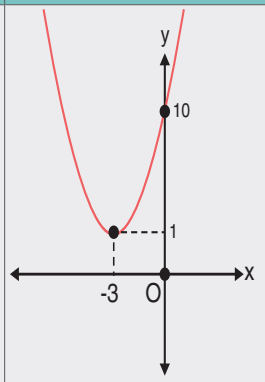
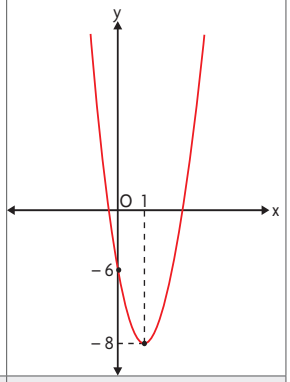
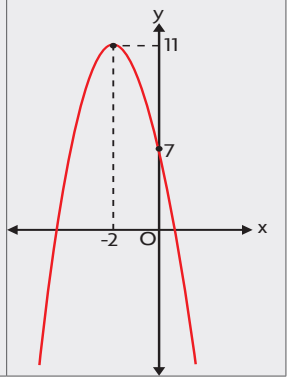
Top, yerden en fazla 9 metre yükseğe çıkar ve bu yükseklik, yatayda atış noktasından 3 metre uzaklıkta iken elde edilir.

ÖRNEK

Aşağıdaki tabloda fonksiyonun cebirsel ifadesi, tam kare formu, cebirsel ifadelerin katsayıları, maksimum-minimum noktaları ve değerleri verilmiştir. Verilen örneği inceleyerek tabloyu uygun şekilde doldurunuz.

Fonksiyon $f(x) = ax^2 + bx + c$	**Fonksiyonun Tam Kare Formu**	**Maksimum Noktası ve Değeri**	**Minimum Noktası ve Değeri**	**a nın İşareti**	**a, b, c Değerleri**	$-\frac{b}{2a}$	$f(-\frac{b}{2a})$	**Fonksiyonun Grafiği**
$g(x) = x^2 + 6x + 10$	$g(x) = (x + 3)^2 + 1$	Yoktur.	Fonksiyon $x = -3$ için minimum değerini alır. Minimum değeri 1'dir.	+	a = 1 b = 6 c = 10	$-\frac{6}{2} = -3$	g(-3) = 1	
$h(x) = 2x^2 - 4x - 6$								
$m(x) = -x^2 - 4x + 7$								

ÇÖZÜM

Fonksiyon $f(x) = ax^2 + bx + c$	Fonksiyonun Tam Kare Formu	Maksimum Noktası ve Değeri	Minimum Noktası ve Değeri	a nın İşareti	a, b, c Değerleri	$-\frac{b}{2a}$	$f(-\frac{b}{2a})$	Fonksiyonun Grafiği
$g(x) = x^2 + 6x + 10$	$g(x) = (x + 3)^2 + 1$	Yoktur.	Fonksiyon $x = -3$ için minimum değerini alır. Minimum değeri 1'dir.	+	$a = 1$ $b = 6$ $c = 10$	$-\frac{6}{2} = -3$	$g(-3) = 1$	
$h(x) = 2x^2 - 4x - 6$	$h(x) = 2(x - 1)^2 - 8$	Yoktur.	Fonksiyon $x = 1$ için minimum değerini alır. Minimum değeri -8'dir.	+	$a = 2$ $b = -4$ $c = -6$	$-\frac{-4}{2 \cdot 2} = 1$	$h(1) = -8$	
$m(x) = -x^2 - 4x + 7$	$m(x) = -(x + 2)^2 + 11$	Fonksiyon $x = -2$ için maksimum değerini alır. Maksimum değeri 11'dir.	Yoktur.	−	$a = -1$ $b = -4$ $c = 7$	$-\frac{-4}{2 \cdot -1} = -2$	$m(-2) = 11$	

SONUÇ:

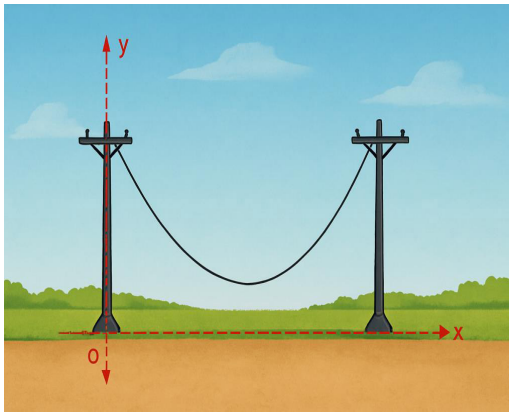
a, b, c gerçek sayılar ve a sıfırdan farklı olmak üzere gerçek sayılarda tanımlı $f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunun maksimum-minimum noktası $(-\frac{b}{2a}, f(-\frac{b}{2a}))$ ile bulunur.

$a > 0$, $x = -\frac{b}{2a}$ için minimum değeri vardır ve bu değer $f(-\frac{b}{2a})$ ile hesaplanır.

$a < 0$, $x = -\frac{b}{2a}$ için maksimum değeri vardır ve bu değer $f(-\frac{b}{2a})$ ile hesaplanır.

ÖRNEK

Yandaki görselde iki elektrik direği ve aralarında bulunan tel gösterilmiştir. Tel, sıcaklık artışına bağlı olarak iki direk arasında sarkmaktadır. Telin yerden yüksekliği, sol direğin bulunduğu noktadan itibaren yatay uzaklığa bağlı olarak bir karesel fonksiyon ile modellenmektedir.



Elektrik şirketinin ölçüm amacıyla kullandığı koordinat sisteminde

• x ekseni zemini göstermektedir.

• y ekseni sol direğin gövdesi boyunca uzanmaktadır.

İki direk arasındaki yatay uzaklık 20 metredir.

Bu koordinat sisteminde telin yerden yüksekliği

$h(x) = x^2 - 4x + 7$

fonksiyonu ile modellenmektedir. (Yükseklik metre cinsindendir.)

Buna göre

a) Telin yere en yakın olduğu noktanın koordinatlarını tam kareye tamamlama yöntemiyle bulunuz.

b) Telin yerden minimum yüksekliğini belirleyiniz.

ÇÖZÜM

a) Fonksiyon tam kareye tamamlanırsa

$h(x) = x^2 - 4x + 7$

$x^2 - 4x + 7 = (x^2 - 4x + 4) - 4 + 7 = (x - 2)^2 + 3$

$x = 2$ ve $h(2) = 3$ bulunur. Telin yere en yakın olduğu noktanın koordinatları (2, 3) tür.

b) $h(x) = x^2 - 4x + 7$ fonksiyonu için $x = -\frac{-4}{2 \cdot 1} = 2$ ve $h(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 7 = 3$ bulunur. Telin yerden minimum yüksekliği 3 metredir.

ÖRNEK

Bir lisenin doğa kulübü, bir millî parka gezi yapmayı planlamaktadır. Kulüp, geziye en az 40 öğrencinin katılacağını bildiği için kişi başı gezi ücretini 500 TL olarak belirlemiştir.

Geziye katılan öğrenci sayısının 40'tan fazla olması hâlinde, 40 kişinin üzerindeki her bir öğrenci için tüm katılımcılara 5 TL geri ödeme yapılacaktır.

Buna göre

a) Gezi için alınan toplam ücretin katılan kişi sayısına göre değişimini modelleyen fonksiyonun cebirsel temsilini yazınız. Fonksiyonun grafiğini çiziniz.

b) Gezi için alınan toplam ücretin en fazla olabilmesi için geziye kaç öğrencinin katılması gerektiğini bulunuz. Bu problem durumu fonksiyonun hangi nitel özelliği ile açıklanır? Yazınız.

c) Gezi için alınan toplam ücretin en fazla kaç TL olabileceğini bulunuz.

ç) Kulüp bu geziyi düzenlemek için anlaşma yaptığı firmaya 24 000 TL ödeme yapacaktır. Toplanan ücretten bu ödemeyi yapabilmesi, kâr veya zarar etmemesi için en fazla kaç öğrencinin geziye katılması gerektiğini bulunuz.

ÇÖZÜM

a) Geziye katılan kişi sayısına bağlı toplam ücret (TL), uygun bir aralıkta tanımlı f fonksiyonu ile modellenir. Buradan

x : Geziye katılan kişi sayısı, f(x) : Gezi için alınan toplam ücret ve x ≥ 40 olmak üzere

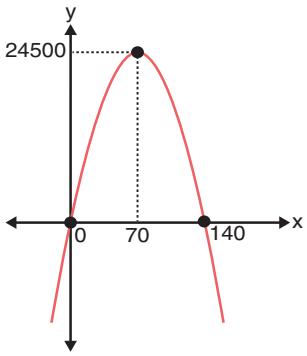
f(x) = (kişi başı ücret)×(kişi sayısı)

f(x) = (500 – 5(x – 40)) • x

f(x) = (500 – 5x + 200)) • x

f(x) = (700 – 5x) • x

$f(x) = 700x - 5x^2$ olur.



b) Problemde f fonksiyonun nitel özelliklerinden maksimum nokta istenmektedir. Bunun için

Cebirsel İnceleme

$f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonu maksimum veya minimum değerini $x = -\frac{b}{2a}$ noktasında alır.

$f(x) = 700x - 5x^2$ fonksiyonunda a= – 5, b = 700 olduğunda $x = -\frac{700}{2(-5)} = 70$ olur.

Grafik ile inceleme

Yukarıdaki grafik incelendiğinde fonksiyonun sıfırlarının x = 0 ve x = 140 olduğu görülmektedir. Fonksiyon maksimum değerini bu noktaların orta noktasında alır. x = 70 olmalıdır.

Gezi için alınan toplam ücretin en fazla olabilmesi için geziye katılan kişi sayısı 70 olmalıdır.

c) Bu problemde fonksiyonun maksimum değeri sorulmaktadır. Geziye 70 kişi katıldığında toplanan ücret maksimum değerine ulaşır. Buna göre

$f(70) = 700 \cdot 70 - 5 \cdot 70^2 = 70 \cdot (700 - 350) = 24\,500$ TL olur.

a maddesinde yer alan grafik incelendiğinde x = 70 noktasında fonksiyonun değerinin 24 500 olduğu görülmektedir.

ç) Kulübün gezi için toplanan ücretten kâr veya zarar etmemesi için f(x) = 24 000 olmalıdır.

$f(x) = 700x - 5x^2 = 24\,000$ ise $5x^2 - 700x + 24\,000 = 0$

$5 \cdot (x^2 - 140x + 4800) = 0$

$5 \cdot (x^2 - 140x + 4900 - 100) = 0$

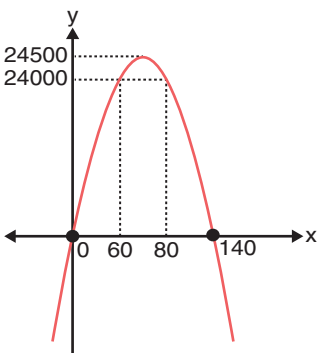
$5 \cdot [(x - 70)^2 - 10^2] = 0$

$(x - 70)^2 - 10^2 = 0$

$(x - 70 - 10) \cdot (x - 70 + 10) = 0$

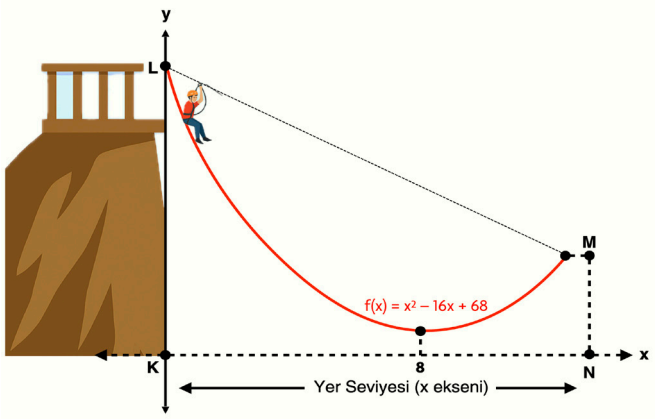
$(x - 80) \cdot (x - 60) = 0$ ise x = 80 veya x = 60 olur.

Bu durumda gezi kulübünün kâr veya zarar etmemesi için en çok 80 kişinin geziye katılması gerekir.



SIRA SİZDE 1.

Bir zipline (halat üzerinde kayma) parkuru, K noktası orijin olacak şekilde verilen dik koordinat düzleminde gösterilmiştir. Bir macera sporcusu L noktasındaki platformdan harekete başlayarak aşağı doğru kaymakta ve hareketi $f(x) = x^2 - 16x + 68$ fonksiyonunun grafiğinin bir kısmı ile modellenmektedir.



Sporcu bu eğri boyunca ilerleyerek en düşük noktaya ulaştıktan sonra tekrar yükselmekte ve M noktasında (grafiğin sağ tarafında) hareketine devam etmektedir.

L noktasının x eksenine olan dik uzaklığı, sporcunun yer seviyesine göre başlangıç yüksekliğini göstermektedir.

Buna göre

a) Sporcu platformdan yer seviyesine göre kaç metre yükseklikten harekete başlamıştır?

b) Sporcu, parkur boyunca yer seviyesine en yakın olduğu noktada yerden kaç metre yüksekliktedir?

ÖRNEK

Bir hava gösterisinde aynı koridorda uçan iki akrobasi uçağının gösterinin başlangıcından x saniye sonra deniz seviyesinden olan yükseklikleri (metre cinsinden)

$f(x) = 2x^2 - 10x + 28$

$g(x) = x^2 - 4x + 20$

fonksiyonları ile modellenmiştir.

Burada x, gösterinin başlangıcından itibaren geçen süreyi; f(x) ve g(x), uçakların deniz seviyesinden olan yüksekliklerini ifade etmektedir.

Buna göre g uçağının yüksekliğinin f uçağının yüksekliğinden daha az olduğu zaman aralığını bulunuz.

ÇÖZÜM

g(x) < f(x) olduğu zaman aralığı istenmektedir.

$x^2 - 4x + 20 < 2x^2 - 10x + 28$

eşitsizliği düzenlenirse

$x^2 - 6x + 8 > 0$ olur.

Eşitsizliğin tam kareye tamamlama yöntemiyle çarpanları bulunursa

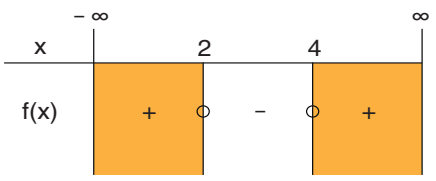
$x^2 - 6x + 8 = 0$

$x^2 - 6x + 9 - 9 + 8 = 0$

$(x - 3)^2 - 1 = 0$

$x - 3 = 1$ veya $x - 3 = -1$

$x = 4$ veya $x = 2$ bulunur.



İşaret tablosuna bakılırsa eşitsizliğin sağlandığı aralıkların $(-\infty, 2)$ veya $(4, \infty)$ olduğu görülür. Ancak zaman negatif olamayacağından g uçağının yüksekliğinin f uçağının yüksekliğinden daha az olduğu zaman aralığı $[0, 2) \cup (4, \infty)$ dır.

ÖRNEK

Bir bal üretim tesisinde çiçek balı ve çam balı olmak üzere iki farklı bal türü üretilmektedir. Yapılan çalışmalar sonucunda çiçek balının bir kavanozundan elde edilen kârın maliyetle ters orantılı, çam balının bir kavanozundan elde edilen kârın maliyetle doğru orantılı olduğu belirlenmiştir.

Çiçek balının maliyeti 10 TL iken kârı 20 TL, çam balının maliyeti 10 TL iken kârı 5 TL olmaktadır.

Tesis sahibi, hangi tür balın hangi maliyet düzeyinde daha kârlı olduğunu belirlemek amacıyla her iki bal türünün kârının maliyete bağlı değişimini gösteren fonksiyonları sırasıyla f ve g ile modellemektedir.

Buna göre

a) f ve g fonksiyonlarının cebirsel ifadelerini yazınız.

b) Çiçek balı ve çam balından aynı miktarda kâr elde edilmesi için maliyetlerin kaç TL olması gerektiğini gösteren eşitliği yazarak çözümünü bulunuz.

ÇÖZÜM

a)

İki değişkenin değerleri değişirken çarpımları sabit kalıyorsa bu iki değişken birbiriyle ters orantılıdır. Çiçek balı için x maliyet, f(x) kârdır. Kâr ile maliyet ters orantılı ise

$f(x) = \frac{k}{x} (k \in \mathbb{R} - \{0\})$ olmalıdır.

Çiçek balının maliyeti x = 10 TL iken kârı f(x) = 20 TL olduğuna göre $20 = \frac{k}{10}$ eşitliğinden k = 200 bulunur.

Buna göre f fonksiyonunun cebirsel temsili $f(x) = \frac{200}{x}$ olur.

İki değişkenin değerleri değişirken bu değişkenlerin oranları sabit kalıyorsa bu iki değişken birbiriyle doğru orantılıdır.

Çam balı için x maliyet g(x) kârdır ve kâr ile maliyet doğru orantılı ise

$g(x) = k.x (k \in \mathbb{R} - \{0\})$ olmalıdır.

Çam balının maliyeti x = 10 TL iken kârı g(x) = 5 TL olduğuna göre $5 = k \cdot 10$ ise $k = \frac{1}{2}$ bulunur.

Buna göre g fonksiyonunun cebirsel temsili $g(x) = \frac{1}{2} x$ olur.

b)

Üretilen çiçek balı ve çam balının kârlarının eşit olması için f(x) = g(x) olmalıdır.

$\frac{200}{x} = \frac{1}{2}x \Rightarrow 400 = x^2 \Rightarrow x = 20$ veya $x = -20$

bulunur. Maliyet pozitif bir değer olduğundan x = 20 TL olmalıdır.

Bu durumda çiçek balı ve çam balından elde edilen kârların eşit olabilmesi için her iki ürünün maliyeti de 20 TL olmalıdır.

ÖRNEK

Bir kum saatinde üst haznedeki kum yüksekliğinin zamana (t) bağlı değişimi

$f(t) = d - t^2$ fonksiyonu ile modellenmektedir.

Başlangıçta kum yüksekliği 64 birim olduğuna göre geçen zamanın haznedeki kum yüksekliğine bağlı değişimini veren g(t) fonksiyonunun cebirsel temsilini yazınız.

ÇÖZÜM

Verilen modele göre kum yüksekliği ile zaman arasındaki ilişki

$f(t) = d - t^2$

şeklindedir. Başlangıçta t = 0 anında kum yüksekliği 64 birim olduğundan

$f(0) = d - 0^2 \Rightarrow d = 64$

olur. Buna göre fonksiyon

$f(t) = 64 - t^2$ şeklindedir.

Bu fonksiyon geçen zamana bağlı kum yüksekliğini vermektedir.

g(t) ise haznedeki kum yüksekliğini geçen zamana bağlı olarak veren fonksiyondur. Bu nedenle f fonksiyonunun tersinin bulunması gerekir.

$f(t) = 64 - t^2$

$y = 64 - t^2$

$t^2 = 64 - y$

$y^2 = 64 - t \Rightarrow y = \pm \sqrt{64 - t}$ bulunur. Burada y, zamanı temsil ettiği için negatif değer alamaz. Bu nedenle pozitif kök alınır.

Geçen zamanı kum yüksekliğine göre veren fonksiyon $g(t) = \sqrt{64 - t}$ bulunur.

SIRA SİZDE 2.

Mahallede bulunan A ve B fırınları, sabah saatlerinde simit satışına başlamış ve başlangıçta simidin satış fiyatı 10 TL, günlük satış miktarı ise 50 adet olarak belirlenmiştir. Bir süre sonra iki fırın da kârlarını artırmak için fiyat politikalarını aşağıdaki gibi değiştirmiştir.

- A fırını, simidin fiyatını her gün 1 TL artırdığında günlük satış miktarı 2 adet azalmaktadır.
- B fırını, simidin fiyatını her gün 2 TL artırdığında günlük satış miktarı 3 adet azalmaktadır.

Kampanya sonrasında A fırınının x günde yaptığı kazanç f, B fırınının x günde yaptığı kazanç g fonksiyonları ile modellenmiştir.

Buna göre

a) f ve g fonksiyonlarının cebirsel ifadelerini yazınız.

b) B fırınının kazancının A fırınının kazancından daha fazla olduğu durumları gösteren eşitsizliğin cebirsel ve grafik temsilini bulunuz. Bu eşitsizliğe karşılık gelen işaret tablosunu oluşturunuz.

GERİ BİLDİRİM

Bu geri bildirim sayesinde kendi cevabınızı kontrol edebilir, hatalarınızı düzelterek öğrenmenizi pekiştirebilirsiniz.

SIRA SİZDE 1.

ÇÖZÜM

a) Platform noktası olan L noktası, koordinat düzleminde x = 0 noktasına karşılık gelir.

Başlangıç yüksekliğini bulmak için fonksiyonda x = 0 yazılırsa

$f(0) = 0^2 - 16 \cdot 0 + 68 = 68$

Sporcu zipline parkuruna yerden 68 metre yükseklikten başlamıştır.

b) Verilen parabol yukarı yönlüdür ve minimum değeri tepe noktasında alır.

$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-16}{2 \cdot 1} = 8$ için $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = f(8) = 8^2 - 16 \cdot 8 + 68 = 4$ metre bulunur.

Sporcu parkur boyunca en düşük konumunda yerden 4 metre yüksektedir.

SIRA SİZDE 2.

ÇÖZÜM

a)

$f(x) = (10 + x) \cdot (50 - 2x) = 500 - 20x + 50x - 2x^2 = -2x^2 + 30x + 500$

$g(x) = (10 + 2x) \cdot (50 - 3x) = 500 - 30x + 100x - 6x^2 = -6x^2 + 70x + 500$

b)

B fırınının kazancının A fırınının kazancından fazla olduğunu gösteren eşitsizliğin cebirsel temsili g(x) > f(x) olur.

$-6x^2 + 70x + 500 > -2x^2 + 30x + 500$

$0 > -2x^2 + 30x + 500 + 6x^2 - 70x - 500$

$0 > 4x^2 - 40x$

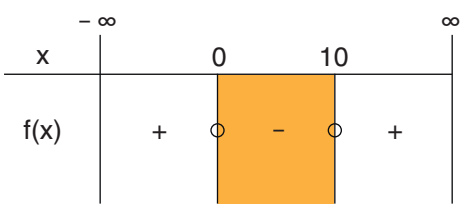
$h(x) = 4x^2 - 40x < 0$ eşitsizliği, cebirsel temsil veya grafik ile çözülebilir.

$h(x) = 4x^2 - 40x = 4 \cdot (x^2 - 10x) = 4 \cdot (x^2 - 10x + 25 - 25) = 4 \cdot [(x - 5)^2 - 25]$

$= 4 \cdot [(x - 5 - 5) \cdot (x - 5 + 5)]$

$h(x) = 4 \cdot (x - 10) \cdot (x) = 0$ olur. Buradan

x = 10 ve x = 0 değerleri h(x) fonksiyonun sıfırlarıdır. Bu değerler için işaret tablosu yapılır.



$h(x) = 4x^2 - 40x < 0$ olduğu aralık (0, 10) dır. Buna göre,

B fırınının kazancı; 1, 2, ..., 9. günlerde A fırınının kazancından fazladır.

DEĞERLENDİRİYORUM

Amaç: Bu bölümde öğrendiklerinizi gözden geçirmenizi, kendi öğrenme sürecinizi değerlendirmenizi ve eksiklerinizi fark etmenizi amaçlıyoruz.

Soruları dikkatle yanıtlayınız. Cevaplarınızı geri bildirimlerle karşılaştırarak eksik gördüğünüz noktaları tekrar ediniz.

SORULAR

1. Bir üçgenin bir kenarının uzunluğu (12 – 2x) birim, bu kenara ait yüksekliğin uzunluğu ise 3x birimdir.

Buna göre bu üçgenin alanı en çok kaç birimkaredir?

2. Hava direnci ihmal edilirse bir cismin serbest düşme hareketi aşağıdaki gibi karesel bir fonksiyonla modellenebilir.

$$h(t) = h_0 - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

Burada

•h(t), t anındaki cismin yerden yüksekliği (metre);

•h_0, cismin başlangıç yüksekliği;

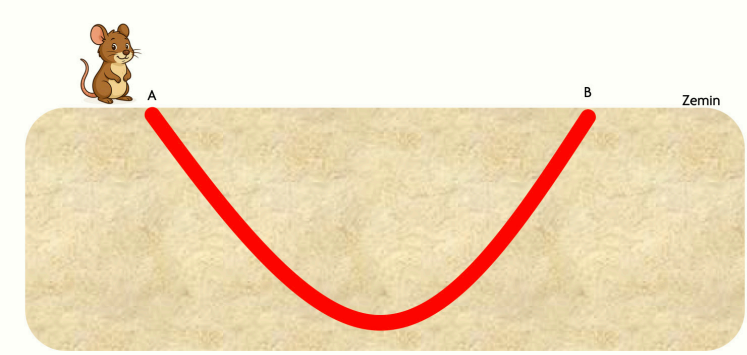
•g, yer çekimi ivmesi (yaklaşık 10 m/s^2);

•t, geçen zamandır (saniye).

Başlangıçta bulunduğu yükseklik h_0 = 500 metre olan bir cisim serbest bırakılmıştır.

Buna göre cismin 3 saniye sonra yerden yüksekliğinin kaç metre olduğunu bulunuz.

3. Zemin üzerinde bulunan A noktasındaki yuvasından çıkan bir tarla faresi; aşağıdaki şekilde kırmızı renkle gösterilen yolu izleyerek yer altına girmekte, bir süre tünelde ilerledikten sonra B noktasındaki delikten tekrar zemine çıkmaktadır.



Tarla faresinin bu hareketi sırasında zeminden kaç metre derinde olduğunu dakika türünden zamana göre gösteren fonksiyon

$f(t) = t^2 - 8t + 12$

şeklinde modellenmektedir.

(Burada t, dakika cinsinden geçen süreyi; f(t) ise farenin metre cinsinden zemine olan uzaklığını göstermektedir.)

Buna göre tarla faresi yer altında kaç dakika kalmıştır?

4. Bir seramik atölyesinde A ve B kupaları üretilmektedir.

A kupasının satışından elde edilen kârın maliyet fiyatı ile ters orantılı olduğu bilinmektedir. A kupasının maliyeti 2 TL iken kârı 12 TL'dir.

B kupasının satışından elde edilen kâr ise her zaman maliyet fiyatından 2 TL fazladır.

Atölye sahibi kupaların maliyetine göre elde edilen kârı incelemek için A ve B kupalarından elde edilen kârın maliyete bağlı değişimini gösteren fonksiyonları sırasıyla f ve g ile modellemiştir.

Buna göre

a) f ve g fonksiyonlarının cebirsel ifadelerini yazınız.

b) A ve B kupalarının satışından eşit miktarda kâr elde edebilmek için maliyetin kaç TL olması gerektiğini gösteren ifadenin cebirsel temsilini yazarak maliyeti hesaplayınız.

5. Bir çerçeve atölyesi, kare biçiminde dekoratif bir tablo üretmektedir. Tablonun üretim maliyeti, tablonun alanı üzerinden santimetrekare başına 5 TL olarak hesaplanmaktadır. Tablonun satış fiyatı ise tablonun çevre uzunluğu üzerinden santimetre başına 15 TL olarak belirlenmiştir.

Buna göre tablonun satışından elde edilebilecek en yüksek kârın kaç TL olduğunu ve bu kârın elde edilmesini sağlayan tablonun bir kenarının uzunluğunun kaç santimetre olduğunu bulunuz.

GERİ BİLDİRİM

Bu geri bildirim sayesinde kendi cevabınızı kontrol edebilir, hatalarını düzelterek öğrenmenizi pekiştirebilirsiniz.

ÇÖZÜM 1.

Soruda verilen kenar uzunluğu (12 – 2x) birim, bu kenara ait yükseklik ise 3x birimdir.

Bu değerler alan bağıntısında yerine yazılırsa

$A(x) = \frac{1}{2} \cdot (12 - 2x) \cdot (3x)$ elde edilir.

Bu ifade düzenlenerek alan fonksiyonu elde edilir.

$A(x) = 18x - 3x^2$

Bu fonksiyon;

$A(x) = ax^2 + bx + c$ biçiminde olup, $a = -3 < 0$ olduğundan en büyük değerini $x = -\frac{b}{2a}$ noktasında alır. Buna göre

$x = -\frac{18}{2(-3)} = 3$ 'tür.

Alan fonksiyonunda x = 3 değeri yerine yazıldığında

$A(3) = 18 \cdot 3 - 3 \cdot 3^2 = 54 - 27 = 27$ birimkare bulunur.

Üçgenin alanı en fazla 27 birimkare olur.

ÇÖZÜM 2.

Serbest düşme hareketinde yükseklik,

$h(t) = h_0 - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$

bağıntısıyla modellenir. $h_0 = 500$ metre, $g = 10\ m/s^2$, t = 3 saniye

Bu değerler bağıntıda yerine yazılırsa

$h_3 = 500 - \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 3^2$

$h(3) = 500 - 5 \cdot 9$

$h(3) = 500 - 45$

$h(3) = 455$ metre

bulunur. Cismin 3 saniye sonra yerden yüksekliği 455 metredir.

ÇÖZÜM 3.

Tarla faresinin yer altına girdiği ve tekrar yüzeye çıktığı anlarda zeminden uzaklığı 0 olduğundan f(t) = 0 olur.

Verilen fonksiyon için $t^2 - 8t + 12 = 0$ eşitliği elde edilir.

Bu eşitlik tam kareye tamamlama yöntemiyle çözülürse

$t^2 - 8t + 12 = (t^2 - 8t + 16) - 16 + 12 = 0$

$(t - 4)^2 - 4 = 0$ elde edilir.

Buradan iki farklı t değeri bulunur.

$t - 4 = 2 \Rightarrow t = 6$

$t - 4 = -2 \Rightarrow t = 2$

bulunur. Bu durumda

t = 2. dakikada tarla faresi yerin altına girer.

t = 6. dakikada yeniden yüzeye çıkar.

Farenin yer altında kaldığı süre 6 – 2 = 4 dakikadır.

ÇÖZÜM 4.

a) A kupasından elde edilen kâr, maliyet fiyatı ile ters orantılı olduğundan $f(x) = \frac{24}{x}$ ifadesi elde edilir. ($x = 2$ iken kâr 12 TL'dir ve $\frac{24}{2} = 12$ olduğundan sabit sayı 24'tür.)

B kupasından elde edilen kâr her zaman maliyetten 2 TL fazladır. Buna göre $g(x) = x + 2$ şeklinde yazılır.

b) A ve B kupalarından eşit miktarda kâr elde edilmesi için $f(x) = g(x)$ eşitliği sağlanmalıdır.

$\frac{24}{x} = x + 2 \Rightarrow 24 = x \cdot (x + 2) \Rightarrow 24 = x^2 + 2x \Rightarrow x^2 + 2x - 24 = 0$ elde edilir.

Bu denklem tam kareye dönüştürülerek çözüm yapılırsa

$(x^2 + 2x + 1) - 1 - 24 = 0$

$(x + 1)^2 - 25 = 0$

$(x + 1)^2 = 25$

$x + 1 = \pm 5$

$x = 4$ ve $x = -6$

Maliyet negatif değer alamayacağı için $x = -6$ değeri alınmaz.

Bu nedenle A ve B kupalarından eşit miktarda kâr elde edebilmek için maliyetin 4 TL olması gerekir.

ÇÖZÜM 5.

Karenin bir kenarının uzunluğu x cm olsun. Karenin alanı: $A = x^2$ (cm^2) olur.

Bir santimetrekare için maliyet 5 TL olduğuna göre maliyet fonksiyonu $M(x) = 5x^2$ (TL) olur.

Satış fiyatı, tablonun kenar uzunluğu üzerinden santimetre başına 15 TL olarak verilmiştir.

Karenin çevresi 4x cm olduğundan $S(x) = 15 \cdot 4x = 60x$ (TL)

Kâr = Satış fiyatı – Maliyet

$K(x) = S(x) - M(x)$

$K(x) = 60x - 5x^2$

Kâr fonksiyonu $K(x) = -5x^2 + 60x$ olarak bulunur. Bu fonksiyon en büyük değerini $x = -\frac{b}{2a}$ noktasında alır.

$x = -\frac{60}{2 \cdot (-5)} = 6$

olduğundan tablonun bir kenarının uzunluğu 6 cm olmalıdır.

En yüksek kârın bulunması için $x = 6$ değeri kâr fonksiyonunda yerine yazılırsa

$K(6) = -5 \cdot 6^2 + 60 \cdot 6$

$K(6) = -5 \cdot 36 + 360$

$K(6) = -180 + 360$

$K(6) = 180$ bulunur.

Bu durumda elde edilebilecek en yüksek kâr 180 TL'dir.

ÖĞRENDİKLERİM

Bu bölümde öğrendiklerinizi özetlemenizi, günlük hayatta ve farklı derslerde kullanabileceğiniz bilgileri belirlemenizi amaçlıyoruz.

Verilen bilgileri dikkatle okuyunuz. Temanın temel kavramlarını, önemli noktalarını ve bağlantılarını gözden geçirerek öğrenmenizi pekiştiriniz.

1. FONKSİYONLARIN CEBİRSEL VE GRAFİKSEL GÖSTERİMİ

- **Doğrusal Fonksiyonlar:** $y = mx + n$ genel kuralıyla ifade edilir; burada **m** eğimi, **n** ise grafiğin y eksenini kestiği noktayı belirtir.
- **Karesel Fonksiyonlar:** Gerçek yaşamdaki kâr-zarar, su seviyesi veya atış hareketleri $f(x) = ax^2 + bx + c$ formunda modellenir.
- **Grafik İlişkisi:** Bir fonksiyonun grafiği x eksenini kestiği noktalarda $f(x) = 0$ değerini alır.

2. MODELLEME VE ORANTI İLİŞKİLERİ

- **Ters Orantı:** İki değişkenin çarpımı sabitse değişkenler ters orantılıdır. $(y \cdot x = k)$
- **Doğru Orantı:** İki değişkenin oranı sabitse değişkenler birbiriyle doğru orantılıdır. $\left(\frac{y}{x} = k\right)$

3. ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ VE KRİTİK NOKTALAR

Tam Kareye Tamamlama: Karesel fonksiyonların köklerini bulmak için ifade $a(x - r)^2 + k$ formuna dönüştürülür.

Tepe Noktası ve Değerler: $f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunda maksimum veya minimum noktasının apsisi $x = -\frac{b}{2a}$ ile bulunur.

Fonksiyonun alabileceği maksimum veya minimum değer ise bu değerin fonksiyondaki karşılığı olan $k = f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ değeridir.

- $a > 0$ ise kollar yukarı doğrudur ve fonksiyon **minimum değerini** alır. (k en küçük değerdir).
- $a < 0$ ise kollar aşağı doğrudur ve fonksiyon **maksimum değerini** alır. (k en büyük değerdir).

İşaret Tablosu: Eşitsizliklerin çözümünde, fonksiyonun kökleri bulunarak işaret tablosu oluşturulur ve belirlenen aralıklar problem bağlamında yorumlanır.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

NİCELİKLER VE DEĞİŞİMLER

Gerçek Sayılarda Tanımlı Fonksiyonlar ve Fonksiyonların Özelliklerine Yönelik Yansıtıcı Yazı

Amaç: Bu çalışma, gerçek sayılarda fonksiyon olma koşullarını ve fonksiyonların özelliklerini matematiksel temsillerle inceleme; karesel, karekök ve rasyonel fonksiyonlardan türetilen fonksiyonların özellikleri üzerinde muhakeme yapma ayrıca bu fonksiyonların tersleri ile ilgili denklem ve eşitsizlik problemlerini çözme süreçlerinize yönelik farkındalık oluşturmak amacıyla hazırlanmıştır.

Aşağıdaki soruları yanıtlarken kullandığınız yöntemi, düşünme sürecinizi ve ulaştığınız sonuçları göz önünde bulundurunuz. Cevaplarınızı kısa ve açık cümlelerle kullandığınız yöntemleri ve gerekçelerinizi ifade edecek şekilde yazmanız yeterlidir.

1. Öğrendiğiniz bu temada dikkatinizi çeken veya önemli bulduğunuz noktaları yazınız.

2. Doğrusal, karesel, karekök ve rasyonel referans fonksiyonların nitel özellikleriyle ilgili matematiksel muhakeme yapma sürecinizi gözden geçiriniz. Bu fonksiyonların grafiksel ve cebirsel temsilleri arasındaki ilişkileri genelleyerek ifade ediniz.

3. Doğrusal, karesel, karekök ve rasyonel fonksiyonların grafiksel ve cebirsel temsillerini oluştururken bu fonksiyonların nitel özelliklerinden nasıl yararlandığınızı kısaca açıklayınız.

4. Doğrusal, karesel, karekök ve rasyonel fonksiyonların cebirsel ve grafiksel temsilleriyle edindiğiniz deneyimin gerçek yaşamda ya da matematiğin başka alanlarına nasıl yansıtılabileceğini örneklerle açıklayınız.

Daha fazlası için karekodu okutunuz.



SAYMA STRATEJİLERİ

BAŞLARKEN

Bu bölümde yer alan etkinlikler, bireysel öğrenme yolculuğunuzda size rehberlik etmek ve öğrenme sürecinizi desteklemek amacıyla hazırlanmıştır. Çalışmalarınızı yürütürken "Hazırlanıyorum", "İlişkilendiriyorum", "Uygulayarak Öğreniyorum", "Değerlendiriyorum", “Yansıtıcı Yazı” ve "Öğrendiklerim" etkinliklerini sırası ile takip etmeniz ve etkinliklerin sonunda yer alan geri bildirimleri inceleyerek bölümleri tamamlamanız beklenmektedir.



Günlük yaşamda karşılaştığınız birçok durum, aslında matematiksel düşünmenin izlerini taşır. Bir bilgisayar şifresi oluşturulurken kaç farklı kombinasyon denenebilir? Bir genetik mühendisi analiz için kaç farklı DNA örneği seçebilir? Bu gibi sorular; yalnızca işlem yapmayı değil aynı zamanda stratejik düşünmeyi, ilişki kurmayı ve bağlamı analiz etmeyi gerektirir. Bu çalışmayla sayma stratejilerine yönelik çıkarımlar yaparak farklı problem türlerini nasıl çözümleyebileceğinizi keşfedeceksiniz.

HAZIRLANIYORUM

Amaç: Bu bölümde ön bilgilerinizi hatırlamanızı ve temaya hazırlıklı hâle gelmenizi amaçlıyoruz. Aşağıda yer alan ifadeler, bu temada tamamlanması hedeflenen öğrenme çıktısını ele almadan önce sahip temaya olmanız gereken bazı temel becerileri içermektedir. Lütfen her bir ifadeyi dikkatlice okuyunuz.

- Eğer ifadedeki beceriye hakim olduğunuzu düşünüyorsanız kutucuğu işaretleyiniz.
- Eğer temayı henüz tam olarak bilmediğinizi ya da hatırlamadığınızı düşünüyorsanız kutucuğu boş bırakınız.

Bu çalışmanın amacı notla değerlendirilmeyecek olup amacı temaya ne ölçüde hazır olduğunuzu belirlemektir.

	ÖN ÖĞRENME KONTROL LİSTESİ	✓
1	Sayma gerektiren problem durumlarında toplama ya da çarpma yaparak çözüm geliştirebilirim.	☐
2	Cebirsel ifadeler ile ilgili işlemleri yapabilirim.	☐
3	Özdeşliklerle ile ilgili işlemleri yapabilirim.	☐
4	Mantık bağlaçları ve niceleyicilerin sözel temsillerdeki anlamını bilirim.	☐

"Ön Öğrenme Kontrol Listesi"ni doldurduktan sonra aşağıda verilen "Kontrol Noktası" sorularını çözünüz ve cevaplarınızı kontrol ediniz.

KONTROL NOKTASI

SORU 1. Okulun bilişim kulübü, bilgisayar laboratuvarını yenilemek için bazı teknolojik malzemeler satın alacaktır. Alınacak ürünler, miktarları ve fiyatları aşağıdaki tabloda verilmiştir.

ÜRÜN	MİKTAR	FİYAT (TL)
Klavye	12	350
Fare	10	280
Kulaklık	8	450

Laboratuvar için alınacak tüm ürünler için toplam kaç TL ödenmelidir? Hesaplayınız.

SORU 2. Bir terzi, dikdörtgen biçiminde masa örtüleri dikmektedir. Bir masa örtüsünün kısa kenarı $(x - 4)$ metre, uzun kenarı $(x + 8)$ metredir.

Terzi, bu masa örtülerinden 3 adet dikeceğine göre kullanılan kumaş miktarını bulunuz.

SORU 3. Her yüzeyinde 1, 2, 3, 4, 5, 6 sayılardan birer tanesinin yazdığı bir küp havaya atılıyor.

Bu deneyde küpün üst yüzüne gelen sayının

a) Asal ve tek olduğu çıktıları yazınız.

b) Asal veya tek olduğu çıktıları yazınız.

c) Asal ya da tek olduğu çıktıları yazınız.

GERİ BİLDİRİM

Bu geri bildirim sayesinde kendi cevabınızı kontrol edebilir, hatalarını düzelterek öğrenmenizi pekiştirebilirsiniz.

ÇÖZÜM 1.

Klavyeler için ödenen toplam tutar → $12 \cdot 350 = 4\,200$ TL
Fareler için ödenen toplam tutar → $10 \cdot 280 = 2\,800$ TL
\+ Kulaklıklar için ödenen toplam tutar → $8 \cdot 450 = 3\,600$ TL

Ödenen toplam tutar = 10 600 TL

ÇÖZÜM 2.

1 masa örtüsü için kullanılan kumaş miktarı → $(x - 4) \cdot (x + 8) = x^2 + 8x - 4x - 32$
$= x^2 + 4x - 32$ olur.

3 masa örtüsü için kullanılan kumaş miktarı → $3 \cdot (x^2 + 4x - 32) = 3x^2 + 12x - 96$ olur.

ÇÖZÜM 3.

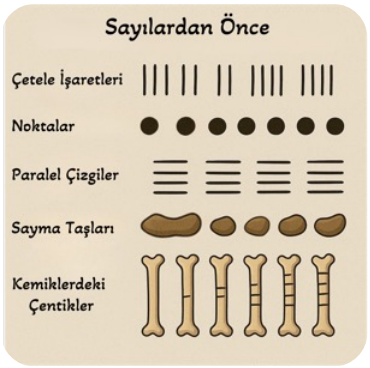
a) Asal olma ve tek olma koşullarını aynı anda sağlayan sayılar 3 ve 5'tir.

b) Veya bağlacı, belirtilen koşullardan en az birinin doğru olması durumunda geçerlidir. Buna göre asal veya tek olan sayılar 1, 2, 3 ve 5'tir.

c) Ya da bağlacı, iki durumdan yalnızca birinin karşılanmasını gerektirir. Asal ya da tek olan sayılar 1 ve 2'dir.

İLİŞKİLENDİRİYORUM

Amaç: Burada, öğrendiğin bilgileri günlük hayatla ilişkilendirmeni istiyoruz.



İnsanlar sayıları bilmedikleri çok eski zamanlarda "Kaç tane?" sorusuna nasıl cevap veriyordu, hiç düşündünüz mü?

Artış ve azalışları takip etmek amacıyla eller, taşlar, çentikler veya bazen kemikler gibi araçları kullanırlardı. Peki, bu tür sayma yöntemlerine neden ihtiyaç duymuş olabilirler?

Örneğin bir çoban, sürüsündeki hayvan sayısında azalma olup olmadığını anlamak için her hayvana karşılık kenara koyduğu taşlarla durumu kontrol edebilirdi. Takas sırasında iki tarafın eşit sayıda mal verip vermediğini tespit etmek için nesneleri karşılaştırmış olabilirler.

Ayın dolunay olma süresini belirlemek için kemik ya da sopa üzerine çentikler açmış olabilirler.

Ancak sayılar geliştikçe eller, taşlar, çentikler ya da kemikler gibi zahmetli araçlar; yerini daha pratik ve hızlı sayma yöntemlerine bırakmıştır.

UYGULAYARAK ÖĞRENİYORUM

Amaç: Bu bölümde bilgilerinizi etkinlikler ve uygulamalarla pekiştirmenizi, öğrenmeyi daha kalıcı hâle getirmenizi amaçlıyoruz.

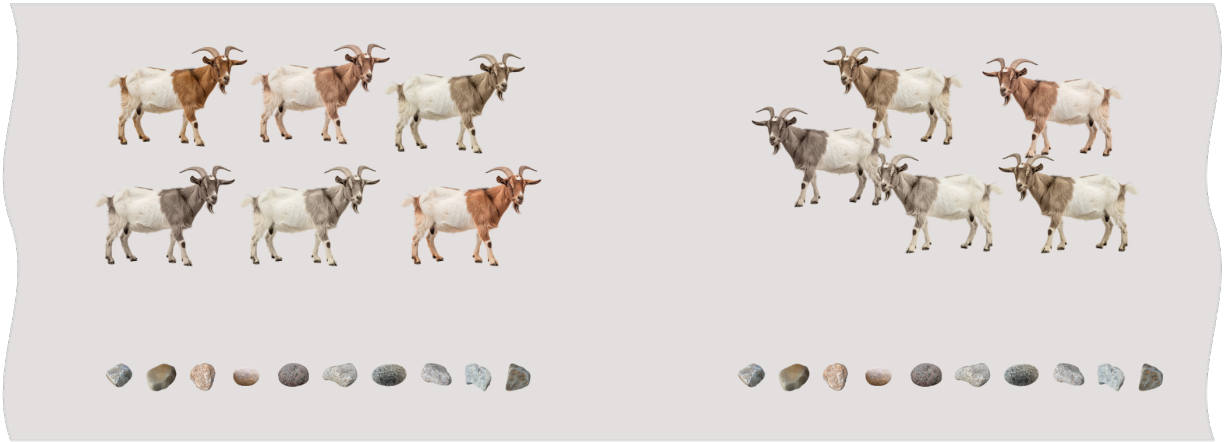
Etkinlik ya da örneklerde verilen adımları dikkatle uygulayınız. Çalışmanızı güvenli ve düzenli bir şekilde yapınız.

SAYMA YÖNTEMLERİ

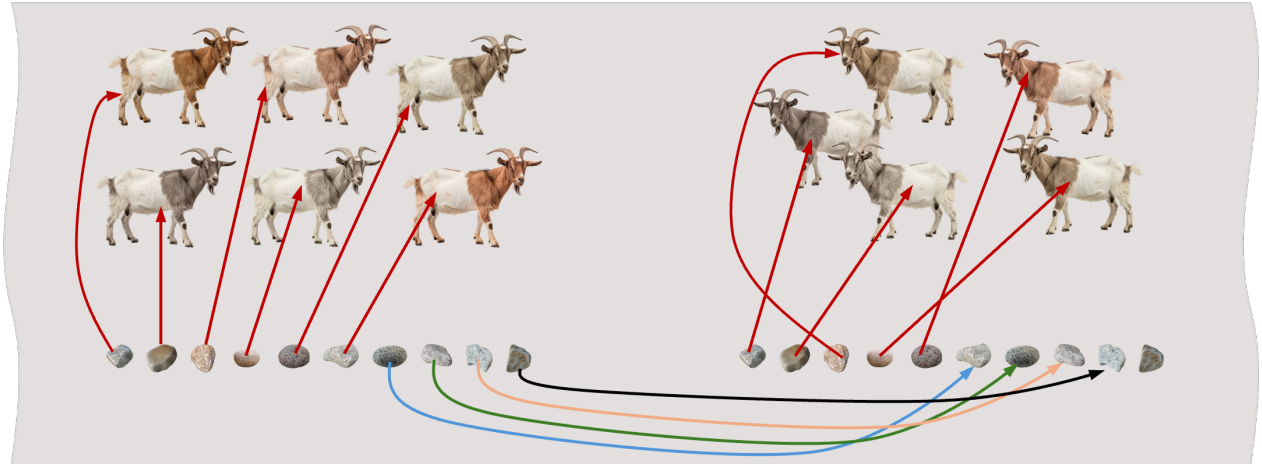
EŞLEŞTİRME YOLUYLA SAYMA

ETKİNLİK

Aşağıda iki ayrı sürüde bulunan keçileri aynı miktarda verilen taşlarla birer birer eşleştiriniz. Kalan taşları da kendi arasında eşleştirerek hangisinde daha fazla keçi olduğunu belirleyiniz.



CEVAP



Tüm eşleşmeler yapıldığında sol taraftaki sürüde daha fazla keçi olduğu söylenebilir. Peki günümüzde eşleştirme yoluyla sayma nasıl yapılır? Nesneleri hangi sayı kümesinin elemanları ile eşleştiririz?

NOT

Bir nesne grubunun elemanları ile $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, ...\}$ kümesinin elemanları arasında sırayla bire bir eşleştirme yaparak o nesne grubunun eleman sayısını belirleme işlemine **eşleştirme yoluyla sayma** denir. Nesne kümesinin son elemanı ile eşleşen pozitif tam sayı, kümenin toplam eleman sayısını gösterir. Eşleştirme yoluyla sayma, tarih boyunca kullanılan en temel sayma yöntemlerinden biridir.

Günlük hayatta yapılan nesneleri sayma eylemi, aslında eşleştirme yoluyla sayma yönteminin bir uygulamasıdır.

ETKİNLİK

Pozitif tam sayılar kümesinin elemanlarını, keçilerle sıraya göre eşleştirerek kaç keçi olduğunu bulunuz.

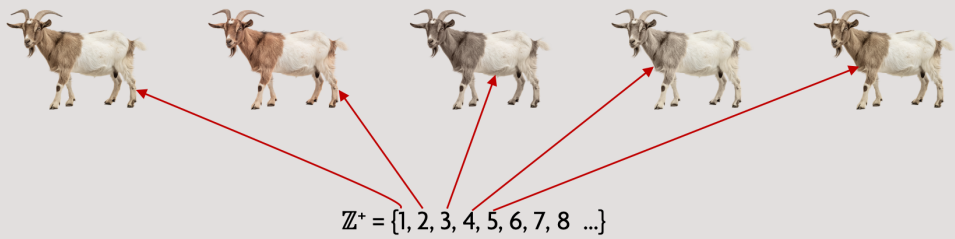


$\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \ ...\}$

Keçi Sayısı: .....

CEVAP

Pozitif tam sayılar kümesinin elemanlarını, keçilerle sıraya göre eşleştirerek kaç keçi olduğunu bulunuz.



$\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \ ...\}$

Eşleşen son eleman 5 olduğu keçi sayısı 5'tir.

TOPLAMA VE ÇARPMA YOLUYLA SAYMA

HATIRLATMA

Çarpma işlemi, aslında tekrarlı toplamanın kısa bir yoludur. Aynı sayıyı birçok kez toplamak gerektiğinde bu toplama işlemini çarpmayla daha kolay ifade ederiz. Toplama tekrarlanıyorsa çarpma işlemi o tekrarların kısa gösterimidir.

ÖRNEK

Bir sinema salonunun her bir sırasında 12 koltuk bulunmaktadır.

İlk iki sırada bulunan toplam koltuk sayısını bulmak için hangi sayma yöntemini tercih edersiniz? Sinema salonunda 11 sıra bulunuyorsa toplam koltuk sayısını bulmak için tercih ettiğiniz sayma yöntemi hangisi olur? Açıklayınız.



ÇÖZÜM

	Toplama Yoluyla Sayma	Çarpma Yoluyla Sayma
İlk İki Sırada Bulunan Koltuk Sayısı	12 + 12 = 24	2 · 12 = 24
Sinema Salonundaki Toplam Koltuk Sayısı	12 + 12 + 12 + 12 + 12 + 12 + 12 + 12 + 12 + 12 + 12 = 132	11 · 12 = 132

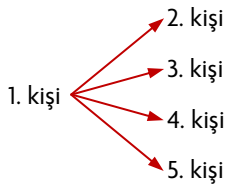
İlk iki sıradaki koltukların sayımı için her iki yöntem de uygundur. Ancak sinema salonundaki toplam koltuk sayısını belirlerken toplama yöntemi çarpma yöntemine kıyasla daha fazla zaman gerektirir. Bu nedenle pratiklik açısından çarpma yöntemi tercih edilmelidir.

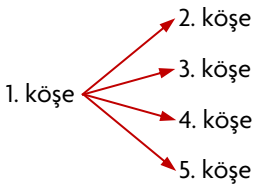
ÖRNEK

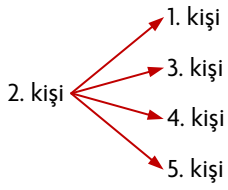
5 kişilik bir grupta herkes birbirleriyle el sıkıştığında toplam kaç el sıkışma gerçekleştiği problemi ile bir beşgenin sahip olduğu köşegen sayısının belirlenmesi probleminin çözüm stratejilerini karşılaştırınız.

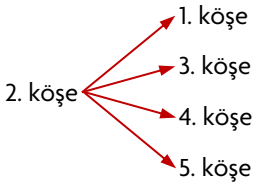
ÇÖZÜM

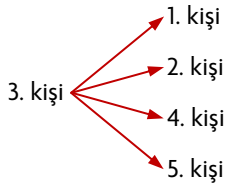
El Sıkışma Problemi	Köşegen Sayısı Problemi

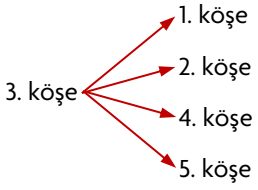


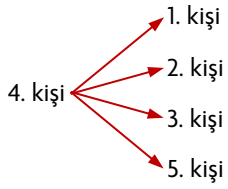


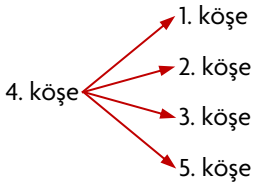


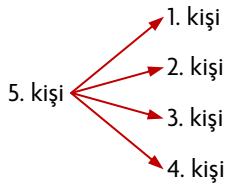


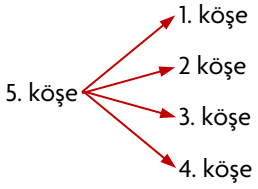












El sıkışma probleminde gruptaki her bir kişi kendisi dışında herkesle el sıkışır. Bu durumda $5 \cdot 4$ diyebiliriz. Fakat her el sıkışma 2 defa sayılmış olur. Örneğin 1.kişi ile 2.kişi arasında 1 el sıkışması olur. Bu el sıkışması hem 1.kişi için hem de 2. kişi için sayılır. İki kişi arasındaki el sıkışmalarının her biri 2 kez sayılacağı için toplam el sıkışma sayısı $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ olur.

Köşegen sayısı probleminde beşgenin her bir köşesi kendisi dışındaki köşelerle birleştirilerek beşgenin köşegenleri oluşturulur. Bu durumda $5 \cdot 4$ diyebiliriz. Fakat her köşegen 2 defa sayılmış olur. Örneğin 1.köşe ile 2.köşe arasında 1 köşegen çizilir. Bu köşegen hem 1.köşe için hem de 2. köşe için sayılır. İki köşe arasındaki köşegenlerin her biri 2 kez sayılacağı için toplam köşegen sayısı $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ olur.

İki problemde de kullanılan çözüm stratejileri aynıdır.

NOT

Çarpma yoluyla sayma ile **toplama yoluyla sayma** arasında güçlü bir bağlantı bulunmaktadır. Her iki yöntem de olası sonuçların sayısını belirlemek için kullanılır ancak **durumların birbirleriyle olan ilişkisi** farklılık gösterir.

Eğer durumlar **birbirini dışlıyor** ve aynı anda gerçekleşemiyorsa ya da **birbirinden bağımsızsa** toplama yöntemi kullanılır.

Örnek: Bir pastanede 3 çeşit kek ve 2 çeşit içecek çeşidi bulunuyorsa, tek bir ürün sipariş edecekseniz

3 + 2 = 5 farklı sipariş seçeneğiniz olur.

Eğer durumlar **birlikte gerçekleşiyorsa**, yani seçimler **ardışık** ya da **bağımlıysa**, çarpma yöntemi kullanılır.

Örnek: Bir pastanede 3 çeşit kek ve 2 çeşit içecek bulunuyor ve 1 kek ile 1 içecek sipariş etmek istiyorsanız

3 · 2 = 6 farklı sipariş seçeneğiniz olur.

SIRA SİZDE 1.

Bir güvenlik şirketi, yeni bir dijital kasa modeli için 6 haneli bir giriş şifresi belirleyecektir. Şifre sadece rakamlardan oluşmalı ve şifrenin ilk hanesindeki rakam tek olmalıdır.

Buna göre

a) Kaç farklı şifre oluşturulabilir?

b) Her seferinde farklı rakamlar kullanılarak kaç farklı şifre oluşturulabildiğini bulunuz.

SIRA SİZDE 2.

Aşağıdaki görselde A, B, C, D şehirleri arasında bulunan yollar verilmiştir.



Buna göre

a) A şehrinden B şehrine uğramak koşuluyla C şehrine kaç farklı yoldan gidilebilir?

b) B şehrinden C şehrine uğramak koşuluyla D şehrine kaç farklı yoldan gidilebilir?

c) A şehrinden D şehrine gidilip, dönüşte farklı yol kullanılarak A şehrine geri dönülecekse toplam kaç farklı gidip gelme yolu vardır?

SIRALAMA SAYISI

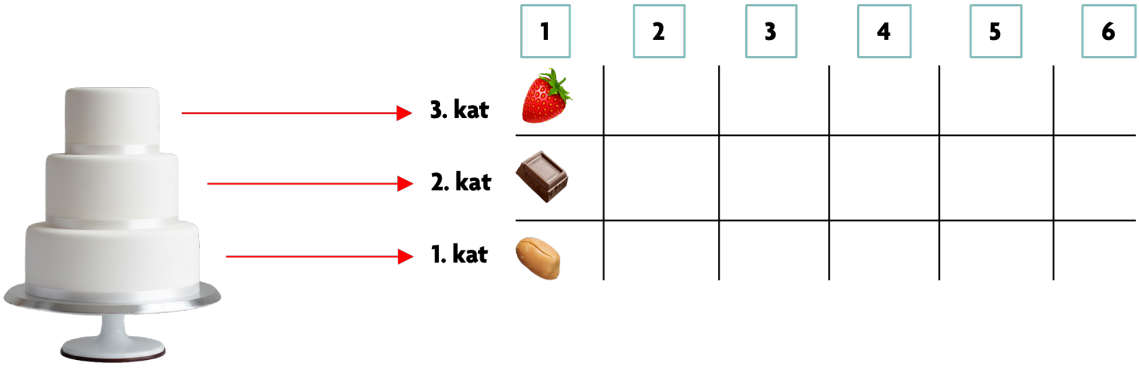
Nesneleri sıraya dizmek veya bir yarışmada kimlerin hangi sırada yer alacağını belirlemek gibi durumlarla günlük hayatta sık sık karşılaşılır. Bu tür farklı dizilimler özellikle olasılık hesaplamalarında önemli bir yer tutar. Bir olayın farklı şekillerde nasıl gerçekleşeceğini hesaplarken olası durumları doğru bir şekilde değerlendirmek için sıralama önemlidir.

ETKİNLİK

Size verilen problem senaryosunu dikkatle inceleyerek görevleri sırasıyla tamamlayınız.

PROBLEM SENARYOSU: Bir pastanede pastacı olarak görev yaparken, kat aromalarını kullanarak çok katlı pastalar hazırlayacağınızı düşününüz. Elinizde bulunan malzemeler arasında çilek, limon, muz, böğürtlen, hindistan cevizi, çikolata, fındık ve fıstık yer almaktadır.

GÖREV 1. Çilek, çikolata ve fıstık malzemelerini kullanarak katlarının her birinde farklı malzeme olan 3 katlı bir pastayı kaç farklı şekilde hazırlayabileceğinizi bulunuz. Katların karşısına uygun görselleri örnekteki gibi çizerek tabloyu doldurunuz. Çözüm stratejisi oluşturarak pasta sayısını bulunuz.



1. Kattaki Seçenek Sayısı	2. Kattaki Seçenek Sayısı	3. Kattaki Seçenek Sayısı	Pasta Sayısı

GÖREV 2. Muz, hindistan cevizi, çilek, limon ve çikolata malzemelerini kullanarak katlarının her birinde farklı malzeme olmak üzere 5 katlı bir pastayı kaç farklı şekilde hazırlayabileceğinizi bularak tabloyu doldurunuz. Çözüm stratejisi oluşturarak pasta sayısını bulunuz.

1. Kattaki Seçenek Sayısı	2. Kattaki Seçenek Sayısı	3. Kattaki Seçenek Sayısı	4. Kattaki Seçenek Sayısı	5. Kattaki Seçenek Sayısı	Pasta Sayısı

NOT

$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere 1'den n ye kadar olan ardışık tam sayıların çarpımına **n faktöriyel** denir ve "n!" ile gösterilir.

GÖREV 3. Sekiz farklı malzemeyi kullanarak katlarının her birinde farklı malzeme olmak üzere sekiz katlı bir pastayı kaç farklı şekilde hazırlayabileceğinizi bularak tabloyu doldurunuz ve sonucu faktöriyel gösterimi ile yazınız.

1. Kattaki Seçenek Sayısı	2. Kattaki Seçenek Sayısı	3. Kattaki Seçenek Sayısı	4. Kattaki Seçenek Sayısı	5. Kattaki Seçenek Sayısı	6. Kattaki Seçenek Sayısı	7. Kattaki Seçenek Sayısı	8. Kattaki Seçenek Sayısı	Pasta Sayısı

NOT

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$ olur.

$0! = 1$ olarak kabul edilir.

$1! = 1$

$2! = 1 \cdot 2 = 2$

$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$

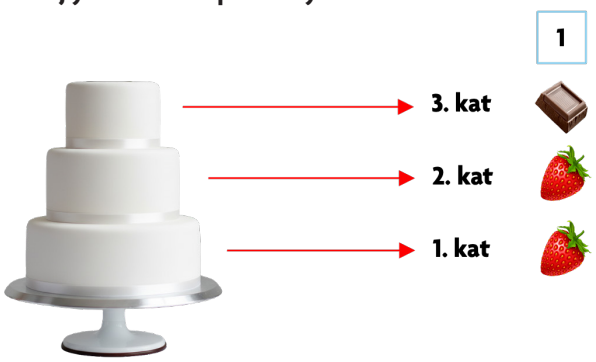
$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$

$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$

$6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$

Buradan $7! = 7 \cdot 6! = 7 \cdot 6 \cdot 5!$ yazılabilir.

GÖREV 4. İki katında çilek, bir katında çikolata olan 3 katlı bir pastayı kaç farklı şekilde hazırlayabileceğinizi bulunuz. Katların karşısına uygun görselleri örnekteki gibi çiziniz ve pasta sayısını bulunuz. Üç malzeme birbirinden farklı olduğunda bulduğunuz sonuç ile karşılaştırarak farklılığın sebebini ifade ediniz. Çözüm stratejisi oluşturunuz ve oluşturduğunuz stratejiyi kullanarak pasta sayısını bulunuz.



n, r ∈ ℕ ve r ≤ n olmak üzere sıralanması gereken n tane elemanın r tanesi özdeş ise bunların kendi arasında yer değiştirmesi farklı sıralama oluşturmayacaktır. Buna göre n farklı nesnenin sıralama sayısı n! ve n nesnenin r tanesi özdeş ise sıralama sayısı

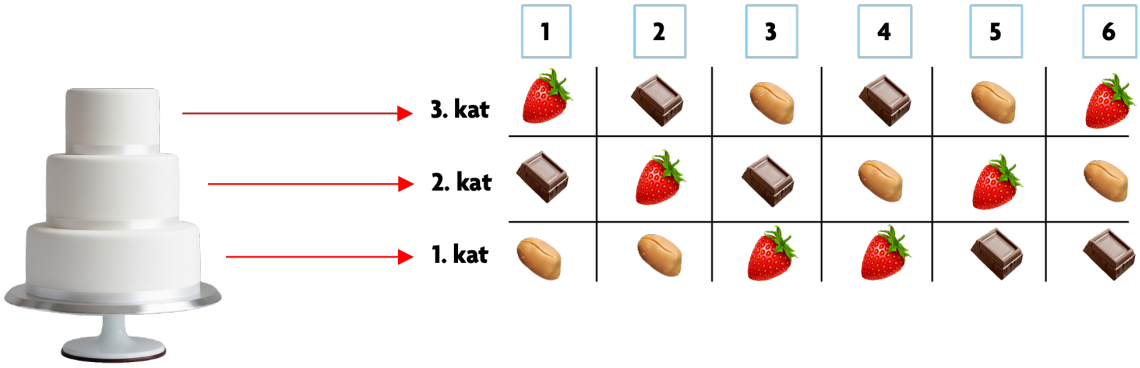
$\frac{n!}{r!}$ farklı şekildedir.

GÖREV 5. Sekiz malzemeden 3'ünü kullanarak katlarının her birinde farklı malzeme olmak üzere üç katlı bir pastayı kaç farklı şekilde hazırlayabileceğinizi bulunuz, tabloyu doldurunuz ve pasta sayısını bulunuz.

1. Kattaki Seçenek Sayısı	2. Kattaki Seçenek Sayısı	3. Kattaki Seçenek Sayısı	Pasta Sayısı

GERİ BİLDİRİM

GÖREV 1



1. Kattaki Seçenek Sayısı	2. Kattaki Seçenek Sayısı	3. Kattaki Seçenek Sayısı	Pasta Sayısı
3	2	1	$3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

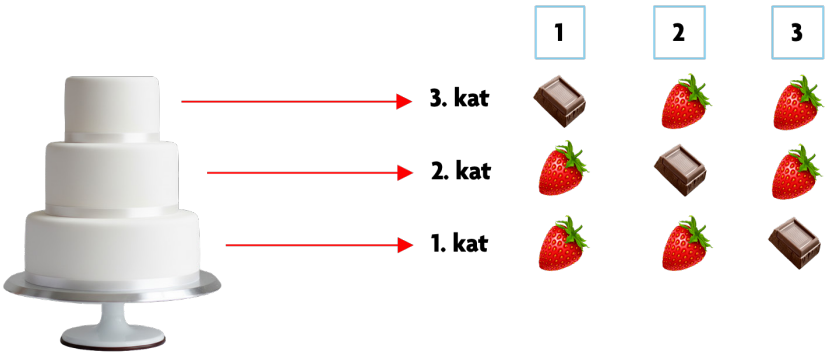
GÖREV 2

1. Kattaki Seçenek Sayısı	2. Kattaki Seçenek Sayısı	3. Kattaki Seçenek Sayısı	4. Kattaki Seçenek Sayısı	5. Kattaki Seçenek Sayısı	Pasta Sayısı
5	4	3	2	1	$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

GÖREV 3.

1. Kattaki Seçenek Sayısı	2. Kattaki Seçenek Sayısı	3. Kattaki Seçenek Sayısı	4. Kattaki Seçenek Sayısı	5. Kattaki Seçenek Sayısı	6. Kattaki Seçenek Sayısı	7. Kattaki Seçenek Sayısı	8. Kattaki Seçenek Sayısı	Pasta Sayısı
8	7	6	5	4	3	2	1	8!

GÖREV 4



Üç malzeme birbirinden farklı olduğunda tüm malzemelerin yer değiştirmesiyle her defasında yeni bir sıralama oluşur ve böylece farklı bir pasta hazırlanır. Ancak üç malzemeden ikisi aynı olduğunda aynı olan bu iki malzemenin yer değiştirmesi yeni bir sıralama oluşturmaz ve sonuç olarak farklı bir pasta ortaya çıkmaz. Bu durumda üç malzemenin sıralanış sayısı aynı malzemelerin sıralanış sayısına bölünmelidir.

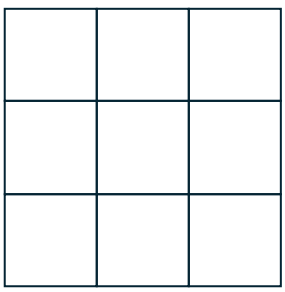
$$\frac{\text{Üç malzemenin sıralanış sayısı}}{\text{Aynı malzemenin sıralanış sayısı}} = \frac{3!}{2!}$$

GÖREV 5

1. Kattaki Seçenek Sayısı	2. Kattaki Seçenek Sayısı	3. Kattaki Seçenek Sayısı	Pasta Sayısı
8	7	6	$8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$

ÖRNEK

Defne aşağıdaki karelerden oluşan dikdörtgeni boyayarak farklı desenler elde etmek istiyor. Defne'nin elinde 9 farklı renkte boya kalemi bulunmaktadır.



a) Her bir kareyi farklı renge boyarsa kaç farklı desen elde eder? Bu problem durumuna eş bir problem yazınız.

b) Karelerden üçünü maviye, ikisini sarıya, kalanları ise kırmızıya boyarsa kaç farklı desen elde eder? Bu problem durumuna eş bir problem yazınız.

c) Ortak kenara sahip karelerden birini boyamak şartıyla her bir kareyi farklı renge boyarsa kaç farklı desen elde eder? Bu problem durumuna eş bir problem yazınız.

ÇÖZÜM

a)

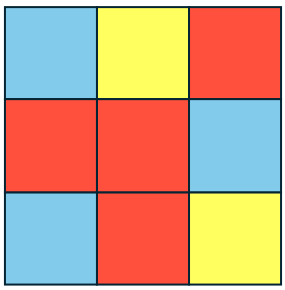
9 seçenek	8 seçenek	7 seçenek
6 seçenek	5 seçenek	4 seçenek
3 seçenek	2 seçenek	1 seçenek

$9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 9!$ farklı desen elde edilir.

Bu problem durumu **nesnelerin sıralanmasıdır**. Eş problem olarak aşağıdaki gibi örnekler yazılabilir.

- Bir programda rakamlardan her biri birer kez kullanılacak şekilde 10 haneli şifre oluşturulacaktır. Kaç farklı şifre elde edilir?
- Bir tören alanında 22 farklı ülkenin bayrakları direklere asılacaktır. Bayraklar kaç farklı sıra ile dizilebilir?

b)



Karelerden üçü mavi, ikisi sarı olacak ise dördü kırmızı olacaktır.

Toplam 9 renk sıralanacaktır. Fakat mavilerin, sarıların ve kırmızıların kendi arasındaki yer değişimi yeni bir sıralama oluşturmayacaktır.

Desenlerin sayısı

$$\frac{9!}{3! \cdot 2! \cdot 4!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \cancel{6} \cdot 5 \cdot \cancel{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}}{\cancel{3 \cdot 2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \cancel{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}} = 1260 \text{ olur.}$$

Bu problem durumu, **içinde özdeş nesneler bulunan topluluğun sıralanmasıdır.** Eş problem olarak aşağıdaki gibi örnekler yazılabilir.

- 3 adenin (A), 2 timin (T), 4 guanin (G) bazları ile kaç farklı DNA dizisi oluşturulabilir?
- Bir müzik bestecisi 6 notası "do", 5 notası "re", 8 notası "mi" olacak şekilde kaç farklı melodi dizisi oluşturabilir?

c) Ortak kenara sahip karelerden biri boyanacak ise aşağıdaki iki durum oluşur.

1. durum

9 seçenek	Boyasız	8 seçenek
Boyasız	7 seçenek	Boyasız
6 seçenek	Boyasız	5 seçenek

1. durumdaki desen sayısı

$9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 15.120$

2. durum

Boyasız	9 seçenek	Boyasız
8 seçenek	Boyasız	7 seçenek
Boyasız	6 seçenek	Boyasız

2. durumdaki desen sayısı

$9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3024$

Toplam desen sayısı

$15.120 + 3.024 = 18.144$

Bu problem durumu **n farklı nesneden r tanesinin sıralanmasıdır.** Eş problem olarak aşağıdaki gibi örnekler yazılabilir.

- Bir salonda 15 farklı kişi arasından 6 kişi sahne önüne sırayla oturtulacaktır. Kaç farklı oturma düzeni vardır?
- 19 sporcunun katıldığı bir koşu yarışında ilk 3 kişi madalya almak için kürsüye çıkacaktır. Kürsüde kaç farklı görüntü oluşur?

SIRA SİZDE 3.

Bir lisede düzenlenen "Algoritmik Düşünme ve Kodlama" temalı yarışmanın finali yapılmaktadır. Finalde 3 öğrenci yarışmacı ve 4 öğretmen jüri üyesi olarak sahnede yer alacaktır. Sahnede yan yana dizilmiş 7 adet numaralı koltuk bulunmaktadır.



a) Öğretmen ve öğrenciler koltuklara kaç farklı şekilde oturabilir bulunuz

b) Öğretmenler yan yana oturmamak koşuluyla öğretmen ve öğrenciler koltuklara kaç farklı şekilde oturabilir bulunuz

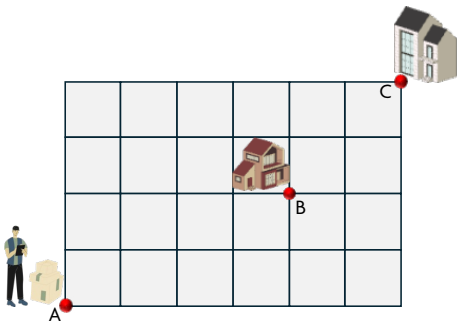
c) Öğrenciler yan yana oturmamak koşuluyla öğretmen ve öğrenciler koltuklara kaç farklı şekilde oturabilir? Hesaplayınız.

d) 2 ve 7 numaralı koltukta öğretmen ve 4 numaralı koltukta öğrenci oturması şartıyla öğretmen ve öğrenciler koltuklara kaç farklı şekilde oturabilir? Hesaplayınız.

e) 2 ve 7 numaralı koltukta öğretmen veya 4 numaralı koltukta öğrenci oturması şartıyla öğretmen ve öğrenciler koltuklara kaç farklı şekilde oturabilir? Hesaplayınız.

SIRA SİZDE 4.

Bir mahallenin birbirini dik kesen sokaklarının krokisi aşağıda verilmiştir. Kargo dağıtım görevlisi Gökhan Bey A noktasında, Gizem Hanım'ın evi B noktasında, Deniz Hanım'ın evi ise C noktasındadır.



a) Gökhan Bey, en kısa yoldan giderek önce Gizem Hanım'ın kargosunu daha sonra Deniz Hanım'ın kargosunu teslim ederse kaç farklı yol kullanılabilir bulunuz.

b) Gökhan Bey, en kısa yoldan giderek önce Gizem Hanım'ın kargosunu daha sonra Deniz Hanım'ın kargosunu teslim edip A noktasına dönerse kaç farklı yol kullanabilir?

SEÇME SAYISI

Belirli bir grup içerisinden kaç farklı seçim yapılabileceğini belirlemek özellikle karar verme süreçlerinde büyük önem taşır. Seyahat planlamasından etkinlik organizasyonlarına kadar birçok alanda en iyi ve en uygun seçenekleri belirlemeyi sağlar. Örneğin bir hastanedeki sağlık çalışanları için oluşturulacak nöbet listesinin belirlenmesi kişilerin seçimi ile mümkündür. Böylece kaç günlük bir nöbet listesi oluşturulabileceği hesaplanabilir.

ETKİNLİK 3.

Size verilen problem senaryosunu dikkatle inceleyerek görevleri sırasıyla tamamlayınız.

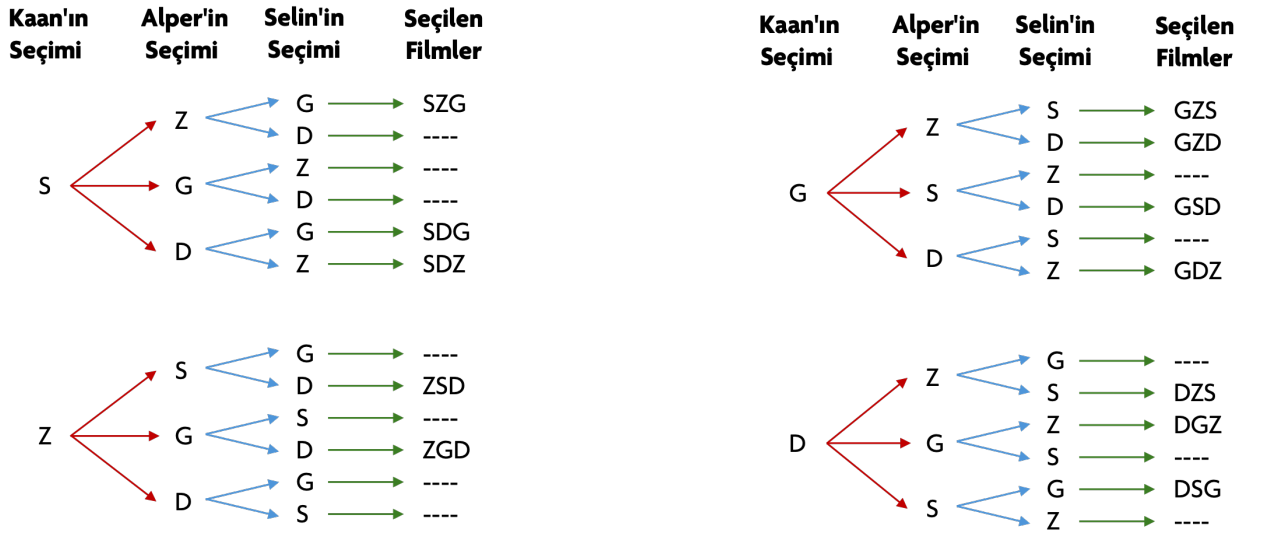
Problem Senaryosu: Kaan, Selin ve Alper cumartesi günü film izlemek istemişlerdir. Önce dört film arasında kararsız kalırlar sonra her biri farklı bir filmi seçerek üçünü de aynı gün izlemeye karar vermişlerdir. İzlemekte kararsız kaldıkları filmler: Sonbahar Vadisi, Zamanın Kırıldığı Gün, Gölgenin Ardındaki Işık ve Döngü

GÖREV 1. Kaan, Selin ve Alper'in seçebileceği filmleri tabloyu örnekteki gibi doldurarak belirleyiniz.

Kaan'ın Seçimi	Selin'in Seçimi	Alper'in Seçimi
Sonbahar Vadisi	Zamanın Kırıldığı Gün	Gölgenin Ardındaki Işık

Kaan'ın Seçimi	Selin'in Seçimi	Alper'in Seçimi

GÖREV 2. Sonbahar Vadisi (S), Zamanın Kırıldığı Gün (Z), Gölgenin Ardındaki Işık (G) ve Döngü (D) ile gösterilmek üzere seçilecek filmlerin belirlenmesi işlemini aşağıdaki çizge yönteminden faydalanarak verilen örneklerdeki gibi yapınız.



GÖREV 3. Kaan, Selin ve Alper'in seçtiği filmlerin cumartesi günü izlenen üç filmin belirlenmesini nasıl etkilediğini tablo ve çizgede elde ettiğiniz bulgulara göre değerlendiriniz. Elde ettiğiniz eşleşmelere göre her iki yöntemde de cumartesi günü izlenen üç filmin kaç farklı şekilde seçileceğini hesaplayınız.

UYARI

Tablo ve çizge gibi yöntemlerle sayma işlemleri zaman ve emek bakımından maliyetli işlemlerdir. Veri sayısı arttıkça bu yöntemlerin kullanışlılığı azalmaktadır. Dolayısıyla büyük veri kümelerinin sayılabilmesi için farklı yöntemlere ihtiyaç vardır.

GÖREV 4. 4 filmden 3 tanesinin farklı sıralama sayısı ile cumartesi günü izlenebilecek 3 filmin sıralama sayısını kullanıp, izlenecek 3 filmin kaç farklı şekilde seçilebileceğine ilişkin çözüm stratejisi oluşturarak seçim sayısını bulunuz.

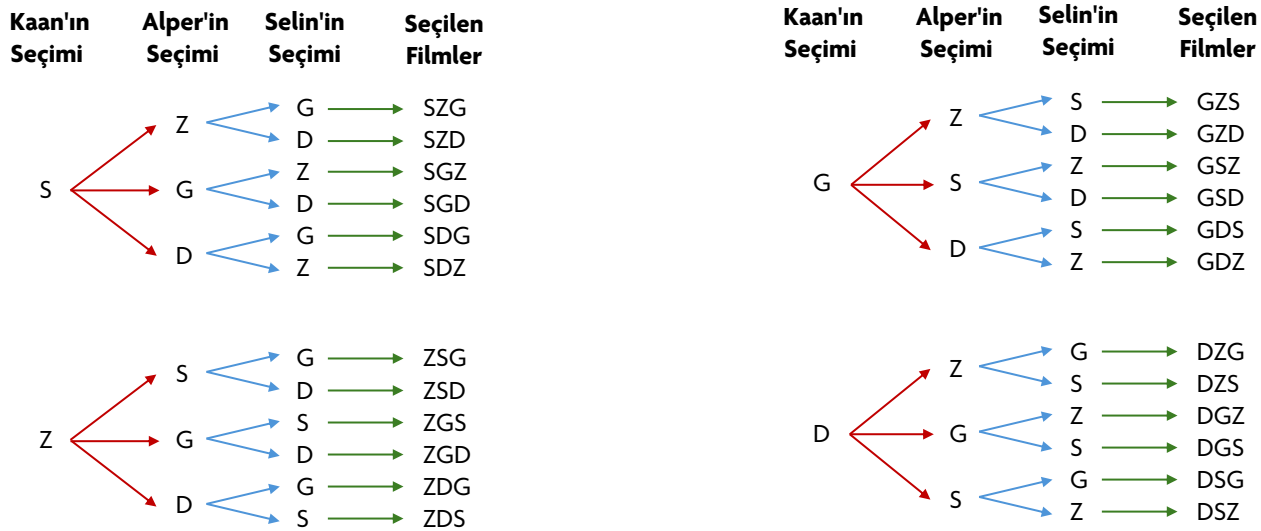
GERİ BİLDİRİM

GÖREV 1

Kaan'ın Seçimi	Selin'in Seçimi	Alper'in Seçimi
Sonbahar Vadisi	Zamanın Kırıldığı Gün	Gölgenin Ardındaki Işık
Sonbahar Vadisi	Zamanın Kırıldığı Gün	Döngü
Sonbahar Vadisi	Gölgenin Ardındaki Işık	Zamanın Kırıldığı Gün
Sonbahar Vadisi	Gölgenin Ardındaki Işık	Döngü
Sonbahar Vadisi	Döngü	Zamanın Kırıldığı Gün
Sonbahar Vadisi	Döngü	Gölgenin Ardındaki Işık
Zamanın Kırıldığı Gün	Gölgenin Ardındaki Işık	Döngü
Zamanın Kırıldığı Gün	Gölgenin Ardındaki Işık	Sonbahar Vadisi
Zamanın Kırıldığı Gün	Döngü	Sonbahar Vadisi
Zamanın Kırıldığı Gün	Döngü	Gölgenin Ardındaki Işık
Zamanın Kırıldığı Gün	Sonbahar Vadisi	Döngü
Zamanın Kırıldığı Gün	Sonbahar Vadisi	Gölgenin Ardındaki Işık

Kaan'ın Seçimi	Selin'in Seçimi	Alper'in Seçimi
Gölgenin Ardındaki Işık	Zamanın Kırıldığı Gün	Döngü
Gölgenin Ardındaki Işık	Zamanın Kırıldığı Gün	Sonbahar Vadisi
Gölgenin Ardındaki Işık	Döngü	Zamanın Kırıldığı Gün
Gölgenin Ardındaki Işık	Döngü	Sonbahar Vadisi
Gölgenin Ardındaki Işık	Sonbahar Vadisi	Zamanın Kırıldığı Gün
Gölgenin Ardındaki Işık	Sonbahar Vadisi	Döngü
Döngü	Zamanın Kırıldığı Gün	Gölgenin Ardındaki Işık
Döngü	Zamanın Kırıldığı Gün	Sonbahar Vadisi
Döngü	Gölgenin Ardındaki Işık	Sonbahar Vadisi
Döngü	Gölgenin Ardındaki Işık	Zamanın Kırıldığı Gün
Döngü	Sonbahar Vadisi	Zamanın Kırıldığı Gün
Döngü	Sonbahar Vadisi	Gölgenin Ardındaki Işık

GÖREV 2



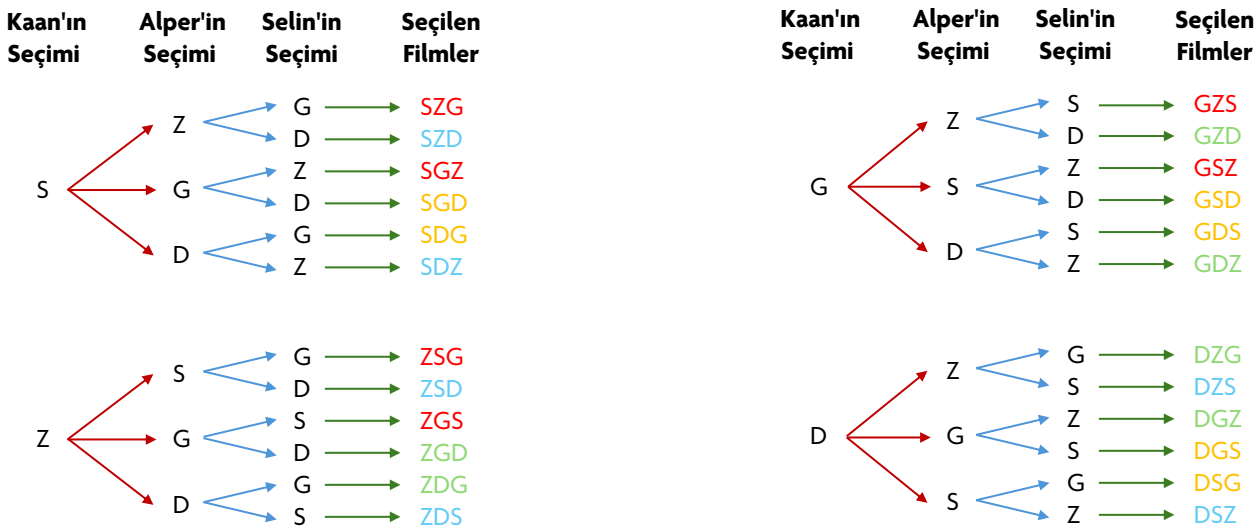
GÖREV 3

Kaan'ın Seçimi	Selin'in Seçimi	Alper'in Seçimi
Sonbahar Vadisi	Zamanın Kırıldığı Gün	Gölgenin Ardındaki Işık
Sonbahar Vadisi	Zamanın Kırıldığı Gün	Döngü
Sonbahar Vadisi	Gölgenin Ardındaki Işık	Zamanın Kırıldığı Gün
Sonbahar Vadisi	Gölgenin Ardındaki Işık	Döngü
Sonbahar Vadisi	Döngü	Zamanın Kırıldığı Gün
Sonbahar Vadisi	Döngü	Gölgenin Ardındaki Işık
Zamanın Kırıldığı Gün	Gölgenin Ardındaki Işık	Döngü
Zamanın Kırıldığı Gün	Gölgenin Ardındaki Işık	Sonbahar Vadisi
Zamanın Kırıldığı Gün	Döngü	Sonbahar Vadisi
Zamanın Kırıldığı Gün	Döngü	Gölgenin Ardındaki Işık
Zamanın Kırıldığı Gün	Sonbahar Vadisi	Döngü
Zamanın Kırıldığı Gün	Sonbahar Vadisi	Gölgenin Ardındaki Işık

Kaan'ın Seçimi	Selin'in Seçimi	Alper'in Seçimi
Gölgenin Ardındaki Işık	Zamanın Kırıldığı Gün	Döngü
Gölgenin Ardındaki Işık	Zamanın Kırıldığı Gün	Sonbahar Vadisi
Gölgenin Ardındaki Işık	Döngü	Zamanın Kırıldığı Gün
Gölgenin Ardındaki Işık	Döngü	Sonbahar Vadisi
Gölgenin Ardındaki Işık	Sonbahar Vadisi	Zamanın Kırıldığı Gün
Gölgenin Ardındaki Işık	Sonbahar Vadisi	Döngü
Döngü	Zamanın Kırıldığı Gün	Gölgenin Ardındaki Işık
Döngü	Zamanın Kırıldığı Gün	Sonbahar Vadisi
Döngü	Gölgenin Ardındaki Işık	Sonbahar Vadisi
Döngü	Gölgenin Ardındaki Işık	Zamanın Kırıldığı Gün
Döngü	Sonbahar Vadisi	Zamanın Kırıldığı Gün
Döngü	Sonbahar Vadisi	Gölgenin Ardındaki Işık

Tablo incelendiğinde aynı renkteki satılarda bulunan **filmlerin sıralaması,** cumartesi günü izlenen üç filmi belirlemede **önemli değildir.**

Bu durumda cumartesi günü izlenen 3 film 4 farklı şekilde belirlenebilir.



Çizge incelendiğinde aynı renkteki sonuçlarda bulunan **filmlerin sıralaması,** cumartesi günü izlenen üç filmi belirlerken **önemli değildir.**

Bu durumda cumartesi günü izlenen 3 film 4 farklı şekilde belirlenebilir.

GÖREV 4. 4 filmin üçlü sıralanış sayısını bulurken filmlerin sırası önemlidir. Fakat cumartesi günü izlenebilecek 3 filmin seçilmesi işleminde filmlerin sıralaması önemli değildir. 3 filmin kendi arasındaki sıralanışı yeni bir seçim oluşturmaz.

$$\frac{\text{4 filmden 3 tanesinin farklı sıralama sayısı}}{\text{Cumartesi günü izlenebilecek 3 filmin sıralama sayısı}} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3!} = 4$$

NOT

n ve r doğal sayı ve r ≤ n olmak üzere n tane farklı nesne arasından r tane farklı nesnenin seçim sayısı $\binom{n}{r}$ ile gösterilir.

ÖRNEK

Hakan Bey; aşağıdaki tişörtlerden 3 tanesini, pantolon ve ceketlerden ikişer tanesini seçerek çıkacağı tatil için hazırlayacağı valize koyacaktır.



a) Valize koyacağı kıyafetleri kaç farklı şekilde seçebilir bulunuz.

b) Valize koyacağı tişört, pantolon ve ceketlerin üçünün de rengi aynı renk olmayacak şekilde kıyafetleri kaç farklı şekilde seçebilir bulunuz.

ÇÖZÜM

a) $\binom{6}{3} \cdot \binom{3}{2} \cdot \binom{4}{2} = 20 \cdot 3 \cdot 6$

$= 360$

b) Pantolon, ceket ve tişörtlerin üçünün de aynı renkte olduğu iki durum söz konusudur: Ya hepsi bej ya da hepsi açık mavi olmalıdır. Üç parçanın aynı renkte olmama durumlarını hesaplamak için tüm olası durumların sayısından üçünün aynı renkte olduğu durumların sayısı çıkarılması en uygun yöntemdir. Üçünün aynı renkte olduğu durumlardan bahsettiğimizde ise karşımıza üç farklı seçenek çıkar.

Tüm durumların sayısı → $\binom{6}{3} \cdot \binom{3}{2} \cdot \binom{4}{2} = 20 \cdot 3 \cdot 6 = 360$

3 parçanın bej renk olanlarının valize koyulduğu durumların sayısı → $\binom{5}{2} \cdot \binom{2}{1} \cdot \binom{3}{1} = 10 \cdot 2 \cdot 3 = 60$

3 parçanın mavi renk olanlarının valize koyulduğu durumların sayısı → $\binom{5}{2} \cdot \binom{2}{1} \cdot \binom{3}{1} = 10 \cdot 2 \cdot 3 = 60$

3 parçanın bej ve mavi renk olanlarının valize koyulduğu durumların sayısı → $\binom{4}{1} \cdot \binom{1}{0} \cdot \binom{2}{0} = 4 \cdot 1 \cdot 1 = 4$

$60 + 60 - 4 = 116$

$360 - 116 = 244$ farklı şekilde seçilebilir.

SIRA SİZDE 5.

Bir turizm şirketi, "Kültür ve Doğa Arasında" temalı yeni bir gezi rotası oluşturmak üzere Türkiye'nin farklı bölgelerinden 10 turistik yeri değerlendirmeye almıştır. Bu yerlerden 6'sı tarihî yapılar, 4'ü doğal güzelliklerdir. Şirket, gezinin tanıtım broşüründe yer alacak gezilecek yerleri seçerken şu kriterleri gözetmektedir:

- Broşürde en fazla 7 yerin fotoğrafı yer almalıdır.
- Seçilen yerler arasında en az 3 tarihî yapı ve en az 2 doğal güzellik bulunmalıdır.

Buna göre broşür için gezilecek yerler kaç farklı şekilde seçilebilir? Hesaplayınız.

PASCAL ÜÇGENİ

ETKİNLİK 4

Size verilen problem senaryosunu dikkatle inceleyerek görevleri sırasıyla tamamlayınız.

Problem Senaryosu: Bir genetik laboratuvarında araştırmacı olarak görev yaptığınızı düşününüz. Yürüttüğünüz çalışmalarda, DNA dizilimlerinde yer alan belirli genetik kodları analiz etmektesiniz. DNA, canlıların kalıtsal özelliklerini taşıyan temel biyolojik moleküldür ve yapısında yer alan dört farklı nükleotit bazı (adenin "A", timin "T", guanin "G", sitozin "S") sayesinde genetik bilginin kodlanmasını sağlar. DNA dizileme cihazları, baz sinyallerini kimyasal tepkimeler veya floresan ışımalarla okur. DNA örneği bozulmuş, sinyal zayıf veya cihazın çözünürlüğü düşükse baz okunamaz ve sonuçta boş bir bölge (gap) oluşur. Bu durumda "Baz tespit edilemedi." denir.

GÖREV 1. İncelediğiniz DNA örneğinde tespit ettiğiniz bazlara ilişkin aşağıdaki tabloyu örnekteki gibi doldurunuz.

İncelediğiniz DNA'daki Tespit ettiğiniz Toplam Baz Sayısı	İncelediğiniz DNA'daki Bulunabilecek Olası Adenin Sayısı	Adenin Bazının DNA'da Bulunduğu Yerlerin Seçim Sayısının Cebirsel Temsilleri	Sonuçlar
0	0	$\binom{0}{0}$	1
1			
2			
3	0, 1, 2, 3	$\binom{3}{0}, \binom{3}{1}, \binom{3}{2}, \binom{3}{3}$	1, 3, 3, 1
4			
5			
. . .	. . .	. . .	. . .
n			

GÖREV 2. Tabloya yazdığınız cebirsel temsiller ve sonuçlardan oluşturulan aşağıdaki modellemeleri inceleyiniz ve modellemelerin hangi geometrik şekle benzediğini yazınız.

$\binom{0}{0} \longrightarrow 1$

1. satır $\binom{1}{0}, \binom{1}{1} \longrightarrow 1\ ,\ 1$

2. satır $\binom{2}{0}, \binom{2}{1}, \binom{2}{2} \longrightarrow 1,\ 2,\ 1$

3. satır $\binom{3}{0}, \binom{3}{1}, \binom{3}{2}, \binom{3}{3} \longrightarrow 1,\ 3,\ 3,\ 1$

4. satır $\binom{4}{0}, \binom{4}{1}, \binom{4}{2}, \binom{4}{3}, \binom{4}{4} \longrightarrow 1,\ 4,\ 6,\ 4,\ 1$

5. satır $\binom{5}{0}, \binom{5}{1}, \binom{5}{2}, \binom{5}{3}, \binom{5}{4}, \binom{5}{5} \longrightarrow 1,\ 5,\ 10,\ 10,\ 5,\ 1$

⋮ ⋮

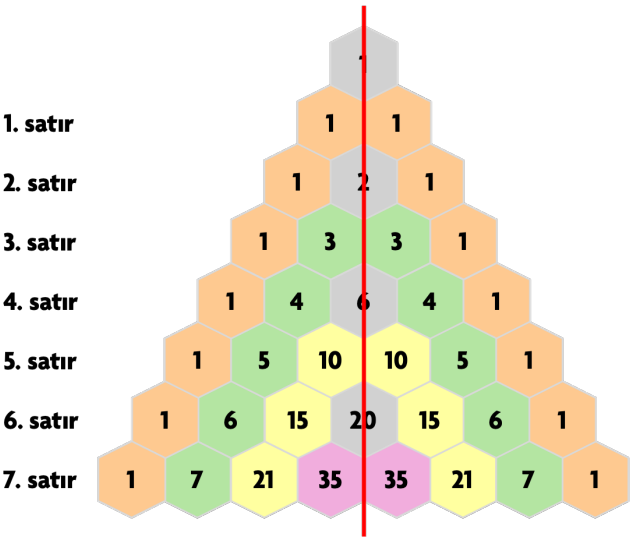
n. satır $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \ldots \quad \ldots, \binom{n}{n-1}, \binom{n}{n} \longrightarrow 1,\ n, \ldots \quad \ldots,\ n,\ 1$

NOT

$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere n eleman arasından 0, 1, 2, ..., n tane elemanın kaç farklı şekilde seçilebileceğinin ayrı ayrı hesaplanmasıyla elde edilen sonuçların listelenerek üçgen şeklinde bir modelleme yapılması mümkündür. Bu yapı sayesinde karmaşık hesaplamaların basitleştirilmesi sağlanır. Üçgen şeklindeki bu model, genellikle **"Pascal üçgeni"** olarak bilinir.

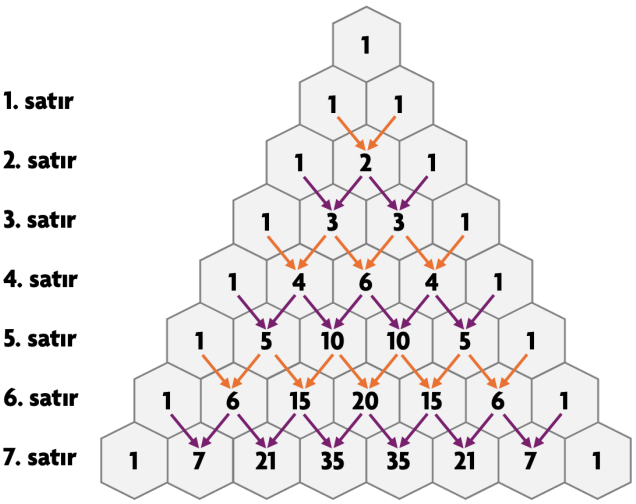
GÖREV 3. Aşağıda verilen Pascal üçgeninin özelliklerini inceleyerek örnekteki gibi seçme sayıları ile ilgili genellemeleri cebirsel ifadelerle yazınız.

Özellik	Açıklama	Seçme Sayıları İle İlgili Genellemeler

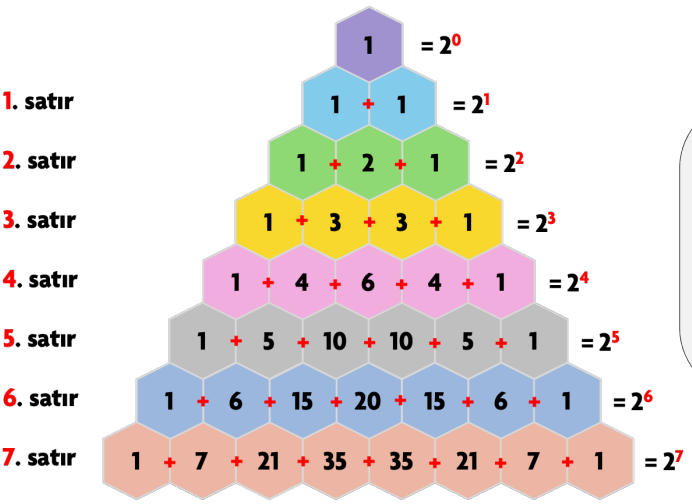


Pascal üçgeni simetrik bir yapıya sahiptir. Kırmızı çizginin sağ ve sol tarafındaki sayılar simetrik bir şekilde yerleşmiştir.

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$



Pascal üçgeninin herhangi bir satırındaki ardışık iki sayının toplamı, bir sonraki satırda bu iki sayının ortasında bulunan sayıya eşittir.

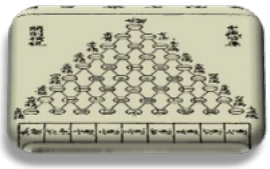


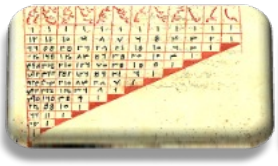
Pascal üçgeninin herhangi bir satırındaki sayıları topladığınızda çıkan sayı 2 üzeri satır numarasına eşit olur.

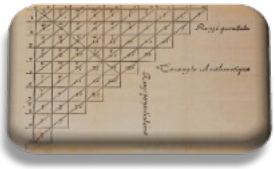
NOT

Blaise Pascal, 1623 ve 1662 yılları arasında yaşamış bir matematikçidir. Üçgen şeklinde yapılan bu modelleme de onun soyadıyla anılmaktadır. Fakat bu üçgen üzerine Pascal'dan önce çalışma yapan başka matematikçiler de vardır. 1130 ve 1180 yılları arasında yaşamış Yahya El Mağribi, 1048 ve 1131 arasında yaşamış Ömer Hayyam da bu üçgen üzerine çalışmalar yapmıştır. Aynı zamanda Çin ve Hint kitaplarında da bu üçgenden bahsedilmiştir.


Hint


Çin


Yahya El Mağribi

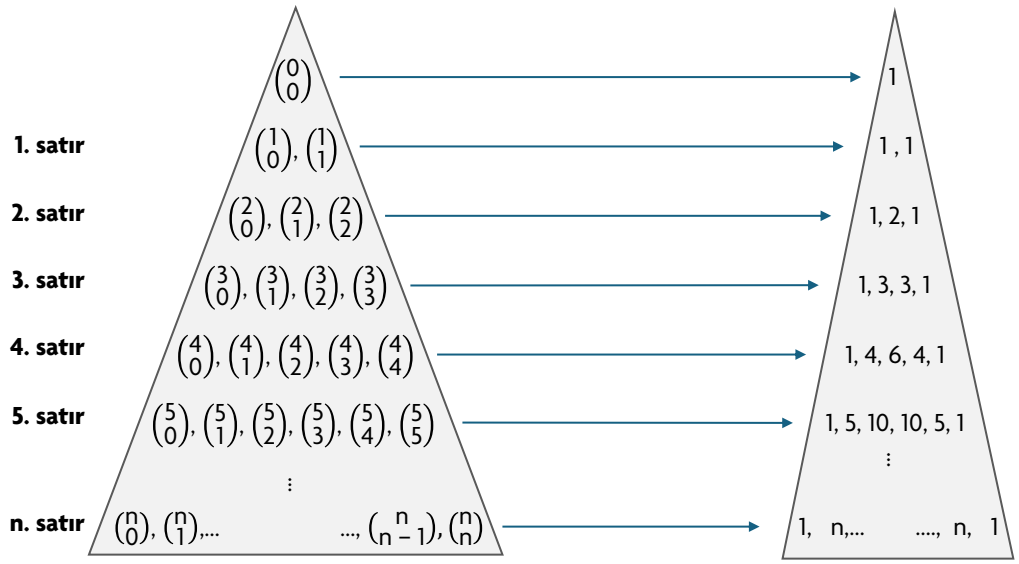

Blaise Pascal

GERİ BİLDİRİM

GÖREV 1

İncelediğiniz DNA'daki Tespit Ettiğiniz Toplam Baz Sayısı	İncelediğiniz DNA'daki Bulunabilecek Olası Adenin Sayısı	Adenin Bazının DNA'da Bulunduğu Yerlerin Seçim Sayısının Cebirsel Temsilleri	Sonuçlar
0	0	$\binom{0}{0}$	1
1	0, 1	$\binom{1}{0}, \binom{1}{1}$	1, 1
2	0, 1, 2	$\binom{2}{0}, \binom{2}{1}, \binom{2}{2}$	1, 2, 1
3	0, 1, 2, 3	$\binom{3}{0}, \binom{3}{1}, \binom{3}{2}, \binom{3}{3}$	1, 3, 3, 1
4	0, 1, 2, 3, 4	$\binom{4}{0}, \binom{4}{1}, \binom{4}{2}, \binom{4}{3}, \binom{4}{4}$	1, 4, 6, 4, 1
5	0, 1, 2, 3, 4, 5	$\binom{5}{0}, \binom{5}{1}, \binom{5}{2}, \binom{5}{3}, \binom{5}{4}, \binom{5}{5}$	1, 5, 10, 10, 5, 1
. . .	. . .	. . .	. . .
n	0, 1, 2, 3, ..., n	$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \ldots, \binom{n}{n-1}, \binom{n}{n}$	1, n, ..., n, 1

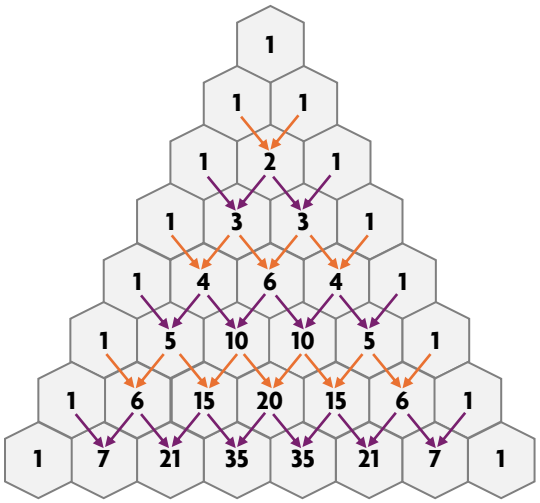
GÖREV 2



Modellemeler incelendiğinde ortaya çıkan geometrik şeklin üçgen formuna benzediği görülmektedir.

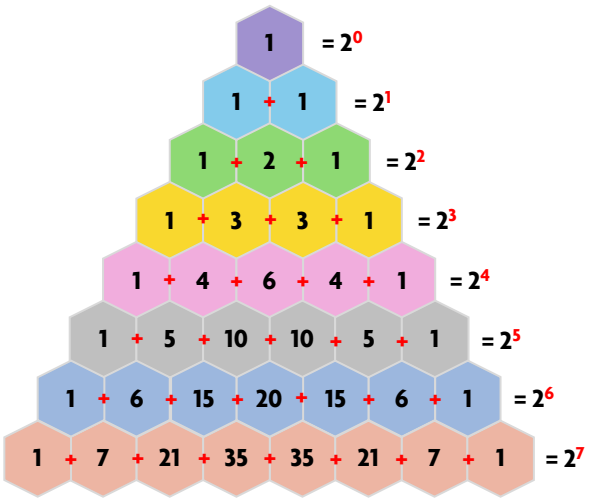
GÖREV 3

Özellik	Açıklama	Seçme Sayıları İle İlgili Genellemeler



Pascal üçgeninin herhangi bir satırındaki ardışık iki sayının toplamı bir sonraki satırda bu iki sayının ortasında bulunan sayıya eşittir.

$$\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \binom{n+1}{r+1}$$



Pascal üçgeninin herhangi bir satırındaki sayıları topladığınızda 2 üzeri satır numarasına eşit olur.

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots\ldots\ldots + \binom{n}{n} = 2^n$$

GÜVERCİN YUVASI İLKESİ

ETKİNLİK 5.

Görevleri sırasıyla yapınız.

GÖREV 1. Görsellerde yer alan güvercinlerin yuvalara yerleştirilmesi durumunda, herhangi bir yuvada birden fazla güvercin bulunmasının zorunlu olup olmadığını ilgili kutucuğa ✓ (tik) işareti koyarak belirtiniz. Bu zorunluluğun yuvaların sayısı ile güvercinlerin sayısı arasındaki ilişki bağlamında yapılan açıklamadaki boşlukları doldurunuz.



ZORUNLU ☐
ZORUNLU DEĞİL ☐



ZORUNLU ☐
ZORUNLU DEĞİL ☐



ZORUNLU ☐
ZORUNLU DEĞİL ☐



ZORUNLU ☐
ZORUNLU DEĞİL ☐

Güvercin sayısı, yuva sayısından ---- veya ---- ise herhangi bir yuvada birden fazla güvercin olmak zorunda değildir.

Güvercin sayısı, yuva sayısından ---- ise herhangi bir yuvada birden fazla güvercin olmak zorundadır.

NOT

Eğer yerleştirilecek nesnelerin sayısı (n), yerleştirilecek yerlerin sayısından (m) büyükse en az bir yerde birden çok nesne bulunur.

GÖREV 2. Verilen güvercin yuvası ve güvercin sayılarına göre güvercinleri yuvalara yerleştirdiğinizde en az bir yuvada kesin olarak bulunan en az güvercin sayısını belirleyerek tabloyu örnekteki gibi doldurunuz.

(İpucu: Güvercinleri mümkün olduğunca her güvercin yuvasında eşit sayıda olacak şekilde yerleştirmelisiniz.)

Yuva Sayısı	Güvercin Sayısı	En Az Bir Yuvada Kesin Olarak Bulunan En Az Güvercin Sayısı
2	7	4
3	15	5
4	23	
5	14	
6	38	
7	70	
8	95	

NOT

$\frac{n}{m} \leq a$ ve $a \in \mathbb{N}$ olmak üzere a nın alabileceği en küçük değer için n > m ise en az bir yerde en az a adet nesne bulunur.

GERİ BİLDİRİM

GÖREV 1



ZORUNLU ☐	**ZORUNLU** ☐	**ZORUNLU** ☑	**ZORUNLU** ☑
ZORUNLU DEĞİL ☑	**ZORUNLU DEĞİL** ☑	**ZORUNLU DEĞİL** ☐	**ZORUNLU DEĞİL** ☐

Güvercin sayısı, yuva sayısından **küçük** veya **eşit** ise herhangi bir yuvada birden fazla güvercin olmak zorunda değildir.

Güvercin sayısı, yuva sayısından **büyük** ise herhangi bir yuvada birden fazla güvercin olmak zorundadır.

GÖREV 2. Güvercinleri her güvercin yuvasına mümkün olduğunca eşit sayıda yerleştirdiğinizde artan güvercinler olabilir.

Örneğin, 7 güvercini 2 güvercin yuvasına eşit şekilde dağıttığınızda her yuvada 3 güvercin bulunur ve 1 güvercin artar. Bu kalan güvercini bir yuvaya eklemek zorundasınız. Böylece o yuvada 4 güvercin olur. Bu durumda en az bir yuvada kesinlikle 4 güvercin bulunur.

Benzer şekilde 15 güvercini 3 güvercin yuvasına eşit dağıttığınızda her yuvada 5 güvercin bulunur ve en az bir yuvada kesinlikle 5 güvercin olur.

Yuva Sayısı	Güvercin Sayısı	En Az Bir Yuvada Kesin Olarak Bulunan En Az Güvercin Sayısı
2	7	4
3	15	5
4	23	6
5	14	3
6	38	7
7	70	10
8	95	12

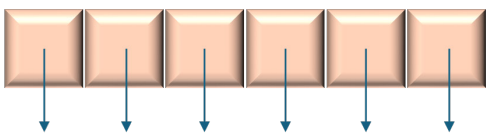
GERİ BİLDİRİM

Bu geri bildirim sayesinde kendi cevabınızı kontrol edebilir, hatalarınızı düzelterek öğrenmenizi pekiştirebilirsiniz.

SIRA SİZDE 1.

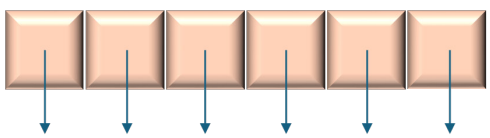
ÇÖZÜM

a)



5 · 10 · 10 · 10 · 10 · 10 = 500 000 farklı şifre oluşturulabilir.

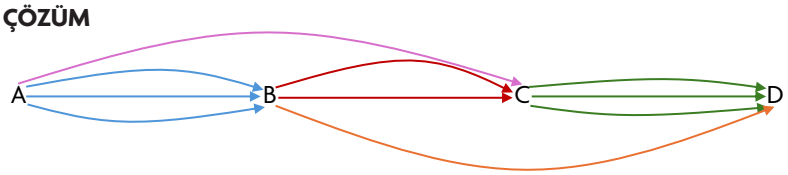
b)



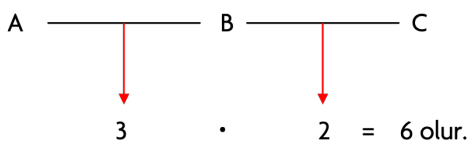
5 · 9 · 8 · 7 · 6 · 5 = 75 600 farklı şifre oluşturulabilir

SIRA SİZDE 2.

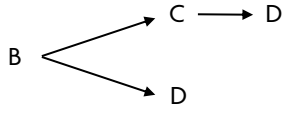
ÇÖZÜM



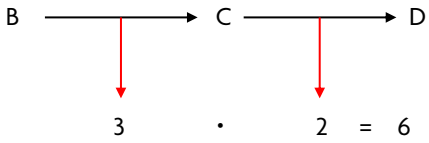
a)

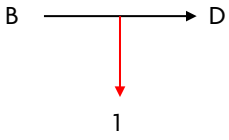


b)



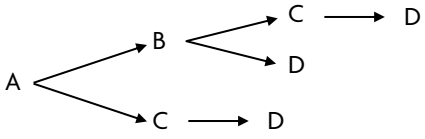
B şehrinden D şehrine giderken 2 farklı yol izlenebilir.



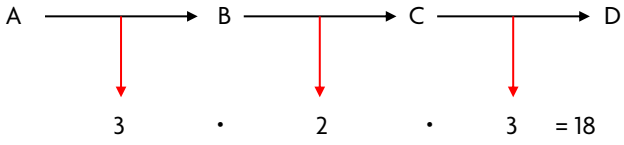


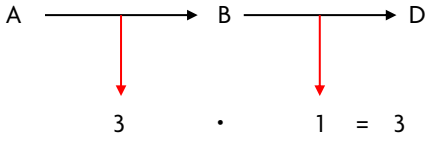
6 + 1 = 7 farklı yoldan gidilebilir.

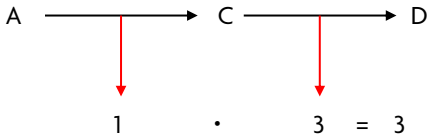
c)



A şehrinden D şehrine giderken 3 farklı yol izlenebilir.







18 + 3 + 3 = 24 farklı yoldan gidilebilir.

24 – 1 = 23 farklı yoldan dönülebilir

23 • 24 = 552 farklı gidip gelme yolu vardır.

SIRA SİZDE 3.

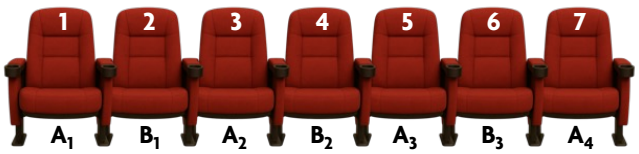
ÇÖZÜM



Öğretmenler: A_1, A_2, A_3, A_4
Öğrenciler: B_1, B_2, B_3

a) A_1, A_2, A_3, A_4, B_1, B_2, B_3 olmak üzere 7 kişinin **yan yana sıralanması** gerekir.
$7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 7!$ farklı şekilde oturabilirler.

b)



Öğretmen ve öğrencilerin örnek oturma düzeni yukarıdaki gibi olmalıdır. Öğretmenler kendi arasında, öğrenciler de kendi arasında yer değiştirebilir.

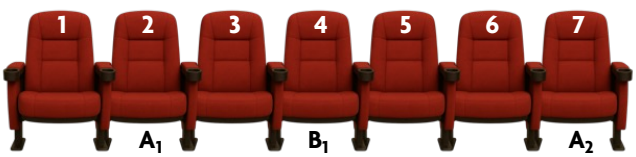
$4! \cdot 3! = 144$ farklı şekilde oturabilir.

c) **_ A_1 _ A_2 _ A_3 _ A_4 _**

Öğretmenler yan yana sıralandığında öğrenciler işaretlenen 5 yerde durabilir. Öğretmenler kendi arasında yer değiştirebilir.

$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4! = 1\,440$ farklı şekilde oturabilir.

d)



2 ve 7 numarada öğretmen	**4 numarada öğrenci**	**Kalan kişilerin sıralanması**
$4 \cdot 3$	3	$4!$

$4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4! = 864$ farklı şekilde oturabilir.

e) 2 ve 7 numaralı koltuklarda öğretmen ya da 4 numaralı koltukta öğrencinin oturması, iki koşuldan en az birinin gerçekleşmesiyle sağlanır.

1. Koşul

2 ve 7 numaralı koltukta öğretmenin oturduğu durumlar

$4 \cdot 3 \cdot 5! = 1\,440$

2. Koşul

4 numaralı koltukta öğrenci oturduğu durumlar

$3 \cdot 6! = 2\,160$

1. Koşul ve 2. Koşul

2 ve 7 numaralı koltukta öğretmenin oturduğu durumlar ve 4 numaralı koltukta öğrencinin oturduğu durumlar

$4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4! = 864$

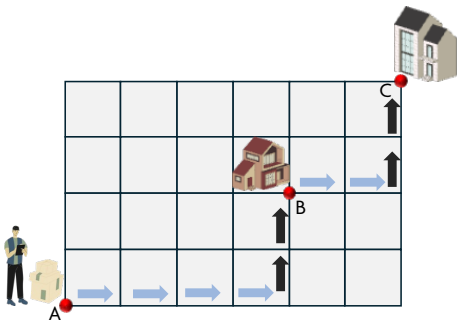
İki koşulun aynı anda sağlandığı durumlar 2 koşul içinde de sayılır. Bundan dolayı 2 koşulun sağlandığı durumlar toplanır ve aynı anda sağlandığı durumlar toplamdan çıkarılır.

$1\,440 + 2\,160 - 864 = 2\,736$ farklı şekilde oturabilir.

SIRA SİZDE 4.

ÇÖZÜM

Bir mahallenin birbirini dik kesen sokaklarının krokisi aşağıda verilmiştir. Kargo dağıtım görevlisi Gökhan Bey A noktasında, Gizem Hanım'ın evi B noktasında, Deniz Hanım'ın evi ise C noktasındadır.



a) Gökhan Bey, en kısa yoldan giderek önce Gizem Hanım'ın kargosunu daha sonra Deniz Hanım'ın kargosunu teslim ederse kaç farklı yol kullanabilir?

b) Gökhan Bey, en kısa yoldan giderek önce Gizem Hanım'ın kargosunu daha sonra Deniz Hanım'ın kargosunu teslim edip A noktasına dönerse kaç farklı yol kullanabilir?

a) Gökhan Bey, Gizem Hanım'ın kargosunu teslim etmek için dört kez sağa doğru (S) ve iki kez yukarı (Y) yönde hareket etmelidir. Bu durum, dört tane S harfi ile iki tane Y harfinin ardışık olarak dizilmesi şeklinde değerlendirilebilir.

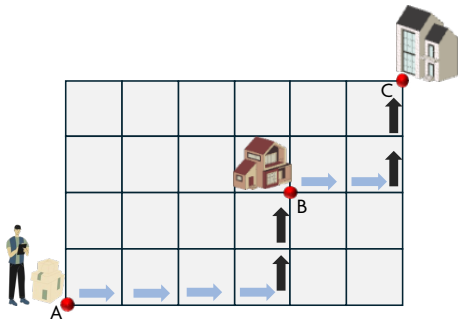
$$SSSSYY \longrightarrow \frac{6!}{4! \cdot 2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{4! \cdot 2!} = 15$$

Gökhan Bey, Gizem Hanım'ın kargosunu teslim ettikten sonra Deniz Hanım'ın kargosunu teslim etmek için iki kez sağa doğru (S) ve iki kez yukarı (Y) yönde hareket etmelidir. Bu durum, iki tane S harfi ile iki tane Y harfinin ardışık olarak dizilmesi şeklinde değerlendirilebilir.

$$SSYY \longrightarrow \frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2!}{2! \cdot 2!} = 6$$

$15 \cdot 6 = 90$ farklı yol kullanılabilir.

b)



Gökhan Bey, Gizem Hanım'ın kargosunu teslim etmek için dört kez sağa doğru (S) ve iki kez yukarı (Y) yönde hareket etmelidir. Bu durum, dört tane S harfi ile iki tane Y harfinin ardışık olarak dizilmesi şeklinde değerlendirilebilir.

$$SSSSYY \longrightarrow \frac{6!}{4! \cdot 2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{4! \cdot 2!} = 15$$

Gökhan Bey, Gizem Hanım'ın kargosunu teslim ettikten sonra Deniz Hanım'ın kargosunu teslim etmek için iki kez sağa (S) ve iki kez yukarı (Y) yönde hareket etmelidir. Bu durum, iki tane S harfi ile iki tane Y harfinin ardışık olarak dizilmesi şeklinde değerlendirilebilir.

$$SSYY \longrightarrow \frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2!}{2! \cdot 2!} = 6$$

Gökhan Bey, Deniz Hanım'ın kargosunu teslim ettikten sonra A noktasına geri dönmek için altı kez sola doğru (S) ve dört kez aşağı (A) yönde hareket etmelidir. Bu durum, altı tane S harfi ile dört tane A harfinin ardışık olarak dizilmesi şeklinde değerlendirilebilir.

$$SSSSSSAAAA \longrightarrow \frac{10!}{6! \cdot 4!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{6! \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 210$$

$15 \cdot 6 \cdot 210 = 18900$ farklı yol kullanılabilir.

SIRA SİZDE 5.

ÇÖZÜM

Seçilecek Yerler	**Broşürdeki Şartlar**
• 6 tarihî yapı	• En fazla 7 yer
• 4 doğal güzellik	• En az 3 tarihî yapı
	• En az 2 doğal güzellik

Broşürde en az 3 tarihi yapı ve en az 2 doğal güzellik bulunması gerektiğinden broşür için seçilecek yerlerin sayısı en az 5 olmalıdır. Ayrıca soruda yer alan bilgiye göre bu sayı en fazla 7 olabilir. Dolayısıyla, broşürde yer alacak mekan sayısı 5, 6 veya 7 olabilir.

5 yer → 3 tarihî yapı + 2 doğal güzellik → $\binom{6}{3} \cdot \binom{4}{2} = 20 \cdot 6 = 120$

6 yer → 4 tarihî yapı + 2 doğal güzellik → $\binom{6}{4} \cdot \binom{4}{2} = 15 \cdot 6 = 90$

6 yer → 3 tarihî yapı + 3 doğal güzellik → $\binom{6}{3} \cdot \binom{4}{3} = 20 \cdot 4 = 80$

7 yer → 5 tarihî yapı + 2 doğal güzellik → $\binom{6}{5} \cdot \binom{4}{2} = 6 \cdot 6 = 36$

7 yer → 4 tarihî yapı + 3 doğal güzellik → $\binom{6}{4} \cdot \binom{4}{3} = 15 \cdot 4 = 60$

7 yer → 3 tarihî yapı + 4 doğal güzellik → $\binom{6}{3} \cdot \binom{4}{4} = 20 \cdot 1 = 20$

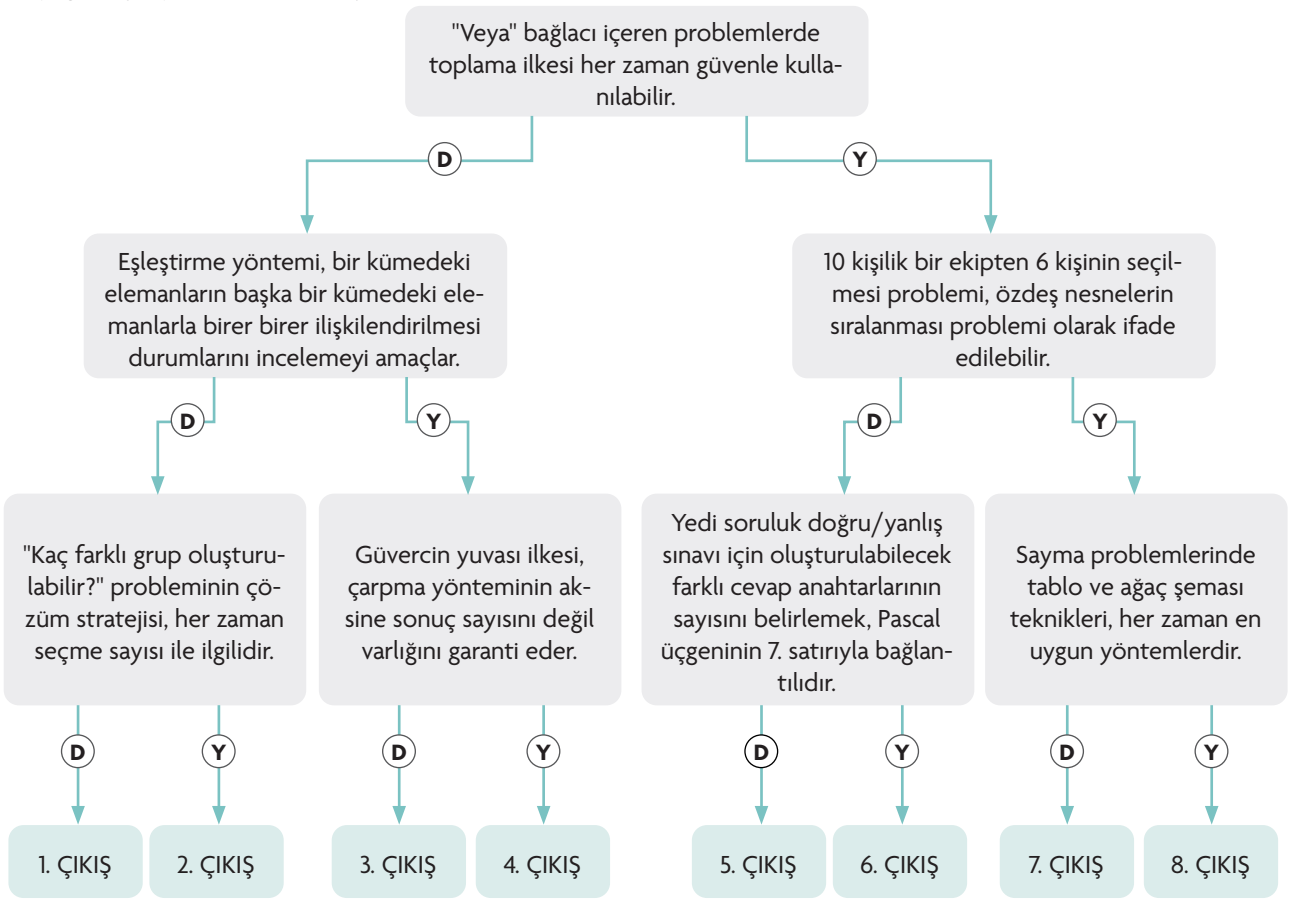
120 + 90 + 80 + 36 + 60 + 20 = 406 farklı şekilde seçilebilir.

DEĞERLENDİRİYORUM

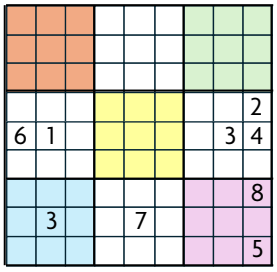
Amaç: Bu bölümde öğrendiklerinizi gözden geçirmenizi, kendi öğrenme sürecinizi değerlendirmenizi ve eksiklerinizi fark etmenizi amaçlıyoruz.

SORULAR

1. Aşağıda Doğru (D)/Yanlış (Y) ifadelerinden oluşan tanılayıcı dallanmış ağaç verilmiştir. İlk önermeden başlayarak her ifade için doğru olduğunu düşünüyorsanız (D), yanlış olduğunu düşünüyorsanız (Y) seçeneğini işaretleyiniz ve ulaştığınız çıkış noktasını belirleyiniz



2. Sudoku, mantık ve dikkat gerektiren sayısal bir yerleştirme oyunudur. Genellikle 9×9'luk bir kare ızgaradan oluşan oyun, bu ızgarayı dokuz adet 3×3'lük alt bölüme ayırır. Oyunun amacı; her satırda, her sütunda ve her 3×3'lük kutuda 1'den 9'a kadar olan sayıları tekrar etmeksizin yerleştirmektir. Aşağıda bazı karelere yerleştirilmiş sayılar verilmiştir.



a) En üstteki beyaz bölüme sayılar kaç farklı şekilde yerleştirilebilir bulunuz.

b) 5. satırdaki boş karelere sayılar kaç farklı şekilde yerleştirilebilir bulunuz.

c) Mor bölümdeki boş karelere sayılar kaç farklı şekilde yerleştirilebilir bulunuz.

3. Uluslararası Veri Güvenliği Enstitüsü, yeni bir dijital kasa sistemi tasarlamaktadır. Bu kasalarda kullanılan giriş paneli, 8 karakterden oluşan bir kod içermektedir ve güvenlik protokolüne göre

- Kodda 3 adet harf ve 5 adet rakam bulunmalıdır.
- Harfler ve rakamlar birer kez kullanılmalıdır.
- Parolada kullanılacak olan harflerin kümesi 20 elemanlıdır.
- İki harf yan yana gelmemelidir.

Enstitünün kaç farklı güvenli şifre oluşturulabileceğini hesaplayınız. (Cevabı, asal çarpanlarına ayrılmış biçimde ifade ediniz.)

4. Bir teknoloji şirketi, yeni bir proje için dört farklı departmandan (yazılım, tasarım, pazarlama, test) toplam 12 uzmanın görevlendirilmesine karar vermiştir. Projenin başarısı için her departmanın katkısı kritik öneme sahiptir. Bu nedenle aşağıdaki şartlara uyulması gerekmektedir.

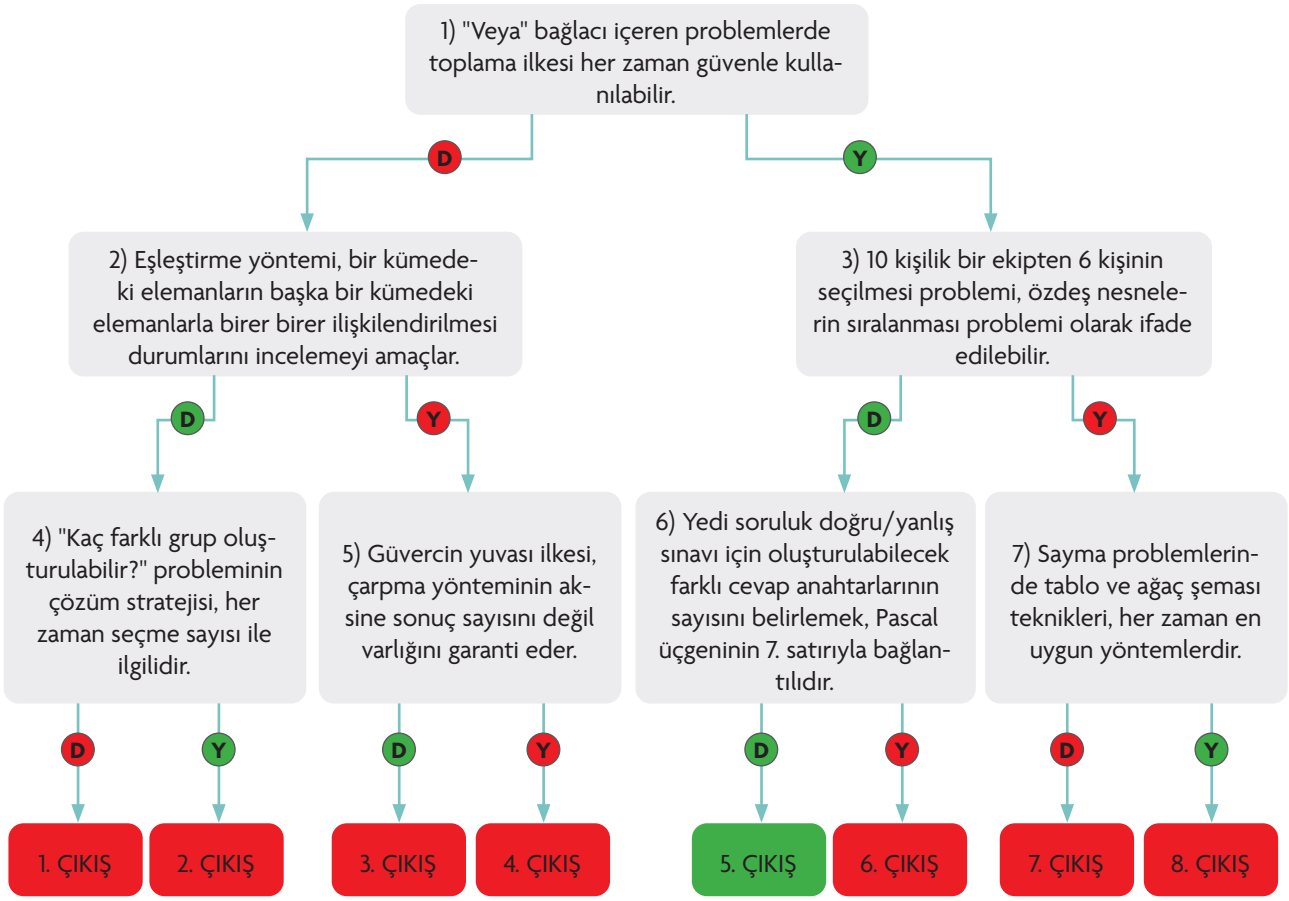
- Her departmandan en az bir uzman görevlendirilmelidir.
- Yazılım departmanının kritik rolü nedeniyle bu departmandan 3 uzman görevlendirilmelidir.

Buna göre departmanlardan seçilecek uzman sayısının dağılımı kaç farklı şekilde yapılabilir? Hesaplayınız.

GERİ BİLDİRİM

Bu geri bildirim sayesinde kendi cevabınızı kontrol edebilir, hatalarınızı düzelterek öğrenmenizi pekiştirebilirsiniz.

ÇÖZÜM 1.



1. Önerme

Toplama ilkesi aynı anda olamayan durumlar için geçerlidir. Örneğin 3 basamaklı çift **veya** 3'ün katı olan sayıları bulurken **hem çift hem de 3'ün katı** olan sayılar vardır.

7. Önerme

Tablo ve ağaç şeması; sayma problemindeki **veri sayısı arttıkça** çok fazla zaman alabilir.

3. Önerme

5 kişinin pozisyonları için **3 adet S** (Seçildi.) harfi ve **2 adet K** (Kaldı.) harfi verildiğinde bu durum **özdeş** nesnelerin sıralanması problemi olarak ifade edilebilir.

6. Önerme

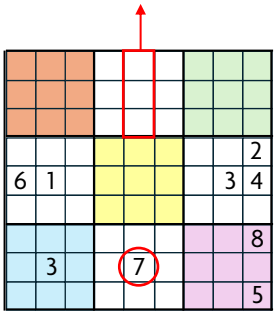
Doğru olan soruların sayısı belirlendiğinde geriye kalanlar yanlış olacaktır. Hangi soruların doğru olacağı ise seçilen doğru sayısına bağlıdır. Bu durumda, 7 soruya ait **0'dan 7'ye** kadar olan **seçim sayılarının** hesaplanması gerekir. Bunun için **Pascal üçgeninin 7. satırına** bakmak yeterlidir.

4. Önerme

n elemandan oluşan bir kümede r adet özdeş eleman varsa sıralama sayısı **n!/r!** formülüyle hesaplanır. r değeri **arttıkça r! büyür** ve **payda büyüdüğünden** sıralama sayısı **azalır**.

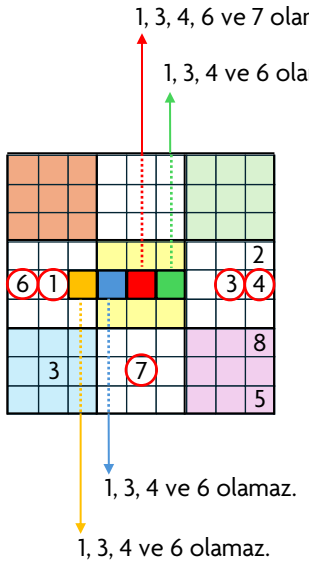
ÇÖZÜM 2.

a) Bu sütunda 7 olamaz.



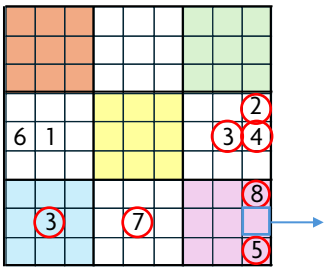
En üstteki beyaz bölüme sayıların yerleştirilebileceği **tüm olası düzenlemelerin sayısı**	→ 9!
7 sayısının ortadaki sütunda **olduğu** olası düzenlemelerin sayısı	→ 3 · 8!
7 sayısının ortadaki sütunda **olmadığı** olası düzenlemelerin sayısı	→ 9! – 3 · 8! = 6 · 8!

b)



7 sayısının **bulunabileceği** kare sayısı	→ 4
Kalan 4 sayının **sıralama sayısı**	→ 4!
Olası tüm yerleşimlerin **sayısı**	→ 4 · 4 = 96

c)



	3 olamaz.	**8**
3 ve 7 olamaz.	3 ve 7 olamaz.	3 seçenek
	3 olamaz.	**5**

Mavi çerçeveli kare için yerleşebilecek sayıların sayısı	3 sayısının bulunabileceği kare sayısı	**3 sayısı yerleştirildikten sonra** 7 sayısının yerleştirilebileceği kare sayısı	Kalan 4 sayının yerleşim sayısı
3	· 2	· 3	· 4! = 432

ÇÖZÜM 3.

Harflerin **yan yana olmaması** için rakamlar yerleştirildiğinde aralarında oluşan **boşluklara** konulmalıdır. → $\_R_1\_R_2\_R_3\_R_4\_R_5$

10 rakamdan 5 tanesinin **sıralanma sayısı** → $\binom{10}{5} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5!} = 252$

Harflerin yerleşimi için 6 konumdan 3 tanesinin **seçim sayısı** → $\binom{6}{3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3!} = 20$

20 harften 3 tanesinin **sıralanma sayısı** → $20 \cdot 19 \cdot 18$

Güvenli şifre sayısı → $252 \cdot 20 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18 = 2^7 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 19$

ÇÖZÜM 4.

YAZILIM	TASARIM	PAZARLAMA	TEST
3 uzman	1 uzman	1 uzman	1 uzman

Sorudaki bilgilere dayanarak
- Yazılım bölümünden 3 uzman,
- Her departmandan en az 1 uzman

görevlendirildiğinde toplamda 6 uzmanın sayısal dağılımı bu şekilde gerçekleşir.

TASARIM | PAZARLAMA | TEST

★ ★ | ★ ★ ★ | ★ → Kalan 6 uzmanın her biri ★, 6 uzmanın departmanlar için ayrım yerleri ise | ile temsil edilebilir.

$\frac{8!}{2! \cdot 6!} = 28$ → **İçinde özdeş nesnelerin bulunduğu topluluğun sıralanması**

ÖĞRENDİKLERİM

Amaç: Bu bölümde öğrendiklerinizi özetlemenizi, günlük hayatta ve farklı derslerde kullanabileceğiniz bilgileri belirlemenizi amaçlıyoruz.

Sayma stratejileri ile ilgili verilen anahtar kavramları ve önemli bilgileri kendi cümlelerinizle yazınız.

SAYMA STRATEJİLERİ

Sayma Yöntemleri

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Sıralama Sayısı

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Seçme Sayısı ve Pascal Üçgeni

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Güvercin Yuvası İlkesi

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Daha fazlası için karekodu okutunuz.



ALGORİTMİK YAPI OLUŞTURMA

BAŞLARKEN

Bu bölümde yer alan etkinlikler, bireysel öğrenme yolculuğunuzda size rehberlik etmek ve öğrenme sürecinizi desteklemek amacıyla hazırlanmıştır. Çalışmalarınızı yürütürken "Hazırlanıyorum", "İlişkilendiriyorum", "Uygulayarak Öğreniyorum", "Değerlendiriyorum", "Yansıtıcı Yazı" ve "Öğrendiklerim" etkinliklerini sırası ile takip etmeniz ve etkinliklerin sonunda yer alan geri bildirimleri inceleyerek bölümleri tamamlamanız beklenmektedir.

Bu çalışma kartında mantık bağlaçları ve niceleyicilerin algoritmalardaki işlevleri ve kullanımını hakkında bilgi sahibi olarak aşağıdaki soruları cevaplayabileceksiniz.

- "ise", "ancak ve ancak" bağlaçları bilişim ve kodlama algoritmalarında nasıl bir işleve sahiptir?
- Döngü yapıları algoritmalarda hangi durumlarda kullanılır?

HAZIRLANIYORUM

Amaç: Bu bölümde ön bilgilerinizi hatırlamanızı ve temaya hazırlıklı hâle gelmenizi amaçlıyoruz.

Aşağıda yer alan ifadeler, bu temada tamamlanması hedeflenen öğrenme çıktısını ele almadan önce sahip olmanız gereken bazı temel becerileri içermektedir.

- Lütfen her bir ifadeyi dikkatlice okuyunuz.
- Eğer ifadedeki bilgiye hâkim olduğunuzu düşünüyorsanız kutucuğu işaretleyiniz.
- Eğer konuyu henüz tam olarak bilmediğinizi ya da hatırlamadığınızı düşünüyorsanız kutucuğu boş bırakınız.

Bu çalışmanın amacı notla değerlendirilmeyecek olup amacı temaya ne ölçüde hazır olduğunuzu belirlemektir.

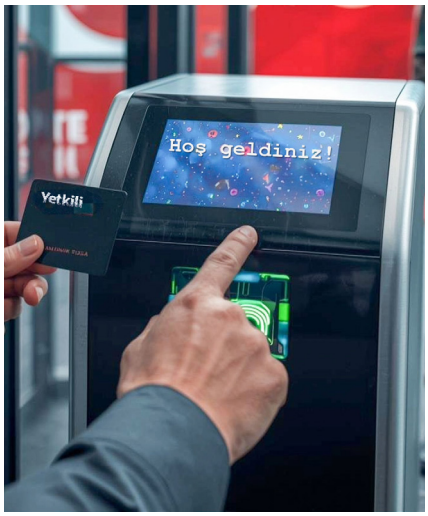
SORULAR	ÖN ÖĞRENME KONTROL LİSTESİ	
1	"ve, veya, ya da" bağlaçlarının algoritmadaki işlevlerini bilirim.	
2	"ve, veya, ya da" bağlaçlarını algoritma oluştururken kullanabilirim.	
3	n farklı nesneden r tanesinin sıralama sayısını bulabilirim.	

"Ön Öğrenme Kontrol Listesi"ni doldurduktan sonra aşağıda verilen "Kontrol Noktası" sorularını çözünüz ve cevaplarınızı kontrol ediniz.

KONTROL NOKTASI

SORU 1.

Sınırlı kişilere giriş yetkisinin verildiği bir tesiste yetkili kişilerin bilgileri; yüz tanıma, parmak izi tanıma ve kart tanıma sistemlerine kaydedilmiştir.



Giriş yetkisi verilecek kişinin önce yüz tanıma sisteminden kimliği tespit edilecektir. Eğer yetkili kişilerden biriyse parmak izi tanıma, kart tanıma sistemleri kullanılarak giriş izni verilecektir.

Giriş sisteminin çalışma algoritması oluşturulmadan önce tesis yöneticileri tarafından yüz tanıma sistemini geçen yetkili kişiler için 3 farklı giriş yöntemi aşağıda belirtilmiştir.

Buna göre aşağıdaki boşluklara uygun bağlaçları yazınız.

a) Parmak izi ile kart tanıma sistemi birlikte doğrulama isterse oluşturulan algoritmada "Parmak izi ---- giriş kartı, yüzü tanınan yetkiliye ait mi?" kontrolünün yapılması gerekir.

b) Parmak izi ile kart tanıma sistemlerinden biri ya da ikisi birlikte doğrulama isterse oluşturulan algoritmada parmak izi ---- giriş kartının yüzü tanınan yetkiliye ait olup olmadığının kontrolünün yapılması gerekir.

c) Parmak izi ile kart tanıma sistemlerinden sadece biri doğrulama isterse oluşturulan algoritmada parmak izi ---- giriş kartının yüzü tanınan yetkiliye ait olup olmadığının kontrolünün yapılması gerekir.

SORU 2.

Yukarıda verilen yöntemlerden "parmak izi ile kart tanıma sistemi birlikte kullanıldığında oluşturulacak algoritma"yı doğal dil ile yazınız.

1. **Adım: Başla.**

2. **Adım: Yüz tanıma verilerinin alınması**

   .....

3. **Adım: Yüz tanıma sisteminin çalışması**

   .....

   .....

   .....

4. **Adım: Sensörlerinden gelen verilerin alınması**

   .....

5. **Adım: Sensörlerden gelen verilerin kontrolü**

   .....

   .....

6. **Adım: Bitir.**

SORU 3.

a) KAYSERİ kelimesinin harflerinden herhangi üçü kaç farklı şekilde sıralanabilir? Bulunuz.

b) n harfli bir kelimenin harflerinden herhangi r tanesi kaç farklı şekilde sıralanabilir?

GERİ BİLDİRİM

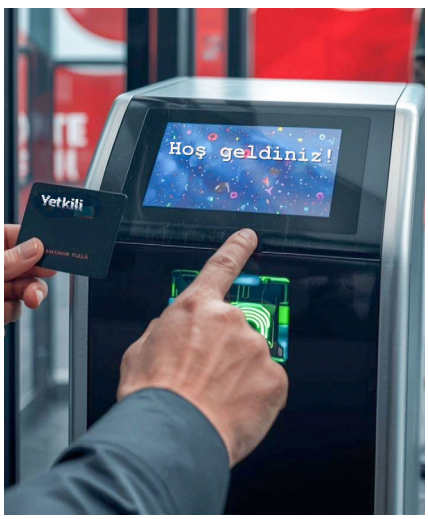
Bu geri bildirimler sayesinde kendi cevabınızı kontrol edebilir, hatalarınızı düzelterek öğrenmenizi pekiştirebilirsiniz.

SORU 1.

ÇÖZÜM

Sınırlı kişilere giriş yetkisinin verildiği bir tesiste yetkili kişilerin bilgileri yüz tanıma, parmak izi tanıma ve kart tanıma sistemlerine kaydedilmiştir.

Buna göre aşağıdaki boşluklara uygun bağlaçları yazınız.



a) Parmak izi ile kart tanıma sistemi birlikte doğrulama isterse "Parmak izi **ve** ($\wedge$) giriş kartı, yüzü tanınan yetkiliye ait mi?" kontrolünün yapılması gerekir.

b) Parmak izi, kart tanıma sistemlerinden herhangi biri hem de ikisi birlikte doğrulama isterse "Parmak izi **veya** ($\vee$) giriş kartı, yüzü tanınan yetkiliye ait mi?" kontrolünün yapılması gerekir.

c) Parmak izi, kart tanıma sistemlerinden sadece biri doğrulama isterse "Parmak izi **ya da** ($\veebar$) giriş kartı, yüzü tanınan yetkiliye ait mi?" kontrolünün yapılması gerekir.

SORU 2.

ÇÖZÜM

Yukarıda verilen yöntemlerden "parmak izi ile kart tanıma sistemi birlikte kullanıldığında oluşturulacak algoritma"yı doğal dil ile yazınız.

1. **Adım: Başla.**

2. **Adım: Yüz tanıma verilerinin alınması**

   Kullanıcının yüz tanıma verilerini al.

3. **Adım: Yüz tanıma sisteminin çalışması**

   Eğer yüz yetkili bir kişiye aitse: "Hoş geldiniz! Sağ elinizin işaret parmağını parmak izi tanıma sensörüne okutunuz ve sol elinizle tanıma kartını kart okuma sensörüne yaklaştırınız.", sonraki adıma git.
   Değilse: "Tesise giriş izniniz yoktur!", 6. adıma git.

4. **Adım: Sensörlerinden gelen verilerin alınması**

   Kullanıcının parmak izini ve kartını oku.

5. **Adım: Sensörlerden gelen verilerin kontrolü**

   Eğer parmak izi ve kart, bir önceki adımda tanınan kişiye aitse kapıyı aç.

   Değilse: "Lütfen, kartınızı ve parmağınızı kontrol edin!"

6. **Adım: Bitir.**

UYARI

Burada tırnak içinde gösterilen cümleleri istediğiniz gibi yazabilirsiniz.

3. adımda önemli olan yüz tanıma sistemiyle yetkili kişinin tanınarak bir sonraki doğrulama işlemlerine geçmesini sağlamaktır.

5. adımda ise önemli olan parmak izi ile kart doğrulamasının "**ve**" bağlacıyla bağlanarak ikisinin de 3. adıma atıfla yüzü tanınan kişiye ait olduğunun doğrulamasının yapılmasıdır.

SORU 3.

ÇÖZÜM

a) KAYSERİ kelimesinin harflerinden herhangi üçü kaç farklı şekilde sıralanabilir?

KAYSERİ kelimesinin 7 farklı harfi bulunduğu için bunlardan 3'ünün sıralama sayısı; birinci basamağa 7 farklı sayıdan biri, ikinci basamağa 6 farklı sayıdan biri, 3. basamağa 5 farklı sayıdan biri geleceği için $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$ olarak bulunur.

b) n harfli bir kelimenin harflerinden herhangi r tanesi kaç farklı şekilde sıralanabilir?

Burada n den geriye doğru r tane sayarak tüm elemanlar birbiriyle çarpılır. Bu çarpma işleminde ilk terim n olduğundan son terim de $(n - r + 1)$ olur.

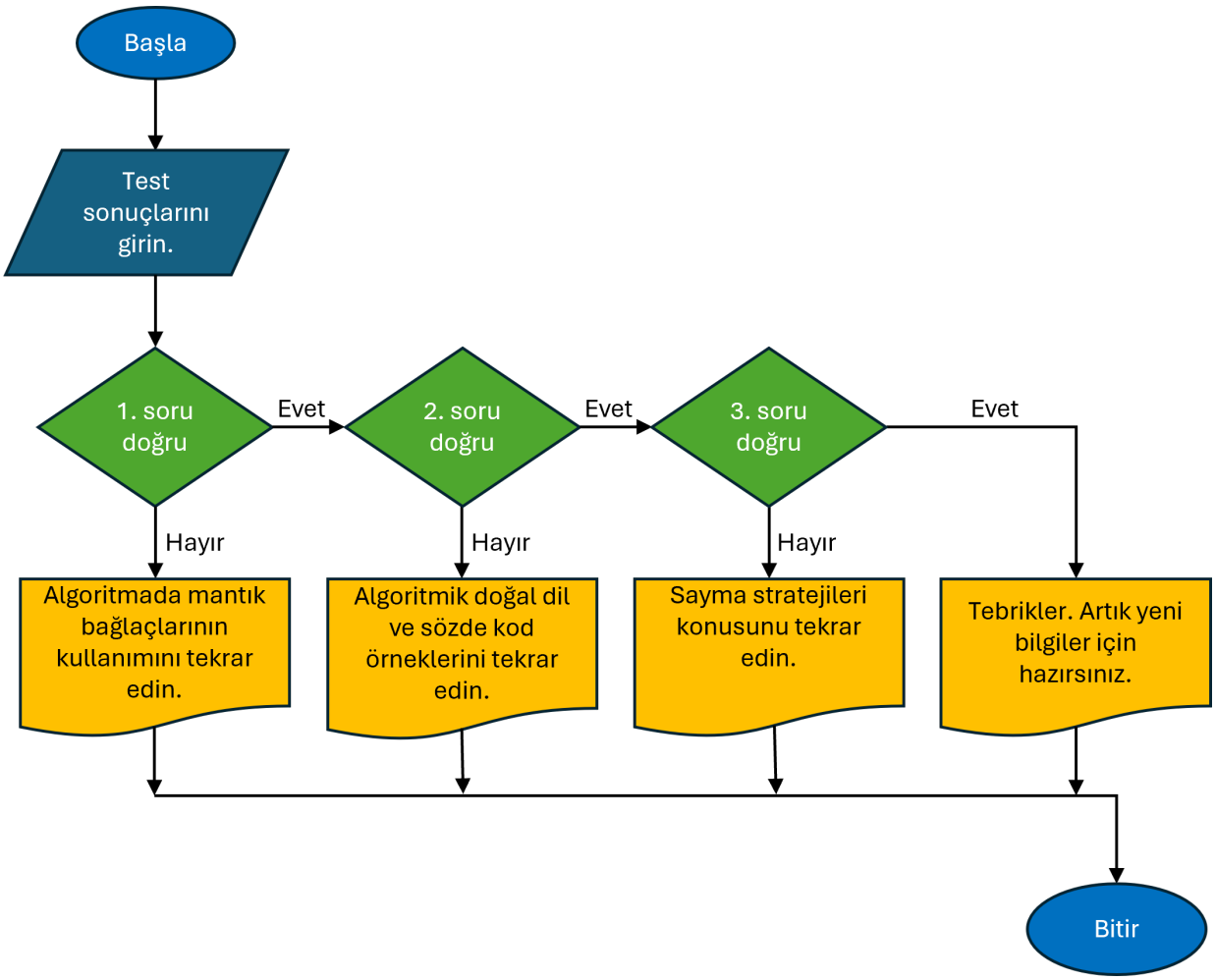
$n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \ldots \cdot (n - r + 1)$ farklı sıralama oluşur.

KONTROL LİSTEMİ DEĞERLENDİRİYORUM

'Hazırlanıyorum' bölümünde bulunan "Ön Öğrenme Kontrol Listesi"ne verdiğiniz yanıtlar ile "Kontrol Noktası"nda elde ettiğiniz başarı durumu arasında bir fark var mı?

Bu fark, kendinizi değerlendirme sırasında ne kadar objektif olduğunuzu ve bu değerlendirme sonuçlarının "Kontrol Noktası"ndaki başarınızla örtüşüp örtüşmediğini anlamak için önemlidir.

Peki kendinizi geliştirme ihtiyacı duyduğunuz noktalar var mı? Temaya başlamadan önce aşağıdaki akış şemasındaki yönergeleri takip edin.

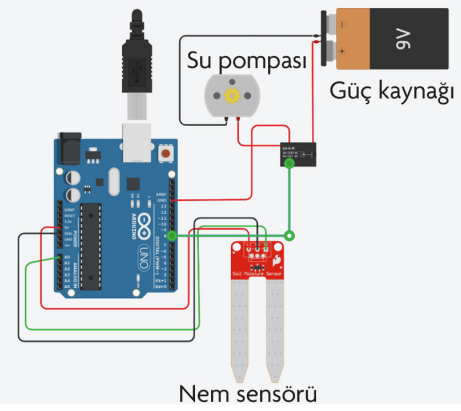


İLİŞKİLENDİRİYORUM

Amaç: Bu bölümde yeni öğreneceğiniz temayı; zihninizde var olan bilgileriniz, yaşantılarınız ve diğer derslerde öğrendiklerinizle ilişkilendirmenizi bekliyoruz.

Verilen metni dikkatle inceleyiniz. Bilgileri kendi yaşamınızdan ya da çevrenizden örneklerle çeşitlendiriniz.

Feyza, yıllık iznini geçirmek üzere çıktığı 7 günlük tatil öncesinde evindeki değerli çiçek koleksiyonu için Arduino seti ve bir su deposu ile akıllı bir sulama sistemi kurmaya karar verir.



Bu sistemde

- Pompa; her gün, aynı saatte aynı saatte gün sayısına bağlı $f(x)=\sqrt{x}+3$ formülüyle hesaplanan dakika cinsinden süre kadar çalışacaktır. İlk gün 4 dakika, ikinci gün yaklaşık olarak 4,41 dakika gibi artan sürelerle çiçeklerin ihtiyacı karşılanacaktır. Böylelikle her gün artan miktarlarda sulama sağlanarak büyüyen bitkilerin artan su ihtiyacı çözülecektir.
- Ayrıca kontrol mekanizması gerektiği için bir nem sensörü ile pompanın çalışması kontrol edilecektir. Nem artarken pompa da çalışıyorsa sistem doğru çalışıyor demektir, aksi hâlde sistem yanlış çalışıyordur. Bu durumda sistem yeniden başlatılacaktır.

Bu sulama sisteminin algoritması oluşturulurken (Toprak nemi artıyor.) ⇔ (Su pompası çalışıyor.) ilkesi ile kontrol sağlar.

Bu da Arduino için yazılan C++ kodlama dilinde şu şekilde gösterilir:

```
bool nemArtiyor = (nem - prevNemPercent) > HYST;
bool pompaCalisiyor = readPumpRunning();
if (nemArtiyor == pompaCalisiyor) {
   Serial.println(F("Sistem doğru çalışıyor."));
 } else {
   Serial.println(F("Sistemde hata var. Resetlenecek."));
triggerWatchdogReset();
```

Günlük sulama miktarının ayarlanması için kullanılan $f(x)=\sqrt{x}+3$ fonksiyonu da bu kodlarda aşağıdaki gibi gösterilir.

```
void loop() {
  float sure = sqrt(gun) + 3;     // f(x) = √x + 3 formülüne göre dakika cinsinden sulama süresi
  unsigned long calismaSuresi = sure * 60000;  // Dakikayı milisaniyeye çevirir
  digitalWrite(pompaPin, HIGH);   // Pompayı çalıştır
  delay(calismaSuresi);           // Belirlenen süre kadar sulama yap
  digitalWrite(pompaPin, LOW);    // Sulamayı durdur

  gun++;                          // Gün sayısını bir artır
  if (gun > 7) gun = 1;           // 7. günden sonra tekrar 1. güne dön
}
```

= operatörü "ancak ve ancak (⇔)" bağlacını temsil eder.

nemArtiyor ve pompaCalisiyor mantıksal (bool) değişkenlerdir.

// ile gösterilen cümleler kodlara etkisi olmayan açıklamalardır.

UYGULAYARAK ÖĞRENİYORUM

Amaç: Bu bölümde bilgilerinizi etkinlikler ve uygulamalarla pekiştirmenizi, öğrenmeyi daha kalıcı hâle getirmenizi amaçlıyoruz.

Mantık bağlaçları ve döngü yapıları, algoritmik düşünme becerilerinizi geliştirmenin yanı sıra programlamadan günlük problem çözümüne kadar pek çok alanda uygulaması olan temel kavramlardır. Bu kavramların size şu alanlarda katkı sağlayacağı öngörülmektedir:

- **Net ve Doğru Karar Mekanizmaları:** "ise" ve "ancak ve ancak" bağlaçları, karar yapılarının kesin ve tutarlı olmasını sağlar. Örneğin, karmaşık koşulları basit ve anlaşılır kurallara dönüştürerek hata olasılığını azaltır.
- **Gerçek Hayat Problemleri ve Programlama:** Algoritma tasarımında, otomasyon sistemlerinde ve yazılım geliştirmede yaygın olarak kullanılır. Örneğin, bir güvenlik sisteminde erişim kontrolünde veya bir e-ticaret sitesinde indirim kurallarının belirlenmesinde temel rol oynar.
- **Akademik ve Analitik Düşünme:** Mantıksal operatörler ve döngüler, sistematik düşünme becerilerini geliştirerek daha karmaşık programlama yapılarını ve matematiksel modelleri anlamanızı kolaylaştırır.
- **Verimlilik ve Teknoloji Kullanımı:** Döngü yapıları, tekrarlayan işlemleri otomatikleştirerek hem zamandan tasarruf sağlar hem de hatasız çalışma garantisi sunar. Büyük veri işleme, yapay zekâ algoritmaları ve oyun programlama gibi alanlarda vazgeçilmez bir öneme sahiptir.

Bu kavramları öğrenmeniz, dijital okuryazarlığınızı güçlendirecek ve teknolojiyi daha etkin kullanma kapasitenizi artıracaktır.

Problem ya da etkinliklerde verilen adımları uygulayınız. Çalışmanızı dikkatli ve düzenli bir şekilde yapınız.

MANTIK BAĞLAÇLARININ ALGORİTMADAKİ ANLAMLARI VE İŞLEVLERİ

İse Bağlacı (⇒)

"İse" bağlacı koşulun karşılanması durumunda belirtilen bir işlemin gerçekleştirilmesini sağlar.

Algoritmada "... ise yazdır ... ", " ... ise ışığı yak ... ", "... değilse reddet ... ", "... değilse motoru çalıştır ... " vb. yapılar karşımıza çıkar.

Ancak ve ancak Bağlacı (⇔)

"Ancak ve ancak" bağlacı, iki koşulun aynı anda doğru ya da aynı anda yanlış olduğu durumda doğru sonucu verir.

Yanda gördüğünüz ekranda; kullanıcı, kutucuğa bir tam sayı girdikten sonra girdiği sayının tek-çift olma durumunu işaretleyerek, "Kontrol et." butonuna tıkladığında eğer girdiği sayı ile sayının tek-çift olma durumu doğru ise "Doğru bildiniz!", yanlışsa
"Kontrol ediniz." yazdırılacaktır.



Uygulamaya göz atmak için tıklayınız. (Karekodu okutunuz.)

Öncelikle tüm durumlar tabloda gösterilir.

	Kutucuğa Girilen Sayı	Tek-Çift Olma Durumunu İşaretlemesi	Ekrana Yazdırılan
1. Durum	Tek	Tek	Doğru bildiniz.
2. Durum	Tek	Çift	Kontrol ediniz.
3. Durum	Çift	Tek	Kontrol ediniz.
4. Durum	Çift	Çift	Doğru bildiniz.

NOT

Ancak ve ancak bağlacı ile ya da bağlacının doğruluk durumları birbirinin tam tersidir. Ya da bağlacı iki önermeden biri doğru, diğeri yanlış olduğunda doğru sonucu verir.

Bu durumlara ait bazı örnekler aşağıda gösterilmiştir.



Görüldüğü gibi girdiler birbiriyle uyumluysa sonuç doğru, girdiler uyumsuzsa sonuç yanlış olur.

Bu uygulama ancak ve ancak bağlacı kullanılarak sözde kod ile şöyle ifade edilir:

Girdi: Bir tam sayı (a)), çift-tek seçimi (ç/t)

Çıktı: Girilen tam sayının çift ya da tek olmasının doğrulaması

Başla

Eğer "Kontrol Et" butonuna basıldıysa

Eğer (a%2=0 ⇔ ç) **ise** yazdır "Doğru bildiniz!"

Değil**se** yazdır "Kontrol ediniz."

Bitir

(a%2=0 ⇔ ç) koşulu ile sayının 2'ye bölümünden kalanın 0 olduğu durum doğru (çift sayı) ve çift butonu işaretlenmişse "Doğru bildiniz!" yazar. Sayının 2'ye bölümünden kalanın 0 olduğu durum yanlış (tek sayı) ve tek işaretlenmişse de "Doğru bildiniz!" yazar.

Girdi: Bir tam sayı (a), çift-tek seçimi (ç/t)

Çıktı: Girilen tam sayının çift ya da tek olmasının doğrulaması

Başla

Eğer "Kontrol Et."butonuna basıldıysa

Eğer (a%2=1 ⇔ t) ise yazdır "Doğru bildiniz!"

Değilse yazdır "Kontrol ediniz."

Bitir

(a%2=1 ⇔ t) koşulu ile sayının 2'ye bölümünden kalanın 1 olduğu durum doğru (tek sayı) ve tek işaretlenmişse "Doğru bildiniz!" yazar. Sayının 2'ye bölümünden kalanın 1 olduğu durum yanlış (çift sayı) ve çift işaretlenmişse de "Doğru bildiniz!" yazar.

UYARI

"Eğer ... ise", "değilse" koşul ifadeleri kullanılırken satırlardaki girintiye dikkat etmek gerekir. Buradaki örneklerde görüldüğü gibi ikinci "Eğer" daha içeri yazılmış, onun diğer koşulu olan "Değilse" de onunla aynı hizaya yazılmıştır. Birinci "Eğer" koşulunun alternatifi olmadığı için ona bağlı "Değilse" koşulu kullanılmamıştır.

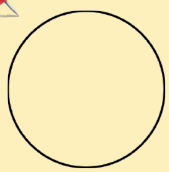
SIRA SİZDE 1.

Girilen iki sayının aynı işaretli ya da farklı işaretli olduğunu gösteren bir uygulamanın algoritmasını ancak ve ancak bağlacı ile akış şeması kullanarak oluşturunuz.

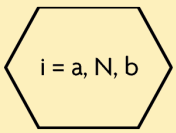
Bu etkinliğin geri bildirimi 568. sayfadadır.

Uygulamaya göz atmak için tıklayınız. (Karekodu okutunuz.)

BİRDEN ÇOK FARKLI DURUM VEYA DÖNGÜ İÇEREN ALGORİTMİK YAPILAR



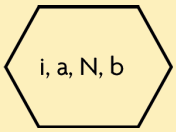
Akış şemalarında birleştirici noktaları veya bağlantı noktalarını temsil eder. Farklı işlem akışlarını birleştirmek veya akış sayfaları arasında bağlantı kurmak amacıyla kullanılan yapıdır. Çember şeklindedir.



Döngü, istenen koşullarda tekrar eden (yinelenen) işlemler için kullanılan yapıdır.

i = Döngü değişkeni

a = Döngü başlangıç değeri



N = Döngü bitiş değeri

b = Döngü artış-azalış değeri

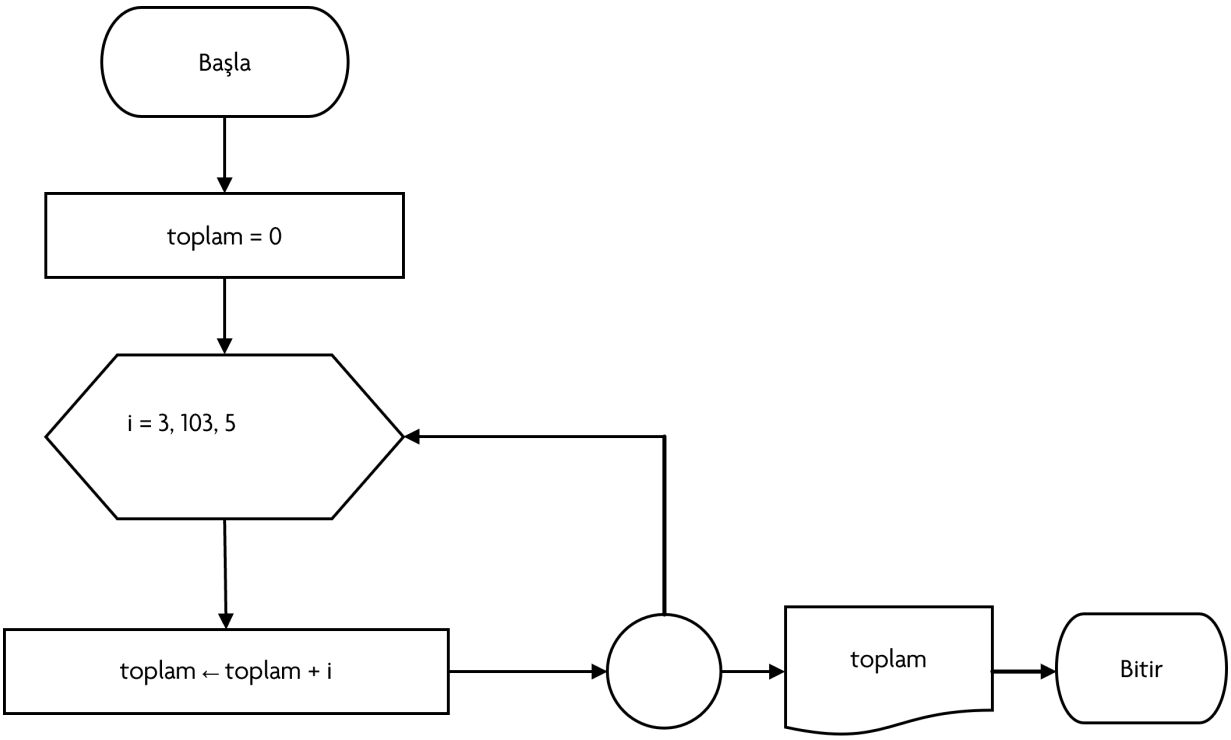
Yandaki gibi i den sonra = ya da kullanılan iki farklı gösterim yöntemi vardır.

ÖRNEK

Ritmik saymayı öğrenen bir öğrenci 3'ten 103'e kadar beşer ritmik saydıktan sonra saydığı bu sayıların toplamını bulan bir uygulama tasarlamak istemektedir.

Buna göre bu uygulamanın algoritmik akış şemasını oluşturunuz.

ÇÖZÜM



Algoritmanın başlangıcında "toplam" değişkeni tanımlanmış ve 0'a eşitlenmiştir.

Döngü sembolüne geçildiğinde ilk terim 3 olarak belirlendiği için "toplam ← toplam + i" yazan işlem sembolünde toplam olan 0 ile 3 toplanarak yeni toplam belirlenir, "toplam ← 0 + 3" olduğundan toplam değişkeni artık 3'e eşitlenmiştir. Bağlantı noktası tekrar döngü sembolüne yönlendirir. Döngünün ikinci terimi olan 3 + 5 = 8 olarak alınır ve yukarıdaki işlemler tekrar yapıldığında "toplam ← 3 + 8" olduğundan yeni toplam 11'e eşitlenmiş olur.

Bu şekilde döngünün son elemanı olan 103 toplandığında artık "toplam" değişkeni yazdırılır ve algoritma bitirilir.

Döngü sembolünün içine i = 103, 3, 5 de yazılabilirdi. Bu durumda 103'ten geriye doğru beşer sayarak 3'e ulaşılır ve bu sayılar toplanırdı.

SIRA SİZDE 2.

–17, –13, –9, ..., 39 sayı dizisi verilmiştir.

Bu sayı dizisinde sayıların toplamını bulan bir algoritmanın akış şemasını oluşturunuz.

Bu etkinliğin geri bildirimi 569. sayfadadır.

ÖRNEK



Araç farı üreten bir fabrikada üretilen farlar, kalite kontrol bölümünde çalıştırılarak kontrol edilir. Kalite kontrol sürecinde sensörlerden gelen değerler için

- Far parlaklık değeri en az 1500 lümen olmalı
- Farın dikey açısındaki kayma en fazla 3 derece, yatay açısındaki kayma en fazla 5 derece olmalıdır.

Bu şartları sağlayan far, paketleme bölümüne gönderilir.

Bu şartları sağlamıyorsa fakat ampul çalışıyorsa far tamire gönderilir. Ampulün çalışmadığı durumda ise far hurdaya gönderilir.

a) Buna göre kalite kontrol sürecini gösteren algoritmayı sözde kod ile ifade ediniz.

b) Farın durumuna göre gönderilecek bölümü belirten ifadeyi mantık bağlaçları ve niceleyiciler ile gösteriniz.

ÇÖZÜM

a) Sözde kod

Girdi: Far parlaklık(lümen), dikey ayar(°), yatay ayar(°), ampul durumu

Çıktı: Farın gideceği bölüm

```
Başla
  far_parlaklık = a
  far_yükseklik = b
  far_yatay = c
      Eğer (a >= 1500) ve (– 3  <= b <= 3) ve (– 5  <= c <= 5) ve ampul çalışıyorsa
         Paketlemeye gönder.
      Değilse eğer ampul çalışıyorsa
         tamire gönder.
      Değilse
         hurdaya gönder.
Bitir
```

b) $(a \geq 1500) \wedge (-3 \leq b \leq 3) \wedge (-5 \leq c \leq 5) \wedge (\text{Ampul çalışıyor}) \Rightarrow$ Paketlemeye gönder.

$[(a < 1500) \vee (-3 > b \wedge 3 < b) \vee (-5 > b \wedge 5 < b)] \wedge (\text{Ampul çalışıyor}) \Rightarrow$ Tamire gönder.

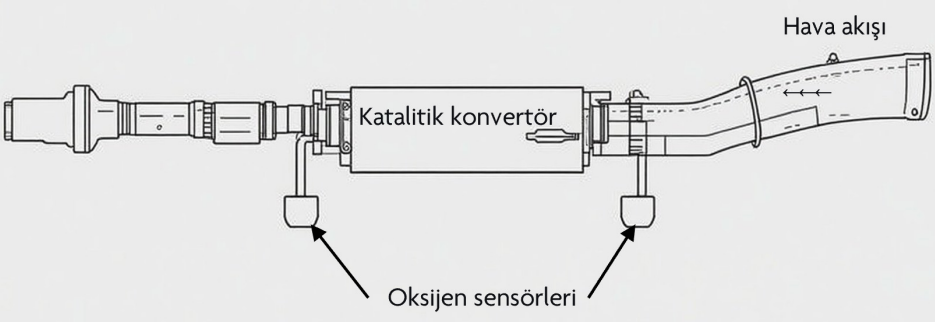
$(\text{Ampul çalışmıyor}) \Rightarrow$ Hurdaya gönder.

Sözde kodda girdi değerlerinin birim cinsinden yazılmasıyla kesinlik sağlanmıştır. Bu girdi değerleri; kodun gereksiz şekilde uzamasını önlemek amacıyla a, b ve c değişkenlerine eşitlenmiştir. (Bu eşitleme işlemi, istenirse farklı harfler ya da farklı kelimeler kullanılarak da yapılabilir.)

İlk "Eğer" koşulu ile istenen en olumlu durum olan farın düzgün çalışıp çalışmadığı kontrol edilmektedir. Bu durumun alternatifi, "Değilse eğer" koşulu ile ampulün çalıştığı ancak farın düzgün çalışmadığı hâlin kontrol edilmesiyle ele alınmıştır. "Değilse" koşulu ile ise en olumsuz durum olan ampulün çalışmaması durumu kontrol edilmektedir. Böylece koşulların olumludan olumsuza doğru sıralanması sağlanmış ve kodun anlaşılabilirliği artırılmıştır.

SIRA SİZDE 3.

Oksijen sensörleri üreten bir fabrikadaki ürünlerin kalite kontrolünde oksijen sensörünün araçtaki çalışma sistemi modellenerek, benzetimi ile ürünlerin uygunluğu kontrol edilmektedir.



Oksijen sensörü, aracın motorundaki yanma sonucunda atılan havadaki oksijen oranını ölçer. Oksijen oranı %0,5'ten az olduğunda zengin karışım, %0,5'ten çok olduğunda fakir karışım olarak adlandırılır. Buna bağlı olarak da sensörün iki farklı aralıkta voltaj çıkış değeri sağlaması beklenir. Sensörün çıkış voltajı; fakir karışımda (0,1-0,3 V) aralığında, zengin karışımda (0,7-0,9 V) aralığında ölçülmelidir.

Kalite kontrol sürecinde oksijen sensörü çalıştırıldığında sensörün ısıtıcı direnci (5-15 Ohm) aralığında olmalıdır.

Fakir karışım simülasyonunda oksijen oranı %0,2 ve zengin karışım simülasyonunda oksijen oranı %3 olarak ayarlandığında yukarıda belirtilen voltaj değerlerini sağlamalıdır.

Simülasyonda oksijen oranındaki değişime tepki süresinin en fazla 150 milisaniye olması gerekmektedir.

Aynı anda yapılan bu testler sonucunda tüm kriterleri sağlayan sensörler kabul edilir, diğerleri reddedilir.

Buna göre bu fabrikadaki kalite kontrol sürecini gösteren algoritmanın akış şemasını oluşturunuz.

Bu etkinliğin geri bildirimi 570. sayfadadır.

ÖRNEK

Sabit nokta yöntemi, bir denklemi çözmek veya bir fonksiyonun köklerini bulmak için kullanılan bir yöntemdir. Yöntem basit fakat yakınsamanın kesin olmaması yönüyle dikkatli kullanılmalıdır.

Bu yöntemi uygulamak için önce $f(x) = 0$ denklemi, $x = g(x)$ hâline getirilmelidir. Bu dönüşümü yapmanın birçok yolu vardır. Burada kullanabileceğimiz en basit yöntem, $g(x)$ fonksiyonunu $g(x) = x + f(x)$ şeklinde yazmaktır.

Bunun için $f(x) = 0$ olmak üzere bir $g(x) = f(x) + x$ fonksiyonu yazılır.

Bir başlangıç değeri seçilir : x_0

Bir hata payı belirlenir: ε

Bu başlangıç değerine göre $g(x_0) = x_1$ hesaplanır.

$\varepsilon > |x_1 - x_0|$ eşitsizliği kontrol edilir. Eğer sağlanırsa döngü durur, sağlanmazsa döngü devam eder.

$g(x_1) = x_2$ hesaplanır. Bu şekilde devam eder.

Belirlediğimiz hata payı için $\varepsilon > |x_{(n+1)} - x_n|$ olduğunda döngü durdurulur.

Bu yöntem genellikle trigonometrik ve köklü fonksiyonlarda işlevseldir. Amacımız, belirlediğimiz hata payına göre fonksiyonun köküne yakınsamaktır.

Hata payı küçüldükçe döngüde tekrar sayısı ve dolayısıyla hassasiyet artar. Hata payı büyüdükçe de döngüdeki tekrar sayısı ve dolayısıyla hassasiyet azalır.

Buna göre sabit nokta yöntemiyle bir fonksiyonun kökünü bulan algoritmayı sözde kod ile ifade ediniz.

Uygulamaya göz atmak için tıklayınız. (Karekodu okutunuz.)

ÇÖZÜM

Girdi: $g(x)$ fonksiyonu, Başlangıç değeri (x_0), Hata payı (ε), En fazla tekrar sayısı (a)

Çıktı: Yaklaşık kök değeri

Başla

$n = 0$

$x_n = x_0$

$n < a$ iken Döngü başlangıcı, $n < a$ olduğu sürece aşağıdaki döngüyü devam ettirir.

  $x_{n+1} = g(x_n)$

  Eğer $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$ ise

    Yazdır: "Yakınsama sağlandı. Yaklaşık kök x_{n+1} dir." Bulunan son değer x_{n+1} olduğu için yazdırılır.

    Bitir

  $x_n = x_{n+1}$

  $n = n + 1$

Yazdır: "En fazla tekrar sayısına ulaşıldı, bulunan son değer: " x_n Hata payından küçük bir değer bulunamadı fakat $x_n = x_{n+1}$ olarak atanmıştı. O yüzden x_n yazdırılır.

Bitir

UYARI

Sözde kod yazarken girintilere dikkat edilir. İlk " Bitir" satırı, "Eğer" koşulu sağlandığında işlemi sonlandırdığı için "Yazdır" ile aynı hizadadır. Bu, koşulun bittiğini gösterir. Son "Bitir" satırı, döngü tamamlanıp koşul sağlanmadığında yazdırma işlemi sonrası algoritmanın tamamen sona erdiğini gösterir. Bu yüzden döngü başlangıcı ile aynı hizadadır.
! Gerçek kod yazarken çoğu programlama dilinde "x_n" yazmak mümkün değildir. Sözde kod olduğu için kullanılabilir.

ÖRNEK

n farklı nesneden r tanesinin seçme sayısını bulan algoritmayı doğal dil ile ifade ediniz.

Uygulamayı incelemek için tıklayınız. (Karekodu okutunuz.)

ÇÖZÜM

1. adım: Başla

2. adım: Kullanıcıdan verileri al

Toplam nesne sayısı (n), Seçilecek nesne sayısı (r)

3. adım: Değişkenleri tanımla

i: Döngü değişkeni

Seçme: Kombinasyon sonucu (başlangıçta 1)

4. adım: Döngüyü başlat

i = 0

i < r olduğu sürece:

Seçme ← Seçme * (n – i) / (i + 1)

i ← i + 1

5.adım: Sonucu ekrana yaz

Yazdır "n farklı nesneden r tanesinin seçim sayısı: ``Seçme`` olur."

6.adım: Bitir

SIRA SİZDE 4.

Pascal üçgeninde ikinci terimi n olan satırdaki terimleri yazdıran bir algoritma sözde kod ile yazılmıştır.

Buna göre sözde kodda verilen boşlukları doldurunuz.

Bu etkinliğin geri bildirimi 571. sayfadadır.

Uygulamayı incelemek için tıklayınız. (Karekodu okutunuz.)

Girdi: n doğal sayısı

Çıktı: Pascal üçgeninin ikinci terimi n olan satırındaki elemanlar

Başla

Eğer n >= 0 ise

  Liste = {1} // İlk terim: değer_0 = 1

  değer_0 = 1

  i = 1

  .....

  .....

  .....

  .....

  Listeyi yazdır

Değilse:

  Yazdır "Lütfen bir doğal sayı giriniz!"

Bitir

```
                1
              1   1
            1   2   1
          1   3   3   1
        1   4   6   4   1
                ...
1   n   .....   n   1
```

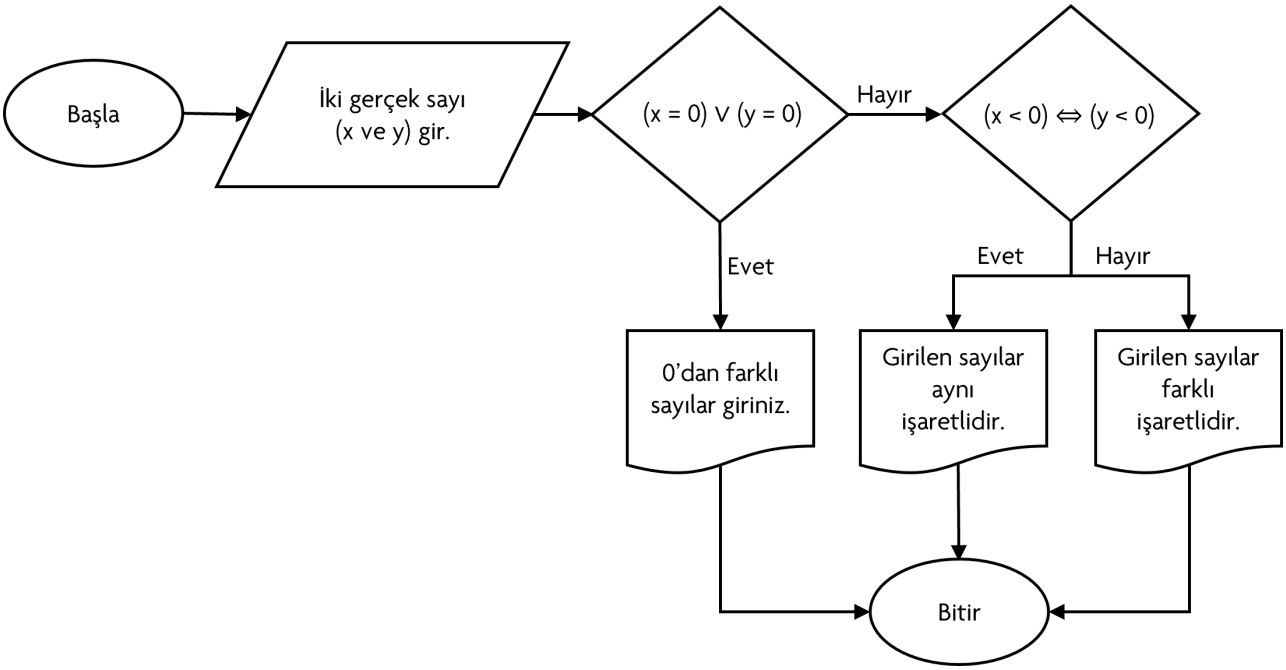
GERİ BİLDİRİM

Bu geri bildirimler sayesinde kendi cevabınızı kontrol edebilir, hatalarınızı düzelterek öğrenmenizi pekiştirebilirsiniz.

SIRA SİZDE 1.

ÇÖZÜM

Girilen iki sayının aynı işaretli ya da farklı işaretli olduğunu gösteren bir uygulamanın algoritmasını ancak ve ancak bağlacı ile akış şeması kullanarak oluşturunuz.



İki gerçek sayı girildiğinde bunlardan en az birinin 0 olduğu durumda işaret tahlili yapılamayacağı için kullanıcının 0 girdiği durumun da dışlanması gerekmektedir. O yüzden ilk koşul 0 girilmesi durumunun dışlanması üzerine oluşturulmuştur. Burada koşul sembolünün içine "(x =! 0) ∧ (y =! 0)" yazılabilirdi. O zaman "Evet" ve "Hayır" oklarının yerinin değişmesi gerekirdi. Bu durum, algoritmaya dâhil edilmeseydi de algoritma yanlış sayılmazdı. Uygulama, gerçek kodlarla oluşturulurken 0'ın girişini engelleyecek kodlar yazılarak bu sorun çözülebilirdi.

Ancak ve ancak bağlacının kullanılması istendiği için ikinci koşul sembolünün içine bu ifade yazılmıştır. Başka bir deyişle $x < 0, y < 0$ önermelerinin doğruluk durumları aynıysa "x ve y aynı işaretlidir." yazdırılır, doğruluk durumları aynı değilse "x ve y farklı işaretlidir." yazdırılır. Ancak ve ancak bağlacında aranan özellik, ikisinin de doğruluk durumlarının aynı olmasıdır. İkinci koşul sembolünün içine yazılabilecek alternatiflerden de bahsetmek gerekirse "Evet" ve "Hayır" oklarını değiştirmeden $(x > 0) \Leftrightarrow (y > 0)$ yazılabilir. "Evet" ve "Hayır" oklarını değiştirerek $(x < 0) \Leftrightarrow (y > 0)$ ya da $(x > 0) \Leftrightarrow (y < 0)$ yazılabilir.

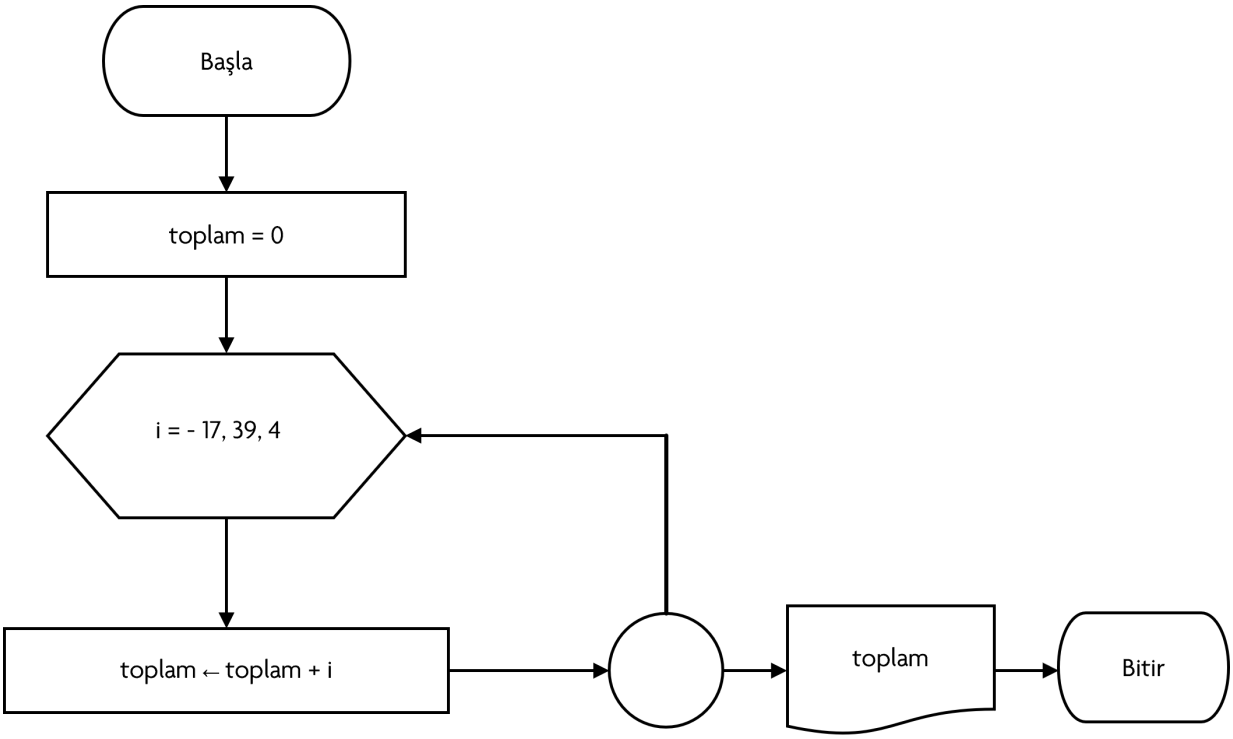
Ancak ve ancak bağlacı yerine ya da bağlacı da kullanılabilirdi. Buna bir örnek olarak, koşulun içine $(x < 0) \veebar (y < 0)$ yazıldığında, "Evet" ve "Hayır" oklarının yeri değiştirilerek de algoritma oluşturulabilir.

SIRA SİZDE 2.

ÇÖZÜM

–17, –13, –9, ..., 39 sayı dizisi verilmiştir.

Bu sayı dizisinde sayıların toplamını bulan bir algoritmanın akış şemasını oluşturunuz.



Etkinlikte –17'den 39'a kadar dörder artan bir sayı dizisi verilmiştir. Bu yüzden döngü sembolünün içine i = –17, 39, 4 yazılmıştır.

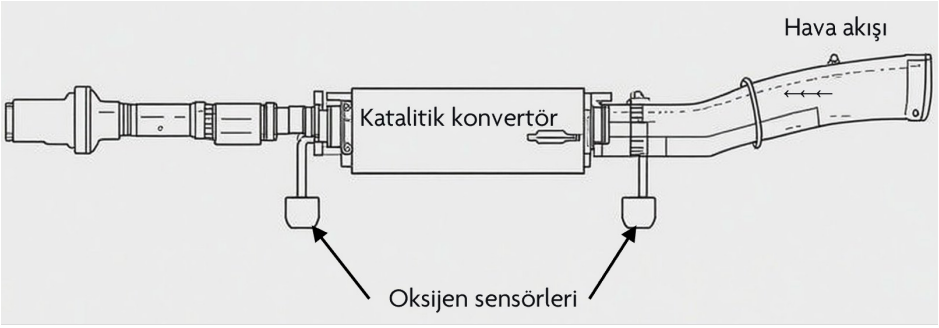
Algoritmanın başlangıcında ``toplam`` değişkeni tanımlanmış ve 0'a eşitlenmiştir.

Örnek 1'de anlatıldığı gibi işlem sembolünde toplam değişkeni 0 + (–17) işlemiyle –17'ye eşitlenir, bağlantı noktasından tekrar döngü sembolüne gidip sıradaki terim olan –13'ü alır, işlem sembolünde (–17) + (–13) işlemi yapılarak toplam –30'a eşitlenir. Bütün terimler bu şekilde sırasıyla toplanarak, son terim olan 39 toplandığında toplam değişkeni sayı olarak yazdırılır.

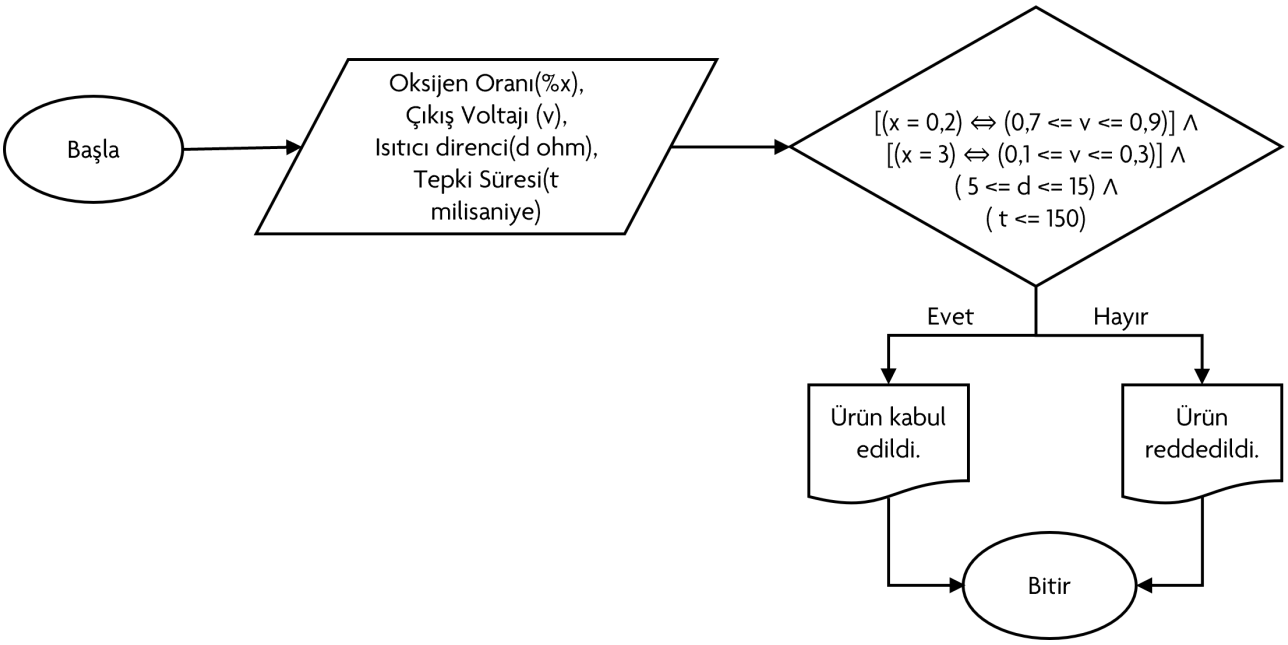
SIRA SİZDE 3.

ÇÖZÜM

Oksijen sensörleri üreten bir fabrikadaki ürünlerin kalite kontrolünde oksijen sensörünün araçtaki çalışma sistemi simüle edilerek ürünlerin uygunluğu kontrol edilmektedir.



Buna göre bu fabrikadaki kalite kontrol sürecini gösteren algoritmanın akış şemasını oluşturunuz.



Kalite kontrol sürecinde testlerin eş zamanlı biçimde yapılması nedeniyle koşul sembolünün içerisine aranan tüm özellikleri aynı anda sağlayacak bir ifade, mantık bağlaçlarıyla birlikte yazılmıştır. Eğer soruda önce ısıtıcı direncinin ölçülüp bu testten geçilmesi durumunda bir sonraki teste ilerlenmesi istenmiş olsaydı bu durumda koşul sembollerinin sayısının artırılması gerekirdi. Çünkü her test için ayrı bir koşul sembolünün kullanılması gerekirdi.

Koşul sembolü içine yazılan ifadelere bakılırsa zengin karışım testinde havadaki oksijen oranı %0,2 olduğunda sensörün voltaj değerinin [0,7; 0,9] aralığında olması gerektiğinden burada ancak ve ancak bağlacı kullanılmıştır. Çünkü havadaki oksijen oranı %0,2 olmadığı hâlde voltaj değerinin yine bu aralıkta olması hatalı bir duruma yol açacaktır. Havanın oksijen oranının %0,2 olmadığı durum yalnızca fakir karışım testinde ölçülmektedir ve bu testte oksijen oranı %3'tür. Fakir karışım testinde de voltaj değerinin %3 oksijen oranına karşılık [0,1; 0,3] aralığında olması gerektiğinden yine ancak ve ancak bağlacı kullanılmıştır.

Simülasyonda havadaki oksijen oranının %0,2'den %3'e anlık olarak değiştirildiği durumda, sensörün tepki süresinin 150 milisaniyeden kısa olması gerektiği için koşula ($t \leq 150$) ifadesi eklenmiştir. Isıtıcı direncinin de belirtilen aralıkta bulunması gerektiğinden ($5 \leq d \leq 15$) biçiminde yazılmıştır. Oksijen sensörlerinin bu şartların her birini sağlaması zorunlu olduğundan, tüm şartlar ve bağlacıyla birbirine bağlanarak tek bir bileşik koşul oluşturulmuştur.

SIRA SİZDE 4.

ÇÖZÜM

Pascal üçgeninde ikinci terimi n olan satırdaki terimleri yazdıran bir algoritma sözde kod ile yazılmıştır.

Buna göre sözde kodda verilen boşluğu doldurunuz.

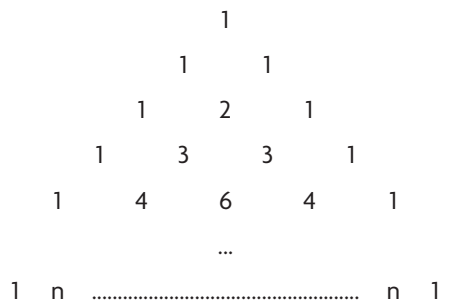
Girdi: n doğal sayısı

Çıktı: Pascal üçgeninin ikinci terimi n olan satırındaki elemanlar

Başla

```
Eğer n >= 0 ise:
    Liste = {1}              // İlk terim: değer_0 = 1
    değer_0 = 1
    i = 1
    i <= n olduğu sürece:
        değer_i ← değer_(i–1) * (n – i + 1) / i
        Listeye değer_i ekle
        i ← i + 1
    Listeyi yazdır
Değilse:
    Yazdır «Lütfen bir doğal sayı giriniz!»
```

Bitir



Örnek 4'te n farklı nesneden r tanesinin seçme sayısını gösteren bir algoritma gösterilmişti. Burada da Pascal üçgeni ile ilgili bir soru verilmiştir. Bilindiği gibi Pascal üçgeninin satırlarındaki terimler aslında n farklı nesneden r tanesinin seçme sayısını göstermektedir. r sayısı sırasıyla 0, 1, 2, 3, ..., n olarak alınıp bulunan seçme sayıları yan yana yazıldığında Pascal üçgeninin satırı oluşturulur. Aşağıda, kombinasyon değerlerini hesaplayan algoritmanın adımları, verilen sözde kod üzerinden açıklanmıştır. n bir doğal sayı olarak girilmelidir. Bunun kontrolü sözde kod üzerinde yapılabilirdi. Fakat burada sadece n >= 0 şartı yazılmıştır, bu şart sağlanmadığında da «Lütfen bir doğal sayı girin.» yazdırılarak bir uyarı verilmiştir. Gerçek kod yazarken kodlama diline göre tam sayı kontrolü de gerekebilmektedir. Burada, satırdaki terimlerin sırasıyla yazılması istendiği için her satır da 1 ile başladığı için Liste = {1} yazılarak liste oluşturulmaya başlanmıştır. Kodlarda da belirtildiği gibi «değer_0 = 1» diğer bir deyişle n nesneden 0 tanesinin seçme sayısı 1'e eşittir ki 1 de listeye yazılmıştır. Alt satırda bulunan i = 1 ile döngüye giriş yapılmaktadır. Kırmızı renkte verilen satır numaraları ile aşağıdaki akış takip edilebilir.

1) Bilindiği gibi n nesneden en fazla n nesne seçilebileceği için i nin en fazla n olması gerekir ki bu da ilk satırda «i <= n olduğu sürece» yazılarak belirtilmiştir. Dolayısıyla döngünün başlangıç değeri 1 ve bitiş değeri n dir.
2) «değer_0» değeri yukarıda 1 olarak tanımlanmıştı, o zaman «değer_i» değişkeni tanımlanarak başlanabilir. Böylece n nesne içinden kaçlı seçim yapıldığı görülebilir. «değer_i» de i den bir önceki değere göre başka bir deyişle «değer(i-1)»e göre belirlenebilir. Döngü başlangıç değeri i = 1 olarak verildiği için «değer_i = değer_(i – 1) × (n – i + 1) / i» şeklinde yazılır. Döngü başlangıç değeri i = 0 olsaydı ÖRNEK 4'teki yazıma benzer bir yazım gerekirdi.
3) İşlem yapıldıktan sonra bulunan değer listeye eklenir.
4) Döngü artış değeri 1 olduğu için i sayısı 1 artırılarak yeni i sayısı tayin edilir.

Bu işlemler i sayısı n ye eşit olunca sonlandırılır ve liste yazdırılır.

DEĞERLENDİRİYORUM

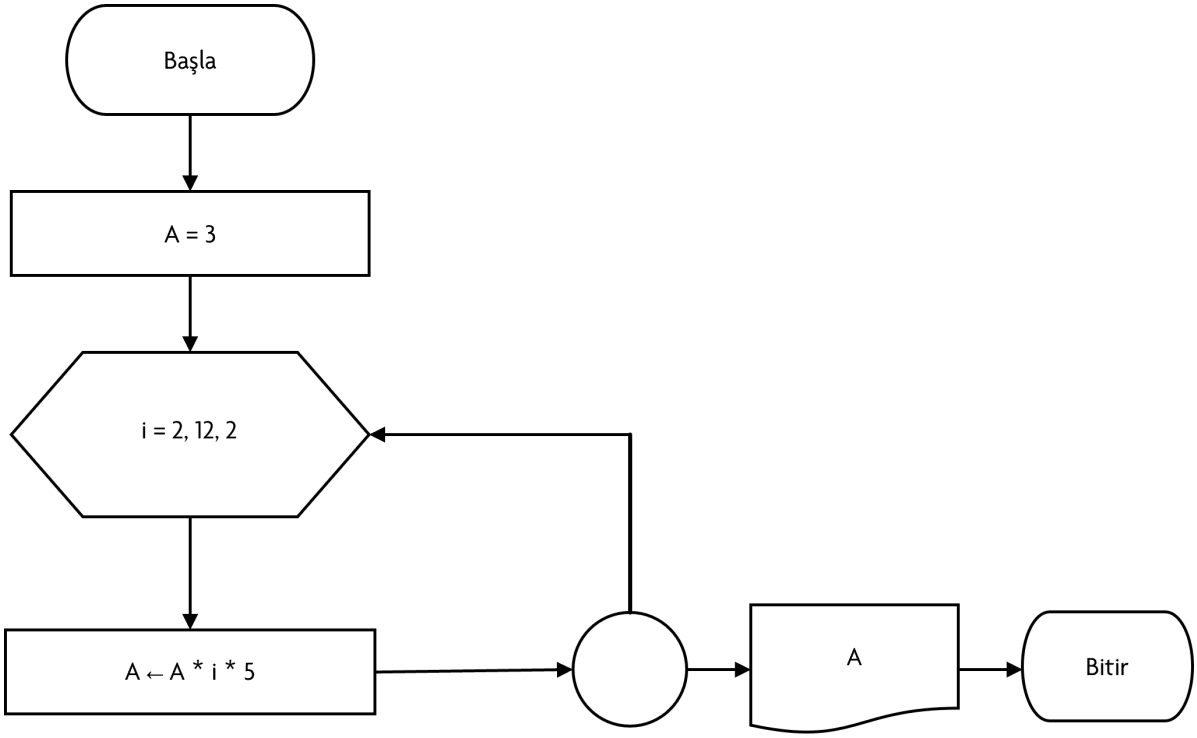
Amaç: Bu bölümde öğrendiklerinizi gözden geçirmenizi, kendi öğrenme sürecinizi değerlendirmenizi ve eksiklerinizi fark etmenizi amaçlıyoruz.

Soruları dikkatle yanıtlayınız. Cevaplarınızı geri bildirimlerle karşılaştırarak eksik gördüğünüz noktaları tekrar ediniz.

Bu etkinliğin geri bildirimi etkinliğin sonunda verilmiştir..

SORULAR

1. Aşağıda bir algoritmik akış şeması verilmiştir.



a) Buna göre bu algoritmik akış şemasında yazdırılan A değerini işlem adımlarını göstererek bulunuz.

b) Algoritmik akış şemasını döngü kullanarak farklı sayılarla oluşturunuz.

2. Bir içecek fabrikasındaki üretim hattı; tek bir bant üzerine sıralanmış portakal suyu, elma suyu, vişne suyu, su ve gaz makinelerinden oluşur. Bant; 2 saniye çalışıp, 2 saniye duraklayarak döngüsel bir ritimle ilerler. Her duruşta şişeler tam olarak makine nipellerinin altına konumlanır. Bu 2 saniyelik duraklama süresince her makine kendi sorumluluğundaki şişenin etiketini sensörüyle okur. Eğer kendi malzemesi gerekiyorsa dolumu gerçekleştirir, gerekmiyorsa hiç müdahale etmeden bekler.

Şişelenecek içeceklerin içerikleri tabloda verilmiştir.

	İçecek Adı	Portakal (ml)	Elma (ml)	Vişne (ml)	Su (ml)	Gaz (bar)
1.	**Portakal Suyu**	100	0	0	150	Yok
2.	**Elma Suyu**	0	100	0	150	Yok
3.	**Vişne Suyu**	0	0	100	150	Yok
4.	**Portakallı Gazoz**	50	0	0	200	3 bar
5.	**Elmalı Gazoz**	0	50	0	200	3 bar
6.	**Vişneli Gazoz**	0	0	50	200	3 bar
7.	**Karışık Meyve Suyu**	40	40	20	150	Yok

Bu üretim hattının çalışma algoritması aşağıda sözde kod ile ifade edildiğine göre boşlukları doldurunuz.

BAŞLA

SONSUZ DÖNGÜ BAŞLAT
  Bant 2 sn. çalışsın.
  Bant 2 sn. beklesin.

  PARALEL ÇALIŞ:
    Şişe etiketini oku.
    Eğer portakal suyu şişesi ise:
      ..... ml doldur
    Değilse eğer portakallı gazoz şişesi ise:
      ..... ml doldur
    Değilse eğer karışık meyve suyu şişesi ise:
      ..... ml doldur

    Şişe etiketini oku.
    ..... elma suyu şişesi ise:
      100 ml doldur
    Değilse eğer ..... şişesi ise:
      50 ml doldur
    .....karışık meyve suyu şişesi ise:
      40 ml doldur

    Şişe etiketini oku.
      Eğer vişne suyu şişesi ise:
        100 ml doldur
      .....vişneli gazoz şişesi ise:
        50 ml doldur
      Değilse eğer .....suyu şişesi ise:
        20 ml doldur

      Şişe etiketini oku.
      Eğer gazoz şişesi ise:
        200 ml doldur
      .....:
        150 ml doldur

      Şişe etiketini oku.
      Eğer ..... ise:
        3 bar gaz bas

    PARALEL SONU
  ..... SONU

BİTİR

3. **İkiye bölme metodu ile karekök bulma**, ikinci dereceden bir fonksiyonun bir aralıktaki kökünü bulma işlemine benzer. $\sqrt{S}$ değerini bulmak için aslında $f(x) = x^2 - S$ fonksiyonunun kökü aranır. Yöntem, fonksiyonun işaret değiştirdiği bir [a, b] başlangıç aralığı seçilerek başlar. Bu aralık da S gerçek sayısına göre belirlenir. Örneğin $S \geq 1$ ise [0, S], $S < 1$ ise [0, 1] aralığı uygundur. Her adımda, aralığın orta noktası $c = \frac{a+b}{2}$ hesaplanır ve $f(c) = c^2 - S$ değerinin işaretine bakılır. Eğer $f(c) < 0$ ise $c^2 < S$ olduğu anlamına gelir ve kök [c, b] aralığındadır dolayısıyla a sayısı c olarak tayin edilir. Eğer $f(c) > 0$ ise bu kez $c^2 > S$ demektir ve kök [a, c] aralığındadır; b sayısı c olarak tayin edilir. Bu işlem, $|c^2 - S|$ değeri önceden belirlenmiş bir hata payından (ε) küçük olana kadar tekrarlanır. Her tekrarda aralık yarıya indiği için yöntem lineer yakınsama gösterir ve istenen hassasiyette karekök değerine ulaşılır.

Buna göre aşağıda İkiye bölme metoduyla karekök bulmak için doğal dilde yazılan algoritmadaki boşlukları doldurunuz.

Uygulamaya göz atmak için tıklayınız. (Karekodu okutunuz.)

1. ADIM: Başla

2. ADIM: Kullanıcıdan verileri al.

Karekökü alınacak sayıyı (S), hata payı (ε), en fazla döngü tekrar sayısı (n) al.

3. ADIM: Giriş kontrolleri yap

Eğer ---- ise yazdır "Negatif sayının karekökü alınamaz." ve Bitir.

Eğer ---- ise yazdır "Karekök 0'dır." ve Bitir.

4. ADIM: Aralık belirle

Alt sınır a = ... al.

Eğer $S < 1$ ise üst sınır b = ... al.

Değilse üst sınır b = ... al.

5. ADIM: Döngüyü başlat

$i \leftarrow 0$

Döngüyü en fazla n kez ---- $|f(c)| < \varepsilon$ olana kadar sürdür.

Her döngüde

Mevcut aralığın orta noktasını hesapla: c = (a + b) / 2

f(c) yi bul. f(c) = c^2 - S

Eğer ---- ise yazdır " Karekök c olarak bulundu. " ve döngüden çık.

Eğer $f(c) < 0$ ise alt sınırı güncelle: ----

Değilse üst sınırı güncelle: ----

$i \leftarrow i + 1$

6. ADIM: En fazla döngü tekrar sayısı

i = n ... $|f(c)| >= \varepsilon$ ise Yazdır: "En fazla döngü tekrar sayısına ulaşıldı, kök bulunamadı."

7. ADIM: Bitir

4. r tanesi özdeş olan n tane nesnenin sıralama sayısını bulan algoritmanın akış şemasını oluşturunuz.

Uygulamaya göz atmak için tıklayınız. (Karekodu okutunuz.)

GERİ BİLDİRİM

Bu geri bildirim sayesinde kendi cevaplarınızı kontrol edebilir, hatalarınızı düzelterek öğrenmenizi pekiştirebilirsiniz.

ÇÖZÜM 1.

a) Döngüde kullanılan sayılar: 2, 4, 6, 8, 10, 12

i = 2 olduğunda A = 3 . 2 . 5

i = 4 olduğunda A = 3 . 2 . 5 . 4 . 5

i = 6 olduğunda A = 3 . 2 . 5 . 4 . 5 . 6 . 5

...

Bu şekilde devam ettirildiğinde

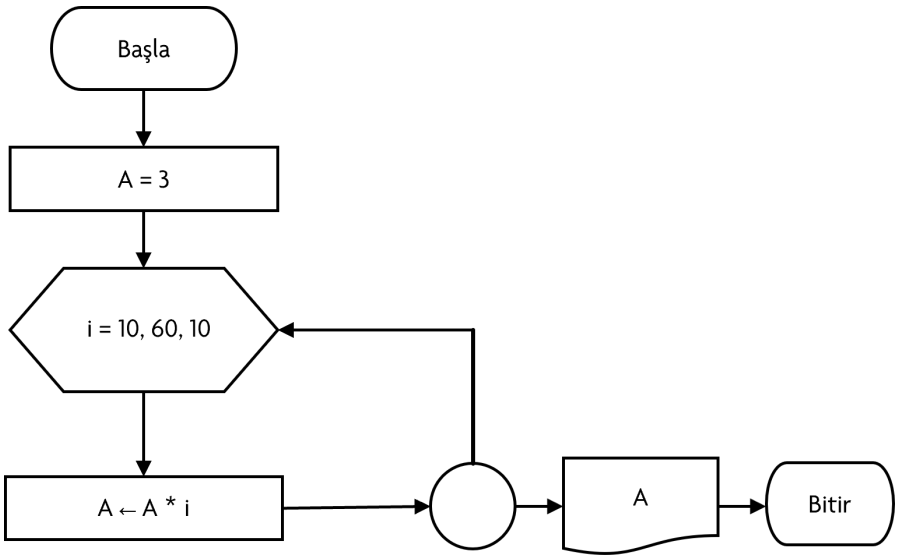
i = 12 olduğunda A = 3 . (2 . 4 . 6 . 8 . 10 . 12) . 56 bulunur.

Parantez içini düzenlersek

A = 3 . 26 . 6! . 56 buradan A = 3 . 106 . 6! bulunur.

Başka bir ifadeyle A = 3 . (10 . 20 . 30. 40 . 50 . 60) gösterilebilir, oluşturulacak yeni akış şemasında kullanılır.

b)



UYARI

Oluşturulan akış şemasında döngü değişkenlerini farklı sayılardan seçebilirsiniz.
Dikkat etmeniz gereken A sayısını aynı bulmanızdır.

ÇÖZÜM 2.

Bu üretim hattının çalışma algoritması aşağıda sözde kod ile ifade edildiğine göre boşlukları doldurunuz.

```
BAŞLA
SONSUZ DÖNGÜ BAŞLAT
    Bant 2 sn. çalışsın.
    Bant 2 sn. beklesin.

   PARALEL ÇALIŞ:
      Şişe etiketini oku.
      Eğer portakal suyu şişesi ise:
         100 ml doldur
      Değilse eğer portakallı gazoz şişesi ise:
         50 ml doldur
      Değilse eğer karışık meyve suyu şişesi ise:
         40 ml doldur

      Şişe etiketini oku.
      Eğer elma suyu şişesi ise:
         100 ml doldur
      Değilse eğer elmalı gazoz şişesi ise:
         50 ml doldur
      Değilse eğer karışık meyve suyu şişesi ise:
         40 ml doldur

Şişe etiketini oku.
      Eğer vişne suyu şişesi ise:
         100 ml doldur
      Değilse eğer vişneli gazoz şişesi ise:
         50 ml doldur
      Değilse eğer karışık meyve suyu şişesi ise:
         20 ml doldur

      Şişe etiketini oku.
      Eğer gazoz şişesi ise:
         200 ml doldur
      Değilse
         150 ml doldur

      Şişe etiketini oku.
      Eğer gazoz şişesi ise:
         3 bar gaz bas

   PARALEL SONU
DÖNGÜ SONU
BİTİR.
```

Sözde kodun uzun olması nedeniyle iki sütun hâlinde gösterim tercih edilmiştir. Bu bölümde beş farklı makine bulunmaktadır. Makineler birbirleriyle paralel biçimde çalışmakta; bant 2 saniye durduğunda her makine, önündeki şişenin etiket bilgisini okuyarak ilgili dolum işlemini gerçekleştirmektedir. Her kod bloku ayrı bir makinenin çalışma prensibini temsil etmektedir. **Kod bloklarının sırası değiştirilebilir, bloklar arasında herhangi bir hiyerarşi bulunmamaktadır.**

İlk kod blokunun portakal suyu doldurma makinesine ait olduğu anlaşılmaktadır. Tablo incelenerek ilgili şişeye hangi miktarda dolum yapılacağı belirlenebilmektedir.

İkinci kod bloku elma suyu makinesine aittir. Bu blokta da dolum miktarları belirtilmiş olup eksik kısımlar tamamlanabilir.

Üçüncü kod bloku vişne suyu makinesine aittir. Bu bölümdeki boşluklar, birinci ve ikinci kod bloklarında kullanılan yapıya göre doldurulabilmektedir. Bu kod bloklarında üç farklı şişe grubuna yönelik üç farklı dolum işlemi yer almaktadır. Bu işlemler arasında bir öncelik ilişkisi bulunmamaktadır. Bu nedenle blok, istenirse şu şekilde de ifade edilebilir:

"Eğer Karışık meyve suyu şişesi ise 20 m doldur.
Değilse eğer vişne suyu şişesi ise 100 ml doldur.
Değilse eğer vişneli gazoz şişesi ise 50 ml doldur."

Dördüncü kod blokunun hangi ürüne ait olduğu, tabloya bakılarak anlaşılabilmektedir. Tablodaki verilere göre gazozları 200 ml dolduran makinenin su doldurma makinesi olduğu görülmektedir. Bu makine tarafından gazoz şişeleri 200 ml su ile doldurulmakta, gazoz olmayan meyve suyu şişeleri ise 150 ml su ile doldurulmaktadır. İki farklı dolum işlemi bulunduğundan "değilse eğer" yerine yalnızca "değilse" ifadesi kullanılmıştır.

Beşinci kod bloku ise gaz dolum makinesine aittir. Bu makine yalnızca gazoz şişelerine dolum yaptığı için kod bloku bu şekilde oluşturulmuştur.

Tüm makineler, şişe etiketini okuduktan sonra dolum yapıp yapmamaya karar verdikleri için "Değilse doldurma." gibi bir satırın yazılmasına gerek duyulmamıştır.

Bu noktaya kadar makineler paralel çalıştığından kodda "PARALEL SONU" ifadesi kullanılmıştır. Makineler dışında farklı işlemler olması durumunda bu işlemler, "PARALEL SONU" ile "DÖNGÜ SONU" satırları arasına eklenebilir. Örneğin fabrikanın saat 17.00'de durdurulmasına ilişkin bir kod bloku bu bölüme yerleştirilebilir. Böylece döngü sonlandırılmış olur. Döngü sonlandıktan sonra yapılması gereken bir işlem varsa bu işlem, "DÖNGÜ SONU" ile "BİTİR." satırları arasında yazılabilir.

ÇÖZÜM 3.

İkiye bölme metodu ile karekök bulma, ikinci dereceden bir fonksiyonun bir aralıktaki kökünü bulma işlemine benzer. $\sqrt{S}$ değerini bulmak için aslında $f(x) = x^2 - S$ fonksiyonunun kökü aranır. Yöntem, fonksiyonun işaret değiştirdiği bir [a, b] başlangıç aralığı seçilerek başlar. Bu aralık da S gerçek sayısına göre belirlenir. Örneğin $S \geq 1$ ise [0, S], $S < 1$ ise [0, 1] aralığı uygundur. Her adımda, aralığın orta noktası $c = \frac{a+b}{2}$ hesaplanır ve $f(c) = c^2 - S$ değerinin işaretine bakılır. Eğer $f(c) < 0$ ise $c^2 < S$ olduğu anlamına gelir ve kök [c, b] aralığındadır. Dolayısıyla a sayısı, a sayısı c olarak tayin edilir. Eğer $f(c) > 0$ ise bu kez $c^2 > S$ demektir ve kök [a, c] aralığındadır; b sayısı, c olarak tayin edilir. Bu işlem $|c^2 - S|$ değeri önceden belirlenmiş bir hata payından (ε) küçük olana kadar tekrarlanır. Her tekrarda aralık yarıya indiği için yöntem lineer yakınsama gösterir ve istenen hassasiyette karekök değerine ulaşılır.

Buna göre aşağıda ikiye bölme metoduyla karekök bulmak için doğal dilde yazılan algoritmadaki boşlukları doldurunuz.

1. ADIM: Başla.

2. ADIM: Kullanıcıdan verileri al.

Karekökü alınacak sayıyı (S), hata payı (ε), en fazla döngü tekrar sayısı (n) al.

3. ADIM: Giriş kontrolleri yap.

Eğer S < 0 ise yazdır "Negatif sayının karekökü alınamaz." ve Bitir.

Eğer S = 0 ise yazdır "Karekök 0'dır." ve Bitir.

4. ADIM: Aralık belirle.

Alt sınır a = **0** al.

Eğer S < 1 ise üst sınır b = **1** al.

Değilse üst sınır b = **S** al.

5. ADIM: Döngüyü başlat.

i ← 0

Döngüyü en fazla n kez **veya** | f(c) | < ε olana kadar sürdür.

Her döngüde

Mevcut aralığın orta noktasını hesapla:
c = (a + b) / 2

f(c)'yi bul. f(c) = c^2 – S

Eğer **| f(c) | < ε** ise yazdır "Karekök c olarak bulundu." ve döngüden çık.

Eğer f(c) < 0 ise alt sınırı güncelle: **a ← c**

Değilse üst sınırı güncelle: **b ← c**

i ← i + 1

6. ADIM: En fazla döngü tekrar sayısı

i = n **ve** | f(c) | >= ε ise yazdır: "En fazla döngü tekrar sayısına ulaşıldı, kök bulunamadı."

7. ADIM: Bitir.

3. Adımda, pozitif olmayan sayılar girildiğinde algoritmanın bitirilmesi sağlanmıştır. Eğer girilen sayı pozitif ise bu adım atlanarak 4. adıma geçilir.

4. adımda alt sınır başlangıçta 0 olarak alınmıştır. Üst sınır da sayının aralığına göre yukarıdaki gibi 1 ya da S olarak belirlenmiştir.

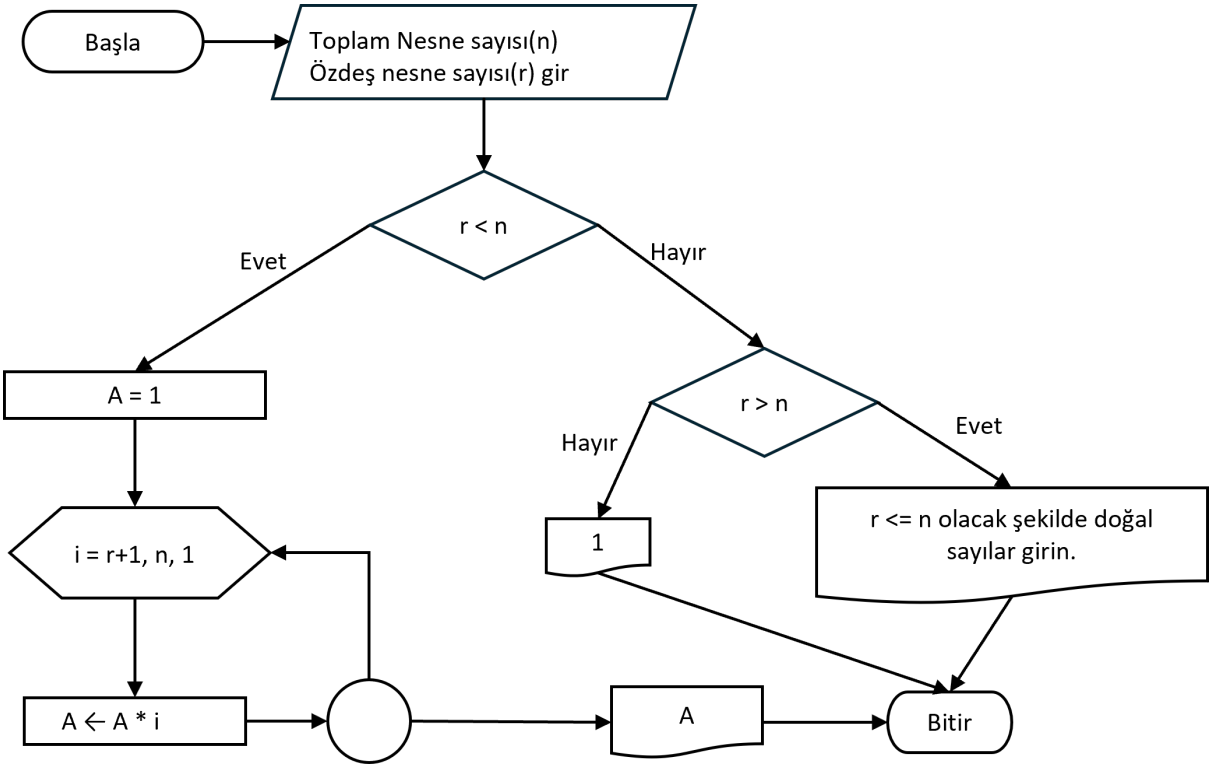
5. Adım yani döngü adımında hata payı (ε), en fazla döngü tekrar sayısı (n) değişkenleri kullanılmıştır.

Bazı S değerleri için çok fazla tekrar sayısı gerekebilir. Bu tekrarların yapılması zaman alıcıdır ve programın kapasitesini zorlayabilir. Bu nedenle döngü tekrar sayısının sınırlandırılması, ne zaman biteceği belli olmayan döngülerin sürekli çalışması sorununu ortadan kaldırır.

"Döngüyü en fazla n kez veya | f(c) | < ε olana kadar sürdür." satırında, programın durması ya n değişkenine ya da ε değişkenine bağlıdır, o yüzden kodda "ya da" bağlacının kullanılması gerektiği düşünülebilir. Ancak "ya da" bağlacı her iki durumun aynı anda gerçekleşmesi olayını dışladığı için uygun değildir. Örneğimizde her iki şart aynı anda da sağlanabilir, o yüzden "ya da" bağlacı yerine "veya" bağlacı kullanılmalıdır.

"Her döngüde" satırının altında satırlar artık döngüyü temsil eder. Döngü devam ederken | f(c) | < ε şartının sağlandığı bir c değeri bulunursa döngüden çıkılır.

ÇÖZÜM 4.



Toplam nesne sayısı (n) ve özdeş nesne sayısının (r) birbirine eşit olduğu durumda dolayısıyla bütün nesnelerin özdeş olması durumunda sıralama sayısı 1 olur.
İlk koşul sembolünün içine r < n yazılarak "Evet" okuyla hesaplamaya yönlendirilirken "Hayır" okuyla r sayısının n sayısından büyük olarak girildiği yanlış durumun kontrolü yapılmıştır.

- Eğer r sayısı, n sayısından büyük girildiyse "r <= n olacak şekilde doğal sayılar girin." uyarı cümlesi yazdırılır.
- Eğer r sayısı, n sayısından büyük değilse r sayısı, n sayısına eşit olur. Bu durumda bütün nesneler özdeş olduğu için sıralama sayısı 1 olarak yazdırılır.

Döngüde çarpma yapılacağı için A = 1 olarak alınır. Döngünün başlangıç değeri r + 1 olduğundan döngü sembolünden sonra gelen işlem sembolünün içinde A ← 1 * (r + 1) işlemi yapılır. Böylelikle A, r + 1'e eşitlenir. Bağlantı sembolü tekrar döngü sembolüne yönlendirir, bu kez A ← (r + 1) * (r + 2) işlemi yapılır. Bu döngü, bitiş değeri olan n değeri A ile çarpılıp, işlem bitirilerek A yazdırılır.
Bu akış şeması farklı şekilde de oluşturulabilir. İlk koşul sembolünün içine "r <= n" yazılarak "r = n" durumu için algoritma döngüye hiç girmeden çıktıyı 1 olarak verir.

UYARI

A = (r + 1) · (r + 2) · ... · (n – 1) · n olduğunu fark edemediyseniz **"İçinde özdeş nesnelerin bulunduğu topluluğun sıralaması"** konu başlığını tekrar etmelisiniz.

ÖĞRENDİKLERİM

Amaç: Bu bölümde öğrendiklerinizi özetlemenizi, günlük hayatta ve farklı derslerde kullanabileceğiniz bilgileri belirlemenizi amaçlıyoruz.

Anahtar kavramları ve önemli bilgileri kendi cümlelerinizle yazınız. Gerekirse şema, tablo ya da kısa notlar kullanarak özetinizi hazırlayınız.

SAYMA, ALGORİTMA VE BİLİŞİM

Sayma ve Algoritmik İşlemlere Yönelik Yansıtıcı Yazı

Amaç: Bu çalışma, saymayı gerektiren durumlarda problem çözme ve algoritmik düşünmeyi kullanarak cebirsel ve fonksiyonel işlemler kurma becerilerinize yönelik farkındalık oluşturmak amacıyla hazırlanmıştır.

Aşağıdaki soruları çözerken kullandığınız yöntemi ve ulaştığınız sonuçları göz önünde bulundurarak kısa ve açık cümlelerle yanıtlayınız.

1. **Öğrendiğiniz bu temada sizin dikkatinizi çeken veya önemli bulduğunuz noktaları yazınız.**

2. **Cebirsel ve fonksiyonel işlemlerde kullanılan algoritma diline ait yapıları gözden geçiriniz. Bu yapılardan size göre daha etkin olanı seçerek gerekçesini açıklayınız.**

3. **Sayma stratejilerinde toplama ve çarpma gerektiren işlemlerden nasıl yararlandığınızı kısaca açıklayınız.**

4. **Sayma stratejilerini kullanabileceğiniz gerçek yaşam örnekleri yazınız.**

Daha fazlası için karekodu okutunuz.



NOKTANIN ANALİTİĞİ

BAŞLARKEN

Bu bölümde yer alan etkinlikler, bireysel öğrenme yolculuğunuzda size rehberlik etmek ve öğrenme sürecinizi desteklemek amacıyla hazırlanmıştır. Çalışmalarınızı yürütürken "Hazırlanıyorum", "İlişkilendiriyorum", "Uygulayarak Öğreniyorum", "Değerlendiriyorum", "Yansıtıcı Yazı" ve "Öğrendiklerim" etkinliklerini sırası ile takip etmeniz ve etkinliklerin sonunda yer alan geri bildirimleri inceleyerek bölümleri tamamlamanız beklenmektedir.

Bu çalışmada dik koordinat sisteminde iki nokta arasındaki uzaklığı hesaplamayı öğreneceksiniz. Ayrıca bir doğru parçasını belirli bir oranda bölen noktanın koordinatlarını bulma yöntemini keşfedeceksiniz. Bu süreçte hem analitik düşünme becerilerinizi geliştirecek hem de geometrik ilişkileri daha iyi kavrayacaksınız. Öğrendiklerinizi uygulayarak günlük hayatta karşılaşabileceğiniz konum ve mesafe problemlerini çözebilecek duruma geleceksiniz.

HAZIRLANIYORUM

Amaç: Bu bölümde ön bilgilerinizi hatırlamanızı ve temaya hazırlıklı hâle gelmenizi amaçlıyoruz.

Aşağıda yer alan ifadeler, bu temada tamamlanması hedeflenen öğrenme çıktısını ele almadan önce sahip olmanız gereken bazı temel becerileri içermektedir. Lütfen her bir ifadeyi dikkatlice okuyunuz.

• Eğer ifadedeki beceriye hakim olduğunuzu düşünüyorsanız kutucuğu işaretleyiniz.

• Eğer konuyu henüz tam olarak bilmediğinizi ya da hatırlamadığınızı düşünüyorsanız kutucuğu boş bırakınız.

Bu çalışmanın amacı notla değerlendirilmeyecek olup amacı temaya ne ölçüde hazır olduğunuzu belirlemektir.

ÖN ÖĞRENME KONTROL LİSTESİ	
1. Sayı doğrusunda pozitif ve negatif yönleri ayırt edebilirim.	☐
2. Bir sayının mutlak değerini sayı doğrusunda 0'a olan uzaklık olarak ifade eder ve yorumlayabilirim.	☐
3. (x, y) sıralı ikilisinde apsis ve ordinatı doğru şekilde belirliyebilirim.	☐
4. Dik koordinat sisteminde bir noktanın koordinatlarını kullanarak noktanın yerini bulabilirim.	☐
5. Bir doğru parçasının eksenlere ve orijine göre yansımasını çizebilirim.	☐

"Ön Öğrenme Kontrol Listesi"ni doldurduktan sonra aşağıda verilen "Kontrol Noktası" sorularını çözünüz ve cevaplarınızı kontrol ediniz.

KONTROL NOKTASI

SORU 1.

Aşağıda verilen sayıları sayı doğrusu üzerinde gösteriniz.

$-3,\ 2,\ 0,\ 5,\ \frac{13}{5},\ -\frac{23}{7}$

SORU 2.

Aşağıda verilen işlemlerin sonucunu bulunuz.

a) $|-3| + |2 - 7|$

b) $|-5 + 7| - |2 \cdot (-3) + 4|$

SORU 3.

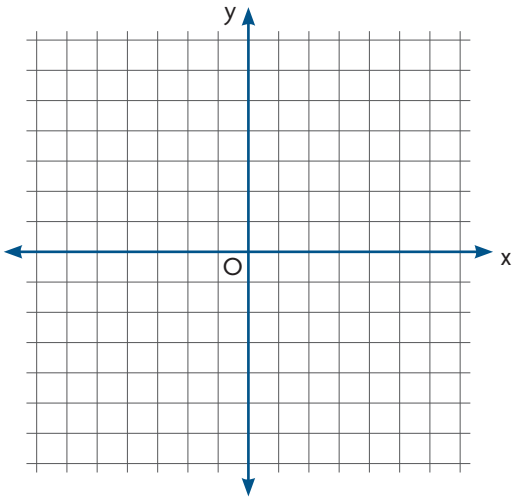
Dik koordinat sisteminin 1. bölgesinde bulunan A (3a – b, a + b) noktasının x eksenine uzaklığı 5 birim, y eksenine uzaklığı 7 birimdir.

Buna göre B(2a – b, 2b – 3a) noktasının dik koordinat sisteminin kaçıncı bölgesinde olduğunu bulunuz.

SORU 4.

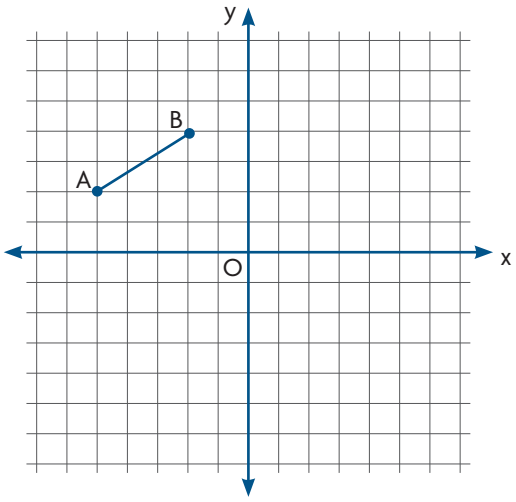
Aşağıda verilen noktaların geometrik yerini birimkarelere ayrılmış dik koordinat sisteminde gösteriniz.

A(−3, 5), B(−2, −4), C(4, 0), D(0, −3), E(1 , 3), F(3, −4)



SORU 5.

Aşağıda verilen birimkarelere ayrılmış dik koordinat sisteminde [AB] nın x eksenine, y eksenine ve orijine göre yansımalarını çiziniz.

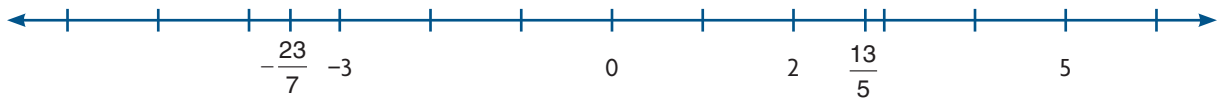


GERİ BİLDİRİM

Bu geri bildirim sayesinde kendi cevabınızı kontrol edebilir, hatalarınızı düzelterek öğrenmenizi pekiştirebilirsiniz.

KONTROL NOKTASI

ÇÖZÜM 1.



ÇÖZÜM 2.

a) $|-3| + |2 - 7| = 3 + 5 = 8$ olur.

b) $|-5 + 7| - |2 \cdot (-3) + 4| = 2 - 2 = 0$ olur.

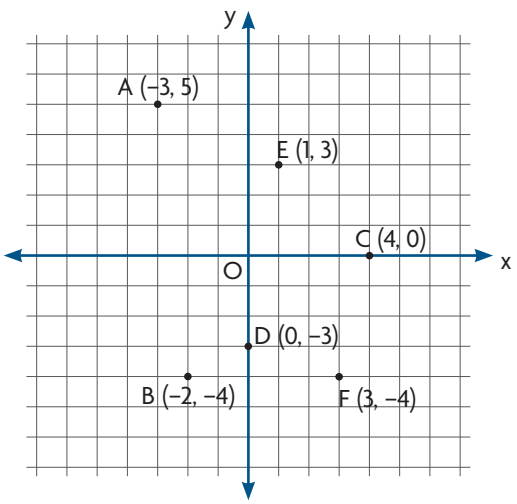
ÇÖZÜM 3.

$$\begin{aligned} 3a - b &= 7 \\ +\ a + b &= 5 \\ 4a &= 12 \\ a &= 3 \\ 3 + b &= 5 \\ b &= 2 \end{aligned}$$

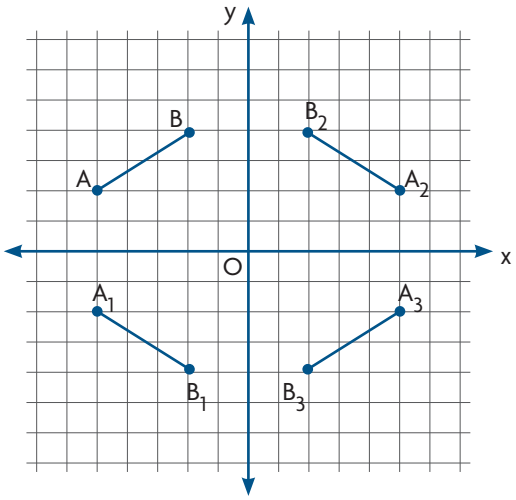
B (2a – b, 2b – 3a) = B (4, – 5)

B noktasının x bileşeni pozitif, y bileşeni negatif işaretli olduğu için koordinat sisteminin 4. bölgesinde yer alır.

ÇÖZÜM 4.



ÇÖZÜM 5.



- [AB] nın x eksenine göre yansıması $[A_1 B_1]$ dır.
- [AB] nın y eksenine göre yansıması $[A_2 B_2]$ dır.
- [AB] nın orijine göre yansıması $[A_3 B_3]$ dır.

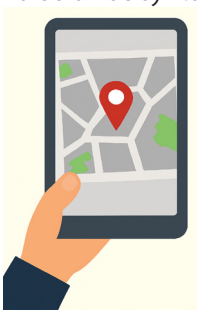
İLİŞKİLENDİRİYORUM

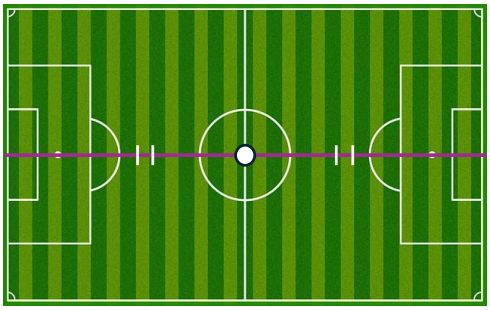
Amaç:

Bu bölümde yeni öğreneceğiniz temayı; zihninizde var olan bilgileriniz, yaşantılarınız ve diğer derslerde öğrendiklerinizle ilişkilendirmenizi bekliyoruz.

Bu konuyu öğrenirken daha önce edindiğiniz matematiksel bilgilerin yeni bağlamlarda nasıl kullanılabildiğini fark edeceksiniz. Ortaokulda öğrendiğiniz Pisagor Teoremi, dik üçgenlerde kenar uzunlukları arasındaki ilişkiyi açıklamaktadır. Dik koordinat sisteminde iki nokta arasındaki uzaklığı hesaplarken de aynı temel düşüncenin bu kez koordinat düzlemine uyarlanmış hâlinden yararlanılır. Böylece bildiğiniz bir teoremin farklı bir matematiksel ortamda nasıl kullanıldığını göreceksiniz.

Bu bölümde ayrıca iki noktanın orta noktasının koordinatları ile bir doğru parçasını belirli bir oranda bölen noktanın koordinatlarını bulmayı öğreneceksiniz. Bu kavramlar yalnızca yeni formüller öğrenmekten ibaret değildir, koordinat sistemi üzerinde konum belirleme ve ilişkileri analiz etme becerinizi de geliştirir. Dik koordinat sisteminde kullanılan bu matematiksel ilişkiler, farklı disiplinlerde de önemli bir yere sahiptir. Fizikte bir cismin konum değişimini incelemede, coğrafyada harita üzerinde iki nokta arasındaki mesafeyi belirlemede, bilişim teknolojilerinde ise ekran üzerindeki bir nesnenin tam ortasını ya da belirli bir orana göre konumunu hesaplamada aynı matematiksel yaklaşımlar kullanılır. Günlük yaşamda da bu kavramlarla sıkça karşılaşılır. Örneğin iki farklı noktadan yola çıkan kişilerin buluşmak için bu iki noktaya eşit uzaklıkta bulunan noktayı belirlemesi, bir spor sahasında orta noktanın tespit edilmesi ya da bir alanın belirli oranlarda bölünmesi gibi durumlar; doğru parçasını belli bir oranda bölen nokta kavramı ile doğrudan ilişkilidir. Bu nedenle bu konuyu öğrenirken, matematiği yalnızca soyut işlemler bütünü olarak değil önceki öğrenmelerinizle, diğer derslerle ve günlük yaşamla ilişkilendirerek anlamlandırmanız amaçlanmaktadır.





UYGULAYARAK ÖĞRENİYORUM

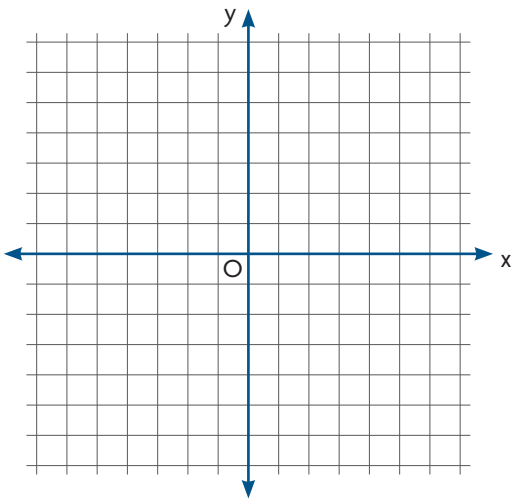
Amaç:

Bu bölümde bilgilerinizi etkinlikler ve uygulamalarla pekiştirmenizi, öğrenmeyi daha kalıcı hâle getirmenizi amaçlıyoruz.

Bu bölümde öğrendiğiniz bilgileri yalnızca gözlemlemekle kalmayıp, aktif biçimde kullanarak öğrenme sürecine doğrudan katılacaksınız. Dik koordinat sisteminde iki nokta arasındaki uzaklık ve bir doğru parçasını belli oranda bölen noktanın koordinatlarıyla ilgili kavramları çeşitli etkinlikler yoluyla deneyimleyeceksiniz. Gerçek yaşamdan alınmış senaryolar üzerinde çalışarak matematiğin günlük yaşamdaki karşılıklarını keşfedecek, kendi çıkarımlarınızı yaparak formüllerin mantığını anlayacaksınız.

ÖRNEK

A (–3, 4) ve B (3, –4) noktalarını koordinat sisteminde gösterip bu iki nokta arasındaki uzaklığı hesaplayınız.



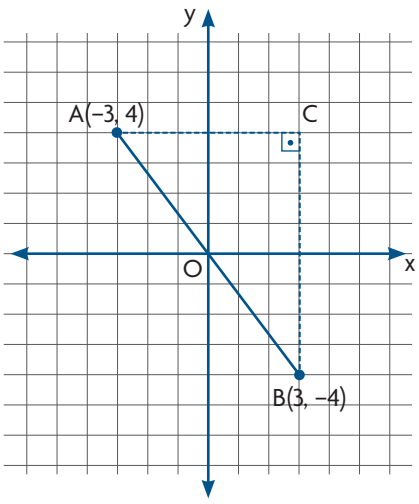
NOT

Dik koordinat sisteminde verilen $A(x_1, y_1)$ ile $B(x_2, y_2)$ noktaları için A ile B noktaları arasındaki uzaklık

$$|AB| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

bağıntısı ile hesaplanır.

ÇÖZÜM



HATIRLATMA

Pisagor bağıntısına göre dik üçgende bir dik açının karşısındaki kenarın diğer bir deyişle hipotenüsün uzunluğu, dik kenarların uzunluğunun karelerinin toplamının karekökünü eşittir. Bu durumda

$|AB| = \sqrt{|AC|^2 + |BC|^2}$ olur.

$|AC| = 6$

$|BC| = 8$

$|AB| = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10$ birim olur.

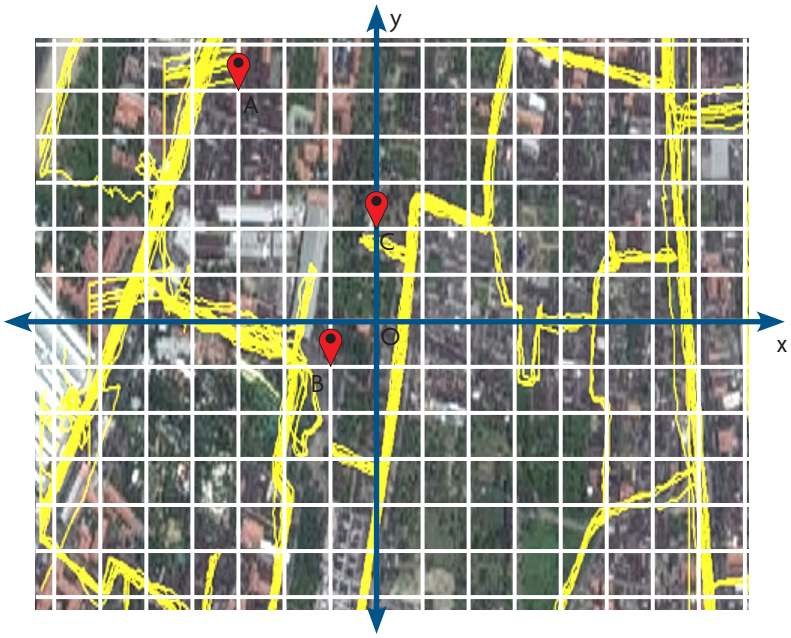
Aynı uzunluk, iki nokta arasındaki uzaklık formülü kullanılarak aşağıdaki gibi de bulunabilir.

$$|AB| = \sqrt{(-3-3)^2 + (4-(-4))^2} = \sqrt{(-6)^2 + (8)^2} = \sqrt{100} = 10 \text{ birim}$$

ÖRNEK

Bir arkeolog, antik bir kentteki üç önemli yapının yerini harita üzerinde işaretlemiştir. Harita, dik koordinat sistemi ile modellenmiştir. Yapıların bulunduğu noktaların koordinatları aşağıda verilmiştir:

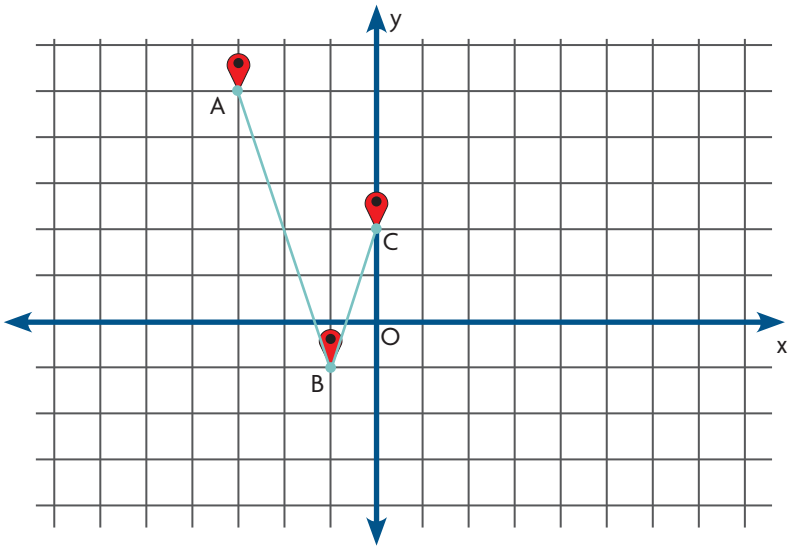
- Agora: A(–3, 5)
- Tiyatro: B(–1, –1)
- Tapınak: C(0, 2)



Harita programı, agora (A) ile tiyatro (B) arasındaki uzaklığı 24 km olarak hesaplamaktadır.

Buna göre aynı harita programı tiyatro (B) ile tapınak (C) arasındaki uzaklığı kaç kilometre olarak hesaplar? Bulunuz.

ÇÖZÜM



$$|AB| = \sqrt{(-3-(-1))^2 + (5-(-1))^2} = \sqrt{4+36} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \text{ birim}$$

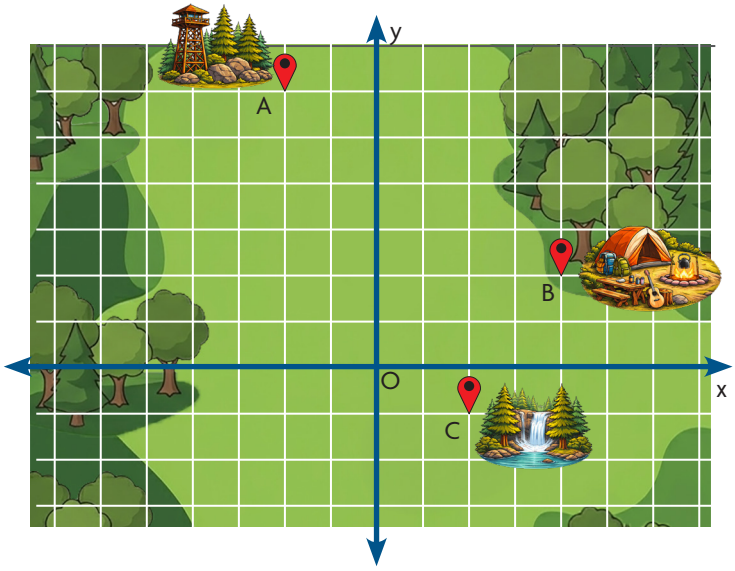
$$|BC| = \sqrt{(0-(-1))^2 + (2-(-1))^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10} \text{ birim}$$

$|AB| = 2\sqrt{10}$ birim uzunluk 24 km ise $|BC| = \sqrt{10}$ birim uzunluk 12 km olarak hesaplanır.

SIRA SİZDE 1.

Bir millî parktaki üç önemli yerin konumu, aşağıda verilen ve dik koordinat sistemiyle modellenen bir haritada gösterilmiştir.

• Gözlem Kulesi: A(–2, 6) • Kamp Alanı: B(4, 2) • Şelale: C(2, –1)



Harita programı, gözlem kulesi (A) ile kamp alanı (B) arasındaki uzaklığı 500 metre olarak hesaplamaktadır.

Buna göre, aynı harita programı kamp alanı (B) ile şelale (C) arasındaki uzaklığı kaç metre olarak hesaplar? Bulunuz.

ÖRNEK

Bir orman yangınına müdahale eden özel bir yangın söndürme uçangözünün (dronunun) hareketi, dik koordinat sistemiyle modellenmiş bir harita üzerinde gösterilecektir. Uçangözün (dronun) başlangıçta bulunduğu nokta D(–2, – 3) olarak verilmiştir.

Uçangözün (dronun) t saniye sonraki konumu, aşağıdaki formülle hesaplanmaktadır.

Konum (t) = (–2 + 4t, –3 - 2t)

Uçangöz (drone), 3. saniyede E noktasında ve 6. saniyede F noktasında bulunduğuna göre E ile F arasındaki uzaklık kaç birimdir? Bulunuz.

ÇÖZÜM

t = 3 için E = (10, –9)

t = 6 için F = (22, –15)

$|EF| = \sqrt{(22-10)^2 + (-15-(-9))^2} = \sqrt{144+36} = \sqrt{180} = 6\sqrt{5}$ birimdir.

SIRA SİZDE 2.

Türkiye'de yaklaşık olarak enlemler arası mesafe 111 km, boylamlar arası mesafe 88 km'dir.



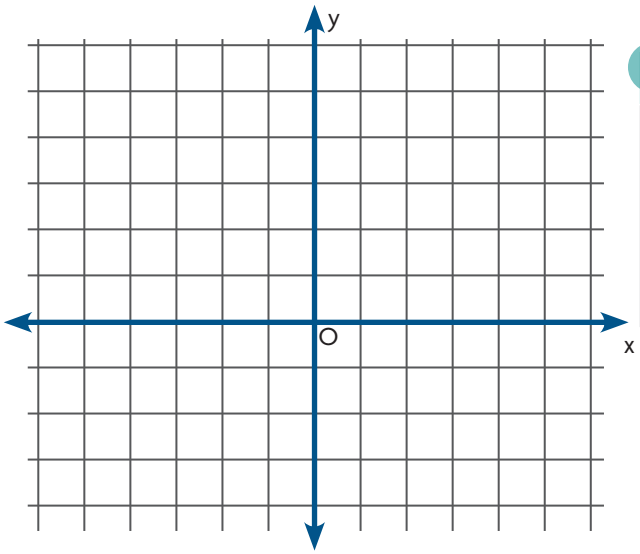
	Enlem	Boylam
İzmir	38.4	27.1
Mersin	36.8	34.6

Uras, yukarıda görseli verilen Türkiye haritasını kullanarak enlem ve boylam bilgilerini sırasıyla x ve y eksenleri ile ilişkilendirmiştir. Bir konumun enlem ve boylam değerlerini dik koordinat sisteminde sırasıyla apsis ve ordinat olarak kabul edip iki nokta arasındaki kuş uçuşu mesafeyi hesaplamak istemektedir. Bunun için İzmir ve Mersin'in coğrafi koordinatlarını yaklaşık olarak tespit etmiş, bu iki şehir arasındaki mesafeyi dik koordinat sisteminde iki nokta arasındaki uzaklık bağıntısını kullanarak hesaplamış ve bir çevrim içi harita programında kuş uçuşu mesafe ile karşılaştırmıştır.

Buna göre Uras'ın yaptığı hesaplamalardan elde ettiği sonuçları bulunuz.

ÖRNEK

A (1, 4) ve B (–3, 2) noktalarını aşağıdaki birimkareli koordinat sisteminde gösterip [AB] nın orta noktasını bulunuz.



NOT

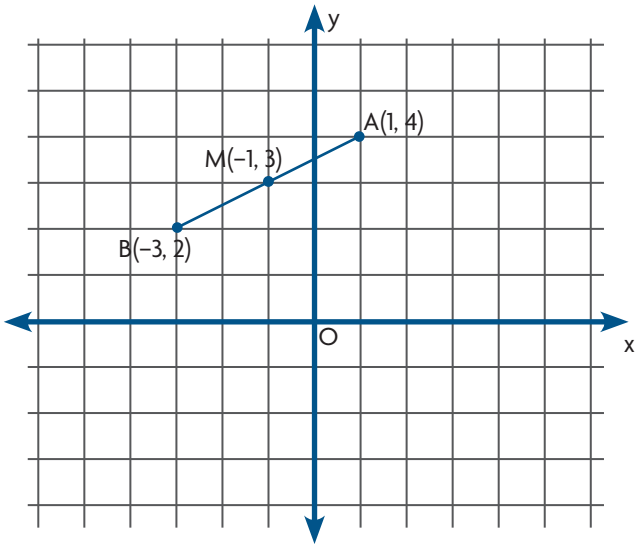
Dik koordinat sisteminde verilen

$A(x_1, y_1)$ ile $B(x_2, y_2)$ noktaları için

[AB] nın orta noktası C noktası olmak üzere

C noktasının koordinatları $C\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ dir.

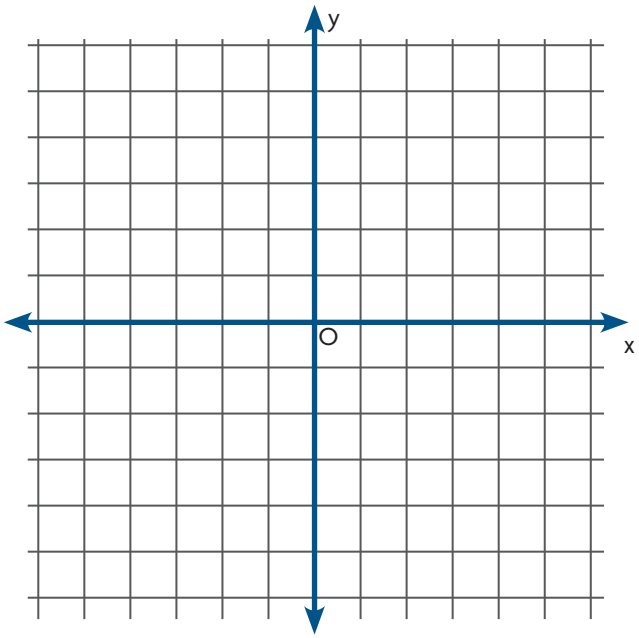
ÇÖZÜM



$$M = \left(\frac{1-3}{2}, \frac{4+2}{2}\right) = M(-1, 3)$$

ÖRNEK

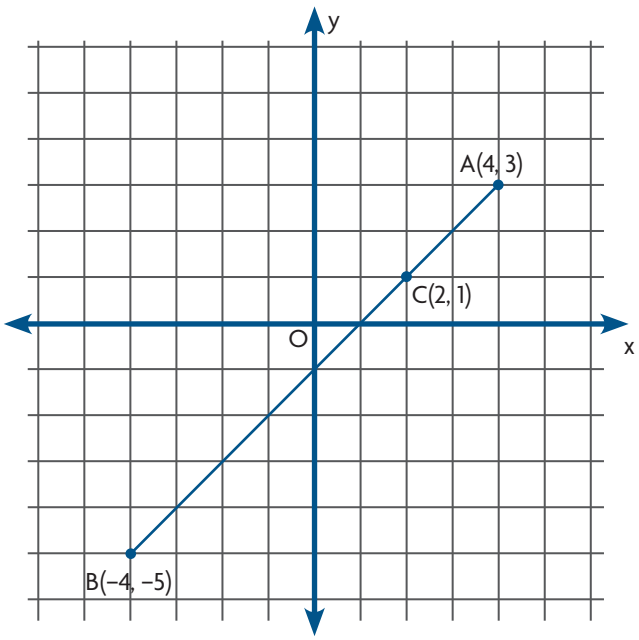
A(4, 3) **ve** B(–4, –5) **noktalarını aşağıdaki birimkareli dik koordinat sisteminde gösterip** $\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{1}{3}$ **olacak şekilde [AB] nın üzerindeki bir C noktasının koordinatlarını bulunuz.**



NOT

Dik koordinat sisteminde verilen
$A(x_1, y_1)$ ile $B(x_2, y_2)$ noktaları için [AB] nı içten bölen ([AB] nın üzerinde) veya dıştan bölen ([AB] nın dışında ve doğrultusunda) ve
$|AB| = |CB| \cdot k$ (k bir rasyonel sayı) kuralını sağlayan
C(x, y) noktasının koordinatları
$\frac{x_2 - x_1}{x_2 - x} = k$ ve $\frac{y_2 - y_1}{y_2 - y} = k$ bağıntılarıyla bulunur.

ÇÖZÜM



[AB] nın üzerindeki bir C(x, y) noktası için $\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{1}{3}$ ise $\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{4}{3}$'tür.

Bu durumda verilen formülü kullanarak

$$\frac{-4-4}{-4-x} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{-8}{-4-x} = \frac{4}{3}$$

$$-4-x = -6$$

$$x = 2$$

$$\frac{-5-3}{-5-y} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{-8}{-5-y} = \frac{4}{3}$$

$$-5-y = -6$$

$y = 1$ bulunur.

C noktasının koordinatları C(2, 1) olur.

İkinci bir çözüm yöntemi de orantı ile yapılır. Aşağıda bu çözüm yöntemini de inceleyebilirsiniz.

[AB] nın üzerindeki bir C noktası için |AC| = k ise |BC|= 3k olur. Bu durumda |AB| = 4k olur.

4k birim uzunluk için x değeri B noktasından A noktasına 8 artmıştır. Bu durumda 3k birim uzunluk için x değeri 6 artmalıdır. Dolayısıyla C noktasının x bileşeni –4 + 6 = 2 olur.

4k birim uzunluk için y değeri B noktasından A noktasına 8 artmıştır. Bu durumda 3k birim uzunluk için 6 artmalıdır. Dolayısıyla C noktasının y bileşeni –5 + 6 = 1 olur.

Sonuç olarak C noktasının koordinatları C(2, 1) olur.

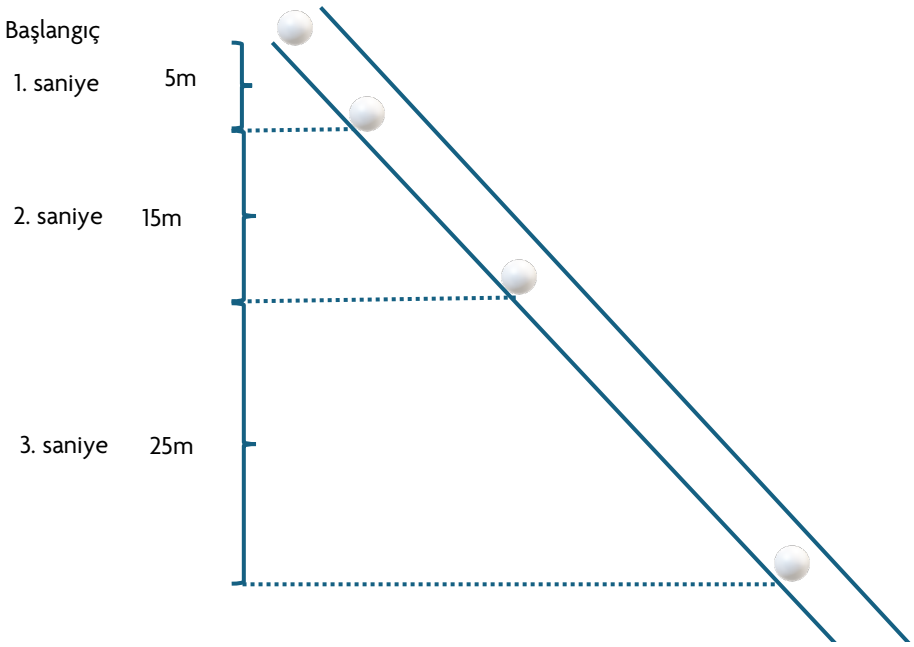
ÖRNEK

Sürtünmenin önemsiz olduğu bir ortamda deney yapan bir grup araştırmacı, yeterince yüksekten bırakılan bir bilyenin yaptığı eğimli doğrusal hareket sırasında bulunduğu konumları bir bilgisayar programı ile gözlemlemektedir. Bu bilgisayar programı, bilyenin bulunduğu ortamı bir dik koordinat sistemiyle modelleyerek bilyenin konumlarını sıralı ikililerle ifade etmektedir.

Belirli bir noktadan ilk hızı sıfır olarak bırakılan bilye, yer çekimi etkisiyle hızlanarak doğrusal bir yol izlemekte ve bilyenin hızı her saniyede 10 m artmaktadır. Bilyenin sırasıyla 1, 2 ve 3. saniye aralıklarında düşeyde aldığı yol miktarları aşağıdaki görselde 5 m, 15 m ve 25 m olarak verilmiştir.

Bilyenin bırakıldıktan sonraki 2. saniyede bulunduğu konum A(−5, 4) iken 3. saniyedeki konumu B(0, −6) olarak ölçülüyor.

Buna göre bilyenin 4. saniyede bulunacağı konumu belirleyiniz.



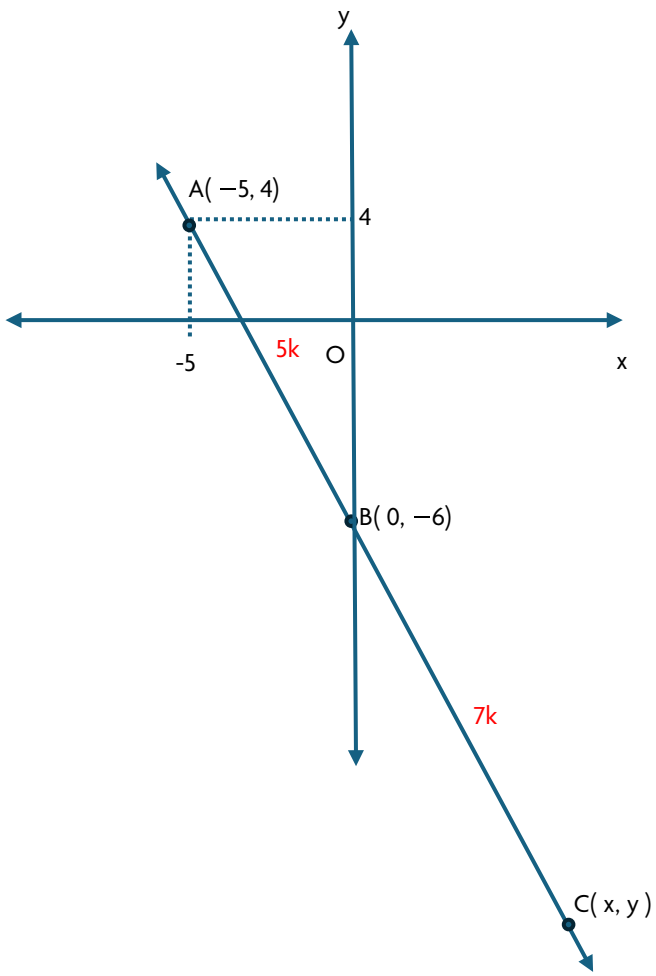
ÇÖZÜM

Cisim sabit ivme ile hareket ettiğinden eşit birer saniyelik zaman aralıklarında düşeyde aldığı yolların farkı sabit olup birer saniyelik eşit zaman aralıklarında cismin hızı 10 m artacaktır. Buna göre 3. saniye ile 4. saniye arasında düşeyde alacağı yol 25 + 10 = 35 metre olur.

Cismin 4. saniyede bulunacağı konum C(x, y) olsun.

Buna göre $\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{25t}{35t} = \frac{5}{7}$ olur.

Bu bilgilere göre dik koordinat sistemi üzerinde oluşturulan taslak çizim aşağıda verilmiştir.



[AB] nı $\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{5}{7}$ oranında dıştan bölen C(x, y) noktasının koordinatları için

$$\frac{0-(-5)}{x-0} = \frac{5}{7} \Rightarrow 5x = 35 \Rightarrow x = 7$$

$$\frac{-6-4}{y-(-6)} = \frac{5}{7} \Rightarrow 5y + 30 = -70 \Rightarrow 5y = -100 \Rightarrow y = -20$$

olarak bulunur.

Buna göre cismin 4. saniyedeki konumu C(7, −20) ollmalıdır.

ÖRNEK

Bir ABC üçgeninin köşe noktalarının koordinatları A(−3, 4), B(−1, −2) ve C(3, 2) olarak verilmiştir.

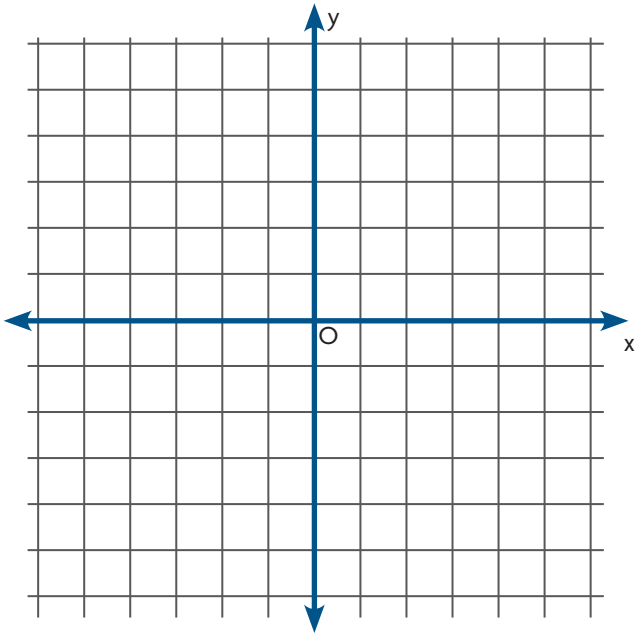
Buna göre

a) A ve B noktalarının orta noktasını bulunuz.

b) A ve C noktalarının orta noktasını bulunuz.

c) B ve C noktalarının orta noktasını bulunuz.

d) ABC üçgeninin ağırlık merkezini bulunuz.



e) Yanda verilen birimkareli dik koordinat sisteminde ABC üçgenini çizip bulduğunuz noktaları gösteriniz.

NOT

Dik koordinat sisteminde köşe noktalarının koordinatları $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ ve $C(x_3, y_3)$ olan

ABC üçgeninin ağırlık merkezi G noktası olmak üzere $G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$ tür.

ÇÖZÜM

a) A ve B noktalarının orta noktası D noktası olsun.

$$D\left(\frac{-3+(-1)}{2}, \frac{4+(-2)}{2}\right) = D(-2, 1)$$

b) A ve C noktalarının orta noktası E noktası olsun.

$$E\left(\frac{-3+3}{2}, \frac{4+2}{2}\right) = E(0, 3)$$

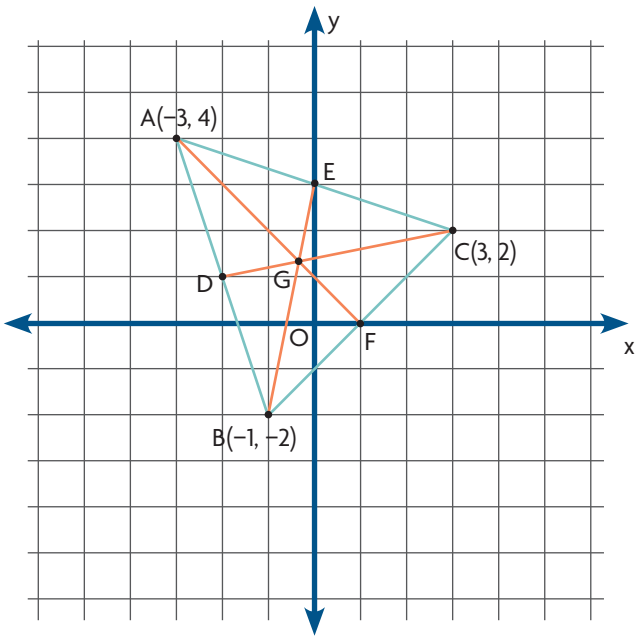
c) B ve C noktalarının orta noktası F noktası olsun.

$$F\left(\frac{-1+3}{2}, \frac{-2+2}{2}\right) = F(1, 0)$$

d) ABC üçgeninin ağırlık merkezi G noktası olsun.

$$G\left(\frac{-3+(-1)+3}{3}, \frac{4+(-2)+2}{3}\right) = G\left(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

e)



ÖRNEK

Dik koordinat sisteminde apsisi ordinatının 1 fazlasına eşit olan noktaların oluşturduğu bir kümeden A ve B noktaları seçilmiştir.

A ve B noktaları ile ilgili aşağıdaki veriler bilinmektedir.

- A ve B noktaları arasındaki uzaklık $6\sqrt{2}$ birimdir.
- A ve B noktalarının orta noktasının koordinatları (9, 8) dir.

Buna göre A ve B noktalarının koordinatlarının alabileceği değerleri bulunuz.

ÇÖZÜM

A(a, a − 1) ve B(b, b − 1) olsun.

Bu durumda

$$|AB| = \sqrt{(a-b)^2 + (a-1-(b-1))^2} = \sqrt{2 \cdot (a-b)^2} = 6\sqrt{2}$$

a − b = 6 veya a − b = − 6 olur.

a + b = 18 olduğundan

a = 12 ise b = 6 veya a = 6 ise b = 12 olur.

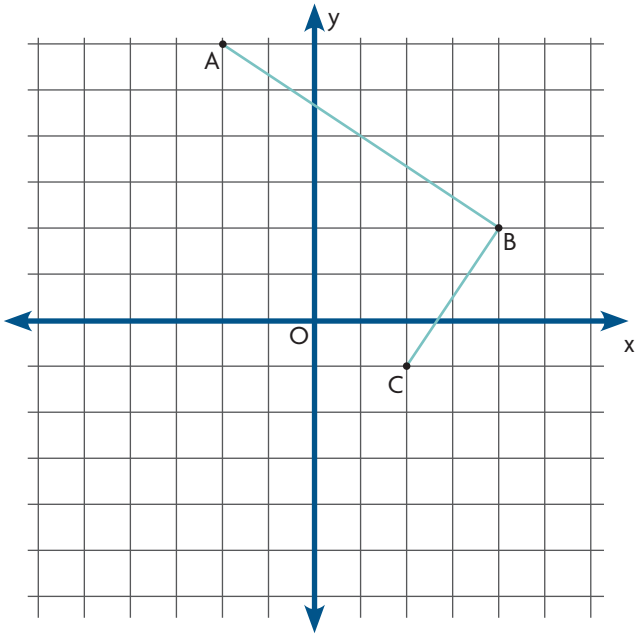
Bu durumda A(12, 11) ise B(6, 5) veya A(6, 5) ise B(12, 11) olur.

GERİ BİLDİRİM

Bu geri bildirim sayesinde kendi cevabınızı kontrol edebilir, hatalarınızı düzelterek öğrenmenizi pekiştirebilirsiniz.

SIRA SİZDE 1.

ÇÖZÜM



$$|AB| = \sqrt{(4-(-2))^2 + (2-6)^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13} \text{ birim}$$

$$|BC| = \sqrt{(2-4)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{13} \text{ birim}$$

$$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{2\sqrt{13}}{\sqrt{13}} = \frac{500}{x}$$

$|BC| = 250$ metre

SIRA SİZDE 2.

ÇÖZÜM



İzmir: Enlem = 38.4 → x = 38.4, Boylam = 27.1 → y = 27.1

Mersin: Enlem = 36.8 → x = 36.8, Boylam = 34.6 → y = 34.6

Bu durumda iki nokta arası koordinat farkları:

y farkı: 34.6 - 27.1 = 7.5 boylam → 7.5 × 88 km = 660 km olur.

x farkı: 38.4 - 36.8 = 1.6 enlem → 1.6 × 111 km = 177.6 km olur.

Bu durumda iki nokta arası kuş uçuşu mesafe Pisagor bağıntısı yardımıyla hesaplanabilir. Hesabı yaparken hesap makinesi kullanabilirsiniz.

$$\sqrt{(660)^2 + (177.6)^2} = \sqrt{435600 + 31541.76} = \sqrt{467141,76} \approx 683,48 \text{ km}$$

Haritalarda İzmir ile Mersin arası doğrusal mesafe yaklaşık olarak 685 km'dir.

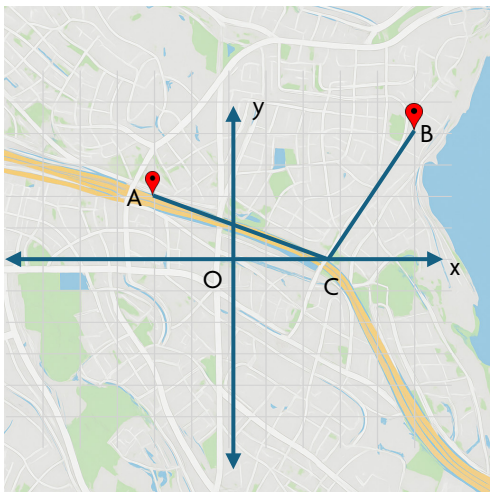
DEĞERLENDİRİYORUM

Amaç: Bu bölümde öğrendiklerinizi gözden geçirmenizi, kendi öğrenme sürecinizi değerlendirmenizi ve eksiklerinizi fark etmenizi amaçlıyoruz.

Soruları dikkatle yanıtlayınız. Cevaplarınızı geri bildirimlerle karşılaştırarak eksik gördüğünüz noktaları tekrar ediniz.

SORULAR

1. Konumların dik koordinat sistemindeki sıralı ikililerle gösterildiği aşağıdaki haritada A(−2, 2) ve B(5, 4) noktalarında bulunan iki araç, bulundukları noktalardan eşit ve sabit hızlarla doğrusal olarak harekete başlamıştır.

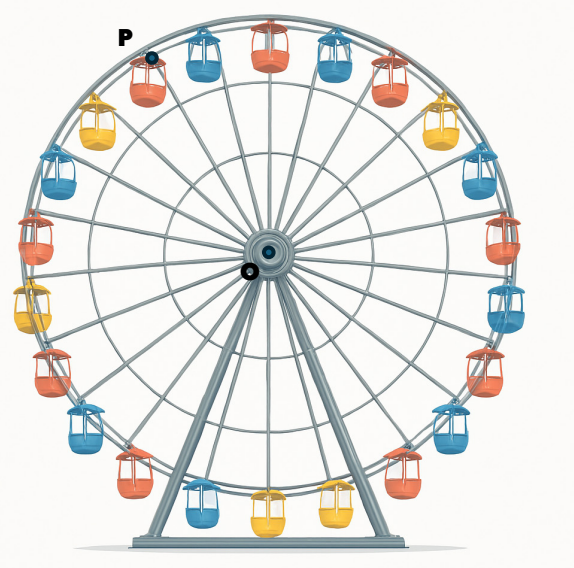


Araçlar x ekseni üzerindeki C noktasına aynı anda ulaştıklarına göre C noktasının koordinatlarını bulunuz.

2. Bir lunaparkta iki farklı dönme dolap bulunmaktadır. Kabinler bu dönme dolaplarda dairesel bir yörünge üzerinde hareket etmektedir.

İlk dönme dolabın merkezi O(0, 0) noktasında iken bir kabin P(–4, 6) noktasında bulunmaktadır.

İkinci dönme dolabın merkezi M(2, 1) noktasında iken başka bir kabin R(6, k) noktasında görünmektedir.



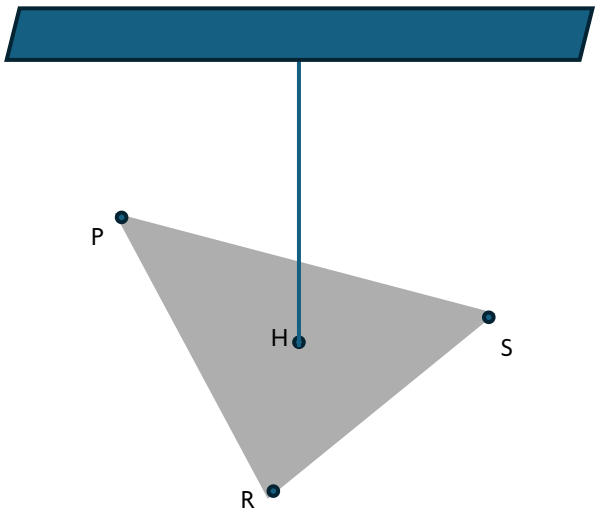


Her iki dönme dolabın yarıçapları eşit uzunlukta olduğuna göre R noktasının ordinatı olan k nin alabileceği değerleri bulunuz.

3. Bir bilimsel sanat galerisinde üçgen biçimli homojen metal bir levha tavandan bir ip ile asılarak sergilenmektedir. Denge durumunda ipten geçen düşey doğru levhanın ağırlık merkezinden geçmektedir.

İp levha üzerindeki H(1, 2) noktasından bağlıyken levha dengededir. Bu durumda üçgen levhanın iki köşesinin koordinatları P(–3, 5) ve R(–1, –2) olarak ölçülmüştür.

Buna göre üçgenin diğer köşesi olan S noktasının koordinatlarını bulunuz.



4. Bir doğal gaz boru hattı, dağ eteğinden şehre doğru doğrusal biçimde yerleştirilmiştir. Hattın geçtiği noktaların şehre olan uzaklıklarına göre dik koordinat sisteminde sıralı ikililerle modellenmektedir.

Şehre olan uzaklık 2200 m iken hattın geçtiği nokta A(–3, 5), şehre olan uzaklık 1800 m iken hattın geçtiği nokta B(1, –1) olarak verilmiştir.

Şehre olan uzaklık 1200 m olduğunda hattın geçtiği nokta C(x, y) olacaktır.

Buna göre C noktasının koordinatlarını bulunuz.

GERİ BİLDİRİM

Bu geri bildirim sayesinde kendi cevabınızı kontrol edebilir, hatalarınızı düzelterek öğrenmenizi pekiştirebilirsiniz.

ÇÖZÜM 1.

C noktası x ekseni üzerinde olduğundan C(x, 0) şeklindedir.

Araçların hızları eşit olduğundan A ve C noktaları arasındaki doğrusal mesafe ile B ve C noktaları arasındaki doğrusal mesafe birbirine eşit olmalıdır.

Bu durumda

$$|AC| = \sqrt{(x-(-2))^2 + (0-2)^2} = \sqrt{(x+2)^2 + 4}$$

$$|BC| = \sqrt{(5-x)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{(5-x)^2 + 16}$$

$$|AC| = |BC| \Rightarrow (x+2)^2 + 4 = (5-x)^2 + 16$$

$$x^2 + 4x + 8 = x^2 - 10x + 41$$

$$14x = 33$$

$$x = \frac{33}{14} \text{ olur.}$$

Yani C noktasının koordinatları $C = \left(\frac{33}{14}, 0\right)$ dır.

ÇÖZÜM 2.

Dönme dolapların yarıçapları eşit olduğundan kabinler ile dönme dolabın merkezleri arasındaki uzaklıklar eşit olmalıdır.

Bu durumda

$$\sqrt{(-4-0)^2+(6-0)^2}=\sqrt{(6-2)^2+(k-1)^2}$$

$$16+36=16+(k-1)^2$$

$$36=(k-1)^2$$

$$k-1=6 \vee k-1=-6$$

$k=7 \vee k=-5$ bulunur.

ÇÖZÜM 3.

Levha dengede olduğundan ip, levhanın ağrılık merkezinden bağlanmış olmalıdır.

Varsayalım ki S noktasının koordinatları S(x, y) olsun.

Bu durumda

$$H(1,\ 2)=\left(\frac{-3+(-1)+x}{3},\ \frac{5+(-2)+y}{3}\right) \text{ olmalıdır.}$$

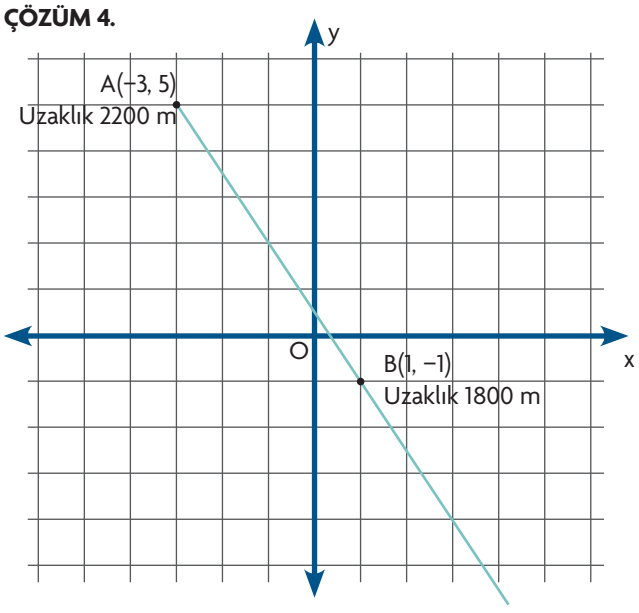
$$\frac{-4+x}{3}=1 \wedge \frac{3+y}{3}=2$$

$$x-4=3 \wedge 3+y=6$$

$$x=7 \wedge y=3$$

S noktasının koordinatları S(7, 3) tür.

ÇÖZÜM 4.



$$\frac{|AB|}{|BC|}=\frac{2200-1800}{1800-1200}=\frac{400}{600}=\frac{2}{3}$$

$$\frac{1-(-3)}{x-1}=\frac{2}{3} \qquad \frac{-1-5}{y-(-1)}=\frac{2}{3}$$

$$\frac{4}{x-1}=\frac{2}{3} \qquad \frac{-6}{y+1}=\frac{2}{3}$$

$$2x-2=12 \qquad 2y+2=-18$$

$$x=7 \qquad y=-10$$

Bu durumda C(7, –10) dur.

ÖĞRENDİKLERİM

Amaç: Bu bölümde öğrendiklerinizi özetlemenizi, günlük hayatta ve farklı derslerde kullanabileceğiniz bilgileri belirlemenizi amaçlıyoruz.

	Açıklama
Dik koordinat sisteminde verilen $A(x_1, y_1)$ ile $B(x_2, y_2)$ noktaları için A ile B noktaları arasındaki uzaklık, $\|AB\| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ bağıntısı ile hesaplanır.	Dik koordinat sisteminde verilen iki nokta arasındaki uzaklık bulunurken Pisagor teoreminden yararlanılır.
Dik koordinat sisteminde verilen $A(x_1, y_1)$ ile $B(x_2, y_2)$ noktaları için [AB] nın orta noktası C noktası olmak üzere C noktasının koordinatları $C\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ dir.	Dik koordinat sisteminde verilen iki noktanın orta noktası bulunurken x ve y bileşenlerinin ortalaması alınır.
Dik koordinat sisteminde köşe noktalarının koordinatları $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ ve $C(x_3, y_3)$ olan ABC üçgeninin ağırlık merkezi G noktası olmak üzere $G\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$ dir.	Dik koordinat sisteminde verilen bir üçgenin ağırlık merkezi bulunurken köşe noktalarının x ve y bileşenlerinin ortalaması alınır.
Dik koordinat sisteminde verilen $A(x_1, y_1)$ ile $B(x_2, y_2)$ noktaları için [AB] nı içten bölen ([AB] nın üzerinde) veya dıştan bölen ([AB] nın dışında ve doğrultusunda) ve $\|AB\| = \|BC\| \cdot k$ (k bir rasyonel sayı) kuralını sağlayan C(x, y) noktasının koordinatları $\frac{x_2 - x_1}{x_2 - x} = k$ ve $\frac{y_2 - y_1}{y_2 - y} = k$ bağıntılarıyla bulunur.	Dik koordinat sisteminde verilen bir doğru parçasını içten veya dıştan bölen bir noktanın koordinatları bulunurken benzerlik oranlarından yararlanılır.

ANALİTİK İNCELEME

Analitik Düzlemde Çıkarım Yapma ve Temsile Yönelik Yansıtıcı Yazı

Amaç

Bu çalışma; dik koordinat sisteminde uzaklık, oran ve doğru denklemleriyle ilgili problemleri çözerken varsayımlarınızı genellemelere dönüştürme ve koordinat sistemini bir çözüm aracı olarak kullanma becerilerinize yönelik farkındalık oluşturmak amacıyla hazırlanmıştır.

Aşağıdaki soruları, analitik geometriye ilişkin incelemelerinizi ve çözdüğünüz problemleri gözden geçirerek yanıtlayınız.

1. Öğrendiğiniz bu temada dikkatinizi çeken veya önemli bulduğunuz noktaları yazınız.

2. Dik koordinat sisteminde iki nokta arasındaki uzaklığı belirlerken kullandığınız yöntemleri inceleyiniz. Bu yöntemlerden size göre daha etkili olanı gerekçesiyle açıklayınız.

3. Bir doğrunun eğiminin doğrunun grafiksel ve cebirsel gösterimlerini nasıl etkilediğini gerekçeleriyle açıklayınız.

4. İki nokta arasındaki uzaklık, orta nokta ya da eğim kavramlarını kullanarak modelleyebileceğiniz gerçek yaşam durumlarına örnekler veriniz.

Daha fazlası için karekodu okutunuz.



DOĞRUNUN ANALİTİĞİ

BAŞLARKEN

Bu bölümde yer alan etkinlikler, bireysel öğrenme yolculuğunuzda size rehberlik etmek ve öğrenme sürecinizi desteklemek amacıyla hazırlanmıştır. Çalışmalarınızı yürütürken "Hazırlanıyorum", "İlişkilendiriyorum", "Uygulayarak Öğreniyorum", "Değerlendiriyorum", “Yansıtıcı Yazı” ve "Öğrendiklerim" etkinliklerini sırası ile takip etmeniz ve etkinliklerin sonunda yer alan geri bildirimleri inceleyerek bölümleri tamamlamanız beklenmektedir.

Bu çalışma kartında matematiğin günlük hayata olan katkılarına ilişkin çıkarımlarda bulunup aşağıdaki soruları yanıtlayabileceksiniz.

1. Dik koordinat sistemini kullanarak günlük yaşamda karşılaşılan doğrusal ilişkileri modelleyebilirim?
2. Günlük yaşamda karşılaşılan tüm doğrusal ilişkilerin doğası gereği doğruların eğim kurallarına uygun olduğu ileri sürülebilir mi?
3. Bir doğrunun eğim açısını, eğimini ve diğer doğrulara göre konumunu belirleyebilmek için sağlaması gereken ön koşullar nelerdir?
4. Gerçek yaşamda karşılaşılan doğrusal ilişkilerin grafiksel ve cebirsel temsilleri ile eğim ve konum açısından nasıl bir yargıda bulunulabilir?

HAZIRLANIYORUM

Amaç: Bu bölümde ön bilgilerinizi hatırlamanızı ve konuya hazırlıklı hâle gelmenizi amaçlıyoruz.

Aşağıda yer alan ifadeler, bu temada tamamlanması hedeflenen öğrenme çıktısını ele almadan önce sahip olmanız gereken bazı temel becerileri içermektedir. Lütfen her bir ifadeyi dikkatlice okuyunuz.

- Eğer ifadedeki bilgiye hâkim olduğunuzu düşünüyorsanız kutucuğu işaretleyiniz.
- Eğer konuyu henüz tam olarak bilmediğinizi ya da hatırlamadığınızı düşünüyorsanız kutucuğu boş bırakınız.

Bu çalışmanın amacı notla değerlendirilmeyecek olup amacı temaya ne ölçüde hazır olduğunuzu belirlemektir.

SORULAR	ÖN ÖĞRENME KONTROL LİSTESİ	✓
1	Dik koordinat sisteminde verilen noktaları gösterip koordinatlarını yazabilirim.	☐
2	Dik koordinat sisteminde doğruların eğimlerini belirleyebilirim.	☐
3	Dik koordinat sisteminde doğruların birbirlerine göre durumlarını yorumlayabilirim.	☐
4	Benzer nesneler/şekiller arasındaki ilişkileri yorumlayabilirim.	☐
5	Pisagor teoremini tam kare uzunlukları hesaplamak için kullanabilir ve ilgili problemleri çözebilirim.	☐
6	Tales teoremini kullanabilir ve ilgili problemleri çözebilirim.	☐

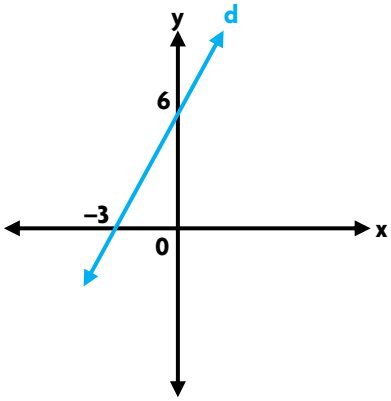
"Ön Öğrenme Kontrol Listesi"ni doldurduktan sonra aşağıda verilen "Kontrol Noktası" sorularını çözünüz ve cevaplarınızı kontrol ediniz.

KONTROL NOKTASI

SORU 1. Dik koordinat sisteminde $A(2x + 1, 3x - 6)$ **noktası x ekseninin üzerinde olduğuna göre x değerini bulunuz.**

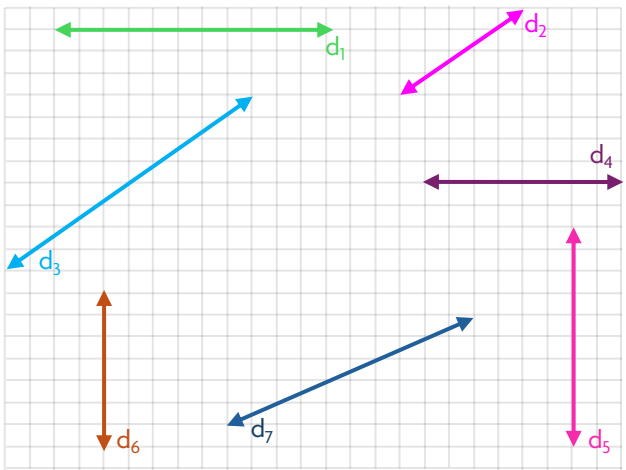
SORU 2. $A(12 - 6x, 3x - 24)$ **noktası dik koordinat sisteminin III. bölgesinde olduğuna göre x in alabileceği tam sayı değerlerinin toplamını bulunuz.**

SORU 3. Dik koordinat sisteminde x eksenini (–3, 0), y eksenini (0, 6) noktasında kesen d doğrusu verilmiştir.



Buna göre d doğrusunun eğimini bulunuz.

SORU 4. Aşağıda birimkareli kâğıt üzerinde çizilmiş 7 farklı doğru verilmiştir.



Buna göre,

I. $d_3 // d_7$

II. $d_1 // d_4$

III. $d_4 // d_6$

VI. $d_6 // d_5$

V. $d_2 // d_7$

VI. $d_1 // d_6$

ifadelerinden hangileri doğrudur?

SORU 5. İrem, bisikletiyle evinden sahile doğru düz bir yolda 6 km ilerlemektedir. Daha sonra sahilden pazara gitmek için bu yola dik olan başka bir yolda 8 km daha yol almaktadır.

Buna göre ev ile pazar arasındaki kuş uçuşu (doğrusal) en kısa mesafenin kaç kilometre olduğunu bulunuz.

SORU 6. Okul bahçesindeki bayrak direğine bayrak asmak isteyen Murat Öğretmen, gerekli ip uzunluğunu belirleyebilmek için öncelikle direğin yüksekliğini hesaplamak istemektedir. Direğin hemen yanında bulunan bir öğrencinin boyu 1,5 m, gölgesinin uzunluğu ise 2 m'dir. Aynı anda yapılan ölçümlerde Murat Öğretmen, bayrak direğinin gölgesinin uzunluğunu 12 m olarak ölçmüştür.

Murat Öğretmen, uzunluğu direğin yüksekliğinin iki katından 3 metre fazla olan bir ip alacaktır.

Buna göre öğretmenin alması gereken ipin uzunluğunun kaç metre olduğunu bulunuz.

GERİ BİLDİRİM

Bu geri bildirim sayesinde kendi cevabınızı kontrol edebilir, hatalarınızı düzelterek öğrenmenizi pekiştirebilirsiniz.

ÇÖZÜM 1.

A(2x + 1, 3x – 6) noktası x ekseninin üzerinde olduğuna göre ordinatı 0'dır. O hâlde

$3x - 6 = 0$

$3x = 6$

$x = 2$ olup bu durumda A noktasının apsisi $2 \cdot 2 + 1 = 5$ olarak bulunur.

ÇÖZÜM 2.

A(12 – 6x, 3x – 24) noktası dik koordinat sisteminin III. bölgesinde olduğuna göre A noktasının apsisi de ordinatı da negatiftir. O halde

$12 - 6x < 0 \qquad 3x - 24 < 0$

$12 < 6x \qquad 3x < 24$

$2 < x \qquad x < 8$

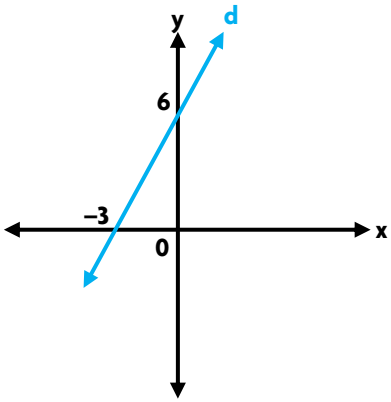
$2 < x < 8$

x in alabileceği tamsayı değerleri 3, 4, 5, 6 ve 7 olup toplamları da 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 25 olur.

Kontrol noktasında verilen 1 ve 2. soruda dik koordinat sisteminde,

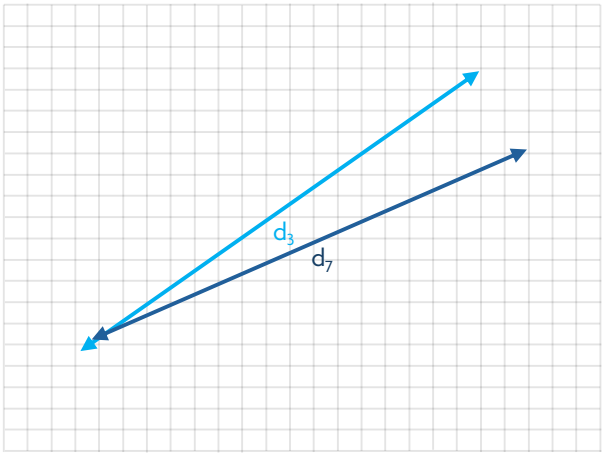
- x ekseni üzerindeki noktaların ordinatı 0'dır.
- y ekseni üzerindeki noktaların apsisi 0'dır.
- I. bölgede apsis ve ordinat pozitiftir.
- II. bölgede apsis negatif, ordinat pozitiftir.
- III. bölgede apsis ve ordinat negatiftir.
- IV. bölgede apsis pozitif, ordinat negatiftir.

ÇÖZÜM 3.

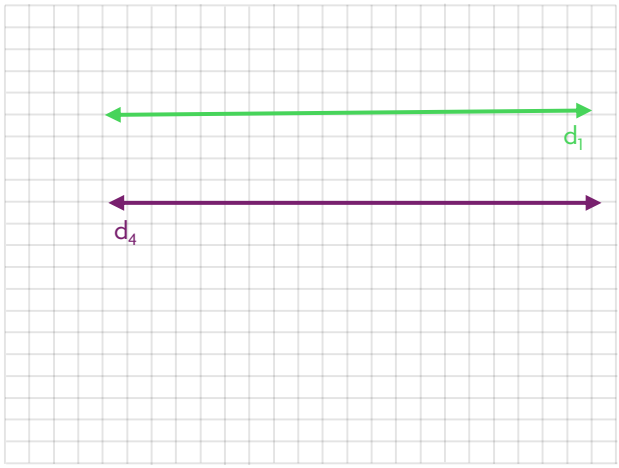


d doğrusunun x eksenini kestiği nokta (–3, 0), y eksenini kestiği nokta (0, 6) olduğuna göre eğim, dikeydeki değişimin yatay-daki değişime oranı olduğundan $m = \frac{6-0}{0-(-3)} = \frac{6}{3} = 2$ olur.

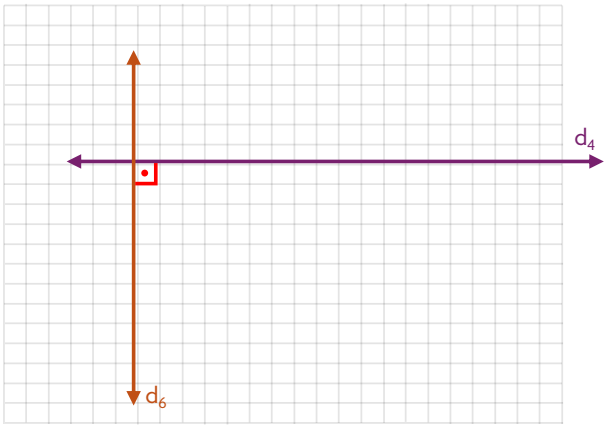
ÇÖZÜM 4. Aynı düzlem üzerinde yer alan bu doğrularla ilgili aşağıdaki değerlendirmeler yapılmıştır.



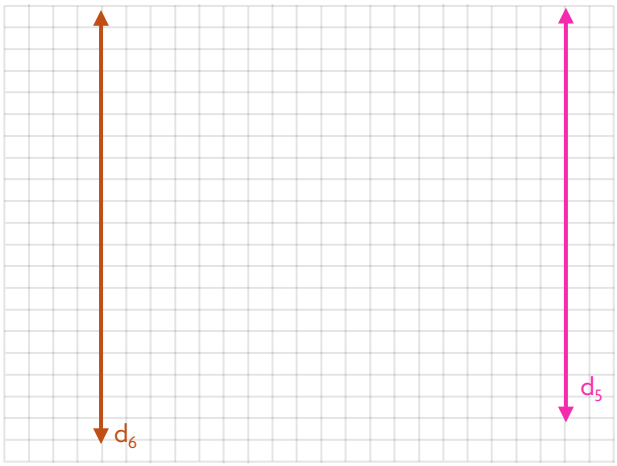
d_3 ve d_7 doğruları bir noktada kesiştiği için paralel değildir.



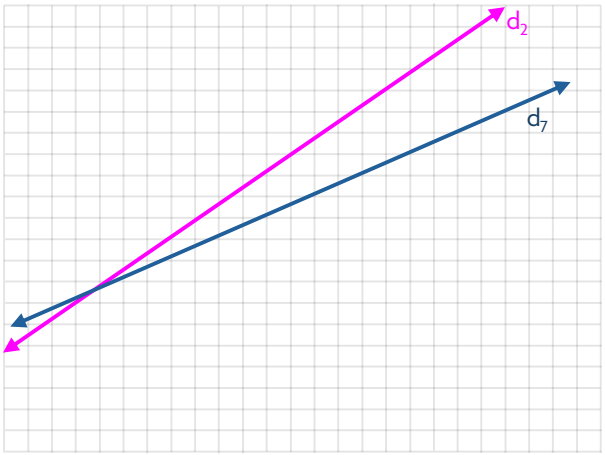
d_1 ve d_4 doğruları kesişmedikleri için paraleldir.



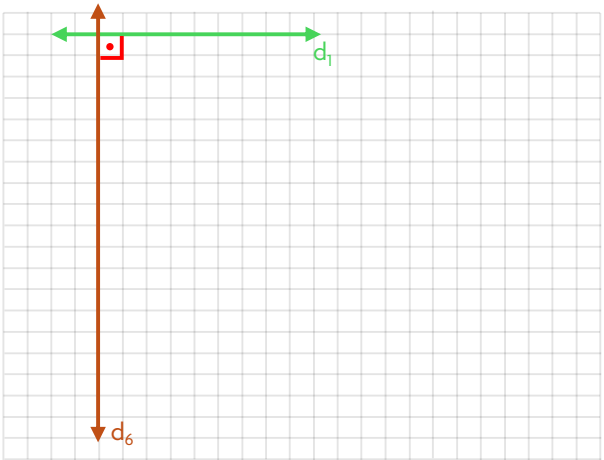
d_4 ve d_6 doğrularının kesim noktasındaki açının ölçüsü 90° olduğu için doğrular birbirine diktir.



d_6 ve d_5 doğruları kesişmedikleri için paraleldir.



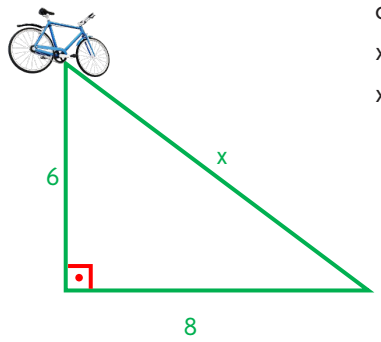
d_2 ve d_7 doğruları bir noktada kesiştiği için paralel değildir.



d_1 ve d_6 doğrularının kesim noktasındaki açının ölçüsü 90° olduğu için doğrular birbirine diktir.

O hâlde II, III, IV ve VI nolu ifadeler doğrudur.

ÇÖZÜM 5.



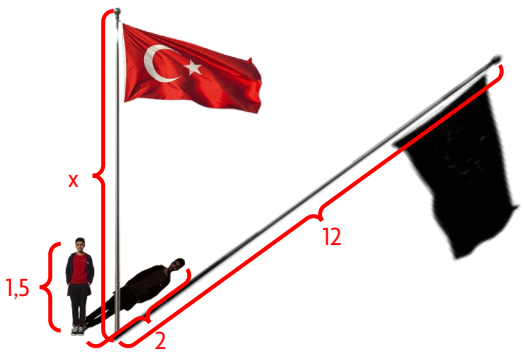
İrem'in gittiği yollar birleştirildiğinde dik üçgen oluşur. Bu nedenle ev ile pazar arasındaki en kısa mesafe Pisagor bağıntısı kullanılarak hesaplanır.

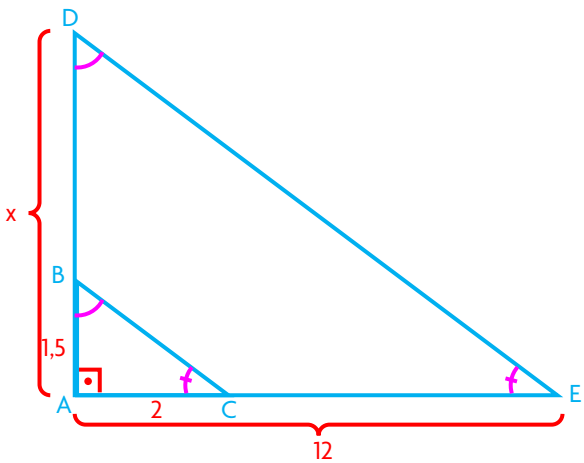
$x^2 = 6^2 + 8^2$

$x^2 = 100 \Rightarrow x = 10$ km olur.

ÇÖZÜM 6.

Okul bahçesinde yan yana yer düzlemine dik duran öğrenci ve bayrak direği için Güneş ışınlarının geliş açısı aynı olduğundan oluşturulacak iki üçgen benzerdir. O hâlde





$$ABC \sim ADE \Rightarrow \frac{|AC|}{|AE|} = \frac{|AB|}{|AD|} = \frac{|BC|}{|DE|} \Rightarrow \frac{2}{12} = \frac{1,5}{|AD|}$$

$$\Rightarrow |AD| \cdot 2 = 12 \cdot 1,5 \Rightarrow |AD| = 9$$

Alınacak ipin uzunluğu $9 \cdot 2 + 3 = 21$ m olur.

İLİŞKİLENDİRİYORUM

Amaç: Bu bölümde yeni öğreneceğiniz konuyu; zihninizde var olan bilgileriniz, yaşantılarınız ve diğer derslerde öğrendiklerinizle ilişkilendirmenizi bekliyoruz.

Verilen metinleri okuyunuz. Günlük yaşamda dik koordinat sistemi ve doğruların eğim özellikleri ile nerelerde karşılaştığınızı gözlemleyiniz.

Bir teknoloji firması, yeni ürettiği akıllı cihazın fiyatı ile talep miktarı arasındaki ilişkiyi analiz etmektedir. Yapılan pazar araştırmaları sonucunda fiyat (x) ile talep miktarı (y) arasındaki doğrusal ilişki şu denklemle ifade edilmiştir:

$y = -2x + 100$

Firma bu ilişkiyi kullanarak şu soruları yöneltmektedir:

- **Bu doğrunun eğimi nedir?**
- **Eğim, ürünün fiyatı arttığında talep edilen miktarın nasıl değiştiğini günlük hayat açısından nasıl açıklar?**

ÖĞRENME YOLCULUĞUNA BAŞLARKEN

Matematiksel düşünme becerileri, dik koordinat sistemi ve doğruların eğim özelliklerini anlamada temel bir rol oynar. Bu beceriler, hem akademik başarıya hem de günlük yaşamda konum belirleme, eğim hesaplama ve grafik yorumlama gibi pratik çözümler üretmeye yardımcı olur.

- Fizikte; konum-zaman grafiklerinde hareketin hızını belirlemek, kuvvetlerin bileşenlerini çözümlemek ve optik ile dalga hareketlerinde doğruların konum ilişkilerini incelemek için kullanılır.
- Mühendislikte; yapıların eğim ve stabilite hesaplamalarında, elektrik devrelerinde akım-gerilim ilişkilerini anlamada ve mekanikte yük-deformasyon grafiklerini yorumlamada önemli bir araçtır.
- Coğrafya ve haritacılıkta; haritalarda konum belirleme, yamaç eğimlerini hesaplama ve GPS ile navigasyon sistemlerinde doğruların konum ilişkilerini çözümlemede kullanılır.
- Ekonomi ve finansta; arz-talep eğrilerinde fiyat değişimlerini yorumlamak, maliyet-fayda analizlerinde kritik karar noktalarını belirlemek ve zaman serilerinde büyüme ya da azalma hızını göstermek için eğim kavramı temel bir göstergedir.
- Bilgisayar bilimleri ve grafik tasarımda; görüntü işleme ve bilgisayar grafiklerinde koordinat sistemleri, yapay zekâ ve veri bilimi uygulamalarında regresyon doğrularının eğimi ve 3D modelleme ile animasyonda doğruların konum ilişkileri analiz edilir.

UYGULAYARAK ÖĞRENİYORUM

Amaç: Bu bölümde bilgilerinizi etkinlikler ve uygulamalarla pekiştirmenizi, öğrenmeyi daha kalıcı hâle getirmenizi amaçlıyoruz.

Adım adım verilen etkinlik basamaklarını uygulayınız. Uygulama, problem çözme ya da etkinlik yönergelerine dikkat ediniz. Çalışmanızı dikkatli ve düzenli bir şekilde yapınız.

BİR DOĞRUNUN EĞİM AÇISI, EĞİMİ VE ÜZERİNDEKİ NOKTALARIN ÖZELLİKLERİ

ÖRNEK

Bir lojistik firmasının geliştirdiği otonom kargo robotu, sabit hızla hareket ederek teslimat yapmaktadır. Robotun eğimi fazla olan rampalarda daha fazla enerji harcadığı, eğimi az olan rampalarda ise daha az enerji harcadığı gözlemlenmiştir.

Teslimat güzergâhı bir bilgisayar programında dik koordinat sisteminde izlenmektedir. Robotun ilk teslimat yapacağı nokta R(7, 24), ikinci teslimat yapacağı nokta P(20, 15) olarak kaydedilmiştir. Robot başlangıç noktasından çıkıp ilk teslimatı yaptıktan sonra firma merkezine geri dönüp daha sonra ikinci teslimatını yapmıştır. Robot teslimatlar süresince doğrusal olarak ilerlemiş ve hızı sabit kalmıştır.

Buna göre robotun I. ve II. teslimatları sırasında yollarda harcadığı enerji miktarlarını karşılaştırarak hangisinin daha fazla olduğunu gerekçesiyle belirtiniz.

ÇÖZÜM

$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$

$$|AB| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

$$|OR| = \sqrt{(7-0)^2 + (24-0)^2} = \sqrt{49 + 576} = 25 \text{ birim}$$

$$|OP| = \sqrt{(20-0)^2 + (15-0)^2} = \sqrt{400 + 225} = 25 \text{ birim}$$

Rampaların uzunlukları eşit olduğundan robotun enerji tüketimi için rampaların eğimlerini karşılaştırmak yeterlidir.

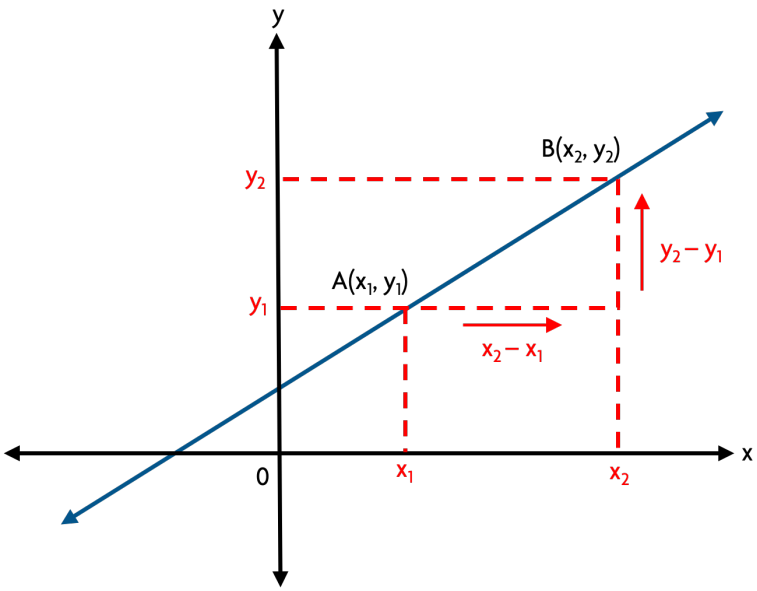
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow$$

[OR] ile temsil edilen yolun eğimi $\frac{24-0}{7-0} = \frac{24}{7}$

[OP] ile temsil edilen yolun eğimi $\frac{15-0}{20-0} = \frac{3}{4}$

[OR] ile temsil edilen yolun eğimi, [OP] ile temsil edilen yolun eğiminden büyük olduğundan robotun [OR] olarak adlandırılan kısmında harcayacağı enerji miktarı daha fazladır.

Eğim, bir doğru üzerindeki iki nokta arasında her bir birim yatay değişimde (x ekseni boyunca) doğru üzerinde ne kadar düşey değişim (y ekseni boyunca) olduğunu gösteren bir değerdir.



Dik koordinat sisteminde $A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ noktalarından geçen doğrunun eğimi m olmak üzere

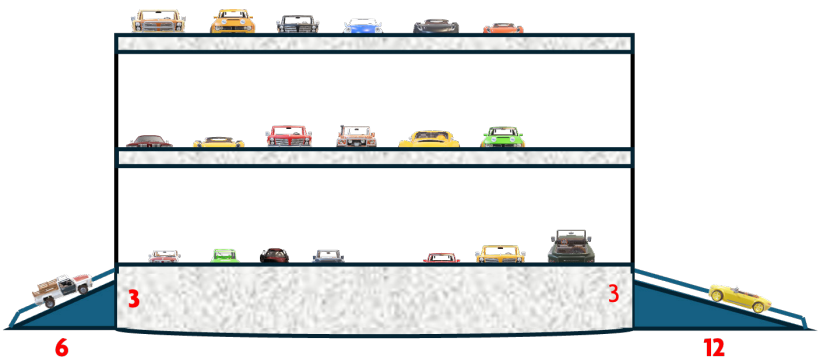
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - y_1}$$

SIRA SİZDE 1.

Bir alışveriş merkezinin otoparkına çıkan iki farklı rampa vardır.

Her iki rampanın yüksekliği 3 metre olup

- Birinci rampanın yatay uzunluğu 12 metre
- İkinci rampanın yatay uzunluğu 6 metredir.



Buna göre aşağıdaki soruları cevaplayınız

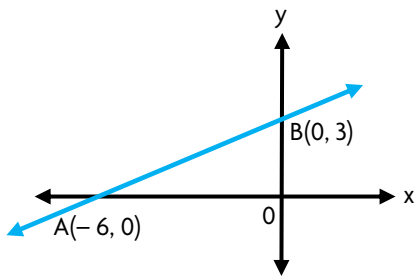
- **Her iki rampanın eğimini bulunuz.**
- **Hangi rampanın daha dik olduğunu karşılaştırınız.**
- **Eğimleri karşılaştırarak günlük yaşamda hangi rampanın tekerlekli sandalye kullanıcıları için daha uygun olduğunu açıklayınız.**

BİR DOĞRUNUN EĞİM AÇISI, EĞİMİ VE ÜZERİNDEKİ NOKTALARIN ÖZELLİKLERİ

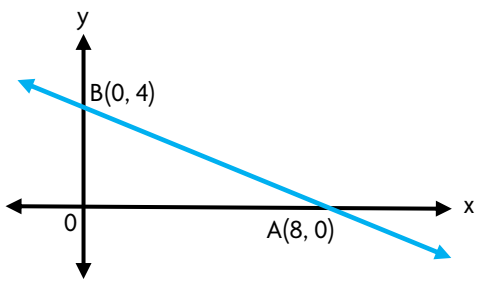
ÖRNEK

Aşağıda dik koordinat sisteminde grafikleri verilen doğruların eğimlerini hesaplayınız. Doğruların x ekseni ile yaptığı açı ve doğru grafikleri ile eğimleri arasındaki ilişkiyi yorumlayınız.

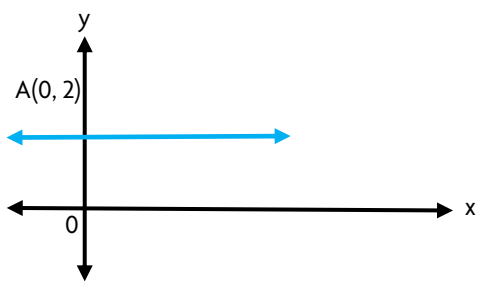
a)



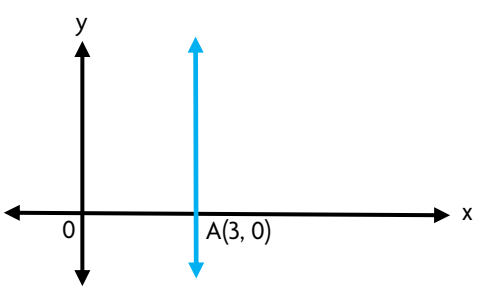
b)



c)

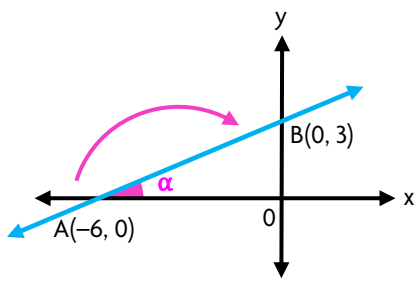


d)



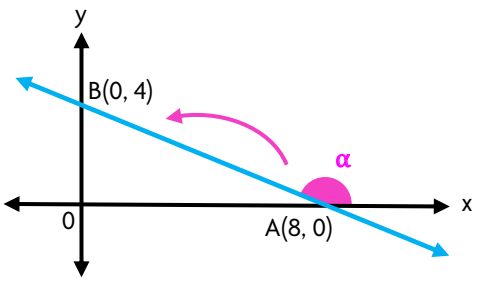
ÇÖZÜM

a)



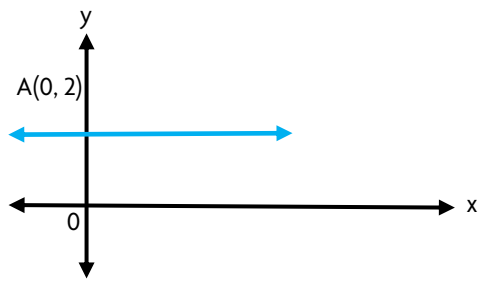
$\alpha < 90° \Rightarrow m = \frac{3-0}{0-(-6)} \Rightarrow m = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} > 0$

b)



$\alpha > 90° \Rightarrow m = \frac{4-0}{0-8} \Rightarrow m = \frac{4}{-8} = -\frac{1}{2}$

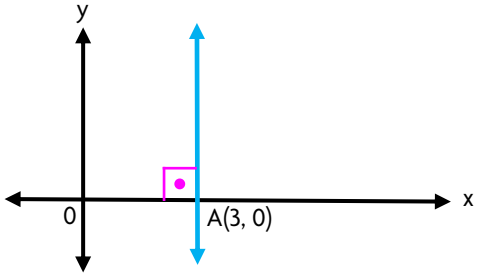
c)



$\alpha = 0° \Rightarrow m = 0$

doğrunun grafiği x eksenine paraleldir.

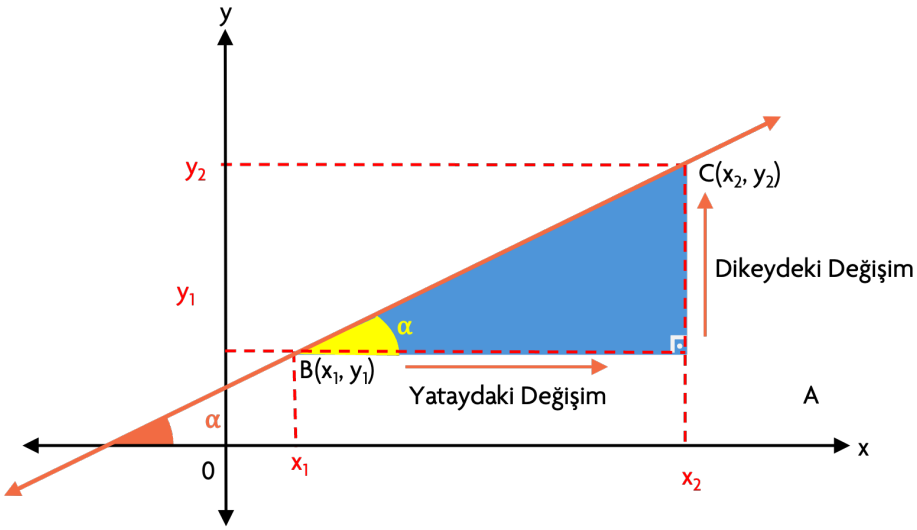
d)



$\alpha = 90° \Rightarrow$ m tanımsızdır.

doğrunun grafiği x eksenine diktir.

Doğrunun x ekseniyle pozitif yönde (saatin dönme yönünün tersi yönde) yaptığı açı doğrunun eğim açısı olarak tanımlanır.



d doğrusunun x ekseni ile yaptığı açı α olmak üzere

$\alpha < 90° \Rightarrow m > 0$

$\alpha > 90° \Rightarrow m < 0$

$\alpha = 0° \Rightarrow m = 0$

$\alpha = 90° \Rightarrow$ m tanımsızdır.

SIRA SİZDE 2.

Rüzgârlı havalarda futbolcular, topa vururken vuruş açılarını rüzgârın etkisini dikkate alarak ayarlamak zorundadır. Aşağıda, futbolcunun topa vurduğu açı ile rüzgârın esme şiddeti arasındaki ilişkiyi gösteren bir görsel verilmiştir.

Rüzgâr şiddeti arttıkça topun yön değiştirme olasılığı artmakta, bu nedenle futbolcunun vuruş açısını buna göre değiştirmesi gerekmektedir.

Araştırmalara göre rüzgâr şiddeti 0 km/saat iken ideal vuruş açısı 25° dir. Rüzgâr şiddetindeki her 1 km/saatlik artış için vuruş açısı 0,6° artırılmalıdır.



Buna göre

a) Rüzgâr şiddeti x (km/saat) ile vuruş açısının ölçüsü y (derece) arasındaki doğrusal ilişkiyi temsil eden denklemi yazınız.

b) Bu ilişkiyi temsil eden denkleme ait grafiği dik koordinat sistemi üzerinde gösteriniz.

c) Rüzgâr şiddeti 25 km/saat olduğunda futbolcunun ideal vuruş açısını hesaplayınız.

d) Rüzgâr şiddeti 10 km/saat ile 30 km/saat arasında değiştiğinde futbolcunun vuruş açısının hangi değerler arasında olduğunu bulunuz.

EĞİMİ VE BİR NOKTASI BİLİNEN DOĞRU DENKLEMİ

ÖRNEK

Bir şehirde yeni yapılacak bisiklet yolunun yüksekliği, başlangıç noktasından itibaren doğrusal olarak artmaktadır. Yol üzerinde bulunan nokta A(120, 45) olarak ölçülmüştür. Mühendisler, yolun yatayda her 1 birim ilerleyişine karşılık düşeyde 0,75 birim yükseldiğini belirlemiştir.

Bu bilgilere göre

a) Bisiklet yolunun dik koordinat sistemindeki doğrusal modelini temsil eden doğrunun denklemini yazınız.

b) Bisiklet yolunun dik koordinat sistemindeki doğrusal modelinin y eksenini kestiği noktanın koordinatlarını ve eğimi ile y eksenini kestiği noktayı bulunuz.

c) Bisiklet yolunun dik koordinat sistemindeki doğrusal modelinin y eksenini kestiği noktanın koordinatları ve doğrunun eğimi ile doğru denklemi arasında nasıl bir ilişki vardır açıklayınız.

ÇÖZÜM

a) Doğrusal yolun dikeydeki değişimi 0,75 birim iken yataydaki değişimi 1 birim olduğundan

$m = \frac{0,75}{1} = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$

$A(120, 45)$

} eğimi ve geçtiği bir noktası bilinen doğrunun denklemi

$y - 45 = \frac{3}{4} \cdot (x - 120) \Rightarrow 4y - 180 = 3x - 360 \Rightarrow 4y - 3x + 180 = 0$ bulunur.

b) Doğrunun y eksenini kestiği noktanın apsisi 0'dır. O hâlde

$x = 0 \Rightarrow 4y - 3 \cdot 0 + 180 = 0$

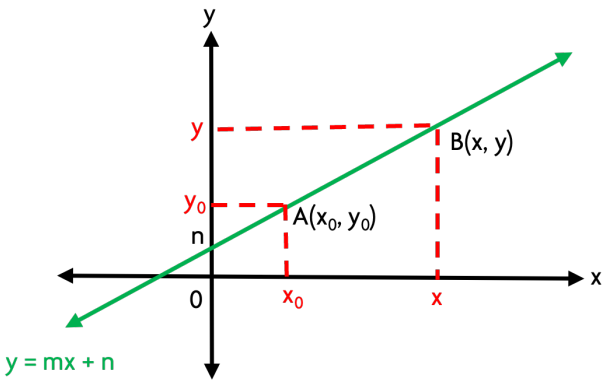
$4y = -180$

$y = -45$ bulunur.

$4y - 3x + 180 = 0 \Rightarrow 4y = 3x - 180 \Rightarrow y = \underbrace{\frac{3}{4}}x - 45$ bulunur.

doğrunun eğimi — doğrunun y eksenini kestiği nokta (0, –45)

c) $y = mx + n$ şeklindeki doğru denkleminde m, doğrunun eğimine; n, doğrunun y eksenini kestiği noktanın ordinatına eşittir.



- Eğimi m olan ve geçtiği $A(x_0, y_0)$ noktası bilinen bir doğrunun denklemi

$m = \frac{y - y_0}{x - x_0} \Rightarrow y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$ olarak ifade edilir.

- Eğimi m ve y eksenini kestiği noktanın ordinatı n olan bir doğrunun denklemi

$y = mx + n$ olarak ifade edilir.

- Bir noktanın koordinatları, üzerinde bulunduğu doğrunun denklemini sağlar.

SIRA SİZDE 3.

Bir iletişim mühendisi, bir telsiz kulesinden çıkan sinyalin belirli bir doğrultuda doğrusal olarak ilerlediğini gözlemlemektedir. Sinyalin geçtiği bilinen bir nokta A(–10, 8) dir. Yapılan ölçümlerde sinyalin yatayda her 1 birim ilerlediğinde düşeyde 2 birim azaldığı belirlenmiştir.

Bu sinyalin izlediği doğrultuyu temsil eden doğrunun denklemini bulunuz.

DOĞRULARIN BİRBİRİNE GÖRE DURUMLARI VE DİK KESİŞEN DOĞRULAR

ÖRNEK

Bir şehirde iki yeni cadde tasarlanmaktadır.

- Birinci cadde, dik koordinat sisteminde y = 2x + 5 doğrusu boyunca ilerleyecektir.
- İkinci cadde ise y = 2x – 3 doğrusu boyunca planlanmıştır.

a) Bu iki caddenin birbirlerine göre durumunu (paralel, kesişen veya dik) belirleyiniz.

b) Bu caddelere dik ve A(4, 5) noktasından geçen doğrunun denklemini bulunuz.

ÇÖZÜM

a) y = mx + n şeklindeki doğrunun eğimi m olduğuna göre y = 2x + 5 doğrusunun eğimi 2'dir. O hâlde

y = 2x – 3 doğrusunun eğimi de 2 olduğundan doğruların eğimleri eşittir. Eğimleri eşit olan doğrular birbirine paralel olduğundan iki cadde birbirine paraleldir.

b) Eğimleri 2 olan caddelere dik olan caddelerin eğimi birbirine dik doğruların eğimleri çarpımı –1 olduğundan $m \cdot 2 = -1$ olur. Buradan da $m = -\frac{1}{2}$ olarak bulunur. Eğimi $-\frac{1}{2}$ olan ve A(4, 5) noktasından geçen doğrunun denklemi $y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$ olduğundan $y - 5 = -\frac{1}{2} \cdot (x - 4)$ den $2y - 10 = -x + 4$, buradan da $2y + x - 14 = 0$ olarak bulunur.

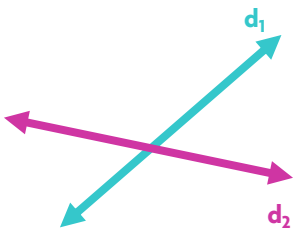
PARALEL DOĞRULAR

Eğim açılarının ölçüleri eşit olan farklı iki doğru paraleldir.



KESİŞEN DOĞRULAR

Eğim açılarının ölçüleri farklı olan iki doğru kesişir.

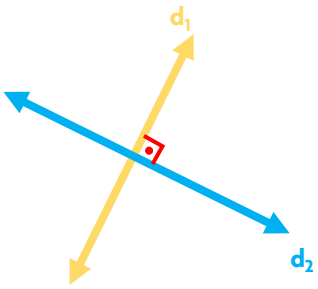


ÇAKIŞIK DOĞRULAR

Aynı iki noktadan geçen doğrular çakışıktır.



DİK DOĞRULAR

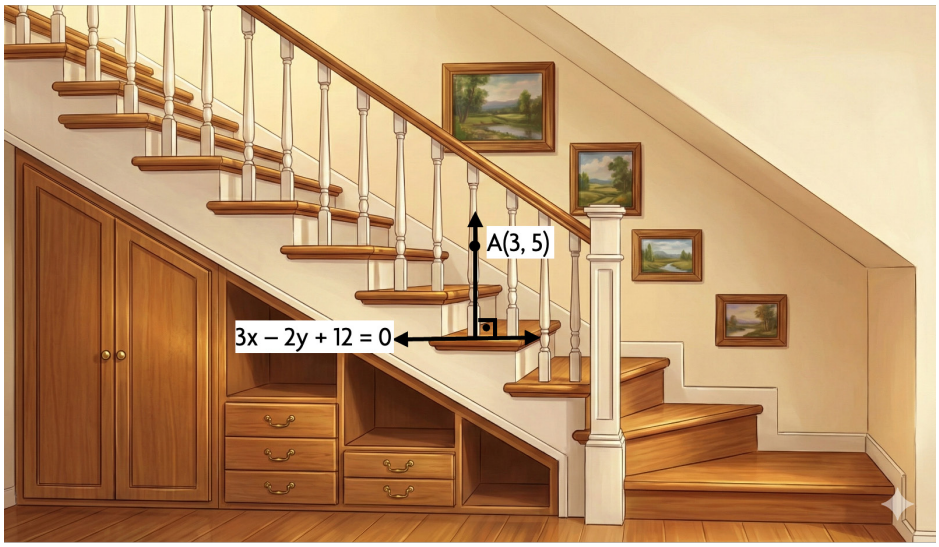


Dik kesişen doğruların eğimlerinin çarpımı –1'dir.

SIRA SİZDE 4.

Dik koordinat sisteminde modellenen bir mimari çizimde bir merdiven basamağı, $3x - 2y + 12 = 0$ doğrusu üzerinde yer almaktadır.

Bu basamağa dik konumda monte edilen bir tırabzan demirinin taşıyıcı doğrusunun ise A(3, 5) noktasından geçtiği bilinmektedir.



Buna göre tırabzan demirinin taşıyıcı doğrusunun denklemini bulunuz.

İKİ NOKTASI BİLİNEN DOĞRU DENKLEMİ

ÖRNEK

Bir çiftçi, bir pınar gözünden tarlasına doğrusal yolla akan iki sulama kanalı açmak istemektedir.

- Birinci kanal, dik koordinat sisteminde A(1, 1) ve B(–3, 7) noktalarından geçmektedir.
- İkinci kanal ise C(4, 0) ve D(5, 2) noktalarından geçmektedir.

Buna göre pınar gözünün koordinatlarını bulunuz.

ÇÖZÜM

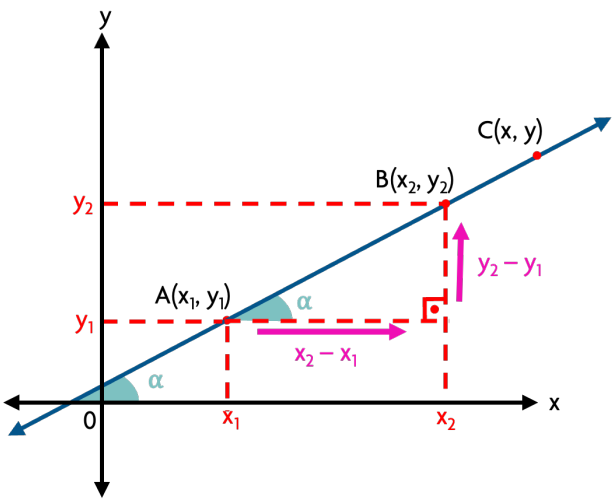
$$\frac{7-1}{-3-1}=\frac{y-1}{x-1} \Rightarrow \frac{\overset{3}{\cancel{6}}}{\underset{-2}{\cancel{-4}}}=\frac{y-1}{x-1} \Rightarrow 3x-3=-2y+2 \Rightarrow 3x+2y=5$$

$$\frac{2-0}{5-4}=\frac{y-2}{x-5} \Rightarrow \frac{2}{1}=\frac{y-2}{x-5} \Rightarrow 2x-10=y-2 \Rightarrow 2x-y=8$$

$$\begin{array}{r} 3x+2y=5 \\ +\ 2x-y=8 \ \backslash \cdot 2 \\ \hline 7x=21 \\ x=3 \end{array}$$

bulunur.

$3\cdot 3+2y=5$
$9+2y=5$
$2y=-4$
$y=-2$ bulunur.



A ve B noktalarından geçen doğrunun denklemi

$$\left.\begin{array}{l}\tan\alpha=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=m \\ m=\dfrac{y-y_1}{x-x_1}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=m=\frac{y-y_1}{x-x_1}$$

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{x-x_1}$$

formülüyle bulunur.

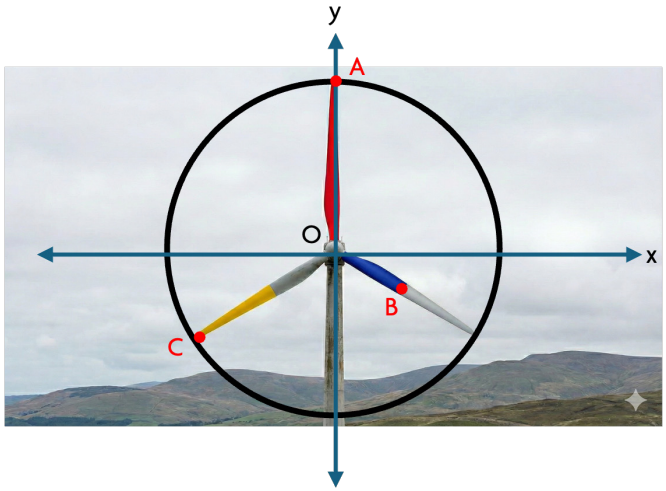
$y = mx + n$ biçiminde ifade edilen doğrunun denklemi; bu denklemde A ve B noktalarının koordinatları kullanılarak, oluşturulan

$$\left.\begin{array}{l}y_1=mx_1+n \\ y_2=mx_2+n\end{array}\right\}$$

iki bilinmeyenli denklem sisteminin çözümü yapılarak bulunur.

SIRA SİZDE 5.

Bir rüzgâr türbininin üç kanadı vardır ve türbinin merkezi orijindedir. Kanatlar eşit aralıklarla yerleştirilmiştir ve türbin saatin dönme yönünde dönmektedir. Türbinin kanatlarının her birinin uzunluğu 60 metredir. Türbinin kanatlarından biri kırmızı, diğer ikisinin yarısı mavi ve sarıya boyanmıştır. Türbinin dönüşüyle birlikte kanatlar da merkez etrafında dönmektedir ve türbinin harekete başladığı anda kırmızı boyalı kanat y ekseni üzerindedir.



1. Buna göre başlangıç anında

a) Kırmızı boyalı kanat üzerindeki A noktası ile mavi boyalı kanat üzerindeki B noktasından geçen doğrunun denklemini bulunuz.

b) Sarı boyalı kanat üzerindeki C noktası ile mavi boyalı kanat üzerindeki B noktasından geçen doğrunun denklemini bulunuz.

c) Kırmızı boyalı kanat üzerindeki A noktası ile sarı boyalı kanat üzerindeki C noktasından geçen doğrunun denklemini bulunuz.

2. Aşağıdaki tablo, türbinin kırmızı kanadına ait dönme açısı ve kırmızı boyalı kanat üzerindeki A noktası ile mavi boyalı kanat üzerindeki B noktasından geçen doğrunun eğiminin işaretini gösteren iki sütundan oluşmaktadır.

Buna göre tabloda boş bırakılan kısımları uygun şekilde doldurunuz.

Türbinin Dönme Açısı (°)	Doğrunun Eğim İşareti
90	
150	
270	
330	

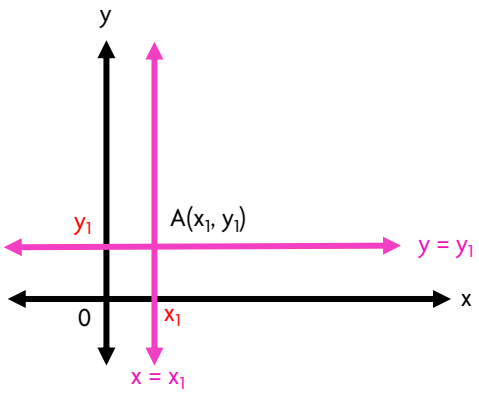
ÖRNEK

Dik koordinat sisteminde A(–4, 7) noktasından geçen ve x eksenine dik olan bir doğru çizilmektedir.

ÇÖZÜM

Bu doğrunun denklemini yazınız.

$A(x_1, y_1)$ noktasından geçen ve x eksenine dik olan doğrunun denklemi $x = x_1$ şeklindedir. O hâlde A(–4, 7) noktasından geçen ve x eksenine dik olan doğrunun denklemi x = –4 olur.



Dik koordinat sisteminde $A(x_1, y_1)$ noktasından geçen ve x eksenine dik olan doğrunun denklemi

$x = x_1$, y eksenine dik olan doğrunun denklemi

$y = y_1$ biçiminde yazılır.

SIRA SİZDE 6

Bir belediye, bir yürüyüş yoluna sokak lambaları yerleştirmektedir. Dik koordinat sisteminde x eksenine paralel bir doğru ile temsil edilen yol üzerindeki B(–3, 7) noktasına bir lamba dikilecektir. Lamba direği, yolun y eksenine dik olacak şekilde konumlandırılacaktır.

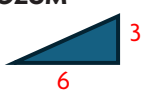
Buna göre lamba direğini temsil eden doğrunun denklemini yazınız.

GERİ BİLDİRİM

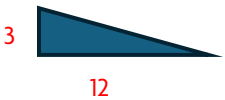
Bu geri bildirim sayesinde kendi cevabınızı kontrol edebilir, hatalarınızı düzelterek öğrenmenizi pekiştirebilirsiniz.

SIRA SİZDE 1.

ÇÖZÜM

a) 

rampasının eğimi $m = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$,



rampasının eğimi $m = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$ bulunur.

b) Soldaki rampanın eğimi $\frac{1}{2}$, sağdaki rampanın eğimi $\frac{1}{4}$ olduğundan soldaki rampa, sağdaki rampadan daha diktir.

c) Sağdaki rampanın eğimi, soldaki rampanın eğiminden küçük olduğundan sağdaki rampa tekerlekli sandalyeler için daha uygundur.

SIRA SİZDE 2.

ÇÖZÜM

a) Bu doğrusal ilişkiyi şöyle ifade edebiliriz:

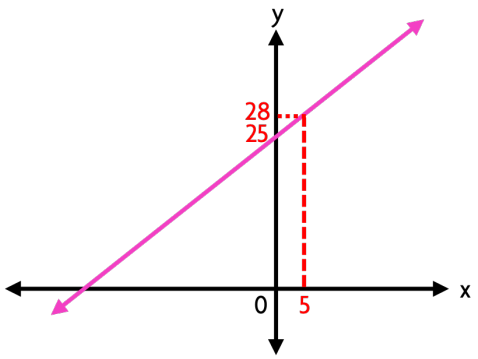
Vuruş açısının ölçüsü, y rüzgâr hızı x olmak üzere rüzgar hızındaki her 1 km/sa.lik artış için vuruş açısının ölçüsünde 0,6° artış olduğundan doğrunun eğimi $m = \frac{0,6}{1} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ olur. Rüzgâr hızı x = 0 km/sa. olduğunda vuruş açısının ölçüsü y = 25° olduğundan doğru denklemi $y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$ den $y - 25 = \frac{3}{5} \cdot (x - 0)$, buradan da $y = \frac{3}{5}x + 25$ olarak bulunur.

b) $y = \frac{3}{5}x + 25$ doğrusunun grafiğini çizmek için geçtiği iki nokta gerekli dolayısıyla öncelikle bu iki noktayı bulalım.

$x = 0 \Rightarrow y = \frac{3}{5} \cdot 0 + 25 \Rightarrow y = 25$

$x = 5 \Rightarrow y = \frac{3}{5} \cdot 5 + 25 \Rightarrow y = 28$

O hâlde doğrumuz (0, 25) ve (5, 28) noktalarından geçmektedir. Bu noktalardan geçen doğrunun grafiği yanda verilmiştir.



c) $x = 25 \Rightarrow y = \frac{3}{5} \cdot 25 + 25 \Rightarrow y = 3 \cdot 5 + 25 \Rightarrow y = 40^\circ$ bulunur.

d) Rüzgâr hızı 10 < x < 30 olduğunda, rüzgâr açısının ölçüsü ile vuruş açısının ölçüsü arasındaki ilişki $y = \frac{3}{5}x + 25$ olduğundan

$10 < x < 30 \setminus \cdot \frac{3}{5}$

$6 < \frac{3}{5} \cdot x < 18$

eşitsizliğin her tarafına 25 eklersek

$31 < \frac{3}{5} \cdot x + 25 < 43 \Rightarrow 31 < y < 43$ olur.

SIRA SİZDE 3.

ÇÖZÜM

Bir doğrunun eğimi, dikeydeki değişimin yataydaki değişime oranı olduğundan aradığımız doğrunun eğimi $m = \frac{2}{1} \Rightarrow 2$ olur. A(–10, 8) noktasından geçen ve eğimi m = 2 olan doğrunun denklemi

$y - 8 = 2 \cdot (x - (-10))$

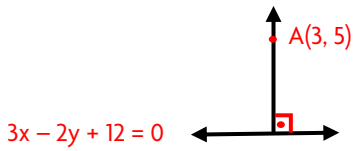
$y = 2x + 20 + 8$

$y = 2x + 28$ olarak bulunur.

SIRA SİZDE 4.

ÇÖZÜM

Merdiven basamağının üzerinde yer alan 3x – 2y + 12 = 0 "dik doğruların eğimleri çarpımı –1" konumda monte edilen bir tırabzan demirinin taşıyıcı doğrusunun ise A(3, 5) noktasından geçtiğine göre öncelikle doğrunun eğimini bulup eğimi ve bir noktası bilinen doğru denklemi yardımıyla aradığımız doğrunun denklemini bulabiliriz.



3x – 2y + 12 = 0 doğrusuna dik doğrunun eğimi için dik doğruların eğimleri çarpımı –1'dir bilgisi kullanılarak

3x – 2y + 12 = 0 doğrusunun eğiminin doğru denklemi düzenlenirse ve

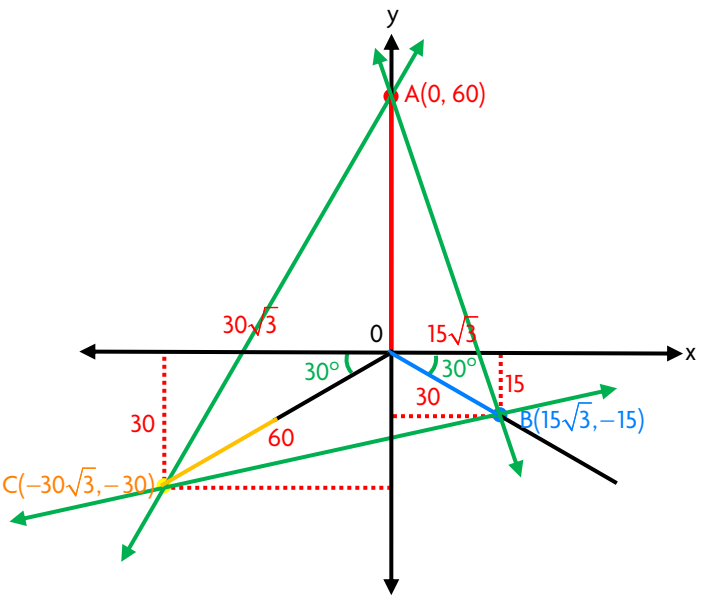
2y = 3x + 12 den eşitliğin her iki tarafı 2'ye bölünürse $y=\frac{3}{2}x+6$ olur. Buradan da doğrunun eğimi $m=\frac{3}{2}$ olarak bulunur.

İki doğru birbirine dik olduğundan tırabzan demirinin taşıyıcı doğrusunun eğimi $-\frac{2}{3}$ olur.

Eğimi $-\frac{2}{3}$ olan ve A(3, 5) noktasından geçen doğrunun denklemi $y-5=-\frac{2}{3}\cdot(x-3) \Rightarrow 3y-15=-2x+6 \Rightarrow 3y+2x-21=0$ bulunur.

SIRA SİZDE 5.

ÇÖZÜM



Rüzgâr türbininin kanatları eşit aralıkla yerleştirildiği için aralarındaki açının ölçüsü 120° dir. Kanatların boyu 60 m olduğuna göre bir kısmı maviye boyalı kanadın mavi boyalı kısmının uzunluğu 30 m, bir kısmı sarıya boyalı olan kanadın sarı boyalı kısmının uzunluğu da 30 m olacaktır. Kırmızı boyalı kanadın uç noktası A, mavi boyalı kısmın uç noktası B ve sarı boyalı kısmın uç noktası C olmak üzere öncelikle bu noktaların koordinatları bulunmalıdır. Bir kısmı maviye boyalı kanadın x ekseni ile yaptığı açının ölçüsü 30° ve bir kısmı sarı boyalı kanadın da x ekseniyle yaptığı açının ölçüsü 30° olduğuna göre 30°-60°-90° özel dik üçgeninden B noktası B($15\sqrt{3}$, –15) ve C noktası C($-30\sqrt{3}$, –30) olur.

HATIRLATMA

30°-60°-90° dik üçgeninde

30° → a

60° → $a\sqrt{3}$

90° → 2a

a) İki noktası bilinen doğru denklemi $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{x - x_1}$ şeklinde bulunur. O halde A(0, 60) ve B($15\sqrt{3}$, –15) noktalarından geçen doğru denklemi $\frac{-15 - 60}{15\sqrt{3} - 0} = \frac{y - 60}{x - 0}$ den $\frac{-75}{15\sqrt{3}} = \frac{y - 60}{x}$, buradan da $-5x = \sqrt{3}y - 60\sqrt{3}$ olur. Denklem düzenlenirse $\sqrt{3}y + 5x - 60\sqrt{3} = 0$ denklemi elde edilir.

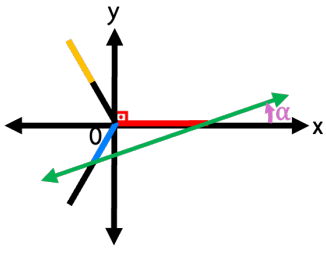
b) B($15\sqrt{3}$, –15) veC($-30\sqrt{3}$, –30) noktalarından geçen doğru denklemi $\frac{-15 - (-30)}{15\sqrt{3} - (-30\sqrt{3})} = \frac{y - (-30)}{x - (-30\sqrt{3})}$ den $\frac{15}{45\sqrt{3}} = \frac{y + 30}{x + 30\sqrt{3}}$,

buradan da $x + 30\sqrt{3} = 3\sqrt{3}y + 90\sqrt{3}$ olur. Denklemi düzenlersek $3\sqrt{3}y - x + 60\sqrt{3} = 0$ denklemi elde edilir.

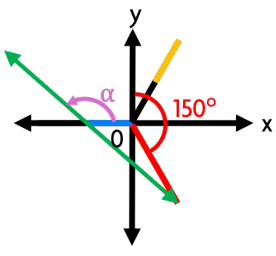
c) A(0, 60) ve C($-30\sqrt{3}$, –30) noktalarından geçen doğru denklemi $\frac{-30 - 60}{-30\sqrt{3} - 0} = \frac{y - 60}{x - 0}$ den $\frac{-90}{-30\sqrt{3}} = \frac{y - 60}{x}$, buradan da

$3x = \sqrt{3}y - 60\sqrt{3}$ olur. Denklem düzenlenirse $\sqrt{3}y - 3x - 60\sqrt{3} = 0$ denklemi elde edilir.

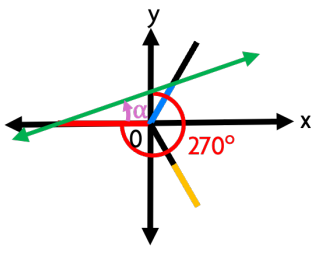
Türbinin Dönme Açısı (°)	Doğrunun Eğim İşareti
90	+
150	–
270	+
330	–



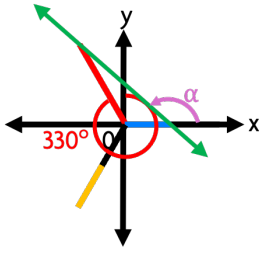
$\alpha < 90°$



$\alpha > 90°$



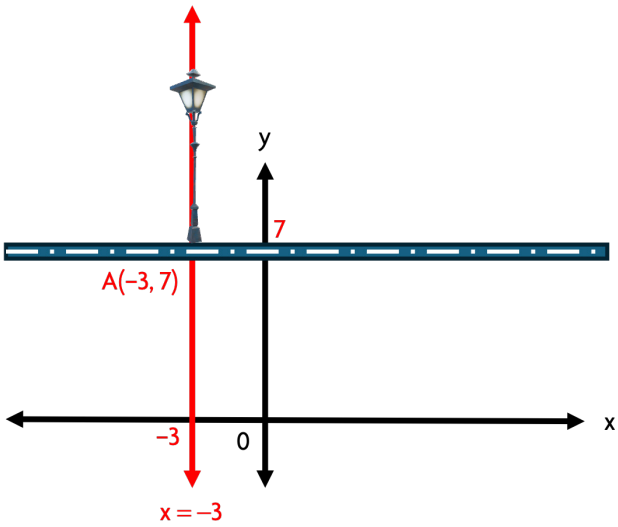
$\alpha < 90°$



$\alpha > 90°$

SIRA SİZDE 6.

ÇÖZÜM



x eksenine dik ve A(–3, 7) noktasından geçen doğrunun denklemi x = –3'tür.

DEĞERLENDİRİYORUM

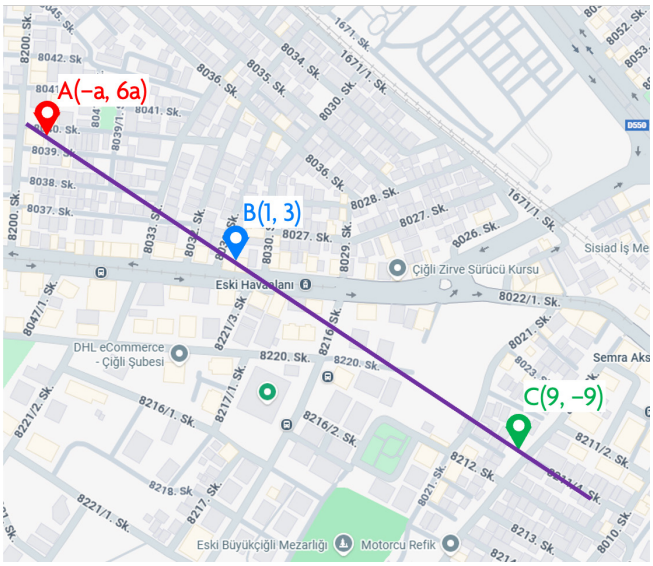
Amaç: Bu bölümde bilgilerinizi etkinlikler ve uygulamalarla pekiştirmenizi, öğrenmeyi daha kalıcı hâle getirmenizi amaçlıyoruz.

Deney, problem ya da etkinliklerde verilen adımları uygulayınız. Çalışmanızı dikkatli ve düzenli bir şekilde yapınız.

Bu geri bildirimler sayesinde kendi cevaplarınızı kontrol edebilir, hatalarınızı düzelterek öğrenmenizi pekiştirebilirsiniz.

SORULAR

1. Aşağıdaki görselde kuş uçuşu aynı doğrultuda yer alan ve konumları A(−a, 6a), B(1, 3) ve C(9, −9) olan üç nokta işaretlenmiştir.



Buna göre A noktasının apsis ve ordinatının toplamını bulunuz.

2. Doğrusal bir yolda ilerleyen bir araç, deniz seviyesinden 300 metre yükseklikte bulunan bir noktada %8 eğim tabelasını görmüştür.



Bu hareket, gerçek uzunlukların 1/100 ölçeği kullanılarak dik koordinat sisteminde modellenmiştir. Aracın eğim tabelasını gördüğü nokta, modelde A(1, 3) noktasına karşılık gelmektedir. Araç, bu noktadan itibaren aynı eğimle yol boyunca bir miktar ilerlediğinde bulunduğu noktanın gerçek yüksekliği 16 metre artmıştır.

Buna göre aracın ulaştığı son noktanın koordinatları toplamını bulunuz.

3. Aşağıdaki üçgen şeklindeki parkın köşe koordinatları A(2, 3), B(4, 3) ve C(2, 2) dir.



Parkın içinde C köşesinden AB kenarının orta noktasına uzanan bir yürüyüş yolu vardır.

Bu yürüyüş yoluna ait doğrunun denklemini bulunuz.

4. Dik koordinat sisteminde A(3, 5) ve B(0, 2) noktaları ile temsil edilen noktalardan geçen bir yol ax + 2y+ 4= 0 doğrusu ile temsil edilen yola diktir.



Buna göre bu yolların kesim noktasının koordinatlarını bulunuz.

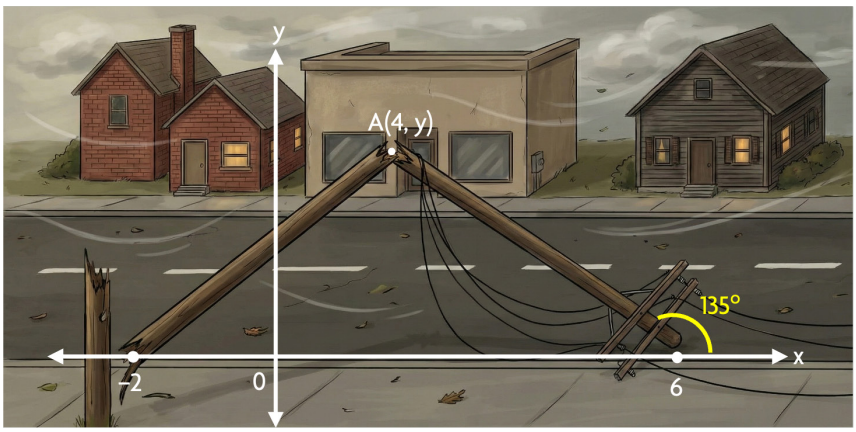
5. Aşağıdaki görselde birbirine paralel ve doğrusal iki tel üzerinde hareket eden iki teleferik verilmiştir.



Dik koordinat sisteminde A(2, 3) ve B(−1, 4) ile temsil edilen noktalardan geçen bir tel üzerinde iniş yönünde hareket eden teleferikler çıkış yönündeki teli $-x + ay + 3 = 0$ doğrusu üzerindedir.

Çıkış yönündeki teleferiğin indibindi yapılan noktası C(x, −1) olduğuna göre a + x toplamı toplamını bulunuz.

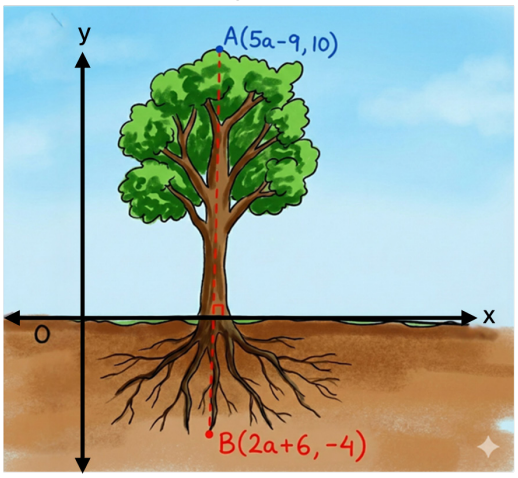
6. Rüzgâr nedeniyle kırılan bir elektrik direğine ait görsel aşağıda verilmiştir.



Buna göre elektrik direğinin kırılan kısımlarının toplam uzunluğunun kaç birim olduğunu bulunuz.

7. Aşağıda dik koordinat düzleminde bir ağaç modeli verilmiştir.

Bu modelde dal ucunu gösteren nokta A(5a – 9, 10), kök ucunu gösteren nokta B(2a + 6, –4) ile temsil edilmektedir.



A ve B noktalarından geçen doğru x eksenine dik olduğuna göre bu doğrunun y eksenine uzaklığının kaç birim olduğunu bulunuz.

8. Aşağıdaki görselde ip atlayan Ayşe, Buket ve Ceyda adlı üç arkadaş yer almakta olup Ceyda, Ayşe ile Buket'in tam ortasında bulunmaktadır.



Ayşe A(–2, 1), Buket B(4, 5) noktasında durduğuna göre Ceyda'nın bulunduğu noktadan geçen yer düzlemine dik olan doğrunun denklemini bulunuz.

GERİ BİLDİRİM

Bu geri bildirim sayesinde kendi cevabınızı kontrol edebilir, hatalarınızı düzelterek öğrenmenizi pekiştirebilirsiniz.

ÇÖZÜM 1.

A, B ve C noktaları doğrusal olduğundan AB doğrusunun eğimi ile BC doğrusunun eğimi birbirine eşittir. İki noktası bilinen doğrunun eğimi $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ formülü ile bulunmaktadır. O hâlde

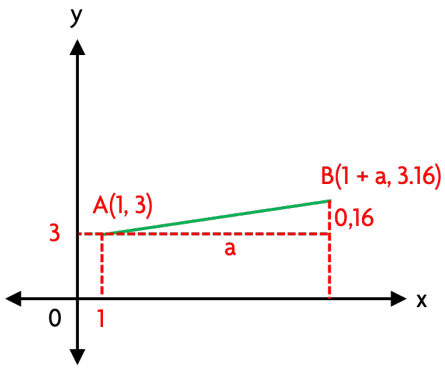
AB doğrusunun eğimi $\frac{3-(-9)}{1-9}$

AB doğrusunun eğimi $\frac{6a-3}{-a-1}$

$$\frac{12}{-8} = \frac{6a-3}{-a-1} \Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{6a-3}{a+1} \Rightarrow 3a+3 = 12a-6 \Rightarrow 9 = 9a \Rightarrow 1 = a$$

Buradan A(–1, 6) olarak bulunur. O hâlde A noktasının koordinatları toplamı –1 + 6 = 5 olur.

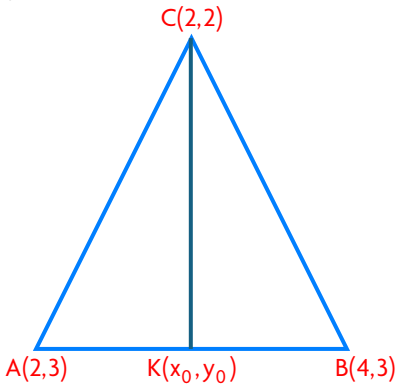
ÇÖZÜM 2.



Araç deniz seviyesinden 300 m yükseklikteyken bulunduğu nokta (1, 3) ise dik koordinat düzleminde her 1 birim 100 m ye karşılık gelmektedir.

Yolun eğimi, %8 diğer bir deyişle $m = \frac{8}{100}$ olarak verilmiştir. Araç dikeyde 16 m yer değiştirdiğine göre dik koordinat düzleminde 1 birim = 100 m olduğundan 16 m 0,16 birime karşılık gelir. Buradan $\frac{8}{100} = \frac{0,16}{a} \Rightarrow 8a = 16 \Rightarrow a = 2$ olduğundan B noktası, B(1 + 2, 3.16) olarak bulunur. Koordinatlarının toplamı ise 3 + 3,16 = 6,16 olur.

ÇÖZÜM 3.



HATIRLATMA

$A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ noktalarının orta noktasının koordinatları $O\left(\frac{x_2+x_1}{2}, \frac{y_2+y_1}{2}\right)$ formülü ile bulunur.

$$x_0 = \frac{2+4}{2} = 3$$
$$y_0 = \frac{3+3}{2} = 3$$
$\Rightarrow K(3,3)$

C ve K noktalarından geçen doğrunun eğimi $m = \frac{3-2}{3-2} = 1$ olur.

Geçtiği bir nokta ve eğimi bilinen doğru denklemi $y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$ ile bulunur. Bu durumda aradığımız doğru denklemi

$y - 2 = 1 \cdot (x - 2)$

$y - 2 = x - 2$

$y = x$ olur.

ÇÖZÜM 4.

A ve B noktalarından geçen yolun eğimi $m = \frac{5-2}{3-0} = \frac{3}{3} = 1$ 'dir.

A ve B noktalarından geçen doğru, $ax + 2y + 4 = 0$ doğrusuna dik olduğuna göre iki doğrunun eğimleri çarpımı –1'dir.

O hâlde $ax + 2y + 4 = 0$ doğrusunun eğimi

$$ax + 2y + 4 = 0$$
$$2y = -ax - 4$$
$$\frac{2y}{2} = \frac{-ax-4}{2}$$
$$y = \frac{-a}{2}x - 4 \Rightarrow 1 \cdot \frac{-a}{2} = -1 \Rightarrow a = 2$$

bulunur.

İki noktası bilinen doğru denklemi $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{x - x_1}$ dir. O hâlde

$$\frac{5-2}{3-0} = \frac{y-2}{x-0} \Rightarrow \frac{3}{3} = \frac{y-2}{x} \Rightarrow x = y - 2 \Rightarrow y = x + 2$$

$$y = x + 2$$
$$+\ y = -x - 2$$
$$2y = 0 \Rightarrow 0 = x + 2 \Rightarrow x = -2 \text{ bulunur.}$$

Kesim noktasının koordinatları $x = -2$ ve $y = 0$'dır.

ÇÖZÜM 5.

Paralel doğruların eğimleri eşittir.

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ olur.

AB doğrusunun eğimi

$\frac{4-3}{-1-2} = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}$ olur.

$-x + ay + 3 = 0 \Rightarrow ay = x - 3 \Rightarrow \frac{ay}{a} = \frac{x-3}{a}$

$\Rightarrow \frac{ay}{a} = \frac{x-3}{a}$

$\Rightarrow y = \underbrace{\frac{x}{a}}_{m} - \frac{3}{a} \Rightarrow m = \frac{1}{a}$

$\frac{1}{a} = -\frac{1}{3} \Rightarrow a = -3 \Rightarrow -x - 3y + 3 = 0$

C(x, –1) noktası –x – 3y + 3 = 0 doğrusu üzerinde olduğundan doğru denklemini sağlar. O hâlde

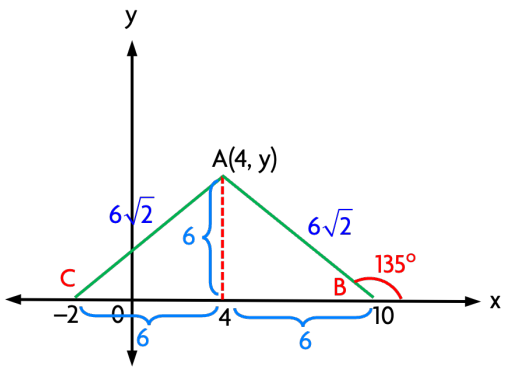
$-x - 3 \cdot (-1) + 3 = 0$

$-x + 6 = 0$

$x = 6$'dır.

Bu durumda x + a = 3'tür.

ÇÖZÜM 6.



[AB] ile temsil edilen doğrunun eğimi $\tan 135^\circ = -1$'dir.

$\frac{y-0}{4-10} = -1 \Rightarrow y = 6$

$6^2 + 6^2 = x^2$ (Pisagor bağıntısı)

$x^2 = 72$

$x = 6\sqrt{2}$

Doğrunun kırılan kısmının toplam uzunluğu $6\sqrt{2} + 6\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$ birimdir

ÇÖZÜM 7.

A ve B noktaları x eksenine dik bir doğru üzerinde olduğundan apsisleri eşittir. O hâlde

$5a - 9 = 2a + 6$

$3a = 15$

$a = 5$

$A(5 \cdot 5 - 6,10) \Rightarrow A(16, 10)$

A ve B noktalarının üzerinde bulunduğu doğru $x = 16$ doğrusudur. $x = 16$ doğrusunun y eksenine uzaklığı 16 birimdir.

ÇÖZÜM 8.

Ceyda; Ayşe ve Buket'in ortasında bulunduğuna göre bulunduğu noktanın koordinatları

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= \frac{4+(-2)}{2} = \frac{2}{2} = 1 \\ y_0 &= \frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} = 3 \end{aligned}\right\} \text{C(1, 3) olur.}$$

HATIRLATMA

$A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ noktalarının orta noktasının koordinatları $O\left(\frac{x_2 + x_1}{2}, \frac{y_2 + y_1}{2}\right)$ formülü ile bulunur.

A ve B noktalarından geçen doğrunun eğimi

$$\frac{5-1}{4-(-2)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Ceyda'nın bulunduğu noktadan geçen doğru yer düzlemine dik ise eğimleri çarpımı –1'dir. Ceyda'nın bulunduğu noktadan geçen doğrunun eğimi m ise

$\Rightarrow \frac{2}{3} \cdot m = -1 \Rightarrow m = -\frac{3}{2}$ 'dir.

C(1, 3) noktasından geçen doğrunun denklemi

$y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$ formülü ile bulunduğundan

$y - 3 = \frac{-3}{2} \cdot (x - 1) \Rightarrow 2y - 6 = -3x + 3 \Rightarrow 2y + 3x - 9 = 0$ doğru denklemi elde edilir.

ÖĞRENDİKLERİM

Amaç: Bu bölümde öğrendiklerinizi özetlemenizi, günlük hayatta ve farklı derslerde kullanabileceğiniz bilgileri belirlemenizi amaçlıyoruz.

Özet bilgideki boş bırakılan yerleri uygun şekilde doldurunuz. Yazdıklarınızı çalışma kartını gözden geçirerek kontrol ediniz. Özetle ilgili eklemek istediğiniz bilgileri verilen boşluğa kendi cümlelerinizle yazabilirsiniz.

Verilen bilgileri dikkatle okuyunuz. Konunun temel kavramlarını, önemli noktalarını ve bağlantılarını gözden geçirerek öğrenmenizi pekiştiriniz.

DOĞRUNUN ANALİTİĞİ

DOĞRUNUN EĞİMİ

Eğim (m): Dikeydeki değişimin yataydaki değişime oranıdır. Dik koordinat sisteminde $A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ noktalarından geçen doğrunun eğimi aşağıdaki formülle hesaplanır:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Eğim Açısı (α): Doğrunun x ekseniyle pozitif yönde yaptığı açıdır. Ölçüsü alfa ise;

- $\alpha < 90°$ (Dar açı) ise eğim pozitiftir.
- $\alpha > 90°$ (Geniş açı) ise eğim negatiftir.
- $\alpha = 0°$ (x eksenine paralel) ise eğim 0'dır.
- $\alpha = 90°$ (x eksenine dik) ise eğim tanımsızdır.

DOĞRU DENKLEMİ

Eğimi ve Bir Noktası Bilinen Doğru:
Eğimi m olan ve $A(x_0, y_0)$ noktasından geçen doğrunun denklemi:

$$m = \frac{y - y_0}{x - x_0} \Rightarrow y - y_0 = m \cdot (x - x_0) \text{ olur.}$$

İki Noktası Bilinen Doğru:
İki Noktası Bilinen Doğru: $A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ noktalarından geçen doğrunun denklemi:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{x - x_1} \text{ olur.}$$

Eksenlere Dik Doğrular:

- x eksenine dik doğrular $x = a$,
- y eksenine dik doğrular $y = b$

şeklinde ifade edilir.

Doğruların Birbirine Göre Durumları: İki doğrunun birbirine göre konumu eğimleri üzerinden incelenir.

- **Paralel Doğrular:** Eğimleri birbirine eşittir.
- **Dik Doğrular:** Eğimleri çarpımı –1'dir.
- **Kesişen Doğrular:** Eğimleri farklı olan doğrular bir noktada kesişir.

Daha fazlası için karekodu okutunuz.



KOŞULLU OLASILIK 1

BAŞLARKEN

Bu bölümde yer alan etkinlikler, bireysel öğrenme yolculuğunuzda size rehberlik etmek ve öğrenme sürecinizi desteklemek amacıyla hazırlanmıştır. Çalışmalarınızı yürütürken "Hazırlanıyorum", "İlişkilendiriyorum", "Uygulayarak Öğreniyorum", "Değerlendiriyorum", "Yansıtıcı Yazı" ve "Öğrendiklerim" etkinliklerini sırası ile takip etmeniz ve etkinliklerin sonunda yer alan geri bildirimleri inceleyerek bölümleri tamamlamanız beklenmektedir.

Bu çalışma kartı sayesinde bir olayın gerçekleşme ihtimalinin başka bir olayın gerçekleşip gerçekleşmemesine nasıl bağlı olduğunu analiz edebilecek, bu ilişkiden anlamlı çıkarımlar yapabileceksiniz. Aşağıdaki soruları yanıtlayarak bu soruların ardındaki matematiksel mantığı kavrayabileceksiniz.

Bir meteorolog, "Eğer yağmur yağarsa trafik kazaları artar mı?" sorusunu yanıtlarken hangi olasılık prensibini kullanır?

Tıp alanında, belirli bir hastalığın teşhisi için yapılan bir testin sonucuna göre hastanın gerçekten o hastalığa sahip olma olasılığı nasıl hesaplanır?

Bir spor müsabakasında tuttuğumuz takımın galibiyet olasılığı, önemli bir oyuncunun sakatlanması durumunda nasıl değişir ve bu değişiklik hangi matematiksel yöntemle ifade edilebilir?

Bir sigorta şirketi, yeni bir müşterisinin kaza riskini değerlendirirken müşterinin geçmişteki sürüş alışkanlıkları ve yaşam tarzı gibi faktörleri koşullu olasılıkla nasıl ilişkilendirir?



DURUM A **DURUM B**

P(B | A)
Yağmur varsa, kaza olma olasığılığı vardır.



1. ÇEKİM
DURUM A

P(Kırmızı) = 3/5

2. ÇEKİM
DURUM B

P(Kırmızı | Kırmızı) = 3/5

HAZIRLANIYORUM

Amaç: Bu bölümde ön bilgilerinizi hatırlamanızı ve temaya hazırlıklı hâle gelmenizi amaçlıyoruz.

Aşağıda yer alan ifadeler, bu temada tamamlanması hedeflenen öğrenme çıktısını ele almadan önce sahip olmanız gereken bazı temel becerileri içermektedir. Lütfen her bir ifadeyi dikkatlice okuyunuz.

• Eğer ifadedeki beceriye hakim olduğunuzu düşünüyorsanız kutucuğu işaretleyiniz.

• Eğer temayı henüz tam olarak bilmediğinizi ya da hatırlamadığınızı düşünüyorsanız kutucuğu boş bırakınız.

Bu çalışmanın amacı notla değerlendirilmeyecek olup amacı temaya ne ölçüde hazır olduğunuzu belirlemektir.

SORULAR	ÖN ÖĞRENME KONTROL LİSTESİ	
1	Bir olayın olma olasılığını hesaplayabilirim.	
2	İki olayın kesişimini (A ve B) ve birleşimini (A veya B) tanımlayabilirim.	
3	Deneyin tüm olası sonuçlarını içeren örnek uzayı belirleyebilirim.	
4	Tanımlanan olaya karşılık gelen olay kümesini belirleyebilirim.	
5	Bağımlı ve bağımsız olaylar arasındaki farkı açıklayabilirim.	
6	Gerçek yaşam durumlarında basit olasılık hesaplamaları yapabilirim.	
7	Bir olayın gerçekleşme olasılığının başka bir olayın gerçekleşmesinden etkilenebileceğini fark edebilirim.	

"Ön Öğrenme Kontrol Listesi"ni doldurduktan sonra aşağıda verilen "Kontrol Noktası" sorularını çözünüz ve cevaplarınızı kontrol ediniz.

KONTROL NOKTASI

SORU 1.

Bir sınıfta 12 erkek ve 8 kız öğrenci vardır.

Bu sınıftan rastgele seçilen bir öğrencinin kız öğrenci olma olasılığını bulunuz.

SORU 2.

Hilesiz bir sayı küpü havaya atılmıştır.

Üst yüze gelen sayının 3'ten büyük tek sayı olma olasılığını bulunuz.

SORU 3.

Bir sınıfta 14'ü erkek, 10'u kız olmak üzere toplam 24 öğrenci bulunmaktadır. Bu sınıftaki öğrencilerin tamamı okul spor kulübünde futbol, basketbol ya da her iki branşı birlikte seçmiştir.

Erkek öğrencilerin 9'u, kız öğrencilerin ise 4'ü futbol seçmiştir.

Bu sınıftan rastgele seçilen bir öğrencinin erkek olma veya basketbol oynama olasılığını bulunuz.

GERİ BİLDİRİM

Bu geri bildirim sayesinde kendi cevabınızı kontrol edebilir, hatalarınızı düzelterek öğrenmenizi pekiştirebilirsiniz.

KONTROL NOKTASI

ÇÖZÜM 1.

HATIRLATMA

Olasılık, bir olayın gerçekleşme şansını sayısal olarak ifade eder ve $P(\text{Olay}) = \frac{\text{İstenen Durum Sayısı}}{\text{Tüm Olası Durum Sayısı}}$ olarak hesaplanır.

Toplam öğrenci sayısı: 12+8=20

Kız öğrenci sayısı: 8

Öğrenci seçme olasılığı: $\frac{\cancel{8}}{\cancel{20}} = \frac{2}{5}$ olarak bulunur.

ÇÖZÜM 2.

Hilesiz bir sayı küpünün havaya atılması olayında üst yüze gelecek sayıların oluşturacağı örnek uzay {1, 2, 3, 4, 5, 6} (kümesi)dir. İstenen durumu belirlerken verilen her iki koşulu (3'ten büyük olma ve tek sayı olma) aynı anda sağlayan elemanlar bulunmalıdır.

Hilesiz bir sayı küpünün havaya atılması deneyinde tüm olası durumlar: {1, 2, 3, 4, 5, 6}

3'ten büyük sayılar: {4, 5, 6}

Tek sayılar: {1, 3, 5}

3'ten büyük ve tek sayı: Bu koşulu sağlayan tek sayı "{5} (kümesi)dir." 5'tir. (1 durum)

Olasılık = $\frac{1}{6}$ bulunur.

ÇÖZÜM 3.

HATIRLATMA

İki olaydan en az birinin gerçekleşme olasılığı (A veya B), bu olayların ayrı ayrı olasılıklarının toplamından iki olayın birlikte gerçekleşme olasılığının (A ve B) çıkarılmasıyla bulunur.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

	FUTBOL	BASKETBOL
ERKEK(14)	9	5
KIZ(10)	4	6

Erkek olma olasılığı: $P(E) = \frac{14}{24}$

Basketbol oynama olasılığı: $P(B) = \frac{11}{24}$

Hem erkek hem de basketbol oynama olasılığı: $P(E \cap B) = \frac{5}{24}$

İstenen: Erkek veya basketbol oynama olasılığı: $P(E \cup B) = P(E) + P(B) - P(E \cap B) = \frac{14}{24} + \frac{11}{24} - \frac{5}{24} = \frac{20}{24} = \frac{5}{6}$

İLİŞKİLENDİRİYORUM

Amaç: Bu bölümde yeni öğreneceğiniz temayı; zihninizde var olan bilgileriniz, yaşantılarınız ve diğer derslerde öğrendiklerinizle ilişkilendirmenizi bekliyoruz

Verilen metni okuyunuz. Ardından soruları yanıtlayınız. Cevaplarınızı kendi yaşamınızdan ya da çevrenizden örneklerle destekleyiniz.

Sizce hava durumu tahminleri sadece genel olasılıklardan mı meydana gelmektedir? Koşullu olasılıkları da içeriyor olabilir mi?



Hava durumu tahminlerinin hem genel olasılıkları hem de koşullu olasılıkları içerdiğini fark ettiniz mi?

Burada "bugün sis olması" bir **koşuldur.** Bu koşul gerçekleştiğinde (sis olduğu bilgisi edinildiğinde) "yarın görüş mesafesinin düşmesi" olayının olasılığı değişmiş ve %70 olarak tahmin edilmiştir.

Sis bilgisi olmadan bu olasılık farklı olabilirdi. Meteorologlar, basınç değişimleri, rüzgâr yönü, nem oranı, sıcaklık gibi birçok faktörü (koşulu) bir arada değerlendirerek daha isabetli tahminler yaparlar.

UYGULAYARAK ÖĞRENİYORUM

Amaç: Bu bölümde bilgilerinizi etkinlikler ve uygulamalarla pekiştirmenizi, öğrenmeyi daha kalıcı hâle getirmenizi amaçlıyoruz.

Problemlerde verilen adımları dikkatle uygulayınız. Çalışmanızı güvenli ve düzenli bir şekilde yapınız.

ÖRNEK

Aşağıda verilen hilesiz iki sayı küpünün havaya atılması deneyinde üst yüze gelecek sayıların oluşturacağı sonuçlara ait tabloyu uygun biçimde doldurunuz.

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
(1)						
(2)						
(3)	(3, 1)					
(4)						
(5)						
(6)					(6, 5)	

Hilesiz iki sayı küpünün havaya atılması deneyinde üst yüze gelecek sayıların oluşturacağı sonuçlar aşağıdaki tabloda verilmiştir.

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
(1)	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
(2)	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
(3)	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
(4)	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
(5)	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
(6)	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

Verilen sonuçlar tablosuna göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) Bu deneyde üst yüze gelen sayıların çift gelme olasılığını bulunuz.

b) Bu deneyde üst yüze aynı sayıların gelme olasılığını bulunuz.

c) Bu deneyde üst yüze gelen sayıların çift olduğu bilinseydi üst yüze aynı sayıların gelme olasılığı değişir miydi? Olası durum sayısında bir değişme olur muydu? Açıklayınız.

ÇÖZÜM

HATIRLATMA

$$P(A) = \frac{\text{İstenen Durum Sayısı}}{\text{Tüm Olası Durum Sayısı}}$$

P(A): A olayının gerçekleşme olasılığıdır.

İstenen Durum Sayısı: Olayın gerçekleştiği durumların sayısıdır.

Tüm Olası Durum Sayısı: Deneyde ortaya çıkabilecek tüm sonuçların sayısıdır.

a) **İstenen Durumlar:** (2, 2), (2, 4), (2, 6), (4, 2), (4, 4), (4, 6), (6, 2), (6, 4), (6, 6) olduğundan olasılık değeri $\frac{\cancel{9}}{\cancel{36}} = \frac{1}{4}$ olarak bulunur.

b) **İstenen Durumlar:** (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6) olduğundan olasılık değeri $\frac{\cancel{6}}{\cancel{36}} = \frac{1}{6}$ olarak bulunur.

c)

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
(1)	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
(2)	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
(3)	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
(4)	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
(5)	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
(6)	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

Tablo da işaretlenen çıktılar yeni örnek uzayı oluşturmaktadır. Bu durumda olası çıktıların sayısı 36'dan 9'a düşmüştür.

Olasılık hesabında tüm olası durum sayısı değiştiği için olasılık da değişecektir.

Yeni örnek uzay: (2, 2), (2, 4), (2, 6), (4, 2), (4, 4), (4, 6), (6, 2), (6, 4), (6, 6) olduğundan

istenen durum: (2, 2), (4, 4), (6, 6) olur.

Olasılık değeri: $\frac{\cancel{3}}{\cancel{9}} = \frac{1}{3}$ olarak bulunur.

Eş olumlu örnek uzayında A ve B iki olay olsun. B olayının gerçekleşmiş olması hâlinde A olayının gerçekleşme olasılığına A olayının B olayına bağlı koşullu olasılığı denir. P(A | B) sembolüyle gösterilir.

A olayının B olayına bağlı koşullu olasılığı, P(B) ≠ 0 olmak üzere; $P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ şeklinde hesaplanır.

$P(A \mid B)$

Gerçekleşmesi İstenen Olay ← | → Gerçekleşmiş Olay

ÖRNEK

Bir torbada bir mavi (M), bir sarı (S), bir beyaz (B) ve bir kırmızı (K) olmak üzere dört kart bulunmaktadır. Torbadan sırayla iki kart çekilmiştir. Çekilen ilk kart torbaya geri konulmadan ikinci kart torbadan çekilmiştir.

a) İlk çekilen kartın rengi biliniyorken, ikinci çekilen kartın beyaz olma olasılığı sizce değişir mi? Bu duruma ilişkin düşüncenizi olasılık bilgilerinizi kullanarak açıklayınız.

b) Bu deneyin bazı olası çıktıları aşağıdaki tabloda kısmen gösterilmiştir. Tablodaki örneklerden yararlanarak boş bırakılan hücreleri uygun şekilde doldurunuz.

1. Kart \ 2. Kart	MAVİ (M)	SARI (S)	BEYAZ (B)	KIRMIZI (K)
Mavi (M)	Çıktı yok.	MS		
Sarı (S)		Çıktı yok.	SB	
Beyaz (B)			Çıktı yok.	BK
Kırmızı (K)	KM			Çıktı yok.

c) Bulduğunuz olası tüm çıktıları ve ikinci kartın beyaz olma durumuna ait çıktıları karşılaştırınız. Mevcut olasılık bilginizi kullanarak ikinci kartın beyaz olmasının olasılık değerini bulunuz.

d) Problem durumunda birinci çekilen kart torbaya geri konulup daha sonra ikinci kart çekilirse ikinci kartın beyaz olma olayında olası tüm çıktıları bir tablo ile görselleştirip listeleyiniz.

e) 3 ve 4. sorularda oluşturduğunuz ikinci kartın beyaz olması durumuna ait olası tüm çıktıların listelerini karşılaştırınız. Ortak olan çıktıları belirleyiniz.

ÇÖZÜM

a) Sonuç değişir. Çünkü 1. kart geri konulmadığı için ikinci seçimde kalan kart sayısı 3'e düşer ve beyaz kartın elde kalıp kalmaması ilk karta bağlıdır.

Eğer 1. kart beyaz seçilirse beyaz kart artık kalmaz. ⇒ 2. kartın beyaz olma olasılığı 0'dır.

Eğer 1. kart beyaz dışında seçilirse beyaz kart hâlâ bulunduğundan 2. seçimde 3 karttan 1'i beyazdır. ⇒ Olasılık $\frac{1}{3}$ olur.

b)

1. Kart\2. Kart	MAVİ (M)	SARI (S)	BEYAZ (B)	KIRMIZI (K)
Mavi (M)	Çıktı yok.	MS	MB	MK
Sarı (S)	SM	Çıktı yok.	SB	SK
Beyaz (B)	BM	BS	Çıktı yok.	BK
Kırmızı (K)	KM	KS	KB	Çıktı yok.

c) Tüm olası çıktılar (örnek uzay) E kümesi ile ifade edilsin.

E = {MS, MB, MK, SM, SB, SK, BM, BS, BK, KM, KS, KB} ve s(S) = 12'dir.

Örnek uzayın eleman sayısı, kümenin elemanlarını yazmadan da 4 kartın oluşturabileceği ikili sıralamaların sayısı ile hesaplanır. Bu da 4.3 = 12 olarak bulunur.

İkinci kartın beyaz olması için çıktının son harfi B olmalıdır. Bu ikililerin kümesi de A ile gösterilsin..

A = {KB, MB, YB} olur. s(A) = 3'tür.

Olasılık değeri = $\frac{s(A)}{s(E)} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$ olarak bulunur.

d) Torbadan çekilen kart torbaya geri atılırsa olası tüm çıktıların tablosu aşağıdaki gibi olacaktır. Burada dikkat etmemiz gereken önemli nokta bir önceki tabloda "Çıktı yok." yazan bölümler olacaktır.

1. Kart\2. Kart	MAVİ (M)	SARI (S)	BEYAZ (B)	KIRMIZI (K)
Mavi (M)	MM	MS	MB	MK
Sarı (S)	SM	SS	SB	SK
Beyaz (B)	BM	BS	BB	BK
Kırmızı (K)	KM	KS	KB	KK

Toplam çıktı sayısı = 4.4 = 16 olarak bulunur.

İkinci kartın beyaz olduğu ikililerin kümesi C olsun. C = {MB, SB, BB, KB} olur.

e) Geri konularak yapılan deneyde, geri konulmadan yapılan deneyde mümkün olan tüm çıktılar yine mümkündür.

Geri konulması durumunda sadece aynı kartın iki kez gelmesiyle oluşan BB çıktısı eklenir.

Bu nedenle ortak çıktılar, geri konulmadan yapılan durumdaki çıktılardır. Bunlar da KB, MB, YB çıktılarıdır.

ÖRNEK

Bir lisede öğrenim gören 200 öğrenci arasında yapılan bir ankette, öğrencilerin yalnızca matematik ve fizik derslerine yönelik tutumları incelenmiştir. Elde edilen veriler aşağıdaki gibidir.

- Öğrencilerin 110'u matematik dersini sevmektedir.
- Öğrencilerin 90'ı fizik dersini sevmektedir.
- Her iki dersi de seven öğrenci sayısı 50'dir.

Bu verilere dayanarak aşağıdaki soruları cevaplandırınız.

a) Verileri kullanarak bir tablo oluşturunuz ve tabloyu doldurunuz.

b) Rastgele seçilen bir öğrencinin fizik dersini sevmediği bilindiğine göre aynı öğrencinin matematik dersini sevme olasılığını bulunuz.

c) Rastgele seçilen bir öğrencinin matematik dersini sevdiği bilindiğine göre bu öğrencinin fizik dersini de sevme olasılığını bulunuz.

ÇÖZÜM

a)

	Fizik Seviyor (C)	Fizik Sevmiyor (D)	Toplam
Matematik Seviyor (A)	50	y	110
Matematik Sevmiyor (B)	x	z	h
Toplam	90	t	200

Tablodaki eksik kısımlar şöyle bulunur:

t: Matematik Seviyor ve Fizik Sevmiyor ⟶ $s(A \cap B) = s(A) - s(A \cap C)$ ⟶ $110 - 50 = 60$

x: Fizik Seviyor ve Matematik Sevmiyor ⟶ $s(B \cap C) = s(C) - s(A \cap C)$ ⟶ $90 - 50 = 40$

h: Matematik Sevmiyor ⟶ $s(B) = s(\text{Toplam}) - s(A)$ ⟶ $200 - 110 = 90$

t: Fizik Sevmiyor ⟶ $s(D) = s(\text{Toplam}) - s(C)$ ⟶ $200 - 90 = 110$

z: Her İkisini de Sevmiyor ⟶ $s(B \cap D) = s(B) - s(B \cap C)$ ⟶ $90 - 40 = 50$

	Fizik Seviyor (C)	Fizik Sevmiyor (D)	Toplam
Matematik Seviyor (A)	50	60	110
Matematik Sevmiyor (B)	40	50	90
Toplam	90	110	200

b) İstenen: P(Matematik Seviyor | Fizik Sevmiyor) ⟶ $P(A \mid D) = \dfrac{P(A \cap D)}{P(D)} = \dfrac{\cancel{60}}{\cancel{110}} = \dfrac{6}{11}$

c) İstenen: P(Fizik | Matematik Seviyor) ⟶ $P(C \mid A) = \dfrac{P(C \cap A)}{P(A)} = \dfrac{\cancel{50}}{\cancel{110}} = \dfrac{5}{10}$

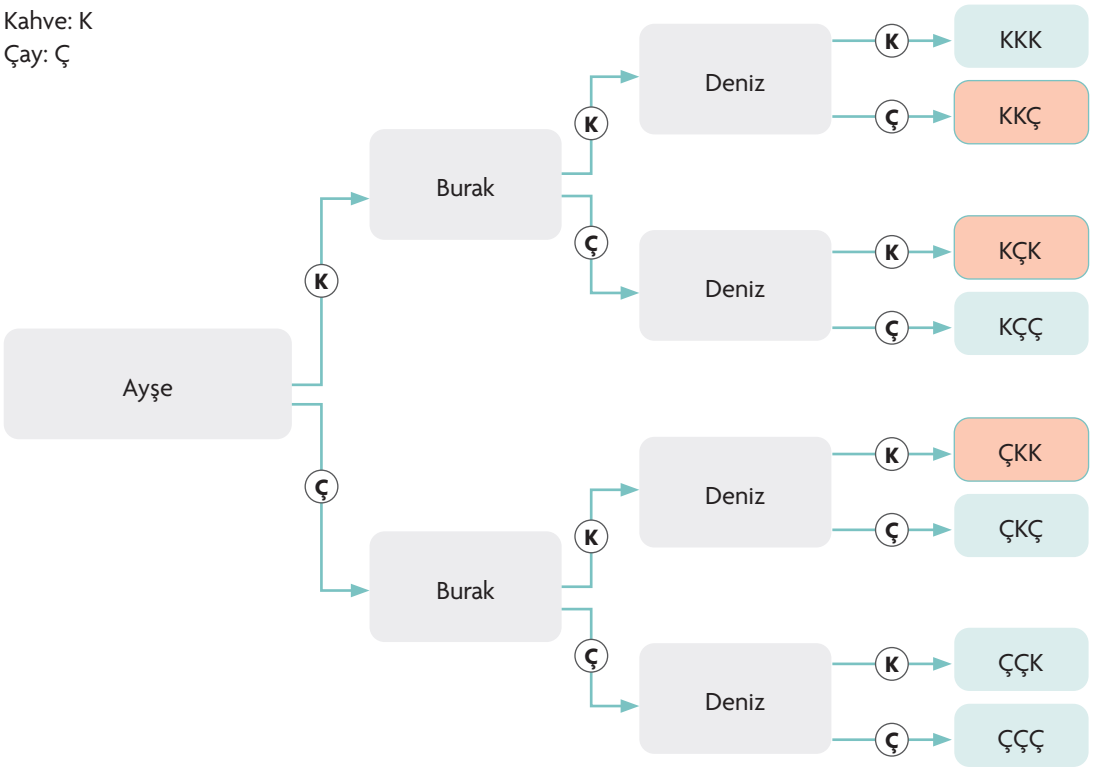
ÖRNEK

Ayşe, Burak, Cem ve Deniz'in ders çalışmak için gittikleri bir kafede sipariş edebilecekleri iki içecek seçeneği kahve ve çaydır. Arkadaşların her biri bu iki içecekten birini sipariş edecektir ve her birinin tercihi diğerlerinden bağımsızdır.

Cem'in kahve sipariş ettiği bilindiğine göre dört arkadaştan üçünün kahve sipariş etmiş olmasının olasılık değerini ağaç şeması ile bulunuz.

ÇÖZÜM (Ağaç Şeması)

Kahve: K
Çay: Ç



$$\frac{\text{Cem ile birlikte iki arkadaşının kahve içtiği durumların sayısı}}{\text{Cem'in kahve içtiği tüm durumların sayısı}} = \frac{3}{8}$$

NOT

Bağımlı ve bağımsız olayların tespitinde iki olaydan herhangi birinin olasılığı diğer olayın gerçekleşmesine bağlı olarak değişmiyorsa bu iki olaya **bağımsız olaylar**, değişiyorsa **bağımlı olaylar** denir.

ÖRNEK

Aşağıdaki tabloda verilen olasılık cümlelerinde geçen olaylar A ve B olayı olarak adlandırılmıştır.

Olasılık cümlesine uygun şekilde A olayı ve B olayını yazınız. Olayların bağımlı mı bağımsız mı olduğunu belirleyerek ilgili sütunu işaretleyiniz.

Olasılık Cümlesi	A Olayı	B Olayı	Bağımlı Olay	Bağımsız Olay
Bir öğrencinin fizik sınavını geçme olasılığı $\frac{2}{3}$, kimya sınavını geçme olasılığı $\frac{3}{4}$'tür. Bu iki olay incelenmektedir..	Fizik sınavını geçme	Kimya sınavını geçme		✓
Bir torbada 5 kırmızı ve 3 mavi top vardır. Geri koymadan art arda iki top çekilmiştir. Birinci topun kırmızı olması ile ikinci topun mavi olması olayları incelenmektedir.				
Bir sayı küpü iki kez atılmıştır. Birinci atışın tek gelmesi ile ikinci atışın 6 gelmesi olayları incelenmektedir.				
Bir kutuda 1'den 10'a kadar numaralandırılmış kartlar vardır. Geri koyarak art arda iki kart çekilmiştir. Birinci kartın asal olması ile ikinci kartın çift olması olayları incelenmektedir.				
Bir torbada 1 yeşil ve 4 sarı top vardır. Geri koymadan art arda iki top çekilmiştir. Birinci topun yeşil olması ile ikinci topun sarı olması olayları incelenmektedir.				

ÇÖZÜM

Olasılık Cümlesi	A Olayı	B Olayı	Bağımlı Olay	Bağımsız Olay
Bir öğrencinin fizik sınavını geçme olasılığı $\frac{2}{3}$, kimya sınavını geçme olasılığı $\frac{3}{4}$'tür. Bu iki olay incelenmektedir.	Fizik sınavını geçme	Kimya sınavını geçme		✓
Bir torbada 5 kırmızı ve 3 mavi top vardır. Geri koymadan art arda iki top çekilmiştir. Birinci topun kırmızı olması ile ikinci topun mavi olması olayları incelenmektedir.	1. topun kırmızı olması	2. topun mavi olması	✓	
Bir sayı küpü iki kez atılmıştır. Birinci atışın tek gelmesi ile ikinci atışın 6 gelmesi olayları incelenmektedir.	1. atışın tek gelmesi	2. atışın 6 gelmesi		✓
Bir kutuda 1'den 10'a kadar numaralandırılmış kartlar vardır. Geri koyarak art arda iki kart çekilmiştir. Birinci kartın asal olması ile ikinci kartın çift olması olayları incelenmektedir.	1. kartın asal olması	2. kartın çift olması		✓
Bir torbada 1 yeşil ve 4 sarı top vardır. Geri koymadan art arda iki top çekilmiştir. Birinci topun yeşil olması ile ikinci topun sarı olması olayları incelenmektedir.	1. topun yeşil olması	2. topun sarı olması	✓	

NOT

A ile B ayrık olmayan olaylar olmak üzere $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ olarak hesaplanır.

UYARI

Ayrık Olay ve Ayrık Olmayan Olay

Aynı örnek uzaya ait iki olayın ortak çıktısı yoksa ayrık olaylar, ortak çıktısı varsa ayrık olmayan olaylar olarak adlandırılır.

A ve B bağımsız iki olay olmak üzere $A \cap B$ olayının olma olasılığı, A olayının olma olasılığı ile B olayının olma olasılığının çarpımıdır.

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

ÖRNEK

Hilesiz bir sayı küpü ve bir madenî para aynı anda havaya atılıyor. Buna göre

a) Sayı küpünün çift sayı ve madenî paranın tura gelmesi olasılığını bulunuz.

b) Sayı küpünün çift sayı veya madenî paranın tura gelmesi olasılığını bulunuz.

ÇÖZÜM

a) Sayı küpünün çift gelmesi olayı ile madenî paranın tura gelmesi olayları birbirini etkilemeyeceğinden bağımsız olaylardır.

Sayı küpü için örneklem uzay $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ olduğundan $s(E) = 6$'dır. İstenen durumları A kümesi ile gösterecek olursak $A = \{2, 4, 6\}$ olduğundan $s(A) = 3$'tür. $P(A) = \frac{s(A)}{s(E)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Madenî para için örneklem uzay $M = \{Y, T\}$ olduğundan $s(M) = 2$'dir. İstenen durumları B kümesi ile gösterecek olursak $B = \{T\}$ olduğundan $s(B) = 1$'dir. $P(B) = \frac{s(B)}{s(M)} = \frac{1}{2}$

Sayı küpünün çift sayı ve madenî paranın tura gelmesi olasılığı $= P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ olarak bulunur.

b) Sayı küpünün çift sayı veya madenî paranın tura gelmesi olasılığı $= P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ olarak bulunur.

SIRA SİZDE 1.

Aşağıdaki tablo, bir lisede yapılan deneme sınavı ve derslere katılım durumu hakkında bu liseden 100 öğrencinin sonuçlarını göstermektedir.

	Sınavda Başarılı (B)	Sınavda Başarısız (B')	Toplam
Derslere Katılan (K)	35	15	50
Derslere Katılmayan (K')	10	40	50
Toplam	45	55	100

a) Rastgele seçilen bir öğrencinin sınavda başarılı olma olasılığını bulunuz.

b) Rastgele seçilen bir öğrencinin derslere katılma olasılığını bulunuz.

c) Sınavda başarılı olanlar arasından rastgele seçilen bir öğrencinin aynı zamanda derslere de katılma olasılığını bulunuz.

SIRA SİZDE 2.

Arkadaş olan Eda, Fırat, Gizem ve Hakan, bir kitap kulübünün üyeleridir. Kulüp toplantısı için her üye roman veya şiir türlerinden birini okumuş olmak zorundadır. Her üye bu iki tür kitaptan birini seçecek ve her birinin tercihi diğerlerinden bağımsız olacaktır.

Eda'nın roman okuduğu bilindiğine göre dört arkadaştan hepsinin roman okumuş olmasının olasılık değerini bulunuz.

SIRA SİZDE 3.

Bir okulda düzenlenen bilim atölyesinde, öğrencilerden bir deney düzeneğini belirlenen sürede doğru şekilde kurmaları istenmektedir.

Bu görevi başarıyla tamamlayan öğrencilere ödül verilecektir. Atölyeye katılan öğrencilerden

Ahmet'in görevi başarıyla tamamlama olasılığı $\frac{2}{7}$,

Elif'in görevi başarıyla tamamlama olasılığı ise $\frac{3}{8}$ 'dir.

Buna göre;

a) Ahmet ve Elif'in birlikte ödül alma olasılığını bulunuz.

b) Ahmet ve Elif'ten yalnızca birinin ödül alması olasılığını bulunuz.

c) Öğrencilerden yalnızca bir kişinin ödül aldığı bilindiğine göre ödül alan kişinin Elif olma olasılığını bulunuz.

GERİ BİLDİRİM

Bu geri bildirim sayesinde kendi cevabınızı kontrol edebilir, hatalarınızı düzelterek öğrenmenizi pekiştirebilirsiniz.

SIRA SİZDE 1.

ÇÖZÜM

	Sınavda Başarılı (B)	Sınavda Başarısız (B')	Toplam
Derslere Katılan (K)	35	15	50
Derslere Katılmayan (K')	10	40	50
Toplam	45	55	100

a) $P(B) = \frac{45}{100} = \frac{9}{20}$ bulunur.

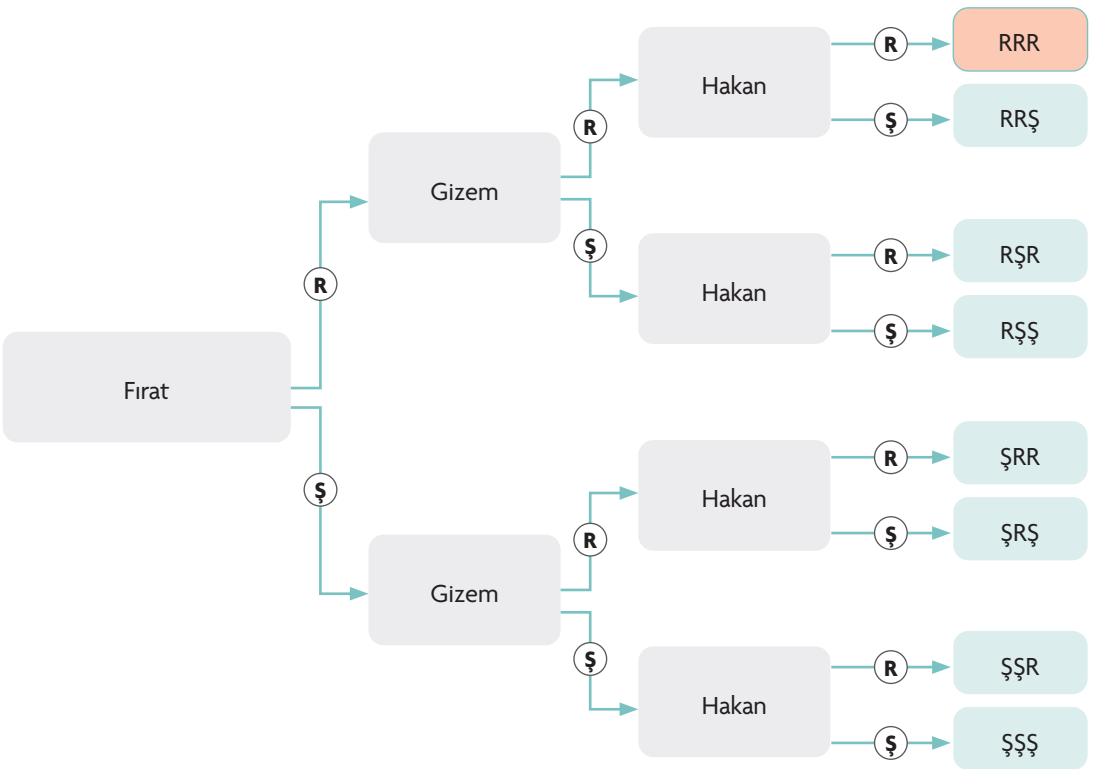
b) $P(B) = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$ bulunur.

c) $P(\text{Katılan} \mid \text{Başarılı}) = \frac{P(K \cap B)}{P(B)} \rightarrow \frac{\cancel{35}}{\cancel{45}} = \frac{7}{9}$ bulunur.

SIRA SİZDE 2.

ÇÖZÜM (Ağaç Şeması)

Roman: R
Şiir: Ç



$$\frac{\text{Eda ile birlikte bütün arkadaşlarının roman okuduğu durum sayısı}}{\text{Eda'nın roman okuduğu tüm durum sayısı}} = \frac{1}{8}$$

SIRA SİZDE 3.

ÇÖZÜM

a) Ahmet'in görevi başarıyla tamamlama olayı A ile Elif'in görevi başarıyla tamamlama olayı B ile gösterilir ve bu olaylar bağımsızdır.

İki olayın aynı anda olma olasılığı

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{2}{7} \cdot \frac{3}{8} = \frac{3}{28}$ olarak bulunur.

b) Ahmet'in görevi başarıyla tamamlama olasılığı $\frac{2}{7}$ ise tamamlayamama olasılığı $1-\frac{2}{7}=\frac{5}{7}$ 'dir.

Elif'in görevi başarıyla tamamlama olasılığı $\frac{3}{8}$ ise tamamlayamama olasılığı $1-\frac{3}{8}=\frac{5}{8}$ 'dir.

$$\frac{2}{7}\cdot\frac{5}{8}+\frac{5}{7}\cdot\frac{3}{8}=\frac{25}{56}$$

- $\frac{2}{7}$: Ahmet'in görevi başarıyla tamamlama olasılığı
- $\frac{5}{8}$: Elif'in görevi tamamlayamama olasılığı
- $\frac{5}{7}$: Ahmet'in görevi tamamlayamama olasılığı
- $\frac{3}{8}$: Elif'in görevi başarıyla tamamlama olasılığı

c) Öğrencilerden sadece birinin ödül alma olayı B, Elif' in ödül alma olayı A olsun. Öğrencilerden sadece birinin ödül aldığı bilindiğine göre ödül alan kişinin Elif olma olasılığı P(A | B) ile gösterilir.

$$P(A \mid B) = \frac{\text{Sadece bir öğrencinin ödül aldığı durumlarda ödül alan kişinin Elif olma olasılığı}}{\text{Sadece bir öğrencinin ödül alma olasılığı}} = \frac{\frac{5}{7}\cdot\frac{3}{8}}{\frac{2}{7}\cdot\frac{5}{8}+\frac{5}{7}\cdot\frac{3}{8}} = \frac{3}{5}$$

olarak bulunur.

DEĞERLENDİRİYORUM

Amaç: Bu bölümde öğrendiklerinizi gözden geçirmenizi, kendi öğrenme sürecinizi değerlendirmenizi ve eksiklerinizi fark etmenizi amaçlıyoruz.

Soruları dikkatle yanıtlayınız. Cevaplarınızı geri bildirimlerle karşılaştırarak eksik gördüğünüz noktaları tekrar ediniz.

SORULAR

1. Bir e-ticaret sitesinin müşteri hizmetleri departmanına bir günde gelen 400 çağrı incelenmiştir. Bu çağrılar, müşterinin "Ürün Sorunu" ya da "Teslimat Sorunu" ile ilgisine ve çağrıyı yapan kişinin "Yeni Müşteri" ya da "Mevcut Müşteri" oluşuna göre sınıflandırılmıştır. Elde edilen veriler aşağıdaki gibidir.

- Toplam çağrı sayısı: 400
- Yeni müşterilerden gelen toplam çağrı sayısı: 150
- Ürün sorunu ile ilgili toplam çağrı sayısı: 180

Ayrıca yeni müşterilerden gelen çağrıların 70 tanesinin "Ürün Sorunu" ile ilgili olduğu bilindiğine göre aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a) Verileri kullanarak, satırlarda müşteri türünün (Yeni/Mevcut), sütunlarda ise sorun türünün (Ürün /Teslimat) yer aldığı iki yönlü tabloyu oluşturunuz.

b) Rastgele seçilen bir çağrının mevcut müşteriye ait olduğu bilindiğine göre bu çağrının "Teslimat Sorunu" ile ilgili olma olasılığını bulunuz.

c) Rastgele seçilen bir çağrının ürün sorunu ile ilgili olduğu bilindiğine göre bu çağrıyı yapan kişinin "Yeni Müşteri" olma olasılığını bulunuz.

2. Bir teknoloji firması, piyasaya yeni sürdüğü akıllı telefon modeli hakkında müşteri memnuniyetini araştırmak amacıyla 150 kişilik bir test grubu üzerinde anket yapmıştır. Anket sonuçları aşağıdaki tabloda gösterilmiştir.

	Çok Memnunum	Kararsızım	Memnun Değilim
Gençler (<30 yaş)	45	25	12
Yetişkinler (≥30 yaş)	30	20	18

Firma, ürünün memnuniyet oranını artırmak amacıyla bazı güncellemeler yapmış ve aynı gruba tekrar aynı anketi uygulamıştır. İkinci anket sonucunda

- İlk ankette memnun olmayan gençlerin yarısı "Çok Memnunum" kategorisine geçmiştir.
- İlk ankette kararsız olan yetişkinlerin %25'i "Çok Memnunum" kategorisine geçmiştir.
- Diğer tüm katılımcılar fikirlerini değiştirmemişlerdir.

Bu güncellemelerden sonra tüketici grubundan seçilen birinin ürün hakkında "Çok Memnunum" dediği bilindiğine göre bu kişinin bir genç olma olasılığının değerini bulunuz.

3. Bir okul kütüphanesinde, öğrencilerin okuma alışkanlıklarını anlamak için 200 öğrenci üzerinde bir anket yapılmıştır. Anket sonuçları aşağıdaki gibidir.

- 120'si "Fantastik (F)" türde kitapları sevmektedir.
- 80'i "Bilim Kurgu (B)" türde kitapları sevmektedir.
- Hem fantastik türde hem de bilim kurgu türünde kitapları seven öğrenci sayısı ise 50'dir.

Bu gruptan rastgele seçilen bir öğrencinin bilim kurgu türünde kitapları sevdiği bilindiğine göre bu öğrencinin fantastik türde kitapları sevme olasılığını bulunuz.

4.



Bir kutuda toplam 9 bilye bulunmaktadır. Bu bilyelerden 6'sı mavi ve 3'ü yeşildir. Kutudan çekilen bilye geri atılmamak koşuluyla, art arda iki bilye çekiliyor.

İlk çekilen bilyenin mavi olduğu bilindiğine göre ikinci bilyenin de mavi olma olasılığını bulunuz.

5. Bir basketbol antrenmanında, Ali'nin serbest atış çizgisinden yaptığı her atışı sayıya çevirme olasılığı $\frac{2}{5}$'tir. Ali antrenman sırasında arka arkaya 3 serbest atış yapmaktadır.

Buna göre

a) Ali'nin ilk iki atışı sayıya çevirip üçüncü atışı kaçırma olasılığını bulunuz.

b) Üç atıştan en az birinde sayıya ulaşma olasılığını bulunuz.

c) Ali'nin yalnızca bir atışta sayıya ulaştığı bilindiğine göre sayıya ikinci atışta da ulaşma olasılığını bulunuz.

GERİ BİLDİRİM

Bu geri bildirim sayesinde kendi cevabınızı kontrol edebilir, hatalarınızı düzelterek öğrenmenizi pekiştirebilirsiniz.

ÇÖZÜM 1.

a)

	Ürün Sorunu (Ü)	Teslimat Sorunu (T)	Toplam
Yeni Müşteri (Y)	70	80	150
Mevcut Müşteri (M)	110	140	250
Toplam	180	220	400

b) İstenen: $P(T \mid M) = \frac{140}{250} = \frac{14}{25}$ bulunur.

c) İstenen: $P(Y \mid Ü) = \frac{70}{180} = \frac{7}{18}$ bulunur.

ÇÖZÜM 2.

	Çok Memnunum	Kararsızım	Memnun Değilim	Toplam
Gençler (<30 yaş)	45	25	12	82
Yetişkinler (≥30 yaş)	30	20	18	68
Toplam	75	45	30	150

Tablonun Güncellenmesi (Değişimlerin Uygulanması)

Başlangıçta memnun olmayan genç sayısı 12 kişidir.

Geçen genç sayısı $12 \cdot \frac{1}{2} = 6$ kişidir.

Bu 6 kişi "Memnun Değilim " den "Çok Memnunum"a geçmiştir.

Gençler arasında "Çok Memnunum" diyen 45 + 6 = 51 kişidir.

Gençler arasında "Memnun Değilim" diyen 12 – 6 = 6 kişidir.

Kararsız olan yetişkinlerin %25'i "Çok Memnunum"a geçti.

Başlangıçta kararsız yetişkin sayısı 20 kişidir.

Geçen yetişkin sayısı $20 \cdot \frac{25}{100} = 5$ kişidir.

Bu 5 kişi "Kararsızım"dan "Çok Memnunum"a geçmiştir.

- Yetişkinler arasında "Çok Memnunum" diyen 30 + 5 = 35 kişidir.
- Yetişkinler arasında "Kararsızım" diyen 20 – 5 = 15 kişidir.

	Çok Memnunum	Kararsızım	Memnun Değilim	Toplam
Gençler (<30 yaş)	51	25	6	82
Yetişkinler (≥30 yaş)	35	15	18	68
Toplam	86	40	24	150

$P(\text{Genç} \mid \text{Çok Memnunum}) = \frac{51}{86}$ bulunur.

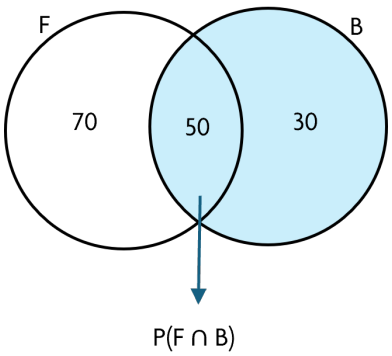
ÇÖZÜM 3.

Olayların tanımlanması:

F: Öğrencinin fantastik kitapları sevmesi.

B: Öğrencinin bilim kurgu kitaplarını sevmesi.

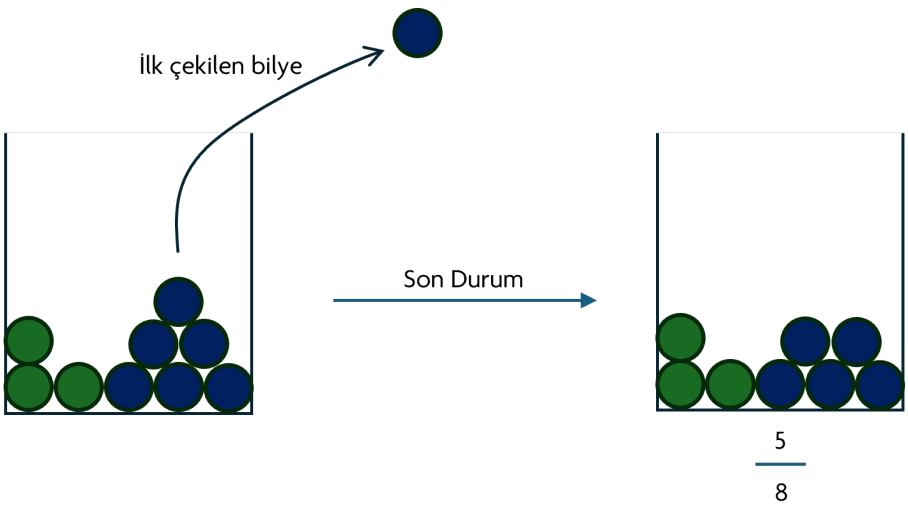
Soruda verilenler aşağıda belirlenen kümelere yerleştirilerek soru çözülür.



- Kütüphaneden rastgele seçilen bir öğrencinin bilim kurgu türünde kitapları sevdiği bilindiğine göre bilim kurgu kitaplarını sevenler kümesi yeni örnek uzaydır. Bu öğrencinin fantastik türde kitapları da sevme olasılığı ise koşul gerçekleştikten sonra ilgilendiğimiz olayı belirtir.

$$P(F \mid B) = \frac{P(F \cap B)}{P(B)} = \frac{\cancel{50}}{\cancel{100}} = \frac{5}{8} \text{ bulunur.}$$

ÇÖZÜM 4.



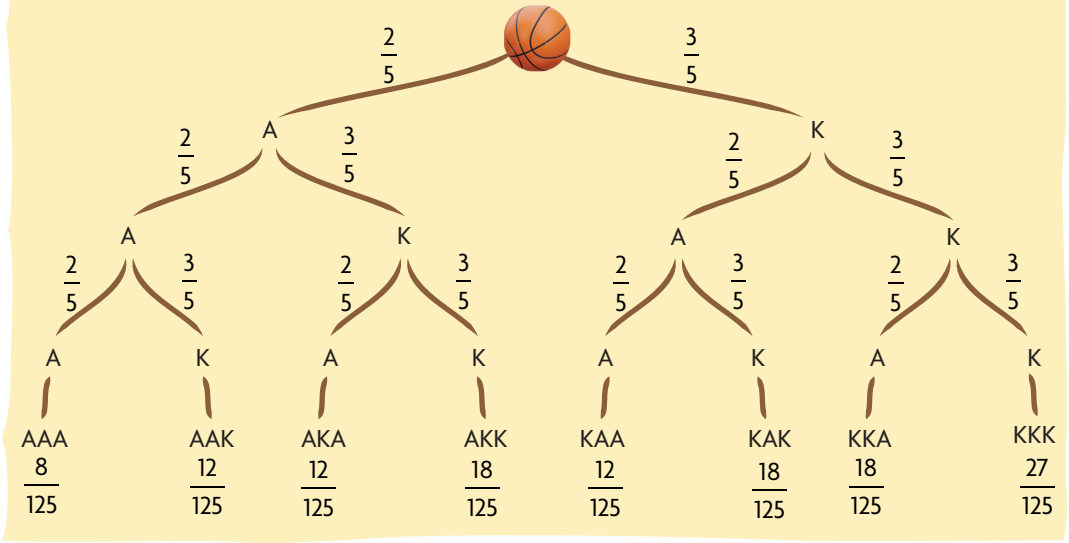
ÇÖZÜM 5.

Ali'nin serbest atış çizgisinden yaptığı her atışı sayıya çevirme olayı A olsun. O hâlde $P(A) = \frac{2}{5}$'tir.

Ali'nin serbest atış çizgisinden yaptığı atışı kaçırma olayı K olsun . O hâlde $P(K) = 1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$'tir.

Ali'nin art arda yaptığı atışlar birbirini etkilemeyeceğinden bağımsız olaylardır. Yapılan atışları ağaç şemasında gösterelim.

SERBEST ATIŞ AĞAÇ ŞEMASI



a) $P(A \cap A \cap K) = \frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}=\frac{12}{125}$ olarak bulunur.

b) Bu sorunun daha rahat çözülebilmesi için tersten düşünülür. En az biri sayıya çevrilmek isteniyorsa tüm durumlardan istenmeyen durum çıkarılır.

$1 - P(K \cap K \cap K) = 1-\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}=1-\frac{27}{125}=\frac{98}{125}$ olarak bulunur.

c) Sadece bir atışın sayı olma olayı L, sadece 2. atışın sayı olma olayı T olsun. Sadece bir atışın sayı olduğu bilindiğine göre bu atışın 2. atış olma olasılığı P(T|L) ile gösterilir.

$$P(T|L) = \frac{\text{Sadece bir atışı sayıya çevirdiği durumlarda bu atışın 2. atış olma olasılığı}}{\text{Sadece bir atışı sayıya çevirme olasılığı}}$$

$$P(T|L) = \frac{P(K\cap A\cap K)}{P(K\cap A\cap K)+P(A\cap K\cap K)+P(K\cap K\cap A)} = \frac{\frac{18}{125}}{\frac{18}{125}+\frac{18}{125}+\frac{18}{125}} = \frac{1}{3}$$ olarak bulunur.

ÖĞRENDİKLERİM

Amaç: Bu bölümde öğrendiklerinizi özetlemenizi, günlük hayatta ve farklı derslerde kullanabileceğiniz bilgileri belirlemenizi amaçlıyoruz.

Verilen bilgileri dikkatle okuyunuz. Temanın temel kavramlarını, önemli noktalarını ve bağlantılarını gözden geçirerek öğrenmenizi pekiştiriniz.

Koşullu olasılık ile ilgili verilen anahtar kavramları kendi cümlelerinizle yazınız.

Örnek Uzay

Olay

Koşullu Olasılık

Kesin Olay ve İmkânsız Olay

Kısıtlanmış Örnek Uzay

Daha fazlası için karekodu okutunuz.



KOŞULLU OLASILIK 2 (BAYES TEOREMİ)

BAŞLARKEN

Bu bölümde yer alan etkinlikler, bireysel öğrenme yolculuğunuzda size rehberlik etmek ve öğrenme sürecinizi desteklemek amacıyla hazırlanmıştır. Çalışmalarınızı yürütürken "Hazırlanıyorum", "İlişkilendiriyorum", "Uygulayarak Öğreniyorum", "Değerlendiriyorum", "Yansıtıcı Yazı" ve "Öğrendiklerim" etkinliklerini sırası ile takip etmeniz ve etkinliklerin sonunda yer alan geri bildirimleri inceleyerek bölümleri tamamlamanız beklenmektedir.

Bu çalışma kartında, bir olayın gerçekleşme olasılığının elde edilen yeni bilgiler doğrultusunda nasıl değiştiğini inceleyeceksiniz. Gerçek yaşamdan örnekler üzerinden koşullu olasılığa farklı bir bakış açısı sunan **Bayes teoremi**'ni;

- ağaç şeması,
- iki yönlü sıklık tablosu,
- alan modeli

gibi farklı temsiller yardımıyla yorumlayacaksınız.

Hiç düşündünüz mü? Meşhur **Monty Hall problemi**'nde size açılan boş bir kapı, geride kalan kapının ödülü saklama olasılığını gerçekten değiştirir mi? Ya da "kırılması imkânsız" denilen Enigma şifreleri, Alan Turing ve ekibi tarafından nasıl çözülebildi?



Çoğu zaman bir olayın olasılığının sabit olduğunu düşünürüz. Ancak 18. yüzyıl İngiliz matematikçisi **Thomas Bayes**, yeni bir bilgi elde edildiğinde bu olasılığın güncellenmesi gerektiğini gösterir. Bayes teoremi, bir olayın olasılığını o olayla ilişkili yeni bir veri elde edildiğinde yeniden hesaplamayı sağlayan matematiksel bir bağıntıdır.

Bu çalışma kartında, başlangıçtaki tahminlerinizi yeni kanıtlarla birleştirerek daha doğru sonuçlara nasıl ulaşıldığını adım adım keşfedeceksiniz.

HAZIRLANIYORUM

Amaç: Bu bölümde ön bilgilerinizi hatırlamanızı ve temaya hazırlıklı hâle gelmenizi amaçlıyoruz.

Aşağıda yer alan ifadeler, bu temada tamamlanması hedeflenen öğrenme çıktısını ele almadan önce sahip olmanız gereken bazı temel becerileri içermektedir.

- Lütfen her bir ifadeyi dikkatlice okuyunuz.
- Eğer ifadedeki bilgiye hâkim olduğunuzu düşünüyorsanız kutucuğu işaretleyiniz.
- Eğer temayı henüz tam olarak bilmediğinizi ya da hatırlamadığınızı düşünüyorsanız kutucuğu boş bırakınız.

Bu çalışmanın amacı notla değerlendirilmeyecek olup amacı temaya ne ölçüde hazır olduğunuzu belirlemektir.

ÖN ÖĞRENME KONTROL LİSTESİ	
1. Gerçek yaşam durumu içeren olaylarda farklı olasılık yaklaşımlarından (öznel, deneysel ve teorik) uygun olanı belirleyebilirim.	
2. Olayların olasılığını deneysel ve teorik olarak hesaplayabilir ve sonuçları yorumlayabilirim.	
3. Farklı olasılık yaklaşımları (deneysel ve teorik) arasında ilişkilendirmeler yapabilirim.	
4. Koşullu olasılık içeren olayları ayırt edebilirim.	
5. Koşullu olasılık formülünü tanırım.	
6. Koşullu olasılık formülünü kullanarak olasılık hesaplayabilirim.	

"Ön Öğrenme Kontrol Listesi"ni doldurduktan sonra aşağıda verilen "Kontrol Noktası" sorularını çözünüz ve cevaplarınızı kontrol ediniz.

KONTROL NOKTASI

SORU 1.

Aşağıda verilen olayların olasılık hesaplarının teorik mi yoksa deneysel mi olduğunu belirleyerek uygun kutucuğu işaretleyiniz.

	Deneysel	Teorik
• Hilesiz bir sayı küpü atıldığında, üst yüze 3 gelme olasılığı		
• Bir basketbolcunun geçen sezonki istatistiklerine bakılarak bir sonraki atışta isabet bulma olasılığı		
• Bir bölgeye ait son 50 yılın hava durumu verilerine bakılarak o bölgede yarın kar yağma olasılığı		
• İçinde 3 mavi, 2 kırmızı top bulunan bir torbadan rastgele çekilen bir topun mavi olma olasılığı		

SORU 2.

Aşağıda verilen olayların olasılık hesaplarının teorik mi deneysel mi olduğunu belirleyiniz. Olasılıkları hesaplayarak yandaki boşluklara yazınız.

• Hilesiz bir sayı küpü havaya atıldığında üst yüze çift sayı gelmesi olasılığı

• Aslı; bir topu çemberden geçirme oyununda 5 atış yapmış, bunlardan 3 tanesinde topu çemberden geçirmiştir. Aslı'nın bir sonraki atışta topu çemberden geçirme olasılığı

• İçerisinde haftanın günlerinin yazılı olduğu 7 adet kart bulunan bir torbadan rastgele çekilen bir kartta yazılı olan günün "p" harfi ile başlama olasılığı

• 5 farklı cevap seçeneğinden yalnız biri doğru olan bir çoktan seçmeli sorunun rastgele seçilen bir seçeneğinin sorunun doğru cevabı olma olasılığı

SORU 3.

1'den 10'a kadar numaralandırılmış kartlar bir torbaya atılıyor.

Torbadan rastgele çekilen bir kartın üzerindeki sayının çift olduğu bilindiğine göre bu sayının 4 ile tam bölünebilen bir sayı olma olasılığını bulunuz.

SORU 4.

Bir teknoloji şirketindeki yazılımcıların %70'i Python programlama dilini bilmektedir, %30'u ise hem Python programlama dilini bilen hem de yapay zekâ (AI) uzmanı olan yazılımcılardır.

Bu şirketten rastgele seçilen bir yazılımcının Python programlama dilini bildiği bilindiğine göre bu kişinin aynı zamanda yapay zekâ uzmanı olma olasılığını bulunuz.

SORU 5.

Bir okuldaki öğrencilerin 120 tanesi hem robotik kodlama kulübüne hem de bilim tarihi kulübüne üyedir. Okuldan rastgele seçilen bir öğrencinin robotik kodlama kulübüne üye olduğu bilindiğine göre aynı zamanda bilim tarihi kulübü üyesi olma olasılığı %80'dir.

Buna göre bu okulda robotik kodlama kulübüne üye olan toplam öğrenci sayısını bulunuz.

GERİ BİLDİRİM

Bu geri bildirim sayesinde kendi cevabınızı kontrol edebilir, hatalarınızı düzelterek öğrenmenizi pekiştirebilirsiniz.

ÇÖZÜM 1.

	Deneysel	Teorik
• Hilesiz bir sayı küpü atıldığında sayı küpünün üst yüzüne 3 gelmesi olasılığı	☐	✓
• Bir basketbolcunun geçen sezonki istatistiklerine bakılarak bir sonraki atışının isabetli olma olasılığı	✓	☐
• Bir bölgeye ait son 50 yılın hava durumu verilerine bakılarak o bölgede yarın kar yağma olasılığı	✓	☐
• İçinde 3 mavi, 2 kırmızı top bulunan bir torbadan rastgele çekilen bir topun mavi olma olasılığı	☐	✓

Bir olayın gerçekleşme olasılığının yapılan deneylerin sonuçlarına (gerçekleşen verilere) dayalı olarak hesaplanmasına **deneysel olasılık** denir.

Bir olayın gerçekleşme olasılığının deney yapılmadan matematiksel kurallar ile hesaplanmasına **teorik olasılık** denir.

Deneysel olasılık,

$$\frac{\textbf{İstenen olayın gerçekleşme sayısı}}{\textbf{Toplam deneme sayısı}}$$

şeklinde hesaplanır.

Teorik olasılık,

$$\frac{\textbf{Olaya ait çıktıların sayısı}}{\textbf{Olası tüm çıktıların sayısı}}$$

şeklinde hesaplanır.

ÇÖZÜM 2.

- Olay, öncesinde yapılan deneylere bağlı olarak hesaplanmayacağı için teorik olasılık örneğidir. Burada tüm olası çıktıların kümesi {1, 2, 3, 4, 5, 6} olup bu kümenin eleman sayısı 6'dır. Olaya ait çıktıların kümesi ise {2, 4, 6} olup bu kümenin eleman sayısı 3'tür. Dolayısıyla bu olayın gerçekleşme olasılığı $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$'dir.
- Olay, öncesinde yapılan deneylere bağlı olarak hesaplanacağından deneysel olasılık örneğidir. Burada toplam deneme sayısı 5 ve istenen olayın gerçekleşme sayısı 3'tür. Dolayısıyla bu olayın gerçekleşme olasılığı $\frac{3}{5}$'tir.
- Olay, öncesinde yapılan deneylere bağlı olarak hesaplanmayacağı için teorik olasılık örneğidir. Burada tüm olası çıktıların kümesi {Pazartesi, Salı, Çarşamba, Perşembe, Cuma, Cumartesi, Pazar} olmak üzere bu kümenin eleman sayısı 7'dir. Olaya ait çıktıların kümesi ise {Pazartesi, Perşembe, Pazar} olup bu kümenin eleman sayısı 3'tür. Dolayısıyla bu olayın gerçekleşme olasılığı $\frac{3}{7}$'dir.
- Olay, öncesinde yapılan deneylere bağlı olarak hesaplanmayacağı için teorik olasılık örneğidir. Burada tüm olası çıktıların sayısı 5'tir. Olaya ait çıktı sayısı ise yalnız bir tane doğru cevap olduğundan 1'dir. Dolayısıyla bu olayın gerçekleşme olasılığı $\frac{1}{5}$'tir.

HATIRLATMA

Aynı örnek uzaya ait iki olaydan birinin gerçekleşmesi diğer olaya bağlı ise bu olasılığa **koşullu olasılık** denir.

A ve B aynı örnek uzaya ait iki olay olsunlar. Bu olaylardan A olayının gerçekleşmesi, B olayına bağlıysa bu olasılığa A olayının B olayına bağlı koşullu olasılığı denir. A olayının B olayına bağlı koşullu olasılık değeri,

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{s(A \cap B)}{s(B)}$$

ile hesaplanır.

ÇÖZÜM 3.

Soruda bahsedilen iki olaydan (kartın çift sayı gelmesi ve 4 ile tam bölünebilen bir sayı gelmesi) birinin gerçekleşmesi diğerine bağlı olduğundan bu durum koşullu olasılık kapsamındadır.
Burada torbaya atılan 1'den 10'a kadar numaralandırılmış toplam 10 tane karttan rastgele çekilen bir kartın çift sayı olan bir kart olduğunun bilindiğinin söylenmesiyle tüm olası çıktıların kümesi {2, 4, 6, 8, 10} olmak üzere bu kümenin eleman sayısı 5'tir. Olaya ait çıktıların kümesi ise {4, 8} olup bu kümenin eleman sayısı 2'dir.
O hâlde bu olayın gerçekleşme olasılığı $\frac{2}{5}$ olur.

ÇÖZÜM 4.

Soruda bahsi geçen iki olaydan (Python programlama dili bilen birinin seçilmesi ve yapay zekâ uzmanı olan birinin seçilmesi) birinin gerçekleşmesi diğerine bağlı olduğundan bu bir koşullu olasılıktır.
Burada seçilen kişinin Python bildiği bilindiğine göre toplam durum sayısı %70 = 0,7 olarak bu kişinin aynı zamanda yapay zekâ uzmanı da olması durumu %30 = 0,3 olarak alınırsa istenen olayın gerçekleşme olasılığı $\frac{0,3}{0,7} = \frac{3}{7}$ olarak bulunur.

ÇÖZÜM 5.

A olayı: Seçilen bir öğrencinin robotik kodlama kulübüne üye olması
B olayı: Seçilen bir öğrencinin bilim tarihi kulübüne üye olması olsun.
P(B | A): B olayının A olayına bağlı koşullu olasılığı (Seçilen bir öğrencinin robotik kodlama kulübüne üye olduğu bilindiğine göre bilim tarihi kulübüne de üye olması olasılığı) olmak üzere
P(B | A) = %80 = 0,8
s(A∩B) = 120 olup bu değer, seçilen bir öğrencinin hem robotik kodlama kulübüne hem de bilim tarihi kulübüne üye olması durumlarının sayısını göstermektedir.

Koşullu olasılık gereği s(A) = robotik kodlama kulübüne üye olan toplam öğrenci sayısı,

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{s(A \cap B)}{s(A)}$$

$$0,8 = \frac{120}{s(A)}$$

$$\frac{8}{10} = \frac{120}{s(A)}$$

s(A) = 150 olarak bulunur.

İLİŞKİLENDİRİYORUM

Amaç: Bu bölümde ele alacağınız içerikleri; zihninizde var olan bilgileriniz, yaşantılarınız ve diğer derslerde, öğrendiklerinizle ilişkilendirmenizi bekliyoruz. Verilen metni / örneği okuyunuz. Ardından soruları yanıtlayınız. Cevaplarınızı kendi yaşamınızdan ya da çevrenizden örneklerle destekleyiniz

Bayes teoremi, yeni elde edilen bir bilginin daha önce sahip olunan bilgileri nasıl değiştirdiğini açıklayan bir yöntemdir. Bu teorem sayesinde bir olayın gerçekleşme olasılığı, başka bir olayın meydana gelmesine bağlı olarak güncellenir. Günlük yaşamda da karşılaşılan bazı durumlarda bir olayın gerçekleşmesi, başka bir olayın meydana gelip gelmemesine bağlıdır. Özellikle sağlık alanında kullanılan testler, bu tür durumlara önemli bir örnek oluşturur. Bir test sonucu elde edildiğinde bu sonucun gerçekte ne anlama geldiğini değerlendirmek için yalnızca testin doğruluk oranına değil eldeki mevcut bilgilere ve verilere de bakmak gerekir.

Örneğin toplumda görülme sıklığı bilinen bir hastalık için yapılan bir test, hasta bireylerin büyük bir kısmında doğru sonuç verebilir. Ancak aynı test, hasta olmayan bireylerin bir bölümünde de hatalı sonuç üretebilir. Bu durumda testin sonucu, tek başına kesin bir yargıya varmak için yeterli değildir. Mevcut veriler birlikte değerlendirilmelidir.

Aşağıdaki örneği inceleyiniz. Siz de buna benzer günlük yaşam durumlarıyla karşılaşıyor musunuz? Örnekler veriniz.

ÖRNEK

Türkiye'de bireylerde böbrek taşı görülme sıklığı %15'tir. Böbrekte taş olduğunu teşhis etmek için idrar tahlilinde lökosit değerinin pozitif olup olmadığına bakılır. Bunun için yapılan idrar tahlili hasta bireylerde %80 oranında pozitif sonuç veriyor. Hasta olmayan bireylerde de %11 oranında pozitif sonuç vermektedir.

a) Bu durumda testi pozitif çıkmış olan bir bireyin böbreklerinde kesinlikle taş olduğu söylenebilir mi? Neden?

Testi pozitif çıkmış bir bireyin kesinlikle hasta olduğu söylenemez. Çünkü toplumun büyük çoğunluğu (%85) sağlıklıdır. Sağlıklı insan sayısı çok fazla olduğu için onlardaki küçük bir hata oranı gibi görünen %11'lik hata payı, sayısal olarak çok fazla "Yalancı Pozitif" üretir. Dolayısıyla testi pozitif çıkanların içinde gerçekten hasta olanlar olduğu gibi tahlildeki hata payı yüzünden pozitif çıkan kalabalık bir sağlıklı grup da vardır.

b) Testi pozitif çıkan bu kişinin hasta olma ihtimali %80'den yüksek midir, düşük müdür? Gerekçeli cevabınızı aşağıda boş bırakılan yere yazınız.

Tahlil sonucu pozitif çıkan bir bireyin gerçekten hasta olma olasılığı aslında %80'den daha düşüktür. Hatta bu ihtimal yaklaşık %56'dır. İşte tam da bu kısımda sorulması gereken soru "Belirsizlik içeren gerçek yaşam durumları için mevcut bilgiye dayalı olasılık değerleri, edinilen yeni veriler ile değişiklik göstermeli midir?" sorusudur. Burada Bayes teoreminin mantığı devreye girmektedir. Bayes, testin başarı oranı hasta olan bireylerde %80 pozitif sonuç veriyor olarak yansıtılsa da devamında eklenen "Hasta olmayan bireylerin de %11'inde pozitif sonuç veriyor." bilgisiyle beraber elimizde bulunan bu veriyi güncellememiz gerektiğini söyler.

UYGULAYARAK ÖĞRENİYORUM

Amaç: Bu bölümde bilgilerinizi etkinlikler ve uygulamalarla pekiştirmenizi, öğrenmeyi daha kalıcı hâle getirmenizi amaçlıyoruz.

Etkinliklerde verilen adımları dikkatle uygulayınız. Çalışmanızı dikkatli ve düzenli bir şekilde yapınız.

BAYES TEOREMİ

ETKİNLİK 1. Gama-Gen Testi ve Gama Enzim Eksikliği





Bir biyoteknoloji şirketi, DNA üzerinde nadir görülen ancak önceden tespit edilirse basit bir diyetle kontrol altına alınabilen gama enzim eksikliği için "Gama-Gen Testi" adında bir tarama testi geliştirmiştir. Eldeki istatistiksel veriler şöyledir:

- Toplumda bu genetik duruma sahip olma sıklığı %5'tir.
- Hastalığı taşıyan bireylerde testin pozitif çıkma olasılığı %90'dır.
- Hastalığı taşımayan sağlıklı bireylerde testin pozitif çıkma olasılığı %10'dur.

"Gama-Gen Testi" 1 000 kişilik bir örneklem üzerinde uygulanmıştır.

Adım 1. Problemde yer alan verileri mevcut bilgilerinizi kullanarak ağaç şeması ile görselleştiriniz.

Ağaç Şeması

Adım 2. Bir bireyin gama enzim eksikliği teşhisi alma olasılığını bir önceki adımda oluşturduğunuz şemalardan yararlanarak hesaplayınız.

Adım 3. Test sonucu pozitif olan bir bireyin gerçekten gama enzim eksikliğine sahip olma olasılığını oluşturduğunuz şemalardan yararlanarak bulunuz.

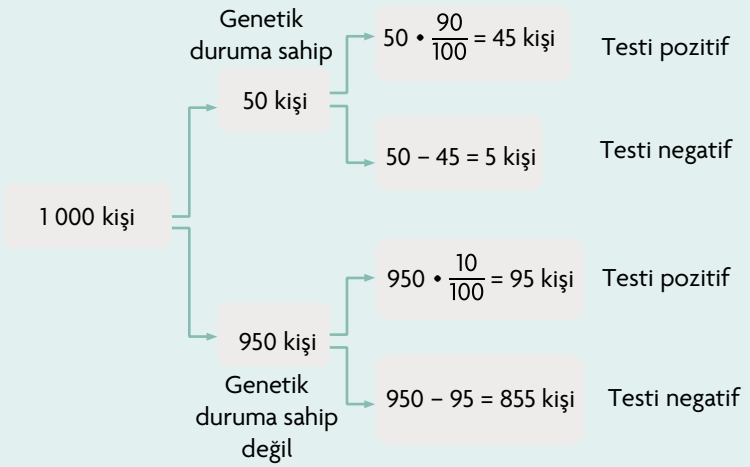
Adım 4. Yapılan çalışmalar sonucunda Bayes, testin hastalığı taşıyan bireylerde pozitif sonuç verme oranı %90'dan %96'ya yükselirse testin pozitif sonuç verdiği bir bireyin gerçekten hastalık taşıması olasılık değerinde nasıl bir değişim olur, açıklayınız.

ETKİNLİK 1. Gama-Gen Testi ve Gama Enzim Eksikliği

ÇÖZÜM

Adım 1.

Ağaç Şeması



Adım 2.

1 000 kişilik örneklemde test sonucu pozitif çıkan ve gama enzim eksikliği teşhisi alan birey sayısı 45 + 95 = 140 olup bu durumun gerçekleşme olasılığı

$$\frac{140}{1000} = \%\ 14\text{'tür.}$$

Adım 3.

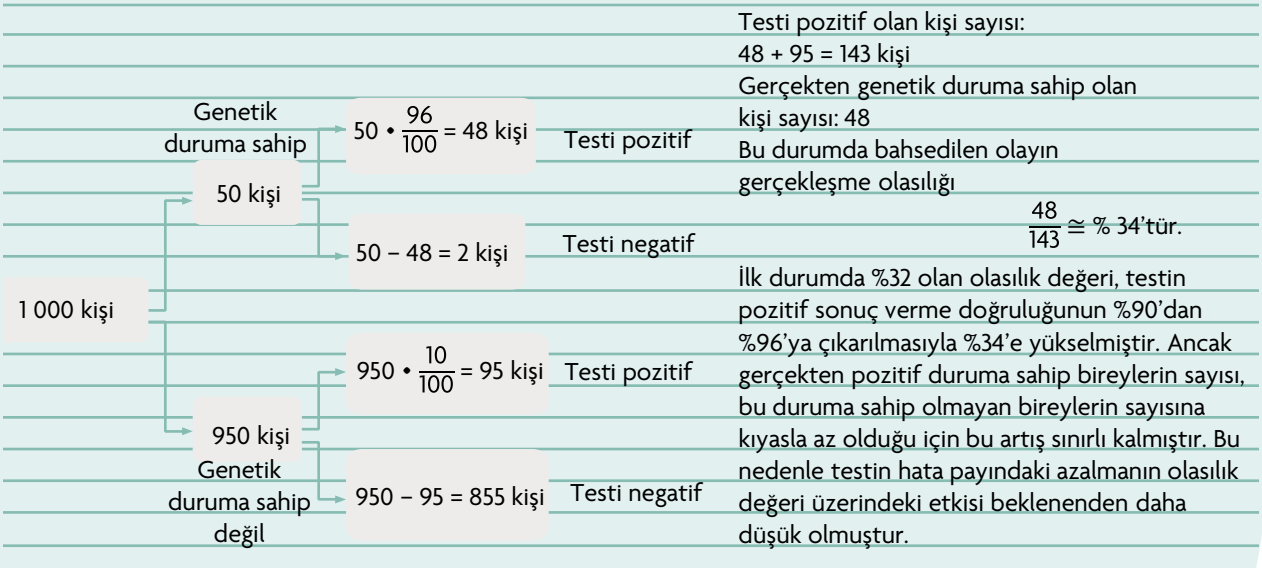
Gama enzim eksikliği test sonucu pozitif olan 140 kişiden gerçekten bu genetik duruma sahip olan kişi sayısı 45 olup bu durumun gerçekleşme olasılığı

$$\frac{45}{140} \cong \%\ 32\text{'dir.}$$

Adım 4.

Bu durumda ağaç şemasındaki değerler aşağıdaki gibi güncellenir.

Ağaç Şeması



Bayes Teoremi

ETKİNLİK 2. Yangın Alarmı Sistemi 👩‍🚒🔥🧯



Yangın çıkma olasılığının %10 olduğu 1 000 haneli bir sitede yangın alarmı sistemi bulunmaktadır. Bu sistemin yangın çıktığında çalışma olasılığı %98'dir. Yangın olmadığı hâlde alarmın çalma olasılığı %2'dir.

Adım 1. Problemde yer alan verileri mevcut bilgilerinizi kullanarak iki yönlü sıklık tablosu ile görselleştiriniz.

İki Yönlü Sıklık Tablosu

Adım 2. Sitede yangın alarmının çalma olasılığını bir önceki adımda oluşturduğunuz tablolardan yararlanarak hesaplayınız.

Adım 3. Sitede yangın alarmının çaldığı bir anda gerçekten yangın çıkmış olma olasılığını oluşturduğunuz tablolardan yararlanarak bulunuz.

ETKİNLİK 2. Yangın Alarmı Sistemi 👩‍🚒🔥🧯

ÇÖZÜM

Adım 1.

İki Yönlü Sıklık Tablosu

1 000 hanenin %10'unda yangın çıkması durumunda bu

$1000 \cdot \frac{10}{100} = 100$ yangından

$100 \cdot \frac{98}{100} = 98$'inde alarm çalar,

$100 - 98 = 2$'sinde alarm çalmaz.

Alarm \ Yangın	Var	Yok
Çaldı.	98	$900 \cdot \frac{2}{100} = 18$
Çalmadı.	2	$900 - 18 = 882$

Adım 2.

Oluşturulan iki yönlü sıklık tablosuna göre 1 000 haneden 100 tanesinde gerçekten yangın çıkmış, bunlardan 98 tanesinde alarm çalmış ancak 2 tanesinde alarm çalmamıştır. Geriye kalan 900 haneden ise 18 tanesinde yangın olmamasına rağmen alarm hatalı olarak çalmıştır. Böylece 1 000 haneden toplamda $98 + 18 = 116$ tanesinde alarm çalmıştır. O hâlde yangın alarmının çalma olasılığı $\frac{116}{1000} \cong$ %12'dir.

Adım 3.

Yangın alarmının çaldığı durumlar $98 + 18 = 116$ tanedir. Bu 116 durumdan 98 tanesinde gerçekten yangın çıkmıştır. O hâlde alarm çaldığında gerçekten yangın çıkmış olma olasılığı $\frac{98}{116} \cong$ %84'tür.

ETKİNLİK 3. VAR Sistemi (Video Yardımcı Hakem)



Bir futbol maçında ofsayt kararlarının belirlenmesinde "Yarı Otomatik Ofsayt" sistemi kullanılmaktadır.

İncelenen pozisyonların gerçekte ofsayt olma olasılığı %30'dur. Sistem, gerçekten ofsayt olan pozisyonlarda %99 olasılıkla "ofsayt" uyarısı vermektedir. Sistem, ofsayt olmayan pozisyonlarda ise kamera açısı yanılmasıyla %5 olasılıkla hatalı ofsayt uyarısı vermektedir.

Adım 1.

Problemde yer alan verileri mevcut bilgilerinizi kullanarak alan modeli ile görselleştiriniz.

Alan Modeli

Adım 2.

Sistemin ofsayt uyarısı verme olasılığını bir önceki adımda oluşturduğunuz modelden yararlanarak hesaplayınız.

Adım 3.

Hakemin saatine ofsayt uyarısı geldiğinde pozisyonun gerçekten ofsayt olma olasılığını oluşturduğunuz modellerden yararlanarak bulunuz.

ETKİNLİK 3. VAR Sistemi (Video Yardımcı Hakem)

ÇÖZÜM

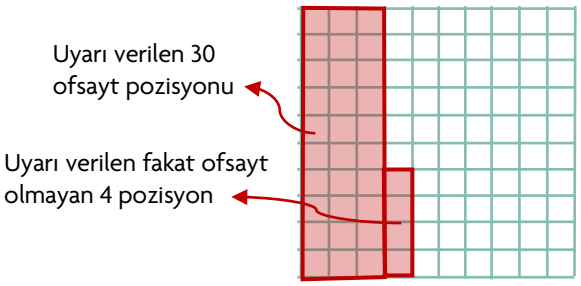
Adım 1.

100 pozisyonun %30'u ofsayt ise

$100 \cdot \frac{30}{100} = 30$ pozisyondan

$30 \cdot \frac{99}{100} = 29{,}7 \cong 30$ tanesinde sistem ofsayt uyarısı verir.

Kalan 70 pozisyonun $70 \cdot \frac{5}{100} = 3{,}5 \cong 4$ tanesinde sistem hatalı ofsayt uyarısı verir.



Adım 2.

Sistem 100 pozisyondan 30 + 4 = 34 tanesinde ofsayt uyarısı vermektedir. Dolayısıyla sistemin ofsayt uyarısı verme olasılığı

$\frac{34}{100} = \%34$'tür.

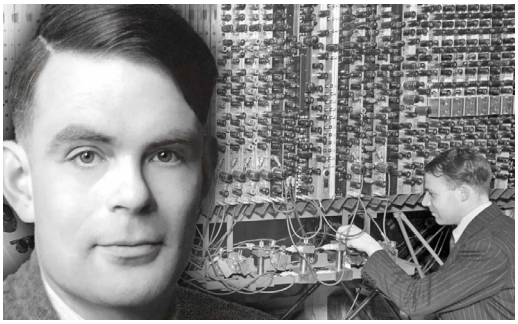
Adım 3.

Sistemin ofsayt uyarısı verdiği 34 pozisyondan 30 tanesi gerçekten ofsayt olduğundan hakemin saatine gelen uyarının gerçekten ofsayt olma olasılığı

$\frac{30}{34} \cong \%88$'dir.

BUNLARI BİLİYOR MUYDUNUZ?

Savaşın Seyrini Değiştiren Deha: Alan Turing



Bir matematikçi, bir savaşın gidişatını nasıl etkileyebilir? Nazilerin Enigma makinesi her gün şifre değiştiriyordu. Milyarlarca kombinasyon vardı ve deneme-yanılma ile çözmek imkânsızdı. Alan Turing, şifreyi kırmak için "Banburismus" adını verdiği bir yöntem geliştirdi. Bu aslında Bayes teoremi mantığıydı. Hiçbir harfi rastgele tahmin etmiyorlardı. Ele geçen her şifreli mesaj bir kanıttı. Almancada "E" harfinin sık kullanılması gibi dil bilimsel veriler önsel bilgiydi. Turing'in makineleri; bir harfin "A" olma ihtimalini test ediyor, eğer olasılık artarsa bu bilgiyi bir sonraki harfi tahmin etmek için kullanıyordu. Bu yöntem, şifrelerin kırılma süresini yıllardan saatlere indirdi ve savaşın 2 yıl erken bitmesini sağlayarak tahminen 14 milyon insanın hayatını kurtardı.

Okyanusta İğne Aramak



2009 yılında Air France'in 447 sefer sayılı uçağı Atlantik Okyanusu üzerinde kayboldu. Kara kutuların bulunması gerekiyordu ancak okyanus çok büyük, derin ve akıntılıydı. 2 yıl boyunca klasik yöntemlerle yapılan aramalar sonuçsuz kaldı. Milyonlarca dolar harcandı, uçak bulunamadı. 2011'de ekip strateji değiştirdi ve Bayes üzerine çalışan istatistikçileri çağırdı. Okyanusu ızgaralara böldüler. Bir bölge arandığında ve orada hiçbir şey bulunamadığında (Bu bir veridir.), Bayes formülü o bölgenin olasılığını düşürürken aranmamış diğer bölgelerin olasılığını matematiksel olarak artırdı. Bayes modelinin "Yüksek ihtimalle burada." dediği ama daha önce kimsenin bakmadığı yere daldılar ve enkazı sadece 1 hafta içinde buldular.

3 Kapı, 2 Keçi ve 1 Araba: Monty Hall Efsanesi



Amerika'da yıllarca yayımlanan "Let's Make a Deal" (Hadi Anlaşalım!) adlı yarışma programının sunucusu Monty Hall, yarışmacılara 3 kapı sunardı. Kapılardan birinin arkasında son model bir araba, diğer ikisinin arkasında ise birer keçi vardı. 1990 yılında dünyanın en yüksek IQ'suna sahip insanı olarak Guinness Rekorlar Kitabı'na giren Marilyn vos Savant, bir dergi köşesinde bu soruyu cevapladı: "Seçiminizi değiştirin! Eğer kapıyı değiştirirseniz kazanma şansınız %33'ten %66'ya çıkar." Bu cevap üzerine dergiye 10 000'den fazla mektup yağdı. Bunların yaklaşık 1 000 tanesi üniversite hocalarından ve matematik profesörlerinden geliyordu. Çoğu; Marilyn'i sert bir dille eleştiriyor, "Olasılık değişmez, şansın %50-%50'dir, matematiği bilmiyorsun!" diyordu. Bilgisayar simülasyonları yapıldı ve sonuç şok ediciydi: Marilyn haklıydı! Sezgileri binlerce profesörü yanıltmıştı. Bu olay, olasılığın ne kadar şaşırtıcı olabileceğinin en büyük kanıtı oldu.

ÖRNEK

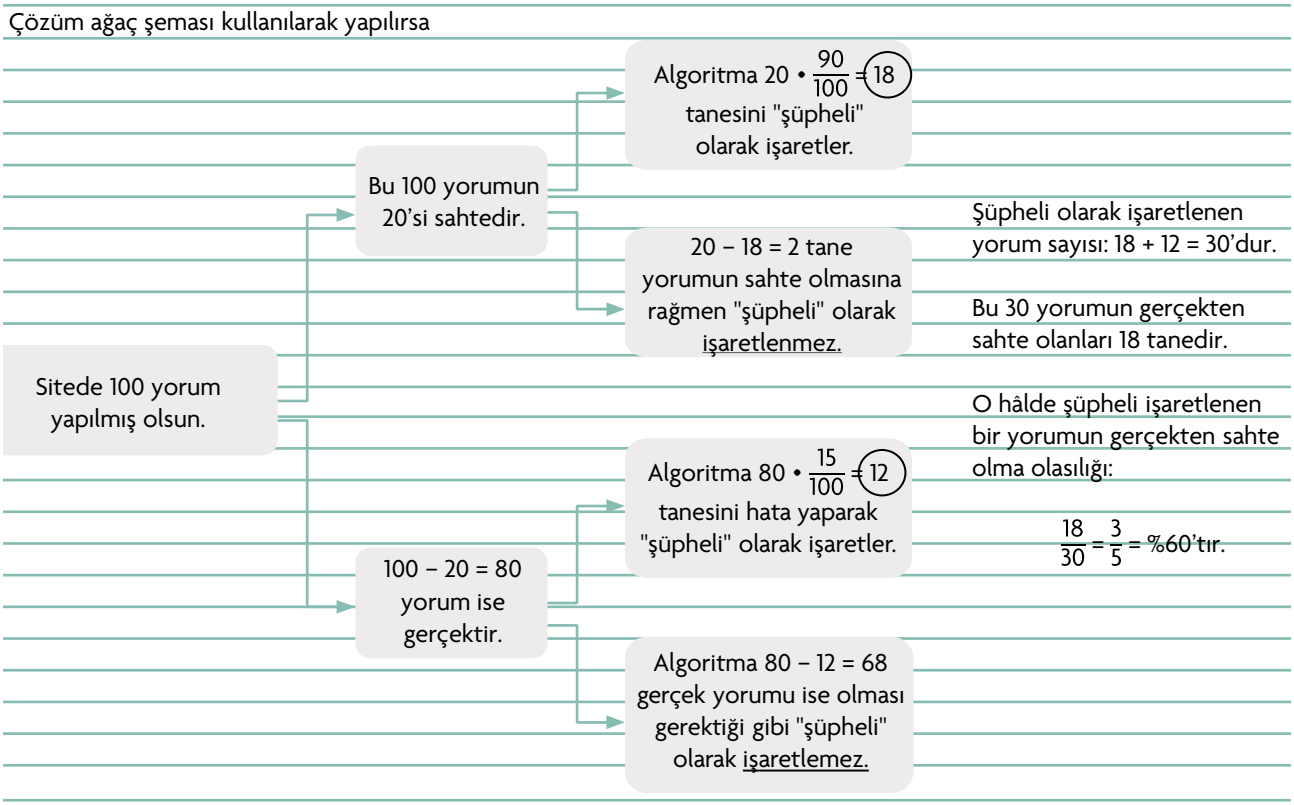
Bir online alışveriş sitesinde, bir ürünün altına yapılan yorumların gerçek kullanıcılar mı yoksa satışı artırmak için yazılmış "bot" (yazılım, robot, sahte) hesaplar mı olduğunu tespit eden bir algoritma çalışmaktadır.

- Sitede sahte (bot) yorum görülme sıklığı %20'dir.
- Algoritma, sahte bir yorumu yakalayıp "şüpheli" olarak işaretleme konusunda %90 başarılıdır.
- Algoritma, gerçek kullanıcı yorumunu "şüpheli" olarak işaretleme konusunda ise %15 hata payına sahiptir.

Buna göre algoritmanın "şüpheli" olarak işaretlediği bir yorumun gerçekten sahte (bot) yorum olma olasılığını bulunuz?

ÇÖZÜM

Çözüm ağaç şeması kullanılarak yapılırsa



ÖRNEK

Bir havalimanından geçen yolcuların sadece %0,01'inin valizinde yasaklı madde bulunduğu bilinmektedir. Havalimanında bulunan bir tarama cihazı yasaklı maddeyi %99 oranında tespit etmektedir. Ancak cihaz yasaklı madde taşımayan bir yolcunun valizinde yasaklı madde alarmı verme konusunda %1 hata payına sahiptir.

Buna göre güvenlik kapısında tarama cihazının alarmının çaldığı bir durumda valiz sahibinin gerçekten yasaklı madde taşıyor olma olasılığını bulunuz.

ÇÖZÜM

Çözüm iki yönlü sıklık tablosu yardımıyla görselleştirilerek yapılsın.

Havalimanından geçen 1 000 000 kişinin olduğu varsayılsın. Bu 1 000 000 insanın %0,01'inin başka bir deyişle $1\,000\,000 \cdot \frac{0{,}01}{100} = 100$ tanesinin valizinde yasaklı madde vardır. Tarama cihazı bu 100 kişinin %99'unda başka bir deyişle $100 \cdot \frac{99}{100} = 99$'unda alarm çalarak bu kişileri tespit edecektir. Ancak cihazın yasaklı madde taşımayan $1\,000\,000 - 100 = 999\,900$ kişide alarm çalma olasılığı da %1'dir.

Böylece $999\,900 \cdot \frac{1}{100} = 9\,999$ kişinin masum olmasına rağmen valizleri cihazdan geçerken alarm çalacaktır. Geriye kalan $999\,900 - 9\,999 = 989\,901$ masum kişinin valizi geçerken cihaz alarm çalmayacaktır. Bu verilere göre

	Yasaklı Madde Mevcut	Yasaklı Madde Yok
Alarm çaldı.	99	9 999
Alarm çalmadı.	1	989 901

Tablodan görüldüğü üzere alarm toplamda 99 + 9 999 = 10 098 defa çalacak ancak bunlardan yalnızca 99 tanesi gerçekten yasaklı madde mevcut olan bir valiz olacaktır. Bu durumda alarmın çaldığı bir durumda gerçekten valizde yasaklı madde olma olasılığı

$$\frac{99}{10\,098} \cong 0{,}01 \text{ dolayısıyla } \%1\text{'dir.}$$

Burada tarama cihazının alarmının %99 başarıyla çalışıyor olmasının yanında hata payının %1 gibi düşük görünen bir oran olması verisi ile birlikte aslında alarmın çaldığı 10 098 defadan yalnızca 99 tanesinde doğru olduğunu yani aslında %1 başarı oranına sahip olduğunu görülmüştür. Bu da çok küçük görünen hata paylarının aslında ne denli büyük etkilere ve yanılsamalara sebep olabileceğini göstermektedir.

ÖRNEK

Bir çocuk alerji kliniğinde deri testi (cilt testi) yöntemiyle alerji tespiti yapılmaktadır.

- Toplumda fıstık alerjisi görülme sıklığı %2'dir.
- Test, alerjisi olan bir çocukta %95 oranında doğru sonuç vermektedir.
- Test, alerjisi olmayan bir çocukta cildin hassasiyeti gibi nedenlerle hata yaparak %10 oranında pozitif sonuç vermektedir.

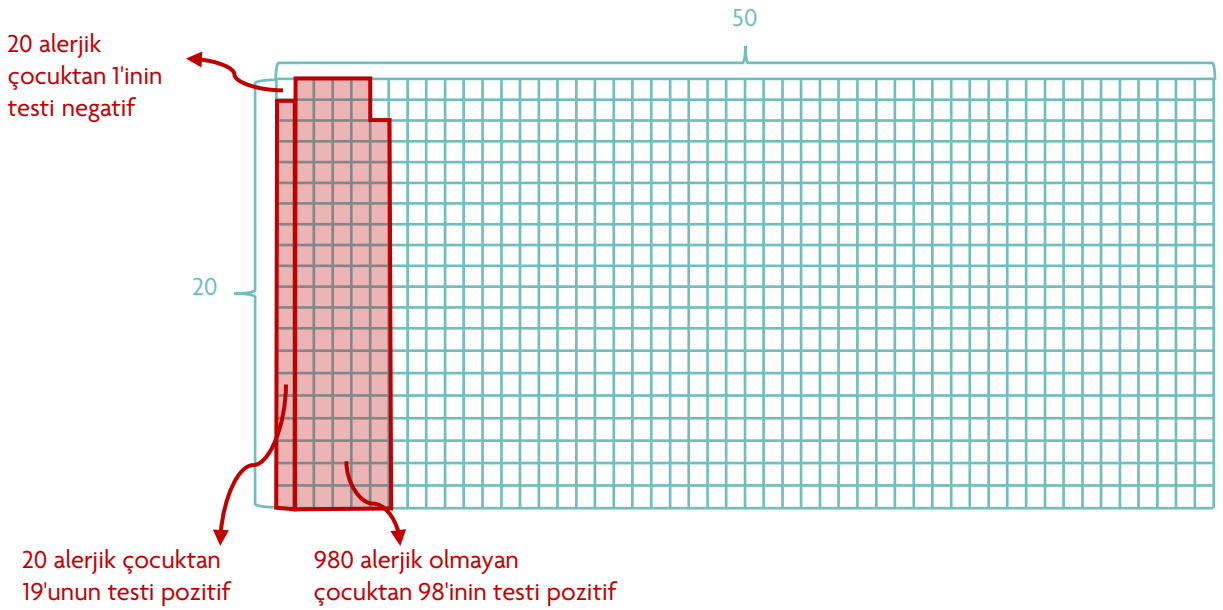
Buna göre testin pozitif sonuç verdiği bir çocukta gerçekten fıstık alerjisi olma olasılığını bulunuz.

ÇÖZÜM

Çözüm alan modeli yardımıyla görselleştirilerek yapılsın.

Test yapılan çocuk sayısı 1 000 olsun. Bu 1 000 çocuğun %2'sinde başka bir deyişle $1\,000 \cdot \frac{2}{100} = 20$'sinde fıstık alerjisi görülmesi beklenmektedir. Test bu 20 alerji sahibi çocuğun %95'inde başka bir deyişle $20 \cdot \frac{95}{100} = 19$'unda pozitif sonuç vermektedir, kalan 1 çocuğun alerjik olmasına rağmen sonuç negatiftir.

Geriye kalan $1\,000 - 20 = 980$ çocuk alerjik olmamalarına rağmen, bu çocukların %10'unda başka bir deyişle $980 \cdot \frac{10}{100} = 98$ tanesinde de pozitif sonuç verecektir. Kalan $980 - 98 = 882$ çocuğun testi ise olması gerektiği gibi negatif çıkacaktır. Bu veriler 20x50 birimkarelik bir dikdörtgen alan modeli üzerinde görselleştirildiğinde



Alan modelinde de görüldüğü üzere 1 000 çocuğa yapılan testte 19 + 98 = 117 çocuğun testi pozitif çıkmış ancak bunlardan yalnızca 19 tanesi gerçekten alerjiktir. O hâlde test sonucu pozitif olan bir çocuğun gerçekten alerjik olma olasılığı $\frac{19}{117} \cong$ %16'dır.

SIRA SİZDE 1

Kaan, ağustos ayında bir gün arkadaşlarıyla piknik yapmayı planlamaktadır.

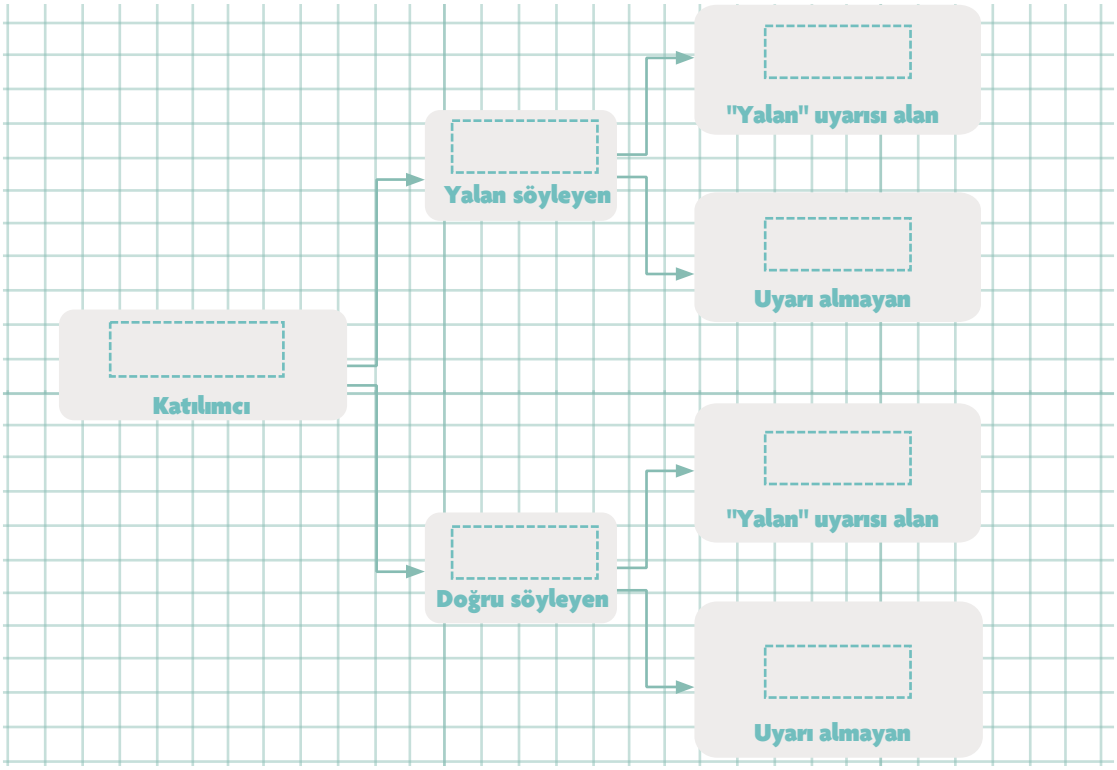
- Kaan'ın bulunduğu şehirde ağustos ayında yağmur yağma olasılığı geçmiş verilere göre %10'dur.
- Meteoroloji uyarı sistemi yağmur yağacak günleri %90 olasılıkla doğru tahmin etmektedir.
- Sistem, yağmur yağmayacak günlerde de atmosferik basınç yanılgısıyla %20 olasılıkla havanın yağmurlu olduğu uyarısını vermektedir.

Kaan'ın telefonundaki meteoroloji uyarı sistemi piknik yapılacağı günü yağmurlu gösterdiğine göre o günde yağmur yağma olasılığını bulunuz.

SIRA SİZDE 2.

Bir suç soruşturmasında kullanılması için şüpheliler üzerinde yalan makinesi testi uygulanacaktır. Bu test öncesinde 1 000 kişilik bir deney yapılmıştır. Deneye katılanların %10'u gerçekten yalan söylemektedir. Makine, yalan söyleyen kişiyi %80 olasılıkla doğru tahmin etmektedir. Ancak makine; doğru söyleyen kişilerde heyecan, stres gibi nedenlerle %15 olasılıkla hata yaparak "Yalan" uyarısı vermektedir.

Buna göre aşağıdaki ağaç şemasını uygun biçimde doldurunuz ve soruları yanıtlayınız.



a) Makinenin "yalan" uyarısı verdiği birinin gerçekten yalan söylüyor olma olasılığı kaçtır? Bulduğunuz oran ile soruda verilen makinenin "yalan" söyleyen birini tespit etme yüzdesini karşılaştırarak sonuçları yorumlayınız.

b) Makinenin uyarı vermediği birinin gerçekten yalan söylüyor olma olasılığı kaçtır? Bulduğunuz oran ile soruda verilen makinenin hata payı arasında belirgin bir fark var mı, varsa bu farkın nedeni hakkındaki fikirlerinizi yazınız.

SIRA SİZDE 3.

Bir otomobil fabrikasında üretilen fren balatalarının üretim hatası taşıyıp taşımadığını denetleyen otomatik bir sensör bulunmaktadır.

- Fabrikada üretilen tüm balataların %2'si hatalıdır.
- Sensör, hatalı bir balatayı %95 oranında doğru tespit ederek "Reddedildi." uyarısı vermektedir.
- Sensör, sağlam bir balatayla ilgili ise %1 oranında hata yaparak "Reddedildi." uyarısı vermektedir.

Buna göre aşağıdaki ikili sıklık tablosunu uygun biçimde doldurunuz ve soruları yanıtlayınız.

Balata / Reddedildi Uyarısı	Hatalı	Sağlam
Verildi.		
Verilmedi.		

a) Sensörün "Reddedildi." uyarısı verdiği bir balatanın sağlam bir balata olma olasılığı kaçtır?

b) Sensörün uyarı vermediği bir balatanın hatalı bir balata olma olasılığı kaçtır?

ETKİNLİK 4. Monty Hall Problemi



Bir yarışma programında üç özdeş kapı ve kapıların birinin arkasında bir araba ve diğer ikisinin arkasında ise birer keçi bulunmaktadır. Yarışmanın sunucusu hangi kapıların arkasında keçi olduğunu bilmektedir.

- Yarışmacıdan bir kapı seçmesi istenir.

- Ardından sunucu yarışmacının seçmediği iki kapıdan arkasında keçi olduğunu bildiği bir kapıyı açarak bu kapıyı ihtimaller arasından çıkartır ve yarışmacıya "Başlangıçta seçtiğiniz kapıda kalmak mı, yoksa kapı seçiminizi değiştirmek mi istersiniz?" diye sorar.

Bu durumda yarışmacının başlangıçta seçtiği kapıda kalması veya kapısını değiştirmesi kazanma olasılığını etkiler mi? Aşağıdaki adımlarda sorulan soruları cevaplayıp, bulduğunuz sonuçlardan yola çıkarak bu konudaki düşüncenizi yazınız.

Adım 1. İlk seçimde yarışmacının arabanın olduğu kapıyı seçme olasılığını bulunuz.

Adım 2. Arabanın 1. kapının arkasında olduğu varsayımına göre aşağıdaki sorulara uygun cevapları işaretleyiniz.

	Kazanır	Kaybeder
Yarışmacı 1. kapıyı seçer ve sunucu kalan iki kapıdan herhangi birini açarak keçiyi gösterir. Yarışmacı kapısını değiştirirse	☐	☐
Yarışmacı 2. kapıyı seçer ve sunucu 3. kapıyı açarak keçiyi gösterir. Yarışmacı kapısını değiştirirse	☐	☐
Yarışmacı 3. kapıyı seçer ve sunucu 2. kapıyı açarak keçiyi gösterir. Yarışmacı kapısını değiştirirse	☐	☐

Adım 3. Sunucunun verdiği bu ekstra bilgiyle birlikte yarışmacının kapı seçimini değiştirmesi durumunda araba kazanma olasılığını Adım 2'de elde ettiğiniz sonuçlardan da yararlanarak hesaplayınız. Bulduğunuz sonucu ilk durumda hesapladığınız olasılık değeri ile karşılaştırarak fikirlerinizi yazınız.

ETKİNLİK 4. Monty Hall Problemi 🐐🚘🚪

ÇÖZÜM

Adım 1.

Yarışmacının ilk başta 3 kapıdan 1'inde bulunan arabayı bulma olasılığı $\frac{1}{3} \cong$ %33'tür.

Adım 2.

	Kazanır	Kaybeder
Yarışmacı 1. kapıyı seçer ve sunucu kalan iki kapıdan herhangi birini açarak keçiyi gösterir. Yarışmacı kapısını değiştirirse	☐	✓
Yarışmacı 2. kapıyı seçer ve sunucu 3. kapıyı açarak keçiyi gösterir. Yarışmacı kapısını değiştirirse	✓	☐
Yarışmacı 3. kapıyı seçer ve sunucu 2. kapıyı açarak keçiyi gösterir. Yarışmacı kapısını değiştirirse	✓	☐

Adım 3.

Adım 2'de elde edilen sonuca göre yarışmacının kapısını değiştirmesi durumunda kazanma olasılığı $\frac{1}{3} \cong$ %33'ten $\frac{2}{3} \cong$ %67'ye yükselmiştir. Bu durum, olasılık sonuçlarının elde edilen yeni verilerle güncellenmesi gerektiğini açıkça göstermektedir.

ETKİNLİK 5. Hile Koruma Sistemi 💻🕹️✉️



Popüler bir çevrim içi oyunda 100 kişilik bir turnuva düzenlenmiştir.

- Oyuncuların %10'u hile yazılımı kullanmaktadır.
- Oyunun güvenlik sistemi yaptığı taramada hile yazılımı kullananları %100 oranında yakalamakta ve yasaklama (ban) mesajı atmaktadır.
- Güvenlik sistemi hile yapmayan oyuncuların ise internet bağlantı problemleri nedeniyle %20 oranında hile yazılımı kullandığını kabul ederek bu oyunculara da yasaklama (ban) mesajı atmaktadır.

Bu durumda güvenlik sisteminin başarı oranı hakkında ne söylenebilir? Aşağıdaki adımlarda sorulan soruları cevaplayıp, bulduğunuz sonuçlardan yola çıkarak düşüncenizi yazınız.

Adım 1. İki yönlü sıklık tablosundaki boşlukları hesaplayarak doldurunuz.

Hile Yazılımı / Yasaklama Mesajı	Kullanan Oyuncu Sayısı	Kullanmayan Oyuncu Sayısı
Gönderildi		
Gönderilmedi		

Adım 2. Turnuvaya katılan bir oyuncunun ekranına "yasaklama" mesajı geldiğinde bu oyuncunun gerçekten hile yazılımı kullanan bir oyuncu olma olasılığı kaçtır? Bulduğunuz sonuçtan yola çıkarak güvenlik sisteminin hile yapan oyuncuları %100 yakalamasına rağmen yakaladığı bir oyuncunun hile yazılımı kullanmıyor olma ihtimali var mıdır, yorumlayınız.

ETKİNLİK 5. Hile Koruma Sistemi

ÇÖZÜM

Adım 1.

Hile Yazılımı / Yasaklama mesajı	Kullanan Oyuncu Sayısı	Kullanmayan Oyuncu Sayısı
Gönderildi	10	18
Gönderilmedi	0	72
	Hile kullanan toplam $100 \cdot \frac{10}{100} = 10$ kişi	Hile kullanmayan toplam $100 - 10 = 90$ kişi

$90 \cdot \frac{20}{100} = 18$

$90 - 18 = 72$

Adım 2.

Turnuvaya katılan kişilerden "yasaklama" mesajı alan toplam kişi sayısı 10 + 18 = 28 kişidir. Bunlardan hile yazılımı kullananların sayısı 10'dur. O hâlde "yasaklama" mesajı alan bir kişinin gerçekten hile kullanan bir kişi olma olasılığı $\frac{10}{28} \cong$ %36'dır.

Bu sonuçtan yola çıkarak güvenlik sisteminin %100 doğru çalıştığı söylenemez. Çünkü sistemin hile yapanların tamamında doğru tespit etme başarısı olsa da hile yapmayan oyuncular üzerindeki hata payı genel başarıyı etkilemekte ve bu veri hesaba katıldığında sistemin hile yaptığını tespit ettiğini düşündüğümüz bir oyuncunun aslında %100 olasılıkla değil %36 olasılıkla hile yaptığını söyleyebileceğimizi göstermektedir.

GERİ BİLDİRİM

Bu geri bildirim sayesinde kendi cevabınızı kontrol edebilir, hatalarınızı düzelterek öğrenmenizi pekiştirebilirsiniz.

SIRA SİZDE 1.

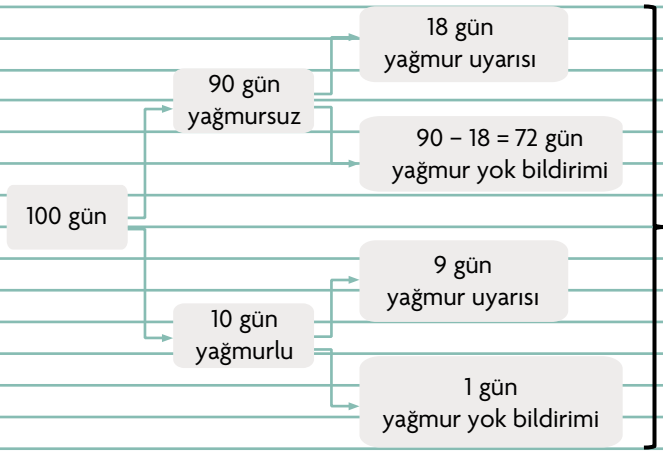
ÇÖZÜM

İncelenen 100 günün $100 \cdot \frac{10}{100} = 10$ tanesinde yağmur yağmıştır.

Meteoroloji bu 10 günün %90'ını dolayısıyla $10 \cdot \frac{90}{100} = 9$'unu doğru tahmin etmiştir.

Meteoroloji kalan $100 - 10 = 90$ yağmursuz günün %20'sinde dolayısıyla $90 \cdot \frac{20}{100} = 18$'inde hata yaparak yağmur uyarısı vermiştir.

Bu durum ağaç şeması ile aşağıdaki gibi gösterilir.

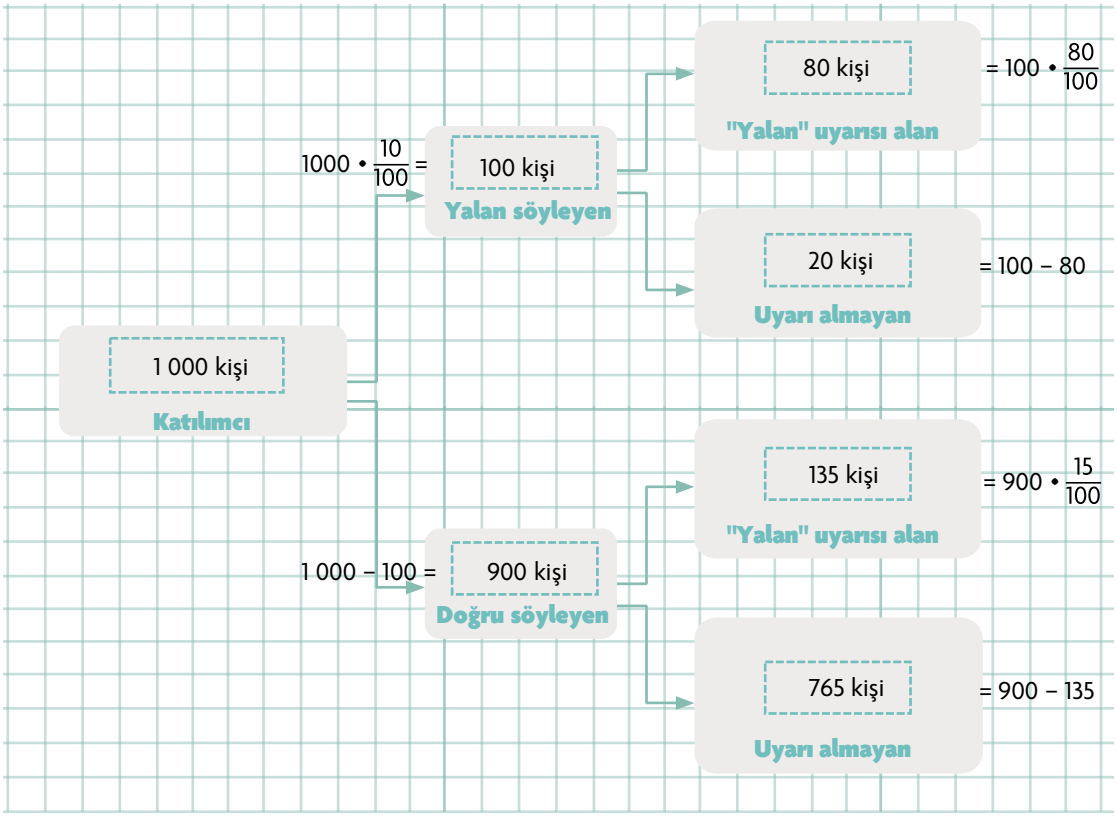


Şemadan yola çıkarak meteorolojinin yağmur uyarısı verdiği 18 + 9 = 27 günden gerçekten yağmurlu olan gün sayısı 9 olup meteorolojinin yağmurlu dediği ertesi günün gerçekten yağmurlu olma olasılığı da

$\frac{9}{27} = \frac{1}{3} \cong$ %33'tür.

SIRA SİZDE 2.

ÇÖZÜM



a)

Makine toplamda 80 + 135 = 215 kişide yalan uyarısı vermektedir. Bu 215 kişiden gerçekten yalan söyleyen 80 kişi olup makinenin yalan uyarısı verdiği bir kişinin gerçekten yalan söylüyor olma olasılığı

$\frac{80}{215} = \frac{16}{43} \cong$ %37'dir.

Makinenin yalan söyleyen birini tespit etme oranı %80 gibi yüksek bir oran olarak görünse de yalan söylemeyen insanlar üzerindeki hata payı nedeniyle bu oran, gerçekte %37 gibi düşük bir olasılıktır. Makinenin yalan söyleyen birini daha yüksek olasılıkla tespit edebilmesi için doğru söyleyenlerdeki hata payının en aza indirilmesi gerekmektedir.

b)

Makine toplamda 20 + 765 = 785 kişide yalan uyarısı vermemektedir. Bu 785 kişi arasında gerçekten yalan söyleyen 20 kişi olup makinenin yalan uyarısı vermediği bir kişinin gerçekte yalan söylüyor olma olasılığı

$\frac{20}{785} = \frac{4}{157} \cong$ %3'tür.

Makinenin yalan söylemeyen birine yalan uyarısı verme oranı %15 gibi görünse de yalan söyleyen insanların tespitinde %80 başarı oranına sahip olması nedeniyle resmin geneline baktığımızda bu olasılık gerçekte %3 gibi görünenden daha düşük bir orandır. Yine de bu hata payı, yalan söyleyenlerin tespitindeki başarıyı etkileyecek kadar büyüktür.

SIRA SİZDE 3.

ÇÖZÜM

Balata / Reddedildi Uyarısı	Hatalı	Sağlam
Verildi	19	20
Verilmedi	1	960

Fabrikada 1 000 adet balata üretildiği varsayılsın. Bu balataların $1\,000 \cdot \frac{2}{100} = 20$'si hatalı, $1\,000 - 20 = 980$'i sağlamdır. Sensör hatalı balataların $20 \cdot \frac{95}{100} = 19$'unu tespit eder. Sağlam balataların ise $980 \cdot \frac{1}{49} = 20$ tanesinde hata yaparak "Reddedildi" uyarısı verir.

a) Sensörün "Reddedildi" uyarısı verdiği balata sayısı toplamda 19 + 20 = 39'dur. Bu balatalardan sağlam olduğu hâlde uyarı verilen balata sayısı 20'dir. O hâlde bu olayın gerçekleşme olasılığı $\frac{20}{39} \cong \%51$'dir.

b) Sensörün "Reddedildi" uyarısı vermediği balata sayısı toplamda 1 + 960 = 961'dir. Bu balatalardan uyarı verilmediği hâlde hatalı olanların sayısı 1'dir. O hâlde bu olayın gerçekleşme olasılığı $\frac{1}{961} = \%0{,}1$'dir.

DEĞERLENDİRİYORUM

Amaç: Bu bölümde öğrendiklerinizi gözden geçirmenizi, kendi öğrenme sürecinizi değerlendirmenizi ve eksiklerinizi fark etmenizi amaçlıyoruz.

Soruları dikkatle yanıtlayınız. Cevaplarınızı geri bildirimlerle karşılaştırarak eksik gördüğünüz noktaları tekrar ediniz.

SORULAR

1. Bir fabrikada elmalar marketlere pazarlanmak üzere paketlenmektedir. Fabrikada elmaların çürük olup olmadığını ayırt etmeye yarayan optik (kameralı) sisteme sahip makineler bulunmaktadır.

- Fabrikaya gelen elmaların %10'u çürüktür.
- Makine, çürük elmaların $\frac{4}{5}$'ini doğru tespit ederek ayırmaktadır.
- Makine, sağlam elmaların da $\frac{2}{15}$'ini farklı sebeplerle çürük algılayarak ayırmaktadır.

Elmalardan sağlam olanlar onarlı paketlere ayrılmaktadır. Çürük olan elmalar ise yeterince büyük, tek bir kasa içerisine konulmaktadır.

Buna göre

a) Sağlam olarak belirlenen elmaların arasında çürük bir elmaya rastlanma olasılığını bulunuz.

b) Makinenin çürük olarak ayırdığı elmaların konulduğu kasadan rastgele seçilen bir elmanın sağlam bir elma olma olasılığını bulunuz.

c) Sağlam olarak belirlenen elmaların onarlı paketlerinde bir pakette 1'den fazla çürük elma olmadığı bilindiğine göre bu paketlerden rastgele seçilen birinin içinde çürük bir elma olma olasılığını bulunuz.

2. Borsada bir teknoloji şirketi olan A şirketinin hisselerinin değer kazanma olasılığı geçmiş verilere göre %20'dir. Ünlü bir borsa analistinin hisselerin kazanç sağlayacağına yönelik tavsiyelerinin doğru olma olasılığı %90'dır. Ancak analistin piyasa söylentileri gibi etkenlerle tavsiye tahminlerinde yanılma olasılığı ise %15'tir.

a) Ünlü analistin A şirketinin hissesi için "Al." tavsiyesi vardır.

Buna göre bu tavsiyeye uyarak yatırım yapan bir yatırımcının kazanma olasılığının %50'den fazla olup olmadığını işlem yapmadan sadece tahmin yürüterek aşağıda işaretleyiniz.

- Kazanma olasılığı %50'den azdır. ☐
- Kazanma olasılığı %50'den fazladır. ☐

b) Ünlü analistin hissesine "Al." tavsiyesi verdiği A şirketinin gerçekten kazandırma olasılığı kaçtır? Bulduğunuz sonucu önceki soruda yürütmüş olduğunuz tahmininiz ile karşılaştırınız.

c) Ünlü analistin çalıştığı şirkette tavsiye uzmanı olan bir fon yöneticisinin yatırım risklerini yönetmek için belirlediği yatırım protokolünde "Bir hisse senedine yatırım yapılması ancak ve ancak şirketimiz ile ortak çalışan uzmanın tavsiyesi dikkate alınarak hesaplanan hisse senedinin kazanma olasılığının %60'ın üzerinde olması şartıyla onaylanır." maddesi yer almaktadır.

Buna göre fon yöneticisi protokol kapsamında A şirketinin hissesine yatırım yapabilir mi, nedenini açıklayınız.

3. Aşağıda verilen Bayes teoremi ile ilgili ifadelerin yanına doğru ise D, yanlış ise Y yazınız.

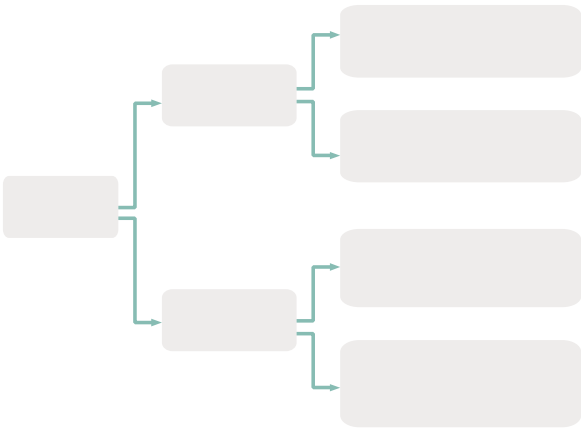
- Bir hastalığın tespitinde kullanılan bir testin duyarlılığının (hastalarda pozitif çıkma oranı) %100 olması, o testin hiç hata yapmadığı anlamına gelir. ☐
- Toplumda çok nadir görülen bir durum için elde edilen pozitif sonuç, sık görülen bir olaya göre daha az güvenilirdir. ☐
- Bir olayın normal şartlarda gerçekleşme olasılığı arttıkça o olayla ilgili alınan bir uyarı sinyalinin doğru olma olasılığı da artar. ☐
- Bir hastanın testinin pozitif çıkma olasılığı ile testi pozitif çıkan bir bireyin hasta olma olasılığı matematiksel olarak aynı anlama gelir. ☐
- Bir tahminin güvenirliğini hesaplamak için sadece testin doğruluk oranını bilmek yeterlidir, olayın görülme sıklığının bilinmesine gerek yoktur. ☐
- Bayes teoremi mantığına göre yeni veriler elde ettikçe başlangıçtaki fikirlerin güncellenmesi gerekir. ☐

4. Bir doğa koruma vakfı; engebeli bir vadide nesli tükenmekte olan, o bölgeye özgü mavi bir orkide türünü tespit etmek için yapay zekâ destekli bir İHA (İnsansız Hava Aracı) filosu kullanmaktadır. İHA'nın kodları, aranan mavi orkidenin niteliklerine uygun olarak yazılmıştır.

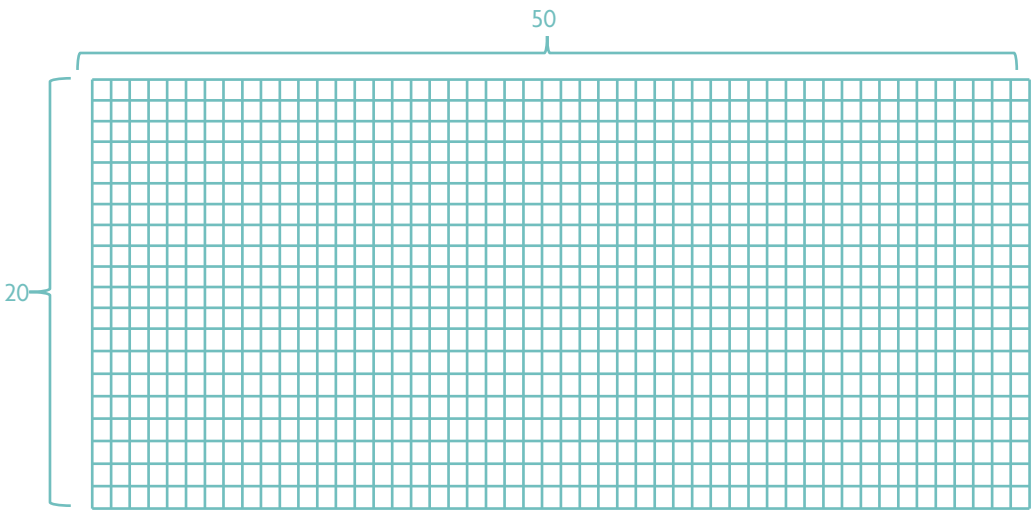
- Vadide mavi orkide görülme sıklığı %5'tir.
- İHA'nın mavi orkideyi tespit etme olasılığı %90'dır.
- İHA renk ve şekil benzerliği nedeniyle vadide bulunan dağ menekşeleri gibi bitkileri de %10 olasılıkla mavi orkideyle karıştırarak hatalı sinyal vermektedir.

Buna göre aşağıdaki soruları yanıtlayınız.

a) İHA'nın sinyal verdiği bir bitkinin gerçekten mavi orkide olma olasılığını aşağıda verilen ağaç şeması şablonundan faydalanarak hesaplayınız.



b) İHA'nın 1 000 tane çiçekte tarama yaptığı varsayılırsa bu çiçekler arasında sinyal vermediği bir çiçeğin mavi orkide olma olasılığını aşağıda verilen 20×50 birimkarelik dikdörtgen şeklindeki alan modelini kullanarak hesaplayınız.



GERİ BİLDİRİM

Bu geri bildirim sayesinde kendi cevabınızı kontrol edebilir, hatalarınızı düzelterek öğrenmenizi pekiştirebilirsiniz.

ÇÖZÜM 1.

a) 100 tane elma olduğu varsayılsın. Bu 100 elmanın $100 \cdot \frac{10}{100} = 10$ tanesi çürük, geriye kalan $100 - 10 = 90$ tanesi sağlam elmalardır.

Makine, 10 çürük elmanın $10 \cdot \frac{4}{5} = 8$ tanesini çürük olarak ayırır ancak kalan $10 - 8 = 2$ tanesini çürük olduğu hâlde sağlam grubuna alır.

Makine; sağlam olan 90 elmanın ise $90 \cdot \frac{2}{15} = 12$ tanesini çürük olarak ayırır, geriye kalan $90 - 12 = 78$ tane elmayı ise olması gerektiği gibi sağlam grubuna alır.

Bu durumda sağlam olarak belirlenen $2 + 78 = 80$ elmadan 2 tanesi çürük olacağından sağlam grubundan seçilen bir elmanın çürük olma olasılığı $\frac{2}{80} = \frac{1}{40}$ olarak bulunur.

b) Makinenin çürük olarak ayırdığı $8 + 12 = 20$ elmadan 12 tanesi sağlam olduğundan, çürük olarak ayrılan elmaların olduğu kasadan rastgele alınan bir elmanın sağlam olma olasılığı $\frac{12}{20} = \frac{3}{5}$ bulunur.

c) Sağlam olarak belirlenen elmaların onarlı paketleri için bir pakette 1'den fazla çürük elma olmadığı bilinmektedir. O hâlde makinenin sağlam olarak belirlediği 80 elma ile onarlı 8 adet paket elde edilir. 80 elmanın 2 tanesi çürüktür ve bu çürük elmalar aynı pakette olamazlar. Bu durumda 2 ayrı pakette birer çürük elma bulunacaktır. Yani 8 adet paketin 2 tanesinde çürük elma vardır. Dolayısıyla bu paketlerden rastgele seçilen birinin içinde çürük elma olma olasılığı $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$'tür.

ÇÖZÜM 2.

a) Öğrencinin tahminine bırakılmıştır.

b) Bahsi geçen şirketin hisseleri ile ilgili 100 günlük borsa verisinin incelendiği varsayılsın. Bu 100 günün %20'sinde diğer bir deyişle 20'sinde şirket yatırımcıya kazanç sağlamış, kalan 80 günde ise kazandırmamıştır. Analist bu 20 günün %90'ında dolayısıyla $20 \cdot \frac{90}{100} = 18$'inde doğru tahmin yapmıştır.

Şirketin kazandırmadığı 80 günün %15'inde başka bir deyişle $80 \cdot \frac{15}{100} = 12$'sinde analist yanılmıştır. Bu durum sıklık tablosu ile aşağıdaki gibi görselleştirilebilir.

	Analistin "Al." Tavsiyesinde Bulunduğu Gün Sayısı	Analistin "Al." Tavsiyesinde Bulunmadığı Gün Sayısı
A Şirketine Ait Hissenin Kazandırdığı Gün Sayısı	18	2
A Şirketine Ait Hissenin Kazandırmadığı Gün Sayısı	12	68

Analistin verdiği tavsiyeye uyarak A şirketine yatırım yapan bir yatırımcının gerçekten kazanç sağlama olasılığı, $18 + 12 = 30$ günün 18'inde kazanç sağlanacağından

$$\frac{18}{30} = \frac{3}{5}\text{'tir.}$$

c) Uzman tavsiyesi üzerine yapılan yatırımda kazanma olasılığı $\frac{3}{5}$ = %60 olduğundan ve protokolde verilen maddede bu olasılığın %60'ın üzerinde (istenen olasılık değeri > %60) olması şartı olduğundan A şirketinin hissesine yatırım yapılamaz.

ÇÖZÜM 3.

• Bir hastalığın tespitinde kullanılan bir testin duyarlılığının (hastalarda pozitif çıkma oranı) %100 olması, o testin hiç hata yapmadığı anlamına gelir. Bir test, hastalığa sahip bireylerde %100 doğru sonuç veriyor olsa da hasta olmayan bireylerde pozitif sonuç verme (hata yapma) oranı %0 olmadıkça %100 başarılı diyemeyiz.	Y
• Toplumda çok nadir görülen bir durum için elde edilen pozitif sonuç, sık görülen bir olaya göre daha az güvenilirdir.	D
• Bir olayın normal şartlarda gerçekleşme olasılığı arttıkça o olayla ilgili alınan bir uyarı sinyalinin gerçekten doğru olma olasılığı da artar.	D
• Bir hastanın testinin pozitif çıkma olasılığı ile testi pozitif çıkan bir bireyin hasta olma olasılığı matematiksel olarak aynı anlama gelir. Hasta bir bireyin testinin pozitif çıkma olasılığı testi pozitif çıkan kişi sayısının tüm hasta bireylerdeki oranı (P(Test +) | P(Hasta)) ile bulunurken testi pozitif çıkan bir bireyin hasta olma olasılığı ise hasta birey sayısının testi pozitif çıkan kişi sayısına oranı (P(Hasta) | P(Test +)) ile bulunur. Bu iki olasılık matematiksel olarak aynı anlama gelmez.	Y
• Bir tahminin güvenirliğini hesaplamak için sadece testin doğruluk oranını bilmek yeterlidir, olayın görülme sıklığının bilinmesine gerek yoktur. Bir tahminin güvenirliği yalnızca testin doğruluk oranına değil olayın toplumda ne sıklıkla görüldüğüne de bağlıdır. Olay çok nadir görülüyorsa test doğru olsa bile tahmin güvenilir olmayabilir. Bu nedenle Bayes teoreminde olayın görülme sıklığı mutlaka dikkate alınır.	Y
• Bayes teoremi mantığına göre yeni veriler elde edildikçe başlangıçtaki fikirlerin güncellenmesi gerekir.	D

ÇÖZÜM 4.

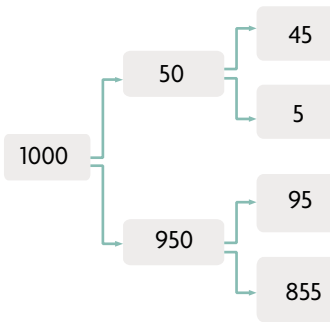
a) İHA'nın 1 000 tane çiçek taradığı varsayılsın.

Bu 1 000 tane çiçeğin %5'i başka bir deyişle 1 000 • $\frac{5}{100}$ = 50 tanesi mavi orkidedir.

İHA, bu 50 tane mavi orkidenin %90'ını diğer bir deyişle 50 • $\frac{90}{100}$ = 45 tanesini doğru tespit eder. Geriye kalan 50 – 45 = 5 tanesini ise mavi orkide olmasına rağmen gözden kaçırır.

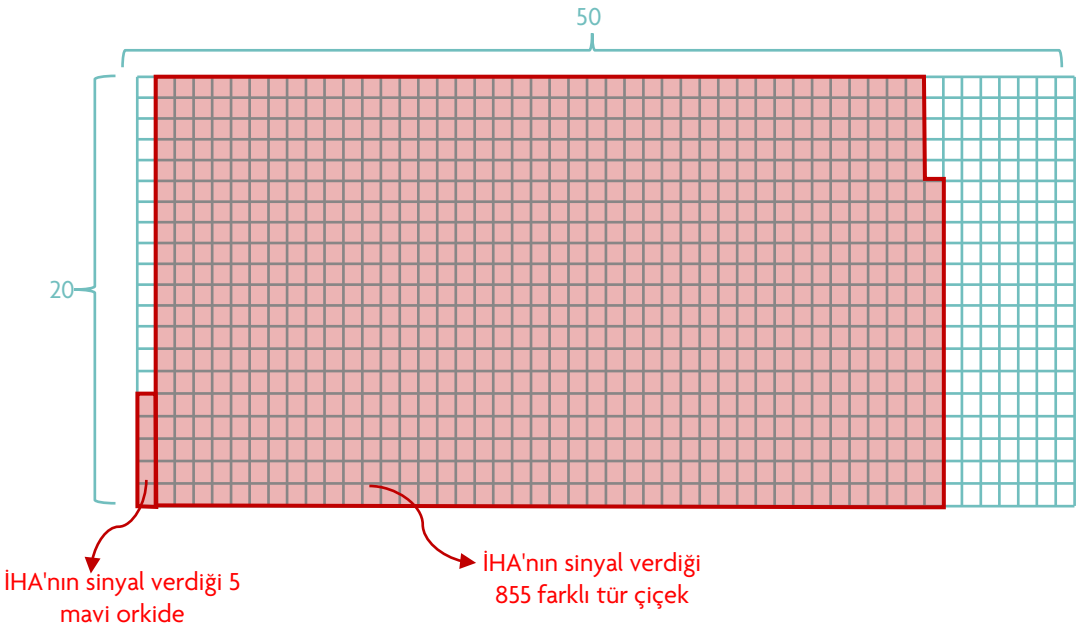
Mavi orkide olmayan 1 000 – 50 = 950 çiçeğin ise %10'unu yani 950 • $\frac{10}{100}$ = 95 tanesini hata yaparak mavi orkide olarak algılar ve sinyal gönderir. Geriye kalan 950 – 95 = 855 tane çiçekte ise olması gerektiği gibi sinyal göndermez.

Bu durumda İHA'nın sinyal verdiği 45 + 95 = 140 çiçekten 45 tanesi gerçekten mavi orkide olup, İHA'nın sinyal verdiği bir çiçeğin gerçekten mavi orkide olma olasılığı $\frac{45}{140} = \frac{9}{28}$ olarak bulunur.



b) İHA, 5 + 855 = 860 adet çiçekte sinyal göndermez fakat bu çiçeklerden 5 tanesi mavi orkidedir. Dolayısıyla İHA'nın sinyal göndermediği bir çiçeğin mavi orkide olma olasılığı $\frac{5}{860} = \frac{1}{172}$ 'dir.

Alan modeli ile gösterilirse



ÖĞRENDİKLERİM

Amaç: Bu bölümde öğrendiklerinizi özetlemenizi, günlük hayatta ve farklı derslerde kullanabileceğiniz bilgileri belirlemenizi amaçlıyoruz.

Verilen bilgileri dikkatle okuyunuz. Konunun temel kavramlarını, önemli noktalarını ve bağlantılarını gözden geçirerek öğrenmenizi pekiştiriniz. Boş bırakılan bölüme konu ile ilgili edindiğiniz bilgileri kendi cümlelerinizle ifade ediniz.

- İnsan zihni, belirsizlik içeren durumlarda yanılgıya düşmeye (paradokslara) eğilimlidir. Olasılık teorisi, öznel sezgilerin ötesine geçerek **rasyonel** ve **veriye dayalı** karar vermemizi sağlar.
- Olasılık sabit ve değişmez bir değer değildir. Bir olaya dair elde edilen her yeni veri veya kanıt (bir test sonucu, bir sensör uyarısı), o olayın gerçekleşme ihtimalini matematiksel olarak günceller.
- Nadir görülen olayların tespitinde kullanılan testin veya teknolojinin doğruluk oranı yüksek olsa bile **yalancı pozitif** (hatalı alarm) riski istatistiksel olarak yüksek olabilir.
- Bilimsel ölçümlerde ve teknolojik taramalarda mutlak kesinlik (%100) nadiren mümkündür. Her analiz, içinde belirli bir **hata payı** barındırır ve sonuçlar değerlendirilirken bu belirsizlik hesaba katılmalıdır.
- Bir olayın gerçekleşme olasılığı, o olayla ilişkili başka bir olayın gerçekleşmiş olduğu bilindiğinde değişir. Bu durum, olaylar arasındaki **bağımlılık** ilişkisini anlamamızı sağlar.

Bayes teoremi, 18. yüzyıl İngiliz matematikçisi Thomas Bayes'in adını verdiği koşullu olasılığı belirlemek için kullanılan matematiksel bir bağıntıdır. Teoremin temel mantığı bir olayın olasılığını, o olayla ilişkili yeni bir veri elde edilmesi durumunda güncellemektir. Bu teorem özellikle belirsizlik altında doğru kararlar vermek için kullanılır.

Finansta risk değerlendirmesini hesaplamak, tıbbi tarama testlerinin doğruluğunu analiz etmek, meteorolojiyle ilgili ileriye dönük tahminler yürütebilmek, bilinçli tüketime yönelik hatalı ürün oranlarını hesaplayabilmek gibi alanlarda bu teoremin gerekliliği sıklıkla hissedilir.

VERİDEN OLASILIĞA: Koşullu Olasılık ve Bayes Teoremine Yönelik Yansıtıcı Yazı

Amaç

Bu çalışma, olayların olasılıklarını koşullu olasılık kullanarak belirleme ve Bayes teoreminin uygulandığı gerçek yaşam problemlerini çözme sürecinize yönelik farkındalık oluşturmak amacıyla hazırlanmıştır.

Aşağıdaki soruları yanıtlarken kullandığınız yöntemi ve ulaştığınız sonuçları göz önünde bulundurunuz. Cevaplarınızı kısa ve açık cümlelerle yazınız.

1. Öğrendiğiniz bu temada dikkatinizi çeken veya önemli bulduğunuz noktaları yazınız.

2. Olayların olasılıklarını koşullu olasılık kullanarak nasıl belirlediğinizi ve farklı durumları nasıl karşılaştırdığınızı gözden geçiriniz. Bu süreçte size daha uygun gelen yaklaşımı belirtip bu yaklaşımı tercih etme nedeninizi kısaca açıklayınız.

3. Koşullu olasılık ve Bayes teoreminin kullanıldığı çalışmalarda elde ettiğiniz sonuçlardan nasıl yararlandığınızı, bu sonuçlara dayalı yorum ve çıkarımlarınızı hangi gerekçelere dayandırarak oluşturduğunuzu kısaca açıklayınız.

4. Koşullu olasılık ve Bayes teoremi ile edindiğiniz deneyimin gerçek yaşama veya matematiğin başka alanlarına nasıl yansıtılabileceğini örneklerle açıklayınız.

Daha fazlası için karekodu okutunuz.

MEBİ

OGM MATERYAL